Funciones

viernes, 21 de junio de 2024 12:19

(1) Definición

Sean A y B conjuntos una función de A en B, denotada por $f: A \to B$ es una relación de A en B que cumple lo siguiente:

$\forall a \in A$, existe un único b tal que (a,b) pertenece a la relación.

Ejemplos

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$

$R_1 = \{(2,4), (3,4), (4,5)\}$

$R_2 = \{(2,4), (3,4)\}$

$R_3 = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$

(2) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / y = x+1\}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x^2 = y^2\}$

$T = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x = y^2\}$

(3) $A = \mathbb{Z}$ $B = \mathbb{Z}^+$

$R = \{(x,y) \in A \times B / x^2 = y^2\}$

(4) $A = P(\{a,b,c\})$

$R_1 = \{(x,y) \in A \times A / y = x \cup \{a\}\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A \times A / x = y \cup \{a\}\}$

(2) Dominio y Rango

$f: A \to B$ es una función de A en B.

Dominio de f: A / $\text{Dom}(f) = A$

Rango de f:

$\text{Ran}(f) = \{ y \in B / \exists x \in A :$

Rango de F:

$$Ran(F) = \{ y \in B \,/\, \exists x \in A : (x,y) \in f \}$$

Obs: $Ran(F) \subseteq B$

- B es conjunto de llegada

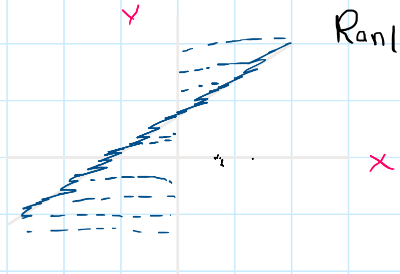
Ej: 1) $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$

$$f = \{ (x,y) \in A \times B \,/\, y = 5x+7 \}$$

$$(x,a) \in f \wedge (x,b) \in f$$

$$a = 5x+7 \wedge b = 5x+7$$

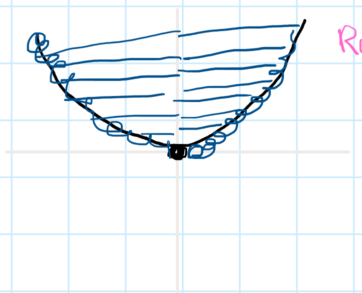
$$a = b$$



$Ran(F) = \mathbb{R}$

2) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$$f = \{ (x,y) \in A \times B \,/\, y = x^2 \}$$



$Ran(F) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

3) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$$g = \{ (x,y) \in A \times B \,/\, y = \frac{x^2}{2} + 5$$

$Ran(g) = [5, +\infty\rangle$

4) $A = P(\{a,b,c\})$ $B = P(\{a,b,c\})$

$$f = \{ (x,y) \in A \times B \,/\, y = x \cup \{a\} \}$$

$Ran(F) = \{ \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\} \}$

(3) REGLA DE CORRESPONDENCIA

Sea $f: A \to B$ una función. $(x,y) \in f$ se escribe como $y = f(x)$
↳ Regla de correspondencia

x: variable independiente   y: variable dependiente

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x$

$(x,y) \to (x, 2x)$

EJERCICIOS:

(1) Hallar el rango de las siguientes funciones:

a) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x+3$

b) $f:$, $f(x) = 7 - x$

c) $f:$, $f(x)$

(2) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

$R_1 = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x+y = 1001\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x+y = 1002\}$

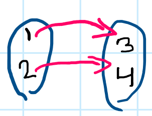
Analizar si R_1 y R_2 son funciones de A en A, en caso que lo sean hallar el rango.

