FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Teoría de la Información

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

DOCENTES:

- Prof. Raúl Oscar Klenzi
- Prof. Manuel Oscar Ortega
- Prof. Fabrizio Amaya

ALUMNOS:

- Marinelli, Mauricio
- Garbi, Gabriel
- González, Martín

2025

PRÁCTICO 1 TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

1. Supón una imagen de resolución 2560 x 1440 píxeles, codificada en 30 bits por píxel. Calcula la cantidad de información que proporciona un cuadro de imagen. Luego, considera una imagen de 7680 x 4320 píxeles (resolución 8K) codificada en HDR con 12 bits por canal de color, ¿cuánta información se genera?

a) 2560 × 1440 px, 30 bpp

- Píxeles: 2560×1440 = 3686400 px
- Bits totales: 3686400 × 30 = 110592000 bits

b) 7680 × 4320 ,12 bits/canal (RGB → 12*3 = 36 bpp)

- Píxeles: 7680×4320 = 33177600 px
- Bits totales: 33177600 × 36 = 1194393600 bits

2. Un narrador utiliza 1000 palabras tomadas al azar de un vocabulario de 20.000 palabras. Calcula la información generada. Luego, compárala con la información contenida en una única imagen de resolución 640x480 píxeles codificada en 24 bits por píxel (color verdadero). Analiza cuál contiene más información y verifica si se cumple el dicho popular "una imagen vale más que mil palabras", incluso con baja resolución.

a) 1000 palabras de un vocabulario de 20,000

- Bits por palabra: $\log_2(20{,}000)$ = 14.2877 bits
- Bits totales: 1000 × 14.2877 = 14287.7 bits

b) Imagen 640 × 480 px a 24 bpp

- Píxeles: 640×480 = 307200 px
- Bits totales: 307200 × 24 = 7372800 bits

La imagen 640×480 contiene muchísima más información que las 1000 palabras al azar,si se cumple el dicho popular "una imagen vale más que mil palabras" incluso con baja resolución.

3. Calcula la información generada por un mensaje de 200 caracteres tomados al azar de un alfabeto de 32 símbolos. ¿Y por un mensaje de 200 caracteres con un alfabeto de 64 símbolos? Ahora repite el cálculo para un mensaje de 400 caracteres con alfabetos de 32 y 64 símbolos. Analiza cómo cambia la cantidad de información y verifica si duplicar el tamaño del alfabeto duplica la información total.

Recordatorio: bits por símbolo = $\log_2(M)$.

a) 200 caracteres

- $M = 32 \Rightarrow \log_2(32)=5 \rightarrow 200\times5 = 1000$ bits
- $M = 64 \Rightarrow \log_2(64)=6 \rightarrow 200\times6 = 1200$ bits

b) 400 caracteres

- $M = 32 \Rightarrow 400\times5 = 2000$ bits
- $M = 64 \Rightarrow 400\times6 = 2400$ bits

Conclusiones:

- Al duplicar el tamaño del alfabeto (de 32 a 64) no se "duplica" la información total; suma 1 bit por carácter
- La información crece linealmente con la longitud del mensaje y logarítmicamente con el tamaño del alfabeto.
- Así, para N caracteres, pasar de M=32 a M=64 añade N bits en total. Por ejemplo, con N=200 añade 200 bits (de 1000 → 1200); con N=400 añade 400 bits (de 2000 → 2400).

4. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \,.\, \log_b x$$

lo que se quiere probar

$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a} = log_a b * log_b x$$

Por definición:

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Aplicamos logaritmo en base b a ambos lados

$$a^y = x \Rightarrow log_b(a^y) = log_b x$$

Propiedades de logaritmos

$$log_b(a^y) = y\, log_b a$$

Por lo tanto

$$y * log_b a = log_b x$$

Aislamos y

$y = \frac{log_b x}{log_b a}$

Pero recordemos que y=$log_a x$ Entonces:

$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$

También podemos escribir
$\frac{1}{log_b a}$ = $log_a b$

Por lo tanto

$log_a x = log_a b * log_b x$

5. Una fuente F tiene 6 símbolos con probabilidades: p1=0.4, p2=0.2, p3=0.15, p4=0.1, p5=0.1, p6=0.05. Calcula la información individual y la entropía de la fuente.

