UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

Matemáticas Discretas II
CS1022

Lista de problemas del curso

Coordinador del curso: Jorge Tipe

Ciclo académico: 2024-2

Capítulo 1: Inducción Matemática

Diferentes esquemas de inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar las proposiciones:

1. Sea n entero positivo, entonces
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

2. Sea n entero positivo, entonces
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

3. Sea n entero positivo, entonces
$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

4. Sea n entero positivo, entonces
$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

5. Para $n\geq 2$:
$$n^2\leq 2^n$$

6. Para $n\geq 10$:
$$n^3\leq 2^n$$

7. Para $n\geq 3$:
$$n^3\leq 3^n$$

8. Para $n\geq 1$:
$$a_1^2+\cdots+a_n^2\geq\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$$
donde $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son números reales positivos cualesquiera.

9. Sea A un conjunto finito y no vacío con n elementos. Demuestre que el número de elementos de $P(A)$, el conjunto potencia de A, es 2^n.

10. Para n un n'umero natural defina $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Demuestre que $2^n \leq n!$ para $n \geq 4$.

11. Se considera la sucesión definida por $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$.

   a) Hacer uso del método de inducción para probar que: $a_n + a_{n-1} = n^2$ cualquiera que sea el entero $n \geq 2$.

   b) Determinar la fórmula explícita del término general de la sucesión (a_n).

12. Pruebe que todo número entero mayor o igual a 14 se puede expresar como $3x + 8y$, donde x y y son números enteros no negativos.

13. Sea la sucesión $x_1 = 5$, $x_2 = 13$, $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$. Pruebe que para todo n entero positivo se cumple que:
$$x_n = 2^n + 3^n$$

14. Pruebe mediante inducción que $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$, donde (a_n) es la sucesión definida por $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; \forall n \geq 3 \end{cases}$

15. La sucesión
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 24, 55, \ldots$$
es llamada *sucesión de Fibonacci*. Se define como la sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$ mediante
$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n+2} \;\text{ para }\; n \geq 2\,.$$
Note que los elementos de esta sucesión son entonces enteros. Muestre las siguientes propiedades:

   a) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$ para todo $n \geq 1$

   b) $f_0^2 + f_1^2 + \cdot + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo $n \geq 0$;

   c) $f_0 + f_2 + \cdot + f_{2n} = f_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$;

   d) $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

   e) $f_n = c_1 a^n + c_2 b^n$, para todo $n \geq 0$, donde

16. Se define la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ mediante
$$f_1 = 1\ ,\ f_2 = 1\ ,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$
Pruebe que $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 2((-1)^{f_n} + 1)$ es divisible por 7 para todo entero positivo n.

17. Dada la sucesión de números reales $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, probar que:

   a) $H_{2^n} \leq 1 + n, \forall n \in \mathbb{N}$.

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2: Lógica digital y representación de datos

Relaciones y conjuntos parcialmente ordenados

1. En los siguientes ejercicios, determine si la relación definida en el conjunto de enteros positivos es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de orden parcial.

   a) $(x, y) \in R$ si 2 divide a $(x + y)$

   b) $(x, y) \in R$ si 3 divide a $(x + y)$

2. ¿Cuál de los siguientes relaciones sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ son CPO's? Justifique su respuesta.

   a) $\{(0, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

   b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

   c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

   d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)\}$

   e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

3. Considere la relación R en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, definida de la siguiente forma:

   $$R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (1, 3)\}$$

   a) Demuestre que (X, R) **no** es un CPO.

   b) ¿Qué par ordenado se debe agregar a R para obtener un CPO? Justifique por qué agregando ese par se obtiene un CPO.

   c) Dibuje el diagrama de Hasse del CPO de la parte **(b)**.

4. Determine si cada una de las siguientes relaciones es un CPO:

   a) $(\mathbb{Z}, =)$.

   b) $(\mathbb{Z}, \neq)$.

   c) $(\mathbb{Z}, \geq)$.

   d) $(\mathbb{Z}, \mid)$.

   e) $(\mathbb{Z}, \nmid)$.

   f) $(\mathbb{R}, =)$.

   g) $(\mathbb{R}, <)$.

   h) $(\mathbb{R}, \leq)$.

   i) $(\mathbb{R}, \neq)$.

5. Determine si $(\mathcal{P}, R)$ es un CPO, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las personas del mundo y la relación R se define de la siguiente forma: $(a, b) \in R$ si y solo si:

   a) a es más alto que b.

   b) a no es más alto que b.

   c) $a = b$ o a es un ancestro de b.

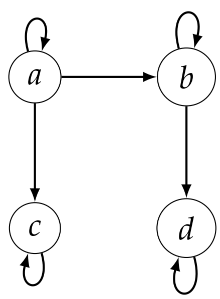
   d) $a = b$ o a es descendiente de b.

6. Determine si las siguientes relaciones representadas en matriz son CPOs.

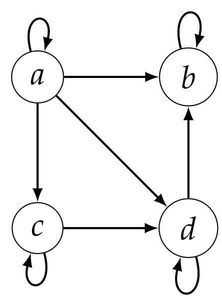
$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad c)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad e)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$b)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad d)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad f)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

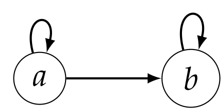
7. Determine si las siguientes relaciones representadas en digrafos son CPO's.



a)



b)



c)

8. Determine cuáles de los siguientes pares de elementos son comparables en el CPO $(Z^+, |)$

a) $\{5, 15\}$ *b*) $\{16, 8\}$ *c*) $\{600, 900\}$

9. Encuentre un par de elementos incomparables en los siguientes CPOs:

a) $(P(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$

b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$

10. Proporcione un ejemplo de una relación en $\{1, 2, 3, 4\}$ que sea reflexiva, no antisimétrica y no transitiva. Represente dicha relación como lista de pares ordenados, matriz y digrafo.

11. Considere el CPO $(\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 42\}, |)$. Halle todos los elementos que son comparables con 6.

12. Sea X un conjunto finito. ¿Cómo es el diagrama de Hasse del CPO $(X, =)$?

13. Dibuje el diagrama de Hasse para la relación de divisibilidad sobre los siguientes conjuntos:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) $\{3, 5, 7, 11, 13, 16, 17\}$.

c) $\{2, 3, 5, 10, 11, 15, 25\}$.

d) $\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.

e) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

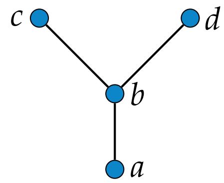
f) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

g) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$.

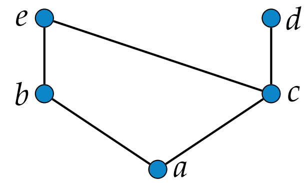
h) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

14. Liste todos los pares ordenados de los siguientes CPOs:

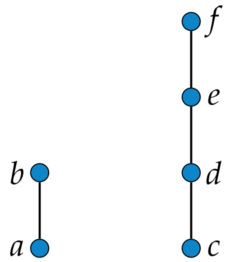
a)



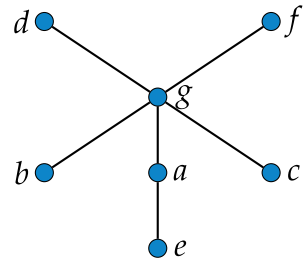
c)



b)



d)



15. Considere las relaciones R_1 y R_2 en el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, definidas de la siguiente forma:

$$R_1 = \{(a, b) \in A \times A : a + b \leq 8\}.$$

$$R_2 = \{(a, b) \in A \times A : \ a - b \in \{0, 2, 3, 4\}\},$$

a) Determine si R_1 es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.

b) Determine si R_2 es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.

16. Considere las relaciones R_1 y R_2 en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, definidas de la siguiente forma:

$$R_1 = \{(a, b) \in A \times A : \ a \leq b \ \text{ y } \ a + b \text{ es par}\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \in A \times A : \ a \leq b \ \text{ y } \ a + b \text{ es múltiplo de } 3\}.$$

a) Determine si R_1 es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.

b) Determine si R_2 es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.

17. Considere las relaciones R_1 y R_2 definidas en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ tales que $R_1 \subseteq R_2$.

a) Si R_1 es reflexiva, ¿podemos asegurar que R_2 es reflexiva?

b) Si R_1 es un C.P.O, ¿podemos asegurar que R_2 es un C.P.O?

c) Muestre el diagrama de Hasse de un C.P.O definido en A tal que c sea comparable con todos los elementos de A a excepción de f.

18*. Sean (A, R_1) y (B, R_2) CPO's. Sobre el conjunto $A \times B$, definimos la relación R por $(a, b) \, R \, (x, y)$ si $\ a \, R_1 \, x \ $ y $\ b \, R_2 \, y$, es decir, si se cumplen las dos relaciones a la vez. Pruebe que $(A \times B, R)$ es un CPO.

19*. Suponga que R es una relación sobre X que es simétrica y transitiva pero no reflexiva. Suponga también que $|X| \geq 2$. Defina una relación $\overline{R}$ sobre X de la siguiente forma $\overline{R} = X \times X - R$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Para cada afirmación falsa, proporcione un contraejemplo.

a) $\overline{R}$ es reflexiva.

b) $\overline{R}$ es simétrica.

c) $\overline{R}$ es antisimétrica.

d) $\overline{R}$ es transitiva.

Elementos extremos de CPO's

1. Para el CPO $(\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}, |\,)$ responda las preguntas:

a) ¿1007 es maximal?

b) ¿2019 es maximal?

c) ¿91 es minimal?

d) ¿103 es minimal?

2. Definimos el conjunto $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Halle todos los elementos minimales y maximales del CPO $([0, 1], \leq)$, si existen. Halle también el mínimo y máximo, si existen.