- R_1 es función, su rango es A.
- R_2 no es función porque 1 ~~no tiene~~ no tiene imagen $(1001 \notin A)$

(4) TIPOS DE FUNCIONES

4.1 Función inyectiva   Sea $f: A \to B$, decimos que f es inyectiva si cumple la siguiente condición:

$A \to B$



Valores distintos

* "$f(x) = f(y) \to x = y$"
* "$x \neq y \to f(x) \neq f(y)$"

Cada "y" va a tener un solo valor de "x"

Ejemplos: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,5,6,8\}$ ¿Inyectiva?

① • $f: A \to B$, como $f(x) = 2x$ ✓

• $g = \{(1,2), (3,8), (2,6)\}$ ✓

• $h = \{(1,2), (3,8), (2,2)\}$ ✗

1. $f(1) = 2$ $f(2) = 4$ $f(3) = 6$

2. $g(1) = 2$ $g(3) = 8$ $g(2) = 6$

3. $h(1) = 2$ $h(3) = 8$ $h(2) = 2$

Se repiten

2. $F: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = 2x + 1$ ¿Inyectiva?

$f(x) = f(y) \to x = y$

$2x + 1 = 2y + 1 \to x = y$ (V) Es inyectiva.

$2x = 2y \to x = y$

3. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3 - x^2$ ¿Inyectiva?

Contraejemplo: $g(-1) = 3 - (-1)^2 = 3 - 1 = 2$

$g(1) = 3 - (1)^2 = 3 - 1 = 2$

$g(-1) = g(1) \to -1 = 1$ (F) No es inyectiva.

4. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 7 + 3x$ ¿Inyectiva?

$f(x) = f(y) \to x = y$

$7 + 3x = 7 + 3y \to x = y$

$x = y \to x = y$ (V) Es inyectiva

5. $A = P(\{a,b,c\})$ $f: A \to A$ definida por $f(x) = x \cup \{a\}$.

Contraejemplo: $f(\emptyset) = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$

$f(\{a\}) = \{a\} \cup \{a\} = \{a\}$

$f(\{a\}) = f(\{\emptyset\}) \to a = \emptyset$ (F) No es inyectiva.

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x, -x)$

$f(x) = f(y) \to x = y$

$(1 + x, -x) = (1 + y, -y)$ $1 + x = 1 + y$

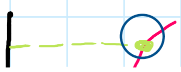
IGUALES $x = y$

(V) Es inyectiva.

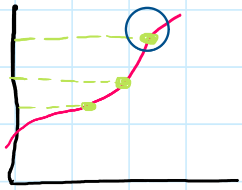
Observaciones:

① Para demostrar que f no es inyectiva debemos hallar 2 valores del dominio tales que: $a \neq b \to f(a) = f(b)$.

②



Corta en un único punto

② 

Corta en un único punto si es una Función inyectiva.

4.2 Función sobreyectiva Sea $f: A \to B$ una función, decimos que f es sobreyectiva si 8

* $Ran(f) = B$
* $\forall y \in B, \exists x \in A: (x,y) \in f$

① $A = \{1,2,3,4\}$ $f: A \to A$, definida por $f(x) = 5 - x$

¿f es sobreyectiva?

$F = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

$Ran(F) = \{4,3,2,1\}$ $Ran_{(F)} = A$ (V) Es sobreyectiva

② $A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,4\}$

$g = \{(2,2), (3,2), (4,4)\}$

$Ran(g) = \{2,4\}$ $Ran(g) = B$ (V) Es sobreyectiva

③ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = 2x+1$

Suponemos que $Ran_{(f)} = \mathbb{Z}$ 0, no pertenece al rango siendo este $\mathbb{Z}$

$0 = F(x) = 2x+1$ $x = -1/2$

$x \notin \mathbb{Z} \wedge 0 \notin Ran(f)$ (F) No es sobreyectiva

④ $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3 - x^2$

⑤ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 7 + 3x$

4.3 Función biyectiva

Si f es biyectiva: f será inyectiva y sobreyectiva a la ves.

Ej: Sea una función de A en A definida por $F(x) = x^2$ $\forall x \in A$

a) Si $A = \{0,1\}$, ¿f es biyectiva?