- p1=0.4
  I(p1) = $log_2(\frac{1}{0.4})$ =1.322bits
- p2=0.2
  I(p2) = $log_2(\frac{1}{0.2})$ =2.322bits
- p3=0.15
  I(p3) = $log_2(\frac{1}{0.15})$ =2.736bits
- p4=0.1
  I(p4) = $log_2(\frac{1}{0.1})$ =3.322bits
- p5=0.1
  I(p5) = $log_2(\frac{1}{0.1})$ =3.322bits
- p6=0.05
  I(p5) = $log_2(\frac{1}{0.05})$ =4.322bits

Entropía de la fuente

$H = \Sigma pi * I(pi)$

H =(0.4)(1.322)+(0.2)(2.322)+(0.15)(2.737)+(0.1)(3.322)+(0.1)(3.322)+(0.05)(4.322) = 2.284bits

6. Justifica por qué una distribución uniforme maximiza la entropía. Compara un dado justo (6 caras, p=1/6) con un dado sesgado: p1=0.3, p2=0.25, p3=0.15, p4=0.15, p5=0.1, p6=0.05.

Dado justo (6 caras, pi=1/6 para i=1,2,3,4,5,6)

H_{justo} = $log_2(6)$ =2.5849 bits

Dado sesgado
- p1=0.3
  I(p1) = $log_2(\frac{1}{0.3})$ =1.737bits

- p2=0.25
  I(p2) = $log_2(\frac{1}{0.25})$ =2bits

- p3=0.15
  I(p3) = $log_2(\frac{1}{0.15})$ =2.737bits

- p4=0.15
  I(p4) = $log_2(\frac{1}{0.15})$ =2.737bits

- p5=0.1
  I(p5) = $log_2(\frac{1}{0.1})$ =3.322bits

- p6=0.05
  I(p5) = $log_2(\frac{1}{0.05})$ =4.322bits

$\sum P_i$ LOG $(1/P_i)$ = CANTIDAD DE INFORMACIÓN PROMEDIO = H = ENTROPÍA

$H_{sesgado}$=(0.3)(1.737)+(0.25)(2)+(0.15)(2.737)+(0.15)(2.737)+(0.1)(3.322)+(0.05)(4.322)= 2.391bits

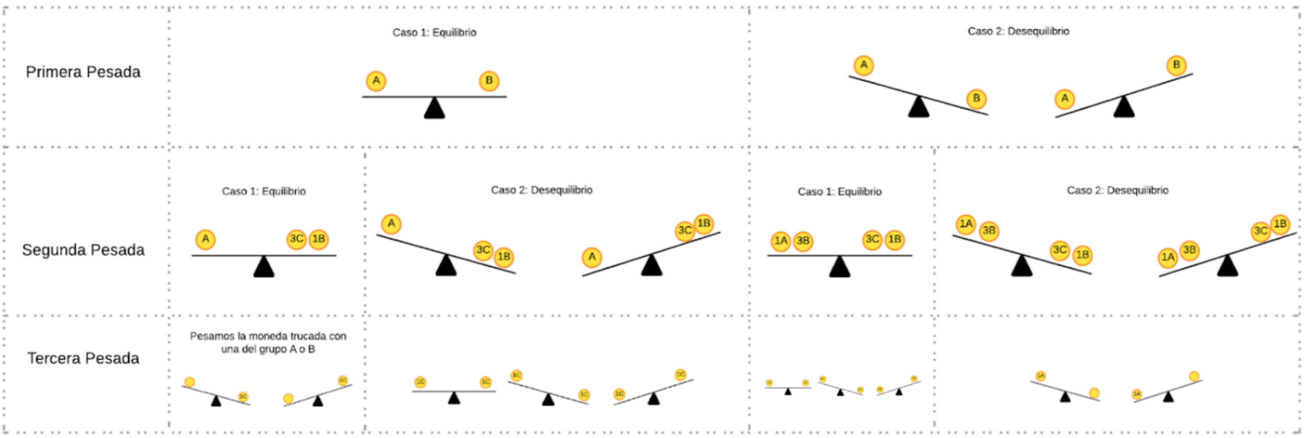
Por tanto, el dado justo tiene mayor entropía (incertidumbre promedio mayor) que el dado sesgado. El sesgo reduce la incertidumbre porque algunos resultados son más probables; observar el resultado aporta menos información que en el caso uniforme.
La diferencia numérica aquí es:
- 2.5850−2.391≈0.19 bits, es decir, el dado justo aporta 0.19 bits más por lanzamiento que el dado sesgado.