3. Definimos el conjunto $[0, 1[= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$. Halle todos los elementos minimales y maximales del CPO $([0, 1[, \leq)$. Halle también el mínimo y máximo, si existen.

4. Halle todos los elementos minimales, maximales, mínimo y máximo (si existen) para cada uno de los CPO:

a) $(\{1, 2, 3, 4\}, =)$.

b) $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

c) $(\{1, 2, 3, 4\}, \geq)$.

d) $(\mathbb{Z}, \geq)$.

e) $(P(\{2, 3, 4\}), \subseteq)$

f) $(\mathbb{Z}^+, |\,)$.

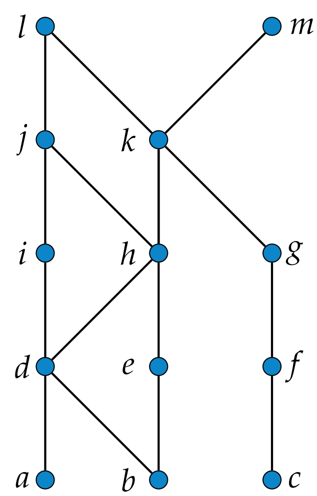
g) $(D_{12}, |\,)$.

h) $(\{5, 10, 15, 25\}, |\,)$.

i) $(\{3, 7, 15, 21, 35, 105\}, |\,)$.

j) $(\{3, 7, 15, 21, 35, 350\}, |\,)$.

5. Para el CPO representado por el siguiente diagrama de Hasse.



a) Encontrar los elementos minimales y maximales.

b) Encontrar el máximo y el mínimo, si existen.

c) Encontrar las cotas superiores e inferiores de $\{a, b, c\}$.

d) Encontrar la mínima cota superior y máxima cota inferior de $\{a, b, c\}$, si existen.

e) Encontrar las cotas superiores e inferiores de $\{f, g, h\}$.

f) Encontrar la mínima cota superior y máxima cota inferior de $\{f, g, h\}$, si existen.

g) Encontrar las cotas superiores e inferiores de $\{d, h, m\}$.

h) Encontrar la mínima cota superior y máxima cota inferior de $\{d, h, m\}$, si existen.

6. Para el CPO $(\{3, 5, 9, 15, 24, 25, 45\}, |)$

a) Encontrar las cotas superiores e inferiores de $\{3, 5\}$.

b) Encontrar la mínima cota superior y máxima cota inferior de $\{3, 5\}$, si existen.

c) Encontrar las cotas superiores e inferiores de $\{15, 45\}$.

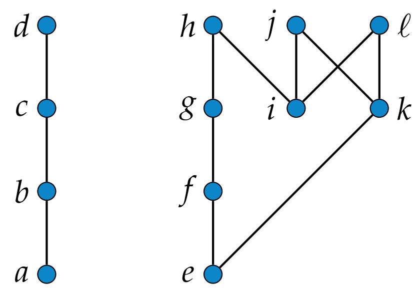
d) Encontrar la mínima cota superior y máxima cota inferior de $\{15, 45\}$, si existen.

7. *a*) Encuentre un CPO que tenga al menos un elemento minimal pero que no tenga elemento maximal.

b) Encuentre un CPO que tenga al menos un elemento maximal pero que no tenga elemento minimal.

c) Encuentre un CPO que no tenga minimales ni maximales.

8. Considere el siguiente diagrama de Hasse de un CPO.



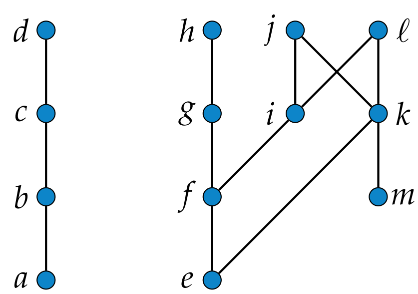
a) Determine los elementos minimales y maximales, en caso existan.

b) Halle las cotas inferiores de $\{h, \ell\}$ y determine la máxima cota inferior, en caso exista.

c) Halle las cotas superiores de $\{i, e\}$ y determine la mínima cota superior, en caso exista.

d) Dé un ejemplo de un conjunto de tres elementos en el CPO mostrado cuya mínima cota superior sea h.

9. Considere el siguiente diagrama de Hasse de un CPO.



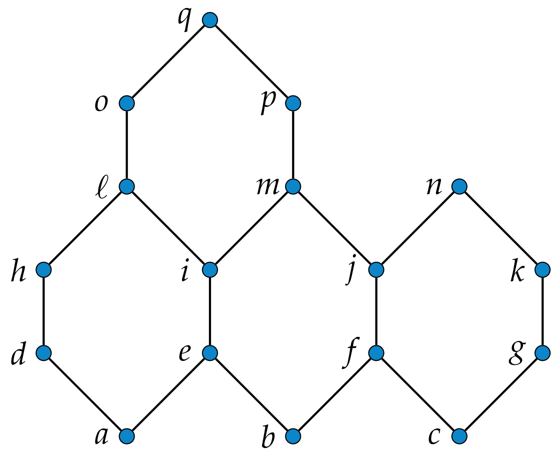
a) Determine los elementos minimales y maximales, en caso existan.

b) Halle las cotas inferiores de $\{j, \ell\}$ y determine la máxima cota inferior, en caso exista.

c) Halle las cotas superiores de $\{f, e\}$ y determine la mínima cota superior, en caso exista.

d) Dé un ejemplo de un conjunto de tres elementos en el CPO mostrado cuya máxima cota inferior sea e.

10. Considere el siguiente diagrama de Hasse de un C.P.O.



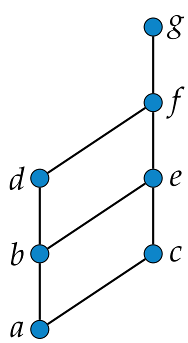
a) Determine los elementos minimales y maximales, en caso existan.

b) Halle las cotas inferiores de $\{n, \ell\}$ y determine la máxima cota inferior, en caso exista.

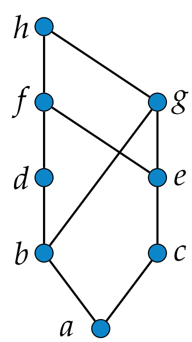
c) Halle las cotas superiores de $\{c, e\}$ y determine la mínima cota superior, en caso exista.

Retículas

1. Determine cuáles de los siguientes CPO's son retículas.



a)



b)

2. Determine cuáles de los siguientes CPO's son retículas.

a) $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)$

b) $(\{4, 8, 16, 32\}, |)$

c) $(P(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$, donde $P(\{1, 2, 3\})$ es el conjunto potencia de $\{1, 2, 3\}$.

d) $(X, \subseteq)$, donde X es el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ que tienen 0 o 2 elementos.

e) $(Y, \subseteq)$, donde Y es el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$ que tienen 0, 1 o 2 elementos.

3. Sea X el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen al elemento 1. Por ejemplo, $\{1\}$ y $\{1, 2, 4\}$ son elementos de X. Determine si $(X, \subseteq)$ es una retícula.

4. Considere la retícula $(D_{24}, |)$. Para cada uno de los siguientes subconjuntos, determine si es una subretícula:

a) $\{12, 24\}$

b) $\{3, 6, 12\}$

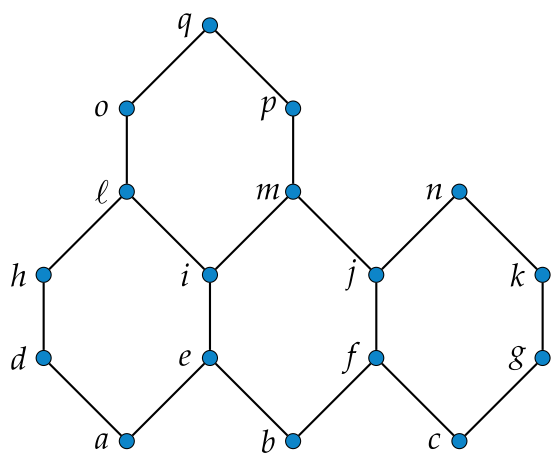
c) $\{1, 2, 3, 6, 12\}$

d) D_6

e) $D_6 \cap D_8$

f) $D_3 \cup D_8$

5. Determine si el siguiente C.P.O. es una retícula



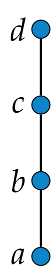
6. *a*) Dé un ejemplo de una retícula que tenga menor elemento pero no tenga mayor elemento.

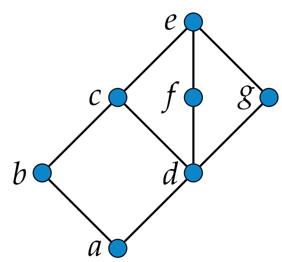
b) Dé un ejemplo de una retícula que tenga mayor elemento pero no tenga menor elemento.

7. Determine si la retícula $(D_{42}, |)$ es acotada, distributiva o complementada. En caso sea complementada halle los complementos de cada elemento.

8. Para cada una de las siguientes retículas determine si es acotada, distributiva o complementada.

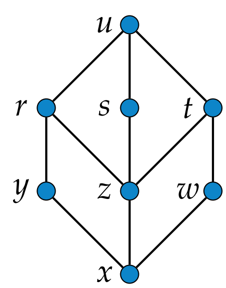
a)





b)

9. Considere la retícula cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



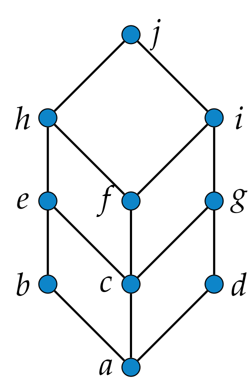
a) Calcule $y \wedge (z \vee w)$.

b) Determine todos los complementos de y, si los tuviera.

c) ¿Es una retícula complementada?

d) ¿Es una retícula distributiva?

