Matrices

martes, 6 de agosto de 2024 10:20

① **Matriz** Disposición de números ordenados por filas y columnas de tamaño $(m \times n)$.

1.1.

$$B = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1/3 & -2 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$3 \times 3 \rightarrow$ Tamaño de la matriz
Matriz cuadrada

Vectores fila: $(2,-1,1)$, $(-1, 1/3, -2)$, $(e,0,0)$
Vectores columna: $(2,-1,e)$, $(-1,1/3,0)$, $(1,-2,0)$

$C = (2\ -1\ 4\ -1)$ $(1 \times 4) \rightarrow$ Matriz fila

$D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(2 \times 1) \rightarrow$ Matriz columna

Forma reducida:

$A = (a_{ij})$ — i: fila, j: columna

• $A = (a_{ij})$ 2×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

• $C = (c_{ij})$ 2×2

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

1.2 **Matriz traspuesta** "Las columnas se vuelven las filas de la matriz y se denota con un exp. T"

$$A = \begin{pmatrix} 3 & e & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/3 \\ e & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$3 \times 4 \rightarrow 4 \times 3$

Diagonal principal: $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{rr})$

Es un vector. $r = \min\{n, m\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Diagonal principal $= (1, -1)$

1.3. **Matriz opuesta** $\underset{m\times n}{A = (a_{ij})} \rightarrow \underset{m \times n}{-A = (-a_{ij})}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.4. **Matriz nula** Todos sus elementos son 0

$$O_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 **Matriz diagonal** Solo en matrices cuadradas
Los elementos que no son de la diagonal principal son 0.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = (1)$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.6. **Matriz triangular superior** Solo en matrices cuadradas
Los elementos están por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \pi & e \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ si $i > j$

1.7. **Matriz triangular inferior** Solo en matrices cuadradas

• **Submatrices** Es una matriz que resulta de eliminar filas y columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \rightarrow (1\ 2\ 4)$$

↳ Submatriz de orden 1×3

• **Bloques** Es una submatriz donde se elimina filas y columnas pero son consecutivas.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Bloques de 1×2 $(1\ 2)$, $(-1\ 3)$, $(2\ 0)$, $(3\ 0)$

② **Suma de matrices** Solo se suma cuando su número de filas y columnas son las mismas.

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} + \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

• PROPIEDADES
• Conmutativa A, B $n \times m$ $A+B = B+A$
• Asociativa A, B, C $n \times m$ $(A+B)+C = A+(B+C)$
• Neutro $A + O_{n\times m} = O_{n \times m} + A = A$
- Simétrico $A + (-A) = O_{n\times m}$

③ **Resta de matrices** A, B, $n \times m$

$A - B = A + (-B)$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}} - \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}}$$

③ **PRODUCTO DE MATRICES**

• **PRODUCTO POR UN ESCALAR**

$$(-3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -12 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$-1(A) = -A$

• **Dos matrices** $\underset{n\times m}{A}$ $\underset{m \times r}{B}$

• Se tiene cumplir que el nº columnas del primero es el mismo nº de filas del segundo.

1)
$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}}$$

$(1\ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $1 \cdot 1 + (-1)(-2) = 1+2 = 3$ Elemento $(1,1)$
Fila 1 Columna 1

$(1\ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $1 \cdot 1 + (-1)(-1) = 1+1 = 2$ Elemento $(1,2)$
Fila 1 Columna 2

$(-3\ \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $-3 \cdot 1 + (2)(-2) = -3-4 = -7$ Elemento $(2,1)$
Fila 2 Columna 1

$(-3\ \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $-3 \cdot 1 + 2(-1) = -3-2 = -5$ Elemento $(2,2)$
Fila 2 Columna 2

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.7. Matriz triángular inferior — Solo en matrices cuadradas

$a_{ij} = 0$ si $i<j$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ e & 2 & 0 \\ \pi & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.8 Matriz simétrica $A^t = A$ Matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

SIMÉTRICO

1.9 Matriz antisimétrica $A^t = -A \Leftrightarrow -A^t = A$

Matriz cuadrada

La diagonal principal siempre es 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to -A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es una matriz antisimétrica.

1.10 Matriz escalar Es una matriz diagonal y la diagonal principal todos sus números son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

1.11 Matriz identidad Es una matriz escalar y todos los elementos de la diagonal principal son 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3×3 3×2 3×2

3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -1 \end{pmatrix}$

1×3 3×2 1×2

5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$

1×3 3×1 1×1

6) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ 6 & -3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$

2×1 1×4 2×4

7) $-\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 2 & -4\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \end{pmatrix}$

1×5 5×1 1×1

9) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2×3 3×4 2×4

Matrices equivalentes Es una matriz que se obtiene de otras tras multiplicar por una matriz elemental.

Pivotes Es el primer elemento diferente de 0 de la fila a partir de la izquierda.

Matriz escalonada

- Las filas de 0's están en la parte inferior
- Los pivotes están más a la izquierda del pivote de la siguiente fila.

Matriz escalonada reducida

- Encima de los pivotes son todos 0.
- Los pivotes son 1.

INVERSA DE UNA MATRIZ

$Q \cdot A = I$ $\quad$ Q: Es la matriz inversa

Se denota A^{-1}

Operaciones elementales

- Intercambio filas $\quad f_i \Leftrightarrow f_j$
- Filas por una constante $\quad f_i \cdot \lambda \quad \lambda \neq 0$
- Adicionar múltiplo de una fila por otra $\quad f_i \to f_i + \lambda f_j$

Cálculo de determinante

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = +4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$4(5\cdot0-3\cdot0) + (4\cdot0-3\cdot(-2)) + (4\cdot0-5(-2))$

$0+6+10 = 16$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1(-5-2) - 2(15-8) + (3+4)$

$-7-14+7 = -14$

$|B| = 1(6-9) - 3(2-3) + 0(18-18)$

$-3+3+0 = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad f_2 \to f_2 - 2f_1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Filas por una constante $\quad f_i \cdot \lambda \quad \lambda \neq 0$
- Adicionar multiplo de una fila por otra $\quad f_i \to f_i + \lambda f_j$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \; f_2 \to f_2 - 2f_1 \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; f_1 \Leftrightarrow f_2 \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \; f_2 \to f_2 - 2f_1 \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \; f_3 \to f_3 + f_1 \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \; f_3 \to f_3 + 2f_2 \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \; f_2 \to f_2 + \tfrac{1}{2} f_1 \; \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; Ran = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad |\Delta| = 4(0) - (-1(-6)) + (-10)$$

$$0 - 6 - 10 = -16$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|C| = 1(1(-2) - 1(1)) - 1(2(-2) - 1(-1)) + 0(\quad)$$

$$-3 + 3 + 0 = 0$$

① Determinante

$$A \in M_{m\times n} \Rightarrow |A| = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot C_{F_{ij}}$$