7. Sean 12 monedas una de las cuales tiene peso diferente, indicar cuántas pesadas son necesarias para encontrarla, especifique la metodología de peso

Como no sé si la moneda es más pesada o más liviana, deberemos calcular Log2(24). Eso es igual a 4,58 bits de información. Por lo que se necesitan como mínimo 3 pesadas para indicar si la moneda es más pesada o más liviana.

Para la resolución del problema dividiremos la cantidad de monedas en la cantidad de pesadas por lo que tendremos 3 grupos de 4 monedas.

Realizaremos **3 pesadas de 2 grupos de 4 monedas**, dejando un grupo afuera en cada una de ellas. Las 3 pesadas serán independientes de la pesada anterior, por lo que debemos resguardarlos resultados para poder sacar una conclusión final.
En la primera pesada pesamos el grupo A y B, donde pueden ocurrir dos cosas:
La balanza queda equilibrada, lo que implica que los grupos A y B no poseen la moneda truncada.
La balanza quede desequilibrada, lo que implica que alguno de los dos grupos A y B posee la moneda trucada.



8. Calcula la información de una letra al azar de un alfabeto de 27 símbolos (incluyendo ñ). Luego, de pares y ternas de letras.

Información de una letra, si la fuente emite letras con igual probabilidad, cada símbolo tiene probabilidad:

$$p = \frac{1}{27}$$

La cantidad de información individual es:

$$I(x) =- log_2(p) = - log_2(\frac{1}{27}) = log_2(27) = 4.755\ bits\ de\ información$$

Pares de letras, producto cartesiano del alfabeto consigo mismo.

$$|\Sigma^2| = 27^2 = 729\ símbolos\ posibles$$

Cada par tiene probabilidad

$p = \frac{1}{729}$

La cantidad de información es:

$I(xy) = log_2(729) = 9.510\ bits\ de\ información$

Ternas de letras:

$\left|\Sigma^3\right| = 27^3 = 19683\ símbolos\ posibles$

Cada terna tiene probabilidad

$p = \frac{1}{19683}$

La cantidad de información es:

$I(xyz) = log_2(19683) = 14.265\ bits\ de\ información$

(Suponiendo equiprobabilidad e independencia)