10. Dado el siguiente diagrama de Hasse de una **retícula**:



a) ¿Es una retícula acotada?

b) Calcule $g \wedge j$.

c) Calcule $(e \vee f) \wedge g$.

d) Hallar todos los complementos de e, si los tuviera.

e) ¿Es una retícula complementada?

f) ¿Es una retícula distributiva?

g) Encuentre una subretícula que esté formada por 4 elementos.

h) ¿Es cierto que $\{a, b, c, d, f\}$ es una subretícula?

11. Suponga que a y b son elementos de una retícula acotada y distributiva. Si a' denota al complemento de a, demuestre que:

- $a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$.
- $a \wedge (a' \vee b) = a \wedge b$.

12. Considere la retícula $(D_{24}, |)$, donde D_{24} es el conjunto de todos los divisores positivos de 24. Sabemos que esta retícula es acotada (su mínimo es 1 y su máximo es 24).

Nota: Para responder las siguientes preguntas no es necesario realizar el diagrama de Hasse, pero lo puede hacer si lo ve conveniente.

a) Calcule $(4 \wedge 6) \vee 12$.

b) Determine todos los complementos de 3, si los tuviera.

c) ¿Es una retícula complementada?

d) ¿Es cierto que $\{2, 6, 8, 12, 24\}$ es una subretícula?

13. Para cada entero positivo n, D_n denota al conjunto de todos los divisores positivos de n. Además, sabemos que $(D_n, |)$ es una retícula para cualquier entero positivo n. ¿Es cierto que la retícula $(D_{30}, |)$ contiene una subretícula isomorfa a $(D_{12}, |)$?

14. Considere la retícula $(\{1, 2, 3, 5, 7, 210\}, |)$

a) ¿La retícula es complementada?

b) ¿La retícula es distributiva?

c) ¿La retícula tiene una subretícula de 4 elementos?

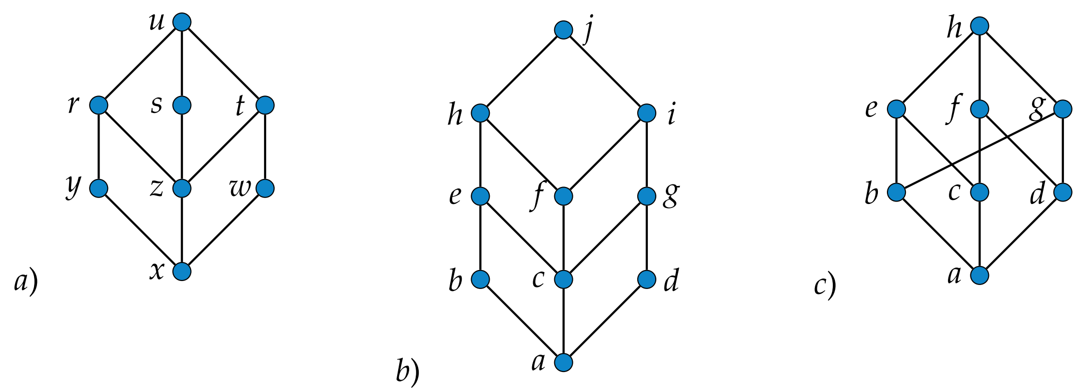
15. Dé un ejemplo de una retícula que esté formada por 6 elementos, que sea acotada y que no sea distributiva. Explique por qué su ejemplo cumple esas condiciones.

16. Si una retícula complementada tiene al menos dos elementos, demuestre que no es posible que un elemento sea igual a su complemento.

17*. Determine todas las subretículas de $(D_{24}, |)$ que contengan al menos cinco elementos.

Álgebras booleanas

1. Para cada una de las siguientes retículas determine si es un álgebra booleana:



2. Para cada una de las siguientes retículas determine si es un álgebra booleana:

   a) $(D_8, |)$.
   b) $(D_{12}, |)$.
   c) $(D_{13}, |)$.
   d) $(D_{14}, |)$.
   e) $(D_{54}, |)$.
   f) $(D_{105}, |)$.

3. Usando las propiedades de un álgebra booleana, simplifique las siguientes expresiones:

   a) $a + a \cdot a'$
   b) $b' + b + b$
   c) $a(a' + b)$
   d) $(a' + b')(a' + b)$
   e) $a(a + b + c)$
   f) $a + a' \cdot b$
   g) $a' + a' + a \cdot b$
   h) $(x + y')(x + y)$
   i) $x' + y \cdot y \cdot x'$
   j) $(w + x' + y + z')y$

4. Usando las propiedades de un álgebra booleana, simplifique la expresión:

$$(a' + b' + c)' + b,$$

donde a, b c son elementos cualesquiera.

5*. Si k es un entero positivo múltiplo de 4, demuestre que $(D_k, |)$ no es álgebra booleana.

6. Un álgebra booleana $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$ tiene elementos a y b tales que $a + b = 0$. Demuestre que $a = b = 0$.

7. Un álgebra booleana $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$ tiene elementos a y b tales que $ab = 1$. Demuestre que $a = b = 1$.

8. Un álgebra booleana $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$ tiene elementos a y b tales que $a \cdot b' + a' \cdot b = 0$. Demuestre que $a = b$.

9. Un álgebra booleana $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$ tiene elementos a y b tales que $a + b = b$. Demuestre que $a \cdot b' = 0$.

10. Un álgebra booleana $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$ tiene elementos a, b y c tales que $a + b = a' + c$. Demuestre que $a + b = 1$.

Funciones booleanas

1. Determine la f.n.d de una función $f : B^2 \to B$ tal que $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 0$, $f(1,0) = 1$ y $f(1,1) = 1$. También halle la f.n.d de la función $\overline{f}$.

2. ¿Es cierto que la función booleana $f : B^2 \to B$ definida por $f(x,y) = xy + \overline{x} + \overline{y}$ es constante?

3. Determine la f.n.d de una función $f : B^3 \to B$ tal que $f(a,b,c) = 1$ si y solo si (a,b,c) es igual a $(0,1,1)$ o $(1,0,0)$.

4. Determine la f.n.d. de la función boolena $g : B^3 \to B$ definida por

$$g(x,y,z) = \overline{(x+y) \cdot (x+z)}$$

y escriba g como la suma de mín-términos, es decir, escribirla en la forma $\sum_m (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

5. La función booleana $f : B^4 \to B$ es definida como:

$$f(w,x,y,z) = (x + zy)(\overline{x} + zy) + \overline{w}(x + \overline{w}z)$$

a) Determine la f.n.d. de la función f.

b) Escriba f como la suma de mín-términos, es decir, escribirla en la forma $\sum_m (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

c) Escriba f como producto de máx-términos, es decir, escribirla en la forma $\prod_m (b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$.

6. La función booleana $f : B^4 \to B$ es definida como:

$$f(w,x,y,z) = xyw(\overline{x} + y) + wz + x\overline{y}z$$

a) Determine la f.n.d. de la función f.

b) Escriba f como la suma de mín-términos, es decir, escribirla en la forma $\sum_m (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

c) Escriba f como producto de máx-términos, es decir, escribirla en la forma $\prod_m (b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$.

7*. Sea F_6 el conjunto de todas las funciónes booleanas $f : B^6 \to B$. Calcule el cardinal de F_6.

Capítulo 3: Técnicas de Conteo

Principios básicos del conteo, permutaciones y combinaciones

1. Para el menú de un comedor se presentan 4 entradas (una de las cuales ceviche), 5 platos diferentes como segundo (uno de los cuales es jalea) y 4 postres distintos. Si cada comensal debe elegir una entranda, un segundo y un postre, ¿de cuántas maneras diferentes podrá elegir Juan su menú, si cada vez que come ceviche en la entrada elige invariablemente una jalea como segundo?

2. En una urna hay 4 fichas numeradas del 1 al 4 y en otra urna hay 5 fichas numeradas del 5 al 9. Se saca una ficha de la primera urna y otra de la segunda urna, con las 2 fichas se forma un número de dos dígitos. ¿Cuántos son todos los valores posibles de este número?

3. Sea n un entero positivo. Hay n autopistas que unen las ciudades A y B. Sergio quiere ir de A a B y luego regresar. ¿De cuántas formas puede hacer eso si las autopistas que usará en su recorrido deben ser distintas?

4. En un país cada ciudad tiene un código telefónico de cuatro dígitos tal que el primer dígito (desde la izquierda) es 7, 8 o 9.

   a) ¿Cuántos códigos posibles hay en total?

   b) Considerando todos los códigos posibles, ¿cuántos cumplen que ninguno de sus dígitos es igual a 0?

   c) Considerando todos los códigos posibles, ¿cuántos cumplen que los dos primeros dígitos (desde la izquierda) son distintos?

   d) Considerando todos los códigos posibles, ¿cuántos cumplen que la suma de los dos dígitos centrales es menor que 3?

5. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud 18 no empiezan con 1 y no terminan en 0?

6. ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que la suma de los dos dígitos de la izquierda es igual al dígito central?

7. ¿Cuántos números de 3 dígitos cumplen que el producto de sus dígitos es par?

8. *a*) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen en el sistema nonal?

   b) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen en el sistema nonal, de tal modo que la suma de sus dígitos sea impar?

9. Determine cuántos números de 6 dígitos (en el sistema decimal) tienen todos sus dígitos distintos y además ninguno de ellos es igual a 0.

10. ¿Cuántos números de 4 dígitos, todos distintos de cero, tienen la propiedad de que al multiplicar sus 4 digitos se obtiene un número que es múltiplo de 7 pero no de 49?

11. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

    a) ¿Cuántos subconjuntos de X cumplen que su menor elemento es 4?

    b) ¿Cuántos subconjuntos de X cumplen que su mayor elemento es 8?

    c) ¿Cuántos subconjuntos de X cumplen que su mayor elemento es múltiplo de 4?