$F(0) = 0 \wedge F(1) = 1$

• Es inyectiva, $Ran f = \{0,1\} = A$.

∴ Es biyectiva.

b) Si $A = \{1, 0, -1\}$, ¿F es inyectiva?

∴ Es biyectiva.

b) Si $A = \{1, 0, -1\}$, ¿F es inyectiva?

$f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ • No es inyectiva.

$\mathrm{Ran}f = \{1, 0\} \neq A$ • No es sobreyectiva.

∴ No es biyectiva

$f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(x, y) \to (x, x+y) = f(x, y)$

¿F es biyectiva?

i) $x, x+y = x_2, x_2+y_2$

$x = x_2 \wedge x+y = x_2 + y_2$

$\underbrace{x}_{} = \underbrace{x_2}_{}$

$y = y_2$ //

ii) $m, n \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

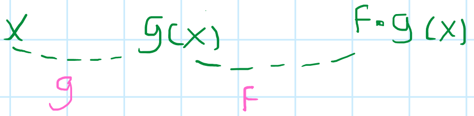
• $f(x, y) = m, n+m = m, n$

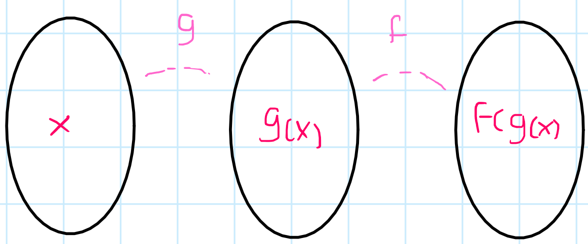
$x = m$ // $y = n - m$ //

$f(m, n-m) = (m, n)$

f es biyectiva //

⑤ Composición de funciones





Definición: $f \circ g(x) = f(g(x))$, $x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$

↓

f compuesta con g //

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

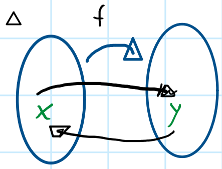
Observaciones:

- $(g \circ f)$: g compuesta con f
- Para que exista la composición $f \circ g$, el $\mathrm{Ran}(g) \subset \mathrm{Dom}(f)$.

⑥ Función inversa

Sea $f: A \to B$ una función biyectiva, la inversa de f denotada por f^{-1} es una función de B en A definida por:

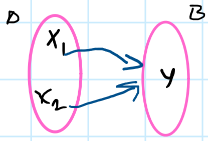
$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$



Se necesita que sea biyectiva

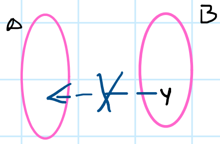
Obs:

- Necesitamos que f sea inyectiva:



Si f no es inyectiva: $f^{-1}(y)$ no estaría definida

- Necesitamos que f sea sobreyectiva:



No hay un x que relacionar con el y

Ejemplos:

① $A = \{1,2,3\}$ $f: A \to A$

$f = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(1,3)\}$

$f^{-1}: A \to A$

② $A = \{1,2,3\} \wedge B = \{3,4,5\}$

$f(x) = x+2, \ \forall x \in A$

$f(x) = y$

$x+2 = y \to \underbrace{x = y-2}$

$f^{-1}(y): B \to A, \forall y \in B \,/\, f^{-1}(y) = y-2$

③ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$

$f(a) = f(b) \,/\, a = b$ ✓

$-a = -b \to a = b$

$Ran(f) = \mathbb{Z}$

$f(x) = y$

$-x = y$

$x = -y$

$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ f(y) = -y$

④ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x+3$

$g(a) = g(b) \,/\, a = b$

$2a+3 = 2b+3 \to a = b$

$Ran(g) = \mathbb{R}$

$g(x) = y$

$2x+3 = y \to x = \frac{y-3}{2}$

$f^{-1}(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$

$\forall y \in \mathbb{R}$