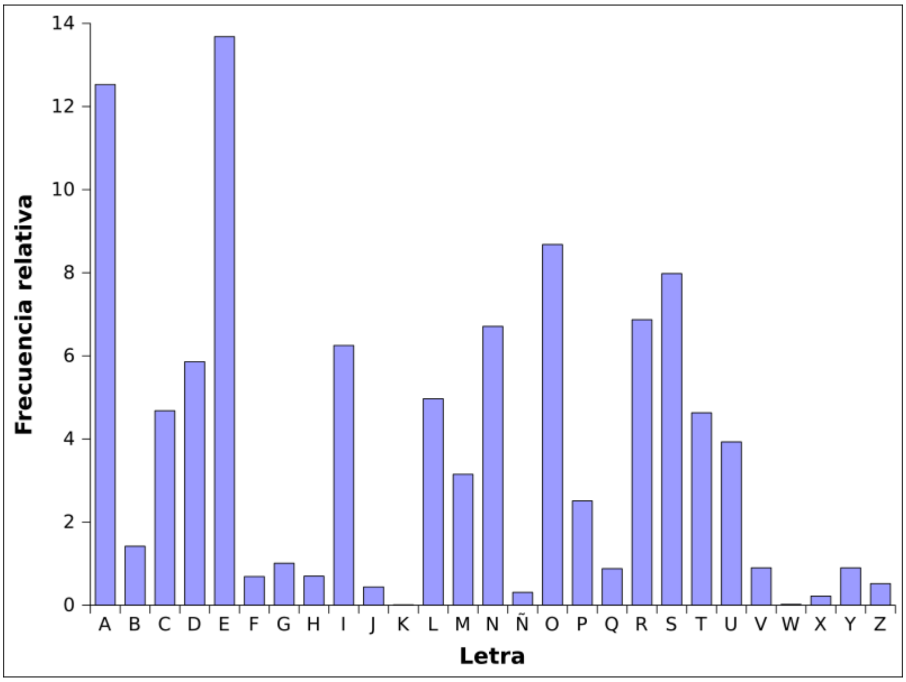
9. ¿Cómo serán las cifras anteriores respecto de la forma castellana de escritura cotidiana? Si a su criterio existiera diferencia ¿a qué se debería?

Cuando escribimos en castellano:

- No hay equiprobabilidad: algunas letras son mucho más frecuentes (e, a, o, s...) y otras muy raras (k, w, x...). Eso reduce la entropía media por símbolo respecto a un alfabeto uniforme.

- Dependencia entre símbolos: en español las letras no son independientes; tras una “q” casi siempre viene “u”, las sílabas y combinaciones fonéticas son restringidas, etc. Esto introduce redundancia.

- Entropía real medida: se sabe por estudios (Shannon y posteriores) que la entropía del castellano está entre 0.6 y 1.5 bits por carácter, muy por debajo de los~4.7 bits que tendría un alfabeto castellano de 27 símbolos equiprobables $\log_2 27 = 4.755$ bits



10. Explica las propiedades de la cantidad de información. Da un ejemplo para cada una de estas propiedades.

1. No negatividad ⇒ La información nunca puede ser negativa.

$I(x) \geq 0$

Ejemplo: Si lanzamos una moneda justa, el resultado ("cara" o "cruz") aporta 1 bit de información, no puede ser menor que 0.

2. Inversamente proporcional a la probabilidad

Un evento poco probable aporta más información que uno muy probable.

$I(x) = log_2\left(\frac{1}{P(x)}\right)$

Ejemplo:

- Si $P(x)=0.9$, entonces $I(x) = 0.15$ bits.
- Si $P(x)=0.1$, entonces $I(x) = 3.32$ bits.

El evento raro aporta más información.

3. Aumenta con la cantidad de posibles eventos

Cuántos más resultados posibles haya, mayor es la incertidumbre y la información.

$H(X)=-\sum P(xi)log_2 P(xi)$

Ejemplo:

- Moneda justa (2 resultados): H(X)=1 bit.
- Dado justo (6 resultados): H(X)=$log_2 6$ = 2.58 bits.

4. Aditividad para eventos independientes

La información de dos eventos independientes es la suma de la información de cada uno.
I(x,y)=I(x)+I(y)
Ejemplo:
Lanzar dos monedas justas:

- Moneda 1 → I(x)=1 bit
- Moneda 2 → I(y)=1 bit
  Total: I(x,y) = 2 bits.

5. Máxima entropía con sucesos equiprobables

La información promedio (entropía) es máxima cuando todos los sucesos tienen la misma probabilidad.
H(X)≤log2
Ejemplo:

- Moneda cargada: P(cara)=0.9,P(cruz)=0.1 ⇒ H(X)≈0.47 bits.
- Moneda justa: P(cara)=0.5,P(cruz)=0.5 ⇒ H(X)=1 bit.

La entropía máxima se da en la moneda justa.

11. Dada una variedad V = 2000 sucesos encontrar la base b óptima de representación que hace mínima la siguiente relación número más corto, es decir que minimice I . b (cantidad de información por base).