12. Con 4 banderas de diferentes colores se debe mandar un mensaje de un barco a otro. ¿Cuántos mensajes se pueden mandar si no es obligatorio usar todas las banderas? (Tenga en cuenta que el orden de las banderas sí importa).

13. ¿Cuántos números de tres dígitos de la forma $\overline{abc}$ cumplen que $a \neq b$ y $b \neq c$?

14. Responda las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

    a) ¿Cuántas cadenas de 10 bits son capicúas? (una cadena es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda).

    b) ¿Cuántas cadenas de 9 bits son capicúas?

    c) ¿Cuántas cadenas de 9 bits cumplen que la suma de sus bits es 4?

    d) ¿Cuántas cadenas de 9 bits tienen más unos que ceros?

    e) ¿Cuántas cadenas de 9 bits empiezan con 01 y terminan con 111?

    f) ¿Cuántas cadenas de 9 bits empiezan con 01 o terminan con 111?

15. Considere los 8! números que se obtiene al permutar los dígitos del número 12345678. Si todos esos números se ordenan de menor a mayor en una lista, ¿qué posición ocupa el número 47123568 ?

16. Considere todos los números que se obtienen al permutar los dígitos del número 1234567.

    a) ¿Cuántos de esos números empiezan con 4 ?

    b) ¿Cuántos de esos números son pares?

    c) ¿Cuántos de esos números cumplen que sus dos primeros dígitos (de la izquierda) suman 6?

    d) ¿Cuántos de esos números empiezan con 3 o terminan con 5?

17. Un padre, una madre y sus 7 hijos se van a sentar en una fila de 9 asientos en el cine.

    a) Determine de cuántas formas se pueden ordenar si el hijo mayor no debe estar en el extremo izquierdo.

b) Determine de cuántas formas se pueden ordenar si entre los padres debe haber exactamente un hijo.

c) Determine de cuántas formas se pueden ordenar si el padre debe sentarse en el asiento central y la madre no debe sentarse en un extremo.

18. Un club tiene 15 miembros, 10 hombres y 5 mujeres. ¿Cuántos comités de 8 miembros se pueden formar, si cada comité debe tener exactamente 3 mujeres?

19. En este momento hay trece jugadores de béisbol en el campo.

a) ¿De cuántas formas se pueden escoger diez jugadores?

b) Si hay tres mujeres entre los trece, ¿de cuántas formas se pueden escoger diez jugadores si debe haber al menos una mujer?

20. Determine cuántas cadenas de bits de longitud 20 tienen la propiedad de que en la mitad de la izquierda aparecen exactamente dos o tres 1.

Aclaración: Recuerde que una cadena de bits puede empezar con 0.

21. De los 100 primeros enteros positivos, ¿cuántos son múltiplos de 2 o de 3?

22. Determine cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ poseen una cantidad impar de elementos.

23. Sea $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a) ¿Cuántos subconjuntos de $\mathcal{C}$ cumplen que su menor elemento es 3?

b) ¿Cuántos subconjuntos de $\mathcal{C}$ contienen a 4 o contienen a 5?

c) ¿Cuántos subconjuntos de $\mathcal{C}$ contienen a 6 y 7, pero no a 8?

d) ¿Cuántos subconjuntos de $\mathcal{C}$ cumplen que la suma de su menor elemento con su mayor elemento es 11?

e) ¿Cuántos subconjuntos de $\mathcal{C}$ tienen al menos dos elementos, todos ellos impares?

24. Un estudiante debe seleccionar 5 cursos de los doce que tiene disponibles para el siguiente semestre, de tal forma que al menos uno de los cursos Redacción o Matemáticas sea seleccionado. ¿Cuántas combinaciones son posibles?

25. Un grupo de excursionistas esta conformado por 7 mujeres y 4 hombres. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una expedición de 6 personas en la cual debe haber por lo menos 2 hombres?

26. Considere un grupo formado por 5 hombres y 9 mujeres. Uno de los hombres es Raúl y una de las mujeres es Camila.

a) Determine de cuántas forma se puede formar un comité de 6 o 7 personas, si debe haber exactamente 3 hombres.

b) Determine de cuántas forma se puede formar un comité de por lo menos dos personas que no contenga a Raúl.

c) Determine de cuántas formas se puede formar un comité 8 personas si es necesario que, entre Raúl y Camila, por lo menos uno de ellos esté en el comité.

27. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. ¿Cuántos subconjuntos de X contienen exactamente cinco elementos: 2 pares y 3 impares?

28. Considere una baraja común que consta de 52 cartas (hay 4 palos y cada palo consta de 13 denominaciones: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). Una mano consiste en un subconjunto de 5 cartas (no importa el orden).

a) ¿Cuántas manos tienen exactamente una carta con el número 8?

b) ¿Cuántas manos tienen exactamente tres Q o exactamente tres K?

29. Tengo 4 fichas circulares (una roja, una verde, una azul y una blanca) y 3 fichas cuadradas (una roja, una verde y una celeste).

a) Determine de cuántas formas se pueden ordenar las 7 fichas en una fila si queremos que las fichas circulares estén juntas y las fichas cuadradas también estén juntas.

b) Determine de cuántas formas se pueden ordenar las 7 fichas en una fila si la ficha circular roja no está en la posición central.

c) Determine de cuántas formas se pueden ordenar las 7 fichas en una fila si las fichas de los extremos son del mismo color.

30. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por todos los números naturales de 5 dígitos tales que ningún dígito es igual a 2.

a) ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{A}$?

b) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{A}$ cumplen que la suma de los dos dígitos que están más a la izquierda es 8?

c) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{A}$ empiezan con 7 o terminan con 7 ?

d) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{A}$ cumplen que la suma de sus dígitos es par?

31. En una ciudad las placas de los automóviles tienen 6 caracteres, donde exactamente tres son dígitos (entre 0 y 9) y tres son letras (de un total de 26 letras del alfabeto). Por ejemplo: 0AB7A8, 568PQR, 78MK0M, 4A4B4C. Como se puede observar, en una placa no es necesario que los dígitos sean distintos o que las letras sean distintas.

a) ¿Cuántas placas se puede emitir en total?

b) ¿Cuántas placas cumplen que los dos primeros caracteres (de la izquierda) son letras?

32. Se permutan 5 dígitos: a, b, c, d y e (que son diferentes y ninguno de ellos igual a 0), formando con ellos todos los numerales de 3 dígitos diferentes. Si la suma de ellos es 42624, calcule $a + b + c + d + e$.

33. Un bus tiene 29 asientos para pasajeros, distribuidos en 6 filas de 4 asientos cada una, con un pasillo en el medio y al final 5 asientos juntos. ¿De cuántas formas diferentes podran ubicarse 25 pasajeros de tal modo que los 14 asientos que dan a las ventanillas queden ocupados?

34*. Una araña tiene una determinada media y un determinado zapato para cada una de sus 8 patas. ¿De cuántas formas diferentes la araña puede ponerse sus medias y zapatos, suponiendo que en cada pata debe ponerse la media antes del zapato?

35*. En cada casilla de un tablero de 7×7 se tiene que escribir 1 o 2 de tal forma que cada rectángulo de 1×4 o 4×1 contenga siempre cuatro números cuya suma sea par. Halle el número de formas en que se puede hacer esto.

Principio de las Casillas

1. Determine cuántas personas debe haber como mínimo en una reunión para asegurar que al menos 10 de ellas nacieron el mismo mes.

2. Determine cuántos números distintos, de dos dígitos cada uno, se debe escoger al azar y como mínimo para asegurar que dos de ellos tienen igual suma de dígitos.

3. Determine cuántas personas debe haber como mínimo en una reunión para asegurar que hay dos personas del mismo sexo que nacieron el mismo mes.

4. En una videoconferencia hay participantes de 5 países. ¿Cuántos participantes debe haber como mínimo para asegurar que entre ellos hay dos personas del mismo país que nacieron el mismo mes?

5. Demuestre que entre cualesquiera 11 enteros positivos, es posible escoger dos que coinciden en su dígito final.

6. Se escogen 10 números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$, demuestre que existen dos números escogidos cuya diferencia es 1.

7. Una baraja común consta de 52 cartas (hay 4 palos y cada palo consta de 13 denominaciones: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). ¿Cuántas cartas se debe extraer como mínimo para tener la seguridad de que hay al menos tres cartas del mismo palo?

8. La suma de siete enteros positivos es 50, demuestre que alguno de ellos es mayor o igual que 8.

9. Sea $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Un programa escoge al azar un subconjunto de tres elementos de $\mathcal{X}$. Determine cuántas veces como mínimo hay que correr ese programa para asegurar que al menos dos de los subconjuntos obtenidos tengan el mismo menor elemento.

Permutaciones y combinaciones con repetición

1. Determine de cuántas formas se pueden ubicar los números 1,2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3 en una fila de 12 lugares.

2. Calcule el número de arreglos diferentes que se pueden formar con todas las letras de la palabra $INGENIERO$ de tal modo que todas las vocales esten juntas.

3. En una caja se tiene 2 fichas rojas, 4 blancas, 3 azules, 1 verde y 1 negra. ¿De cuántas maneras diferentes se les puede ordenar en una fila de 11 lugares si las fichas rojas no deben estar juntas?

4. Determine cuántos enteros positivos de 7 dígitos cumplen que el producto de sus dígitos ...

   a) ... es 8.

   b) ... es 6.

   c) ... es 50.

   d) ... es 100.

   e) ... es 700.

5. ¿Cuántos números naturales de 6 dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es 51 ?

6. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los números de diez dígitos que se pueden obtener al permutar los dígitos del número 1223334444.

   a) ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{C}$?

   b) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{C}$ empiezan con 123 ?

   c) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{C}$ son pares?

   d) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{C}$ tienen la propiedad que sus tres dígitos 3 están juntos?