Objetivo: Encontrar la base b que minimiza la expresión:

$f(b) = \log_b(2000) \cdot b$

Paso 1: Expresar la función usando logaritmos naturales

$\log_b(2000) = \ln(2000) / \ln(b)$

Entonces: $f(b) = (b \cdot \ln(2000)) / \ln(b)$

Paso 2: Derivada de f(b)

$f(b) = \ln(2000) \cdot (b / \ln(b))$

$f'(b) = \ln(2000) \cdot (\ln(b) - 1) / [\ln(b)]^2$

Paso 3: Encontrar el mínimo

Se iguala f'(b) = 0

ln(b) - 1 = 0 → ln(b) = 1 → b = e

Paso 4: Verificar que es un mínimo (segunda derivada)

$f''(b) = (\ln(2000)/b) \cdot (2 - \ln(b)) / [\ln(b)]^3$

Evaluando en b = e → f''(e) = ln(2000)/e > 0

Conclusión Final:

Para una variedad V = 2000, la base óptima de representación que minimiza la relación "cantidad de información por base es:

$b = e \approx 2.71828182$

La base óptima es: b = e ≈ 2.718

Nota: El resultado es independiente del valor de **V** (para **V > 1**) ya que **ln(V)** se cancela en el proceso de optimización.

12. Para el texto contenido en el código QR de la parte superior de la página encuentre la entropía de orden cero o independiente tanto de lo relevado en el QR como en el texto correcto. ¿Qué conclusiones saca?

Sgeun un etsduio de una uivenrsdiad ignlsea, no ipmotra el odren en el que las ltears etsan ersciats, la uicna csoa ipormtnate es que la pmrirea y la utlima ltera esten ecsritas en la psiocion cocrrtea. El rsteo peuden estar ttaolmntee mal y aun pordas lerelo sin pobrleams. Etso es pquore no lemeos cada ltera por si msima preo la paalbra es un tdoo. Pesornamelnte me preace icrneilbe…	Segun un estudio de una universidad inglesa, no im porta el orden en el que las letras estan escritas, la unica cosa importante es que la primera y la ultima letra esten escritas en la posicion correcta. El resto pueden estar totalmente mal y aun podras leerlo sin problemas. Esto es porque no leemos cada letra por si misma pero la palabra es un todo. Personalmente me parece increible...
La entropía del texto es: 3.9601 bits por símbolo	**La entropía del texto es: 3.9601 bits por símbolo**

Conclusión:

1. **La entropía de orden cero O(0) mide el conjunto, no el orden:** La entropía de orden cero (o entropía de la fuente) se calcula únicamente a partir de la frecuencia de aparición de cada símbolo en el alfabeto. No tiene en cuenta el orden secuencial de estos símbolos, las reglas gramaticales, la estructura de las palabras ni ningún contexto lingüístico. Al ser idéntico el inventario de letras (símbolos) en ambos textos y aparecer estas con exactamente las mismas frecuencias, el valor de la entropía es el mismo.

2. **La diferencia radical en legibilidad subraya la limitación de este modelo:** La entropía de orden cero es <u>insuficiente</u> para medir la información semántica o la complejidad estructural de un lenguaje natural. Aunque la entropía estadística sea idéntica, la información transmitida (el mensaje comprensible) es diferente. El texto correcto es fácil de leer, mientras que el desordenado requiere un esfuerzo cognitivo mucho mayor

PRÁCTICO 2 CANAL DE INFORMACIÓN 1

1) Sea el siguiente canal:

	b_1	b_2	b_3
a_1	**0.6**	**0.3**	**0.1**
a_2	**0.2**	**0.5**	**0.3**
a_3	**0.4**	**0.2**	**0.4**

Calcular los valores de $p(a_i \mid b_j)$ **y las probabilidades de salida para el caso particular de** $p(a_1) = 0.5$**,** $p(a_2) = 0.25$**,** $p(a_3) = 0.25$

Practico 2

1) Sea el Siguiente Canal

	b_1	b_2	b_3	
a_1	0,6	0,3	0,1	1
a_2	0,2	0,5	0,3	1
a_3	0,4	0,2	0,4	1.
	1,2	1	0,8	

Calcular los valores de $p(a_i/b_j)$ y las probabilidades de salida para el caso particular de $p(a_1) = 0.5$, $p(a_2) = 0.25$, $p(a_3) = 0.25$.

Calculamos probabilidades de salida $p(b_j)$ con la ley de Probabilidad Total:

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i)\, p(b_j/a_i)$$

- para b_1: $p(b_1) = 0.5 * 0.6 + 0.25 * 0.2 + 0.25 * 0.4 = 0.45$
- para b_2: $p(b_2) = 0.5 * 0.3 + 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.2 = 0.325$
- para b_3: $p(b_3) = 0.5 * 0.1 + 0.25 * 0.3 + 0.25 * 0.4 = 0.225$

Probabilidades a posteriori

$$p(a_i/b_j) = \frac{p(a_i)\ p(b_j/a_i)}{p(b_j)}$$

Para $b_1 = 0.45$

$$p(a_1/b_1) = \frac{0.5 * 0.6}{0.45} = 0.667$$

$$p(a_2/b_1) = \frac{0.25 * 0.2}{0.45} = 0.111$$

$$p(a_3/b_1) = \frac{0.25 * 0.4}{0.45} = 0.222$$

Para $b_2 = 0.325$

$$p(a_1/b_2) = \frac{0.5 * 0.3}{0.325} = 0.462$$

$$p(a_2/b_2) = \frac{0.25 * 0.5}{0.325} = 0.385$$

$$p(a_3/b_2) = \frac{0.25 * 0.2}{0.325} = 0.154$$

Para $b_3 = 0.225$

$$p(a_1/b_3) = \frac{0.5 * 0.1}{0.225} = 0.222$$

$$p(a_2/b_3) = \frac{0.25 * 0.3}{0.225} = 0.333$$

$$p(a_3/b_3) = \frac{0.25 * 0.4}{0.225} = 0.444$$

2. Considera un Canal Binario Asimétrico con las siguientes probabilidades:

- $p(a_1) = 0,4$
- $p(b_1/a_1) = \frac{4}{5}$
- $p(b_1/a_2) = \frac{1}{4}$

a) Calcula las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.

b) Obtén la entropía del emisor, y las entropías condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida.

c) Calcula la información mutua y la capacidad del canal.

2). Considera un Canal Binario asimétrico con las siguientes probabilidades

$p(a_1) = 0.4$. podemos inferir: $P(a_2) = 0.6$

$p(b_1/a_1) = 4/5 = 0.8$. $p(b_2|a_1) = 0.2$.

$p(b_1/a_2) = 1/4 = 0.25$. $p(b_2|a_2) = 0.75$.

a). Calcula las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.

b). obtén la entropía del emisor, y las entropías condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida.

c). Calcula la información mutua y la capacidad del canal.

Probabilidades conjuntas:

$P(a_i \cap b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j | a_i)$

	b_1	b_2
a_1	$0.4 * 0.8 = 0.32$	$0.4 * 0.2 = 0.08$.
a_2	$0.6 * 0.25 = 0.15$	$0.6 * 0.75 = 0.45$.

Probabilidades Marginales de salida:

$P(b_1) = 0.32 + 0.15 = 0.47$.

$P(b_2) = 0.08 + 0.45 = 0.53$.

Probabilidades Condicionales hacia atrás: $P(a_i | b_j)$.

Utilizamos Bayes: $P(a_i|b_j) = \frac{P(a_i \cap b_j)}{P(b_j)}$.

Para b_1: $P(a_1|b_1) = \frac{0.32}{0.47} \approx 0.6809$.

$P(a_2|b_1) = \frac{0.15}{0.47} \approx 0.3191$.

Para b_2: $P(a_1|b_2) = \frac{0.08}{0.53} \approx 0.1509$.