7. Considere todas las formas en que se pueden ordenar en una fila de 9 lugares las letras A, A, B, B, B, C, C, C, C. ¿En cuántas de esas formas se cumple que las letras de los extremos son iguales?

8. Considere todas las cadenas de 11 bits (no hay problema si el primer bit es 0) que tienen exactamente cuatro unos. ¿Qué porcentaje de ellas tiene el bit 1 en su posición central? (Puede usar calculadora para dar su respuesta final).

9. ¿Cuántos números naturales de 10 dígitos cumplen que tres dígitos son iguales a 0, tres dígitos son iguales a 1 y cuatro dígitos son iguales a 2? Tenga en cuenta que un número natural no puede empezar con 0.

10. En una heladería venden helados de coco, vainilla, chocolate, lúcuma y fresa. En la heladería hay muchos helados de cada tipo, a excepción del de coco, que solo tienen 2 unidades.

a) Una persona quiere comprar 14 helados, ¿de cuántas formas puede hacer eso si va a comprar 1 helado de coco y ninguno de fresa?

b) Una persona quiere comprar 13 helados, ¿de cuántas formas puede hacer eso?

11. En una frutería venden manzanas, peras y naranjas (supongamos que hay muchas frutas de cada tipo)

a) ¿De cuántas formas se puede comprar exactamente 12 frutas?

b) ¿De cuántas formas se puede comprar exactamente 14 frutas, si se debe comprar al menos una fruta de cada tipo?

c) ¿De cuántas formas se puede comprar exactamente 14 frutas, si se debe comprar al menos una manzana y al menos dos peras?

12. Se quiere repartir 23 canicas idénticas en 6 cajas de colores rojo, verde, azul, celeste, marrón y negro, de tal forma que se cumplan las siguientes tres condiciones a la vez:

- el número de canicas en la caja roja sea igual al número de canicas en la caja verde,
- el número de canicas en la caja azul sea igual al número de canicas en la caja celeste,
- el número de canicas en la caja marrón sea 1 más que el número de canicas en la caja negra.

¿De cuántas formas se puede hacer eso? (considere que está permitido que alguna caja se quede vacía)

13. En una tienda hay 90 paquetes de arroz: 20 de la marca Norteño, 30 de la marca Superior y 40 de la marca Rendidor.

a) Determine de cuántas formas se puede comprar 15 paquetes de arroz en esa tienda.

b) Determine de cuántas formas se puede comprar 21 paquetes de arroz en esa tienda.

Recurrencias lineales homogéneas

1. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_n = -2a_{n-1} + 15a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

con las condiciones $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

2. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

con las condiciones $a_1 = 4$ y $a_2 = -2$.

3. Si $a_2 = 2$ y $a_4 = 32$ satisfacen la ecuación de recurrencia

$$a_n - b \cdot a_{n-1} = 0, \quad n \geq 2$$

donde b es constante y $a_1 > 0$, encuentre a_n (en función de n).

4. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

con las condiciones $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$.

5. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_n = -10a_{n-1} - 25a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

con las condiciones $a_1 = -10$ y $a_2 = 40$.

6. Resuelva la recurrencia

$$b_{n+2} = \frac{10}{3} \cdot b_{n+1} - b_n, \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $b_0 = b_1 = 6$.

7. Una empresa vende suscripciones a un programa informático. Se ha determinado que, a partir del tercer año, el número de suscripciones vendidas cada año es igual al promedio del número de suscripciones vendidas los dos años anteriores.

   a) Halle una ecuación de recurrencia para V_n, donde V_n es el número de suscripciones vendidas el año n.

   b) Halle V_n si el primer año se vendieron 24000 suscripciones y el segundo año se vendieron 60000 suscripciones.

   c) ¿Cuál es tu interpretación del número V_n luego de muchos años, es decir, cuando n sea muy grande?

8. Resuelva la recurrencia

$$a_{n+2} = 12a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1,$$

con las condiciones iniciales $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

9. Resuelva la recurrencia

$$x_{n+2} = -6x_{n+1} - 9x_n, \quad n \geq 0,$$

si se sabe que $x_0 = 0$, $x_2 = 54$.

10. La sucesión $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ satisface la condiciones $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 27b_n$, para todo $n \geq 0$, además, $b_0 = 3$ y $b_1 = 15$. Demuestre que, para cada entero no negativo n, se cumple que $1 + b_n$ es un cuadrado perfecto.

11. Halle b_n y a_n a partir de las condiciones:

   - $a_n = b_{n-1} + a_{n-1}, \;\; n \geq 1$.
   - $b_n = a_n + a_{n-1}, \;\; n \geq 1$.
   - $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

12. Sea a_n el número de formas en que se puede dividir un tablero de $1 \times n$ en fichas de 1×1, 1×2 y 1×3.

   a) Encuentre una recurrencia para la sucesión a_n (No se pide resolverla).

   b) Use la recurrencia para hallar a_7.

13. Para el número real k consideremos la recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} + k \cdot a_n, \;\; n \geq 0$, con las condiciones iniciales $a_1 = 7$ y $a_2 = 23$.

   a) Si -1 es raíz de la ecuación característica, halle el valor de k y resuelva la recurrencia.

   b) Resuelva la recurrencia para $k = -\frac{1}{4}$.

14*. Determine el número de palabras de longitud n que se pueden formar en el alfabeto $\{a, b, c\}$ de modo que no existan dos letras a juntas.

15*. Calcule el número de palabras de longitud n que pertenezcan al alfabeto $\{a, b, c\}$ y que contengan un número impar de letras c.

Recurrencias lineales no homogéneas

1. Resuelva la recurrencia

$$t_n = 3t_{n-1} + 7, \quad n \geq 1$$

con condición inicial $t_0 = 5$.

2. Resuelva la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2n^2, \quad n \geq 2$$

con condición inicial $a_1 = 4$.

3. Un nuevo empleado de una compañía de software es contratado con un salario de \$50 000 anuales, y se acuerda que cada año que permanezca en la empresa su salario doblará al del año anterior, con un incremento adicional de \$10 000 por cada año.

   a) Determine una relación de recurrencia para el salario del empleado durante el n-ésimo año.

   b) Resuelva la relación de recurrencia hallada para determinar su salario durante el n-ésimo año.

4. Resuelva la siguiente relación de recurrencia:

$$f_n = 3f_{n-1} + 10f_{n-2} + 7 \cdot 5^n, \quad n \geq 2$$

con $f_0 = 4$ y $f_1 = 3$

5. Encuentre una solución para la relación de recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n+1)2^n, \quad n \geq 2,$$

con condiciones iniciales de $a_0 = 6$ y $a_1 = 2$.

6. Resuelva la recurrencia

$$a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 7^n, \quad n \geq 1,$$

con $a_0 = 2$

7. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, \quad n \geq 2$$

con las condiciones $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

8. Resuelva la siguiente recurrencia:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -200, \quad n \geq 0,$$

con las condiciones $a_0 = 3000$ y $a_1 = 3300$.

9. Para cada entero positivo n, definimos

$$a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Por ejemplo, $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 1^2 + 2^2 = 5$, etc.

a) Demuestre que $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$.

b) Resuelva la recurrencia no homogénea del ítem a). Tenga en cuenta que ya tenemos las condiciones iniciales.

10. Sea t una constante. Considere la recurrencia

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{4} \cdot y_n + t \cdot 2^n, \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 10,\ y_1 = 9$.

a) Resuelva la recurrencia para $t = 0$.

b) Resuelva la recurrencia para $t = 1$.

11. *a*) Resuelve la recurrencia $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n + 3 \cdot 2^n$, $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $b_1 = 1$, $b_2 = 3$.

b) Resuelve la recurrencia $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n + n + 1$, $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $b_1 = 0$, $b_2 = 0$.

12. Considere la recurrencia

$$d_{n+2} = 4d_{n+1} - 3d_n + 3^n, \quad n \geq 1,$$

de tal forma que $d_1 = d_2 = a$ y $d_3 = 5$. Halle el valor de a y resuelva la recurrencia.

13*. Encuentre una solución para la relación de recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3, \quad n \geq 2$$

con condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 4$.

14*. Se tiene n rectas en el plano tales que no hay tres que pasan por un mismo punto y no hay dos rectas paralelas. Calcule el número de regiones en que queda dividido el plano.

15*. En el plano se han trazado n rectas tales que entre ellas no hay dos que sean paralelas y no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. Esas rectas dividen al plano en regiones y suponga que exactamente a_n de esas regiones son **acotadas** (es decir, regiones limitadas por polígonos). Por ejemplo, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, etc.

a) Halle una recurrencia que relacione a_{n+1} con a_n.

b) Resuelva la recurrencia.

Resolución de recurrencias por funciones generatrices

1. Use el método de función generatriz para resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n, \quad a_0 = 4, a_1 = 12$$

2. Use funciones generatrices para resolver la siguiente ecuación:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2, \quad a_0 = 2, a_1 = 5$$

3. Use el método de función generatriz para resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n = 3a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 1$$

4. Use el método de función generatriz para resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = n, \quad a_0 = 1$$

5. Use el método de función generatriz para resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 2, a_1 = 1$$

6. Resuelva la siguiente recurrencia usando el método de funciones generatrices: $a_{n+1} + 3a_n = 5$, para todo $n \geq 0$, con la condición $a_0 = 2$.

7. Resuelva la siguiente recurrencia usando el método de funciones generatrices: $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$, para todo $n \geq 0$, con la condición $a_0 = 1$.

8. Resuelva la siguiente recurrencia usando el método de funciones generatrices: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (-1)^n$, para todo $n \geq 2$, con la condiciones $a_0 = 0$ y $a_1 = -\dfrac{1}{3}$.