$P(a_2|b_2) = \frac{0.45}{0.53} \approx 0.8491$.

b). Entropía del emisor $H(A)$:

$$H(A) = -[0.4 * \log_2(0.4) + 0.6 * \log_2(0.6)] \approx 0.97095.$$

Entropía Condicional de A dado Cada símbolo de Salida:

$$H(A|b_1) : -[P(a_1|b_1) * \log_2 P(a_1|b_1) + P(a_2|b_1) * \log_2 P(a_2|b_1)]$$

$$-[0.6809 * \log_2(0.6809) + 0.3191 * \log_2(0.3191)] \approx 0.902.$$

$$H(A|b_2) = -[0.1509 * \log_2(0.1509) + 0.8491 * \log_2(0.8491)] = 0.612.$$

c). Información mutua y Capacidad del Canal:

Entropía Condicional promedio $H(A|B)$:

$$H(A|B) = P(b_1) * H(A|b_1) + P(b_2) * H(A|b_2) = 0.47 * 0.902 + 0.53 * 0.612 =$$

$$H(A|B) = 0.747.$$

Información mutua $I(A;B) = H(A) - H(A|B) = 0.97095 - 0.747 = 0.223$ bits.

3. Considera un canal determinista con cuatro símbolos de entrada (a_1, a_2, a_3, a_4) y cuatro símbolos de salida (b_1, b_2, b_3, b_4), donde cada símbolo de entrada se corresponde exclusivamente con un símbolo de salida. Define las probabilidades para cada símbolo de entrada y calcula la información mutua.

Canal determinista (4 entradas, 4 salidas)

- "Cada símbolo de entrada se corresponde **exclusivamente** con un símbolo de salida" => el canal es **determinista**: para cada a_i existe un único $b_{j(i)}$ con $p(b_{j(i)}|a_i) = 1$ (y 0 en las demás columnas).
- Si definimos $p(a_i) = p_i$ (cualquier distribución con $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$), entonces

$$p(b_j) = \sum_{i:j(i)=j}^{4} p(a_i).$$

- En un canal determinista **H(B | A) = 0**. Por lo tanto:

I(A ; B) = H (B) = H(A) - H(A | B).

Si además el mapeo es biyectivo (una permutación entre 4 entradas y 4 salidas), entonces $p(b_j)$ es la misma distribución que $p(a_i)$ reordenada y

I(A ; B) = H (B) = H(A)= $-\sum_{i=1}^{4} p_i \log_2 p_i$

(Si varios a_i se "apilan" en el mismo b_j, sigue valiendo I(A ; B) = H(B), pero ahora $H(B) \leq H(A)$)

4) Dada la siguiente matriz de canal, obtén las respectivas codificaciones de la fuente.

$p(a) = \frac{1}{3},\ p(b) = \frac{1}{6},\ p(c) = \frac{1}{2}$

	a	b	c
a	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
b	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. **Datos del problema**

Se proporciona una fuente con tres símbolos y sus probabilidades:

$[p(a) = \frac{1}{3}, \quad p(b) = \frac{1}{6}, \quad p(c) = \frac{1}{2}]$

La matriz de canal define las probabilidades condicionales $(p(y_j|x_i))$, donde las filas representan los símbolos de entrada $((a, b, c))$ y las columnas los símbolos de salida $((a, b, c))$:

$$[P(Y|X) = \begin{bmatrix} p(a|a) & p(b|a) & p(c|a) \\ p(a|b) & p(b|b) & p(c|b) \\ p(a|c) & p(b|c) & p(c|c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}]$$

2. Cálculo de las Probabilidades Conjuntas p(x,y)

La probabilidad conjunta se calcula como $p(x, y) = p(y \mid x) * p(x)$.