Capítulo 4: Grafos

Definiciones

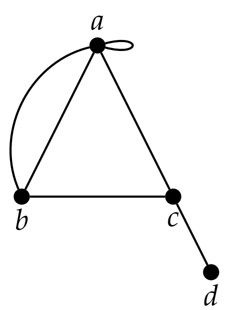
1. Considere el grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. En este grafo los vértices i y j están unidos por una arista si y solo si $i + j$ es par.

   a) Determine cuántas aristas tiene ese grafo.

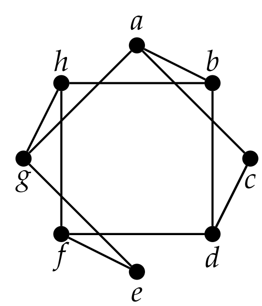
   b) ¿Ese grafo es conexo?

2. Encuentre el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice en cada uno de los siguientes grafos no dirigidos.

a)



b)



3. Considere el grafo simple G cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud 3. Dos vértices de G están unidos por medio de una arista si y solo si coinciden en exactamente dos posiciones. Dibuje el grafo G.

4. Dibuje los siguientes grafos

   a) $K_{4,2}$ *b*) Q_3 *c*) C_9 *d*) W_8

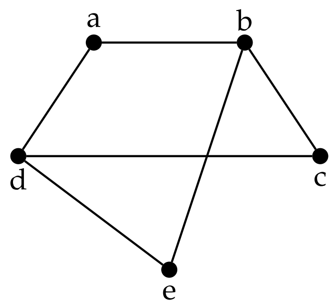
5. ¿Cuál es la longitud del camino simple (sin repetición de vértices) más largo en cada uno de los siguientes grafos?

   a) $K_{1,4}$ *c*) $K_{7,12}$ *e*) W_9

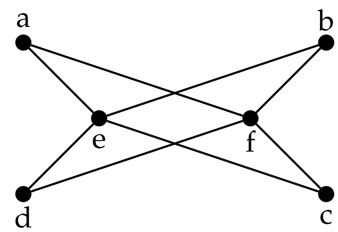
   b) $K_{3,7}$ *d*) C_{100} *f*) Q_3

6. Al grafo Q_{10} se le suprime un vértice, al hacer esto desaparece ese vértice y todas las aristas incidentes a ese vértice. ¿Cuántas aristas tiene el grafo que queda? ¿Cuál es el grado máximo del grafo que queda?

7. Para cada uno de los siguientes grafos determine si es o no bipartito.

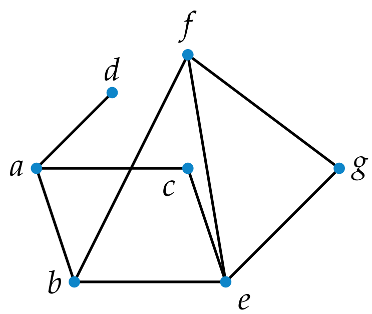


a)



b)

8. Sea G el grafo mostrado en la siguiente figura:



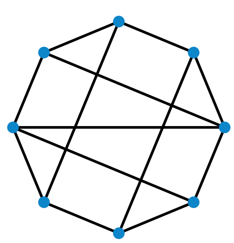
a) ¿Cuál es el vértice de mayor grado?

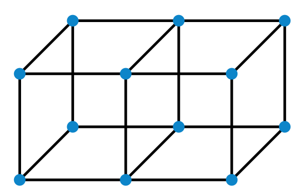
b) Encuentre el ciclo de mayor tamaño

c) Se sabe que el grafo anterior es conexo. Teniendo en cuenta esto, ¿existirá una arista que si es retirada convierta a G en un grafo disconexo? ¿qué arista es? Explique por qué no puede ser otra.

d) ¿El grafo es bipartito?

9. Para cada uno de los siguientes grafos determine si es o no bipartito:


a)


b)

10*. *a*) Considere un grupo de 1001 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a 2 personas?

b) Considere un grupo de 1001 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a 3 personas?

c) Considere un grupo de 1000 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a 3 personas?

d) Considere un grupo de 1001 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a 4 personas?

Aclaración: Considere que «conocerse» es una relación mutua, es decir, si A conoce a B entonces B conoce a A.

11. ¿Existe algún grafo simple cuyos vértices tengan grados 4, 4, 4, 4, 2?

12. *a*) ¿Cuántas aristas tiene el complemento del grafo C_{20}?

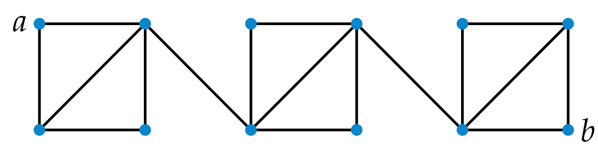
b) ¿Cuántas aristas tiene el complemento del grafo $K_{5,15}$?

13. Un grafo simple de 7 vértices es k-regular. Halle todos los posibles valores de k (justifique por qué los valores encontrados cumplen la condición y por qué son los únicos).

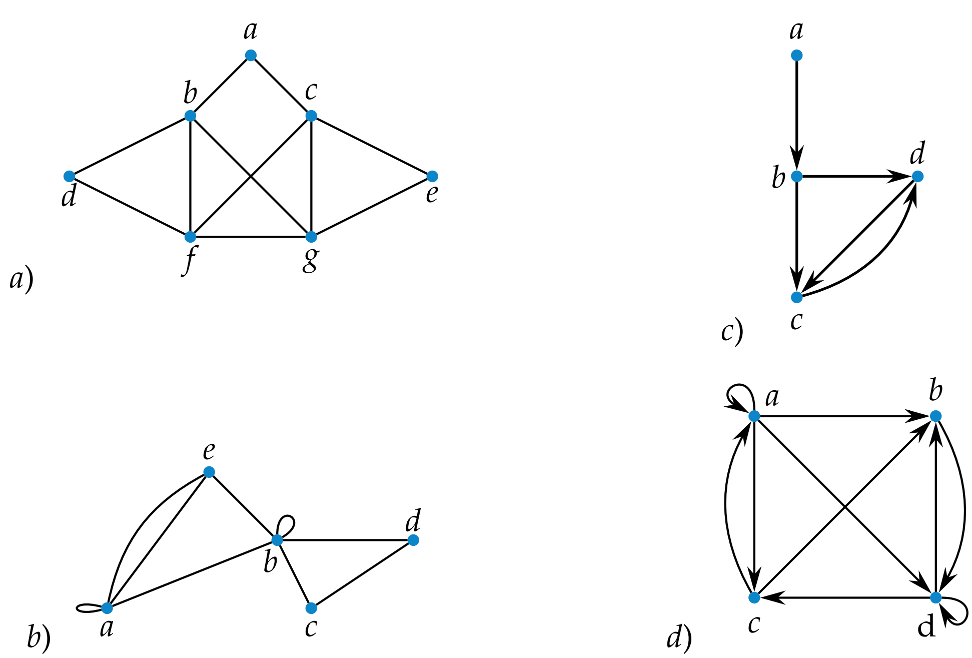
14*. Demuestre que en un grupo de 6 personas siempre existen 3 de ellas que se conocen mutuamente o 3 que no se conocen mutuamente.

15*. Demuestre que en todo grafo simple existen dos vértices con el mismo grado.

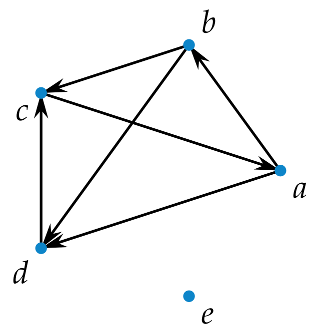
16. Determine cuántos caminos (que no repiten vértices) tienen como extremos a los vértices a y b:



17. Encuentre las matrices de adyacencia de los siguientes grafos:



18. Considere el siguiente grafo dirigido de 5 vértices:



Halle la matriz de adyacencia de ese grafo, considerando el siguiente orden de los vértices: d, a, b, c, e.

19. Muestre un grafo dirigido, sin aristas múltiples, cuyos vértices sean a, b, c, d, e tal que el grado de salida de cada vértice sea 2 y el grado de entrada de cada vértice también sea 2. Para el grafo mostrado dé la matriz de adyacencia, usando el orden de los vértices: a, b, c, d, e.

20. *a*) Dé un ejemplo de un grafo simple de 7 vértices que sea conexo tal que los grados de sus vértices sean 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5.

b) ¿Existe un grafo simple de 4 vértices tal que los grados de sus vértices sean 1, 3, 3, 3 ?

c) ¿Existe un grafo dirigido de 4 vértices, sin aristas múltiples, tal que los grados de salida de sus vértices sean 0, 1, 1, 2 ?

21. Halle la matriz de adyacencia de los siguientes grafos:

a) W_4 *b*) W_5 *c*) $K_{2,3}$

22. Para cada una de las siguientes matrices de adyacencia dibuje el grafo correspondiente:

a) $$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

23. A continuación se muestra la matriz de adyacencia de un grafo simple G:

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

a) Dibuje el grafo G.

b) ¿El grafo G es bipartito?

24. Sea G un grafo completo de 4 vértices.

a) Dé ejemplos de dos subgrafos de G que sean isomorfos a K_3 (triángulo).

b) Dé ejemplos de dos subgrafos G_1 y G_2 de G que sean isomorfos a C_4 (ciclo de longitud 4) pero que $G_1 \neq G_2$.

c) ¿Cuántos subgrafos de G son isomorfos a C_4 (ciclo de longitud 4)?

25. ¿Para qué valores de n se cumple que el grafo W_7 tiene un subgrafo isomorfo a C_n (ciclo de longitud n) ?

26. Considere el grafo W_{10} (rueda de 10 lados).

a) ¿El complemento de W_{10} es conexo?

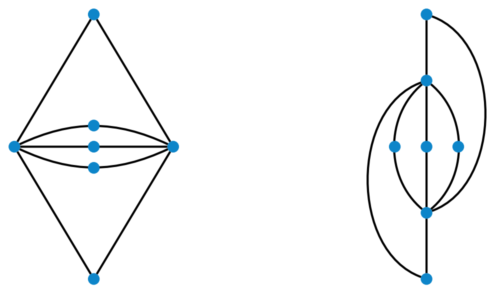
b) ¿Es cierto que W_{10} tiene un subgrafo isomorfo a C_6?

c) ¿Es cierto que W_{10} tiene un subgrafo isomorfo a $K_{2,4}$?

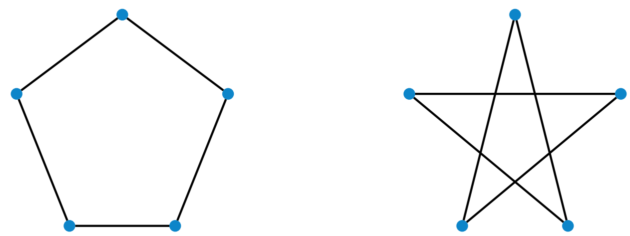
d) Demuestre que cualesquiera dos vértices distintos de W_{10} están unidos por un camino de longitud menor o igual que 2.

27. Sea H un subgrafo del grafo $K_{5,7}$, tal que H tiene 5 vértices. ¿Cuántas aristas puede tener H? (Analice todas las posibles respuestas)

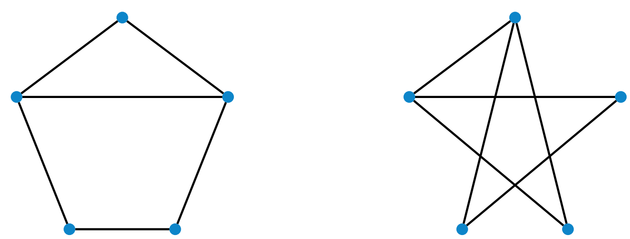
28. Para cada una de las siguientes parejas de grafos, determine si son isomorfos. Justifique su respuesta.



a)

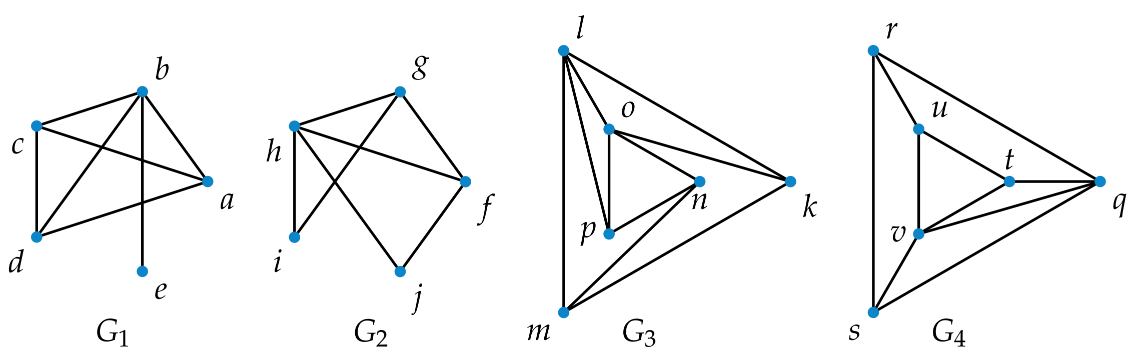


b)



c)

29. Considere los siguientes cuatro grafos simples:



a) Dibuje $\overline{G_1}$ (complemento de G_1) y determine si $\overline{G_1}$ es conexo.

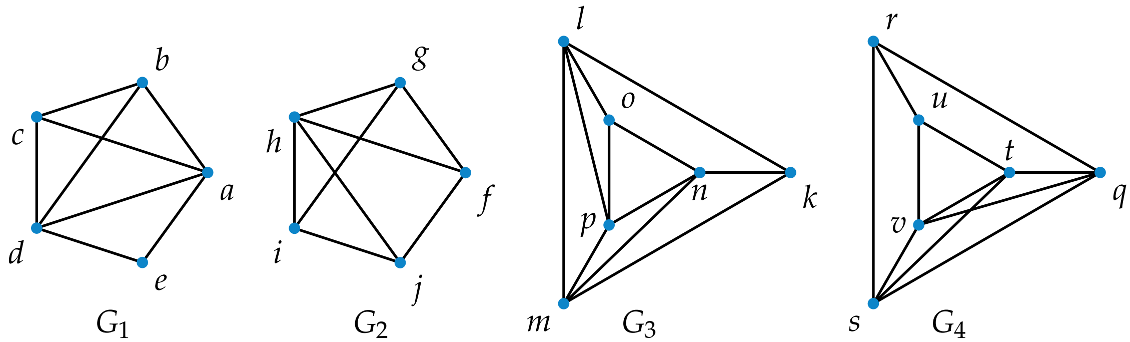
b) ¿Es cierto que el grafo G_2 tiene un subgrafo de 4 vértices y 6 aristas?

c) ¿Es cierto que si en el grafo G_3 borramos las aristas op y lk, obtenemos un grafo que es bipartito?

d) ¿Es cierto que G_2 contiene un ciclo simple (no repite vértices) que pasa por todos los vértices?

e) ¿Es cierto que los grafos G_3 y G_4 son isomorfos?

30. Considere los siguientes cuatro grafos simples:



a) Dibuje el complemento del grafo G_2 y determine si es conexo.

b) ¿Es cierto que el grafo G_3 es bipartito?

c) ¿Es cierto que el grafo G_4 contiene al menos un ciclo de longitud 5?

d) ¿Es cierto que los grafos G_1 y G_2 son isomorfos?

e) ¿Es cierto que los grafos G_3 y G_4 son isomorfos?

31. Sea G_1 el grafo que se obtiene al forma el ciclo con los vértices a, b, c, d, e, f (en ese orden). Sea G_2 el grafo completo cuyos vértices son f, b y d. Dibuje G_1, G_2 y $G_1 \cup G_2$.

32. Sea G_1 el grafo completo cuyos vértices son $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{40}$. Sea G_2 el grafo completo cuyos vértices son $v_{20}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{60}$. ¿Cuántas aristas tiene $G_1 \cup G_2$?

33*. Suponga que G_1 y G_2 son grafos isomorfos. Pruebe que sus respectivos grafos complementarios también son isomorfos.

Grafos eulerianos, grafos hamiltonianos, número cromático

1. *a*) ¿Para qué valores de n el grafo K_n tiene ciclo euleriano? ¿y para qué valores de n ese grafo tiene camino euleriano?

b) ¿Para qué valores de n el grafo C_n tiene ciclo euleriano? ¿y para qué valores de n ese grafo tiene camino euleriano?

c) ¿Para qué valores de n el grafo W_n tiene ciclo euleriano? ¿y para qué valores de n ese grafo tiene camino euleriano?

d) ¿Para qué valores de n el grafo Q_n tiene ciclo euleriano? ¿y para qué valores de n ese grafo tiene camino euleriano?

2. Determine para qué valores de m y n se cumple que el grafo completo bipartito $K_{m,n}$ tiene ...

a) ... un ciclo euleriano.

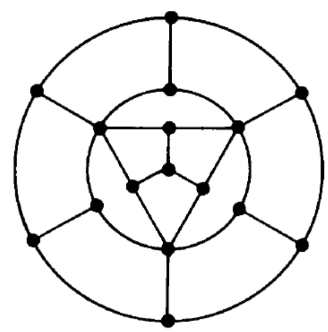
b) ... un camino euleriano.

3. Al grafo completo de cinco vértices: a, b, c, d y e se le ha borrado las aristas bc, cd y be. ¿Ese grafo tiene camino hamiltoniano? ¿Ese grafo tiene ciclo hamiltoniano?

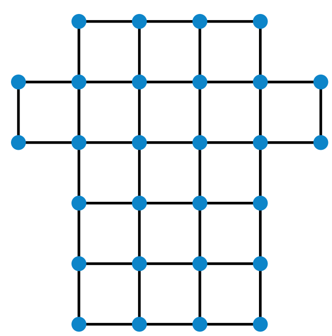
4*. ¿Para qué valores de m y n el grafo bipartito $K_{m,n}$ tiene un ciclo hamiltoniano?

5. ¿Existe un grafo de 9 vértices que no contenga un ciclo hamiltoniano, pero el grado de cada vértice sea mayor o igual que 4 ?

6*. Demuestre que el siguiente grafo no tiene ciclo hamiltoniano (sugerencia: utilice el vértice central).



7. Considere el siguiente grafo:

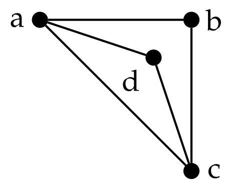


a) ¿Ese grafo tiene camino hamiltoniano?

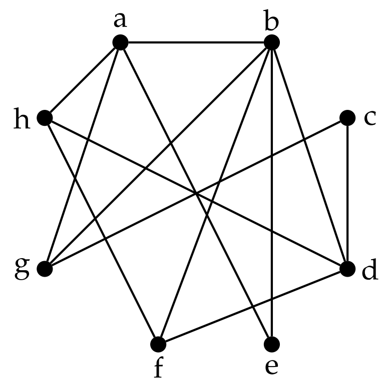
b) Demuestre que a ese grafo se le puede borrar cuatro aristas de tal manera que el grafo que quede tenga ciclo euleriano (aclaración: al borrar aristas no se alteran los vértices).