- Para $(x = a)$:

$$p(a, a) = p(a|a) \cdot p(a) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$[p(a, b) = p(b|a) \cdot p(a) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}]$$

$$p(a, c) = p(c|a) \cdot p(a) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

- Para$(x = b)$:

$$p(b,a) = p(a|b) \cdot p(b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$[p(b,b) = p(b|b) \cdot p(b) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \qquad]$$

$$p(b,c) = p(c|b) \cdot p(b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

- Para$(x = c)$:

$$p(c,a) = p(a|c) \cdot p(c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$[p(c,b) = p(b|c) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}]$$

$$p(c,c) = p(c|c) \cdot p(c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

3. Cálculo de las Probabilidades de Salida p(y)

Aplicamos la ley de la probabilidad total:

$$[p(y_j) = \sum_i p(y_j|x_i) \cdot p(x_i)]$$

$$p(a) = p(a|a)p(a) + p(a|b)p(b) + p(a|c)p(c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{2}{30} + \frac{1}{8})$$

$$= \frac{16}{120} + \frac{8}{120} + \frac{15}{120} = \frac{39}{120} = \frac{13}{40}$$

$$p(b) = p(b|a)p(a) + p(b|b)p(b) + p(b|c)p(c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{4})$$

$$= \frac{8}{60} + \frac{2}{60} + \frac{15}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$p(c) = p(c|a)p(a) + p(c|b)p(b) + p(c|c)p(c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{2}{30} + \frac{1}{8})$$

$$= \frac{8}{120} + \frac{8}{120} + \frac{15}{120} = \frac{31}{120}$$

4. Cálculo de las probabilidades posteriores p(x|y)

Usamos la regla de Bayes: $(p(x|y))(p(x|y) = \frac{p(y|x) \cdot p(x)}{p(y)})$

-Dado que se recibió a:

$$p(a|a) = \frac{p(a|a)p(a)}{p(a)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{13}{40}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{40}{13} = \frac{80}{195} = \frac{16}{39}$$

$$p(b|a) = \frac{p(a|b)p(b)}{p(a)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{13}{40}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{40}{13} = \frac{40}{195} = \frac{8}{39}$$

$$p(c|a) = \frac{p(a|c)p(c)}{p(a)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{40}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{40}{13} = \frac{40}{104} = \frac{5}{13}$$

-Dado que se recibió b :

$$p(a|b) = \frac{p(b|a)p(a)}{p(b)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$$

$$p(b|b) = \frac{p(b|b)p(b)}{p(b)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{30} \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{150} = \frac{2}{25}$$

$$p(c|b) = \frac{p(b|c)p(c)}{p(b)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

-Dado que se recibió c :

$$p(a|c) = \frac{p(c|a)p(a)}{p(c)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{120}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{120}{31} = \frac{120}{465} = \frac{8}{31}$$

$$p(b|c) = \frac{p(c|b)p(b)}{p(c)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{120}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{120}{31} = \frac{120}{465} = \frac{8}{31}$$

$$p(c|c) = \frac{p(c|c)p(c)}{p(c)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{31}{120}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{120}{31} = \frac{120}{248} = \frac{15}{31}$$

5. Interpretación y Codificación de la Fuente

. La matriz muestra que el canal es **ruidoso** (no es determinista), ya que un símbolo de entrada puede resultar en diferentes símbolos de salida.

El análisis de las probabilidades posteriores revela la incertidumbre sobre el símbolo original tras la recepción. Por ejemplo, si se recibe `**a**`, lo más probable es que se haya enviado `**a**` $((p(a|a) = \frac{16}{39} \approx 0.41))$, **pero existe una probabilidad** significativa de que se haya enviado `**c**` $((p(c|a) = \frac{5}{13} \approx 0.38))$.

Dado que la fuente tiene las probabilidades:
$p(a) = \frac{1}{3},\ p(b) = \frac{1}{6},\ p(c) = \frac{1}{2}$, podemos aplicar **Huffman** para obtener la codificación óptima. Las ordenamos de mayor a menor

c	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	1
a	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0
b	$\frac{1}{6}$	1		

c= 0
a = 10
b= 11

Como la letra c tiene mayor probabilidad, se le asigna el código más corto (0), mientras que las letras a y b tienen el código 10 y 11 respectivamente.