8. Encuentre un grafo simple de 6 vértices que tenga ciclo euleriano pero no tenga ciclo hamiltoniano.

9. Determine el número cromático de los siguientes grafos.



a)



b)

10. Determine el número cromático de los siguientes grafos:

a) K_7

b) $K_{5,5}$

c) W_8

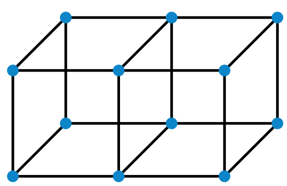
d) W_7

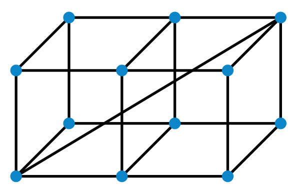
e) Q_4

f) Q_5

11. Considere un grafo completo de 6 vértices: a, b, c, d, e, f. A ese grafo se le borran las aristas ad, cf y bc, y de esta forma se obtiene el grafo G que tiene 6 vértices y 12 aristas. Halle el número cromático de G.

12. Considere los siguientes dos grafos:





a) Halle el número cromático del grafo de la derecha.

b) ¿El grafo de la izquierda tiene camino hamiltoniano?

13. Encuentre un grafo simple de 6 vértices que tenga número cromático 3 y que tenga camino euleriano. Justifique por qué el grafo que encontró tiene esas propiedades.

14. ¿Existe un grafo simple que **no** sea plano cuyo número cromático sea 6?

Árboles

1. Considere el grafo $K_{10,15}$. Se borraron exactamente k aristas de ese grafo (sin borrar vértices) de tal forma que se obtuvo un árbol. Calcule k.

2. Demuestre que todo árbol es bipartito.

3. Considere el árbol cuyos vértices son a, b, c, d, e, f, g, h, i, j y cuyas aristas son ab, bc, df, bd, fe, fg, dh, hi, hj.

a) Dibuje ese árbol considerando al vértice a como raíz. Para ese árbol, ¿cuál es el subárbol que tiene raíz d?

b) Dibuje ese árbol considerando al vértice f como raíz. Para ese árbol, ¿cuál es el subárbol que tiene raíz b?

c) ¿Qué vértice se debe escoger como raíz para que la altura del árbol resultante sea la menor posible?

4. En un árbol cada vértice tiene grado 1 o 4. Si se sabe que n vértices son de grado 4, ¿cuántos son de grado 1? (la respuesta se expresa en función de n).

5. Un árbol tiene trece vértices: nueve de grado 1, uno de grado 3 y tres de grado k. Halle el valor de k. Analice todas las posibilidades.

6. Encuentre un árbol generador del grafo $K_{3,7}$.

7. Encuentre dos árboles generadores del grafo $K_{2,3}$ que no sean isomorfos entre sí.

8. Considere un grafo completo de 4 vértices. ¿Cuántos árboles generadores tiene en total? (ejemplo: si los vértices son a, b, c, d, un árbol generador es el que consta de los vértices a, b, c, d y aristas ab, bc, bd)

9. ¿Existe un árbol de 12 vértices cuyos grados sean 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3 ?

10. Encuentre dos árboles que **no** sean isomorfos, de tal manera que cada uno tenga 7 vértices y los grados de cada uno sean 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4.

11. *a*) Un árbol binario tiene 12 vértices, ¿cuál es su mayor altura posible?

b) ¿Es posible que un árbol binario completo tenga 12 vértices?

c) ¿Es posible que un árbol binario completo tenga 16 vértices?

d) Un árbol binario completo tiene 13 vértices, ¿cuál es su mayor altura posible?

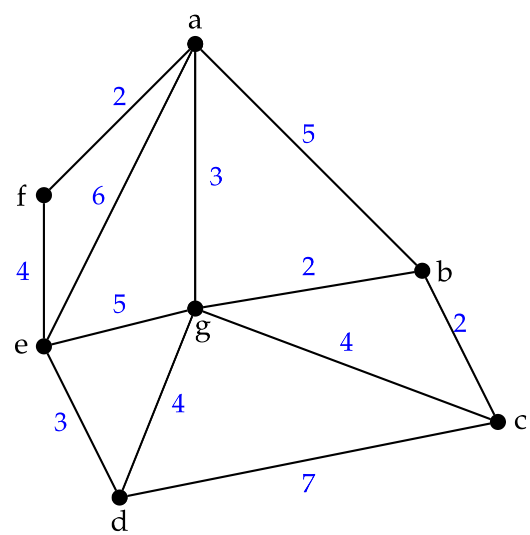
12. ¿Existe un árbol de 10 vértices cuyos grados sean $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4$?

13. Un árbol ternario completo tiene 34 vértices internos, ¿cuántas aristas tiene? ¿cuántas hojas tiene?

14. Considere un árbol binario completo, al ser visto como grafo se cumple que tiene exactamente 100 vértices de grado 3. ¿Cuántos vértices tiene en total este árbol?

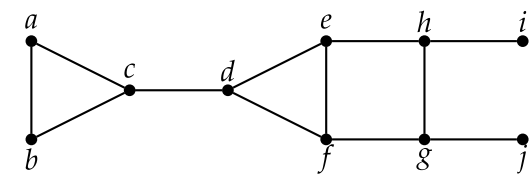
15. Suponga que A_1 y A_2 son árboles ternarios completos, de 13 vértices cada uno. ¿Podemos asegurar que A_1 y A_2 son isomorfos?

16. Una ciudad planea implementar ciclovías que conecten con varios centros de esparcimiento. En la figura, se muestra un mapa con dichos centros y sus respectivas distancias entre sí. ¿Qué caminos se puede pavimentar para que todos los centros queden conectados por medio de caminos pavimentados pero con un costo mínimo?

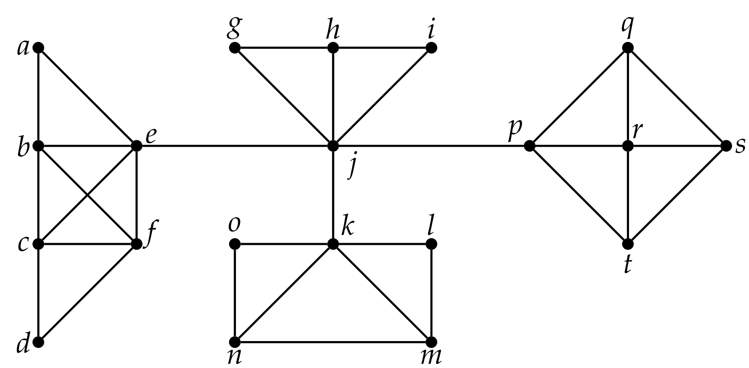


17. Genere un árbol usando búsqueda en anchura (BFS) a partir de los siguientes grafos:

a)

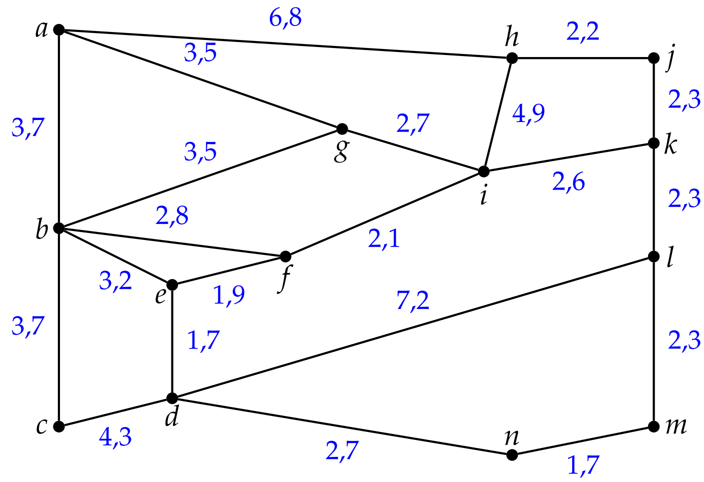


b)



18. Genere un árbol usando búsqueda en profundidad (DFS) a partir de los grafos del problema anterior.

19. Use el algoritmo de Prim para encontrar un árbol expansión mínima para el siguiente grafo:



a) Comenzando desde el vértice m.

b) Comenzando desde el vértice k.

20. Use búsqueda en profundidad (DFS) para encontrar el árbol de expansión de los siguientes grafos:

a) W_6.

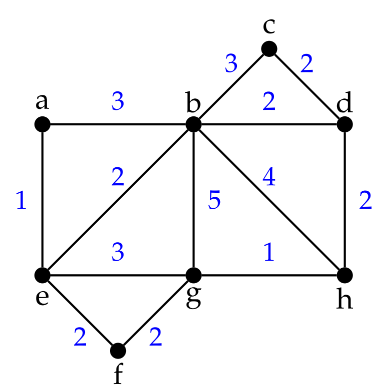
b) K_5.

c) $K_{3,4}$.

d) Q_3.

21. Use búsqueda en anchura (BFS) para encontrar el árbol de expansión para cada grafo del problema anterior.

22. Encuentre el árbol de expansión mínima usando el algoritmo de Kruskal.



23. Considere un grafo bipartito completo $K_{3,5}$ que tiene dos partes: una parte consta de los vértices v_1, v_2, v_3 y la otra parte consta de los vértices v_4, v_5, v_6, v_7, v_8.

a) Use el Algoritmo de búsqueda en anchura (BFS) para hallar un árbol de expansión (también llamado árbol generador), empezando en el vértice v_1. Indique con cuidado los pasos y dibuje el árbol encontrado (árbol con raíz v_1).

b) Ahora suponga que las aristas del grafo tienen pesos de la siguiente forma: todas las aristas que salen de v_1 tienen peso 2, todas las aristas que salen de v_2 tienen peso 3 y todas las aristas que salen de v_3 tienen peso 4. Use el Algoritmo de Prim para encontrar un árbol de expansión mínima. Indique con cuidado los pasos.

24. Considere el grafo completo de seis vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 en el que la arista $v_i v_j$ tiene peso $|i - 2j|$ (considere que i y j son distintos). Aplique el algoritmo de Prim a este grafo para encontrar el árbol de expansión mínima, empezando en el vértice v_3, indicando los pasos empleados (aclaración: tiene que dibujar el grafo original y el árbol de expansión mínima que obtuvo).