Inducción

lunes, 19 de agosto de 2024 15:07

① Inducción:

$P(1)$ → Caso base

$\forall n \in \mathbb{N} \; P(n) \to P(n+1)$ → Caso inductivo

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$

Ej ① $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad P(1) = \sum_{i=1}^{1} = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{h(h+1)}{2} \to \frac{(h+1)(h+2)}{2}$

$\sum_{i=1}^{h} i \to \sum_{i=1}^{h+1} i$

Ej 2: $\forall r \notin \{0,1\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

Caso base $n=1$

$\sum_{k=0}^{1} r^k = r^0 + r^1 = 1 + r = 1 + r\frac{(r-1)}{(r-1)} = \frac{r-1+r^2-r}{(r-1)} = \frac{r^2-1}{(r-1)}$ ✓

Paso inductivo Queremos ver que si $\sum_{k=0}^{h} r^k = \frac{r^{h+1}-1}{r-1}$ Hipótesis inductiva

entonces $\sum_{k=0}^{h+1} r^k = \frac{r^{(h+1)+1}-1}{r-1}$

$\sum_{k=0}^{h+1} r^k = \sum_{k=0}^{h} r^k + r^{h+1} = \frac{r^{h+1}-1}{r-1} + r^{h+1} = \frac{r^{h+1}-1+r^{h+1}(r-1)}{r-1}$

$= \frac{r^{h+1}-1+r^{h+2}-r^{h+1}}{r-1} = \frac{r^{h+2}-1}{r-1}$ ✓

Ej. 3:

$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(\forall n \in \mathbb{N} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \right)\right)$

- $n=1$

$\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i^2 = x_1^2 = \left(\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i\right)^2$

- $n=2$

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = \left(\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\right) = \frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)$

Paso inductivo

Supongo que $\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} x_i\right)^2$ para algún $h \geq 1$

quiero ver que $\frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{h+1} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{h+1} x_i\right)^2$

$\frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{h+1} x_i^2 = \frac{1}{h+1}\left(\sum_{i=1}^{h} x_i^2 + x_{h+1}^2\right)$

Ej 4. $\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ f_1 = 1 \quad f_0 = 0 \end{cases}$

$f_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para $A, B \in \mathbb{R}$

- $n=0$ $\quad f_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$

$0 = A + B$ ①

- $n=1$ $\quad f_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$1 = A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 2$

$A + A\sqrt{5} + B - B\sqrt{5} = 2$

$A\sqrt{5} - B\sqrt{5} = 2$

$\sqrt{5}(A-B) = 2$ ②

$\begin{cases} A+B=0 & \to A=-B \\ \sqrt{5}(A-B)=2 & \to \sqrt{5}(2A)=2 \end{cases}$

$A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore A = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$* \quad \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n$

$f_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\sqrt{5}+5-\sqrt{5}+5 = 10$ ✓

Inducción débil

$P(1)$

$\forall n \in \mathbb{N} \; P(n) \to P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$

1) Paso base: $P(1)$ es verdadero

2) Paso inductivo: $P(k)$ es verdadero, para $k \in \mathbb{N}$

$\to P(k+1)$ es verdadero

$\therefore P(n)$ es verdadero

Inducción fuerte

$P(1)$

$\forall n \in \mathbb{N} \; \bigwedge_{i=0}^{n} P(i) \to P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$

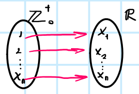
1) Paso base: $P(1)$ es verdadero

2) Se cumplen $P(1), P(2), \ldots, P(k)$

Por demostrar que $P(k+1)$

Sucesiones Recurrentes

El conjunto de partida son los $\mathbb{Z}_0^+$ y el conjunto de llegada son los $\mathbb{R}$. A partir de un n los siguientes dependen desde cierto punto n.



Ej 1. $X_n = 2X_{n-1}, \quad n \geq 2$

Sin pérdida de generalidad

$n \geq 2 \qquad X_n = 2X_{n-1}$

$n-1 \geq 1 \qquad X_{m+1} = 2X_m, \; m \geq 1$

$m \geq 1 \qquad X_{n+1} = 2X_n, \; n \geq 1$

Ejercicio: $(X_n)_{n\geq 1} \quad X_1 = 1, \; X_{n+1} = 2X_n + 1 \quad \forall n \geq 1$

$P(n)$: X_n tal que $X_n = 2^n - 1, \; n \in \mathbb{Z}^+$

1) $P(1)$: $X_1 = 1 = 2^1 - 1 \to X_1 = 2^1 - 1$ es verdadero

2) Asumimos que es verdad $P(k)$, es decir, $X_k = 2^k - 1$

3) Por demostrar que $P(k+1)$ es verdad $\vee$ $X_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ ✓

$X_{k+1} = 2X_k + 1$

$X_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1$

$X_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ Es verdadero.

$\therefore X_n = 2^n - 1, \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Inducción a partir de los dos anteriores

1) $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas

2) Si $P(k)$ y $P(k+1)$ son verdaderas entonces $P(k+2)$ será verdadero.

3) $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Ej 4. $(X_n)_{n\geq 1} \quad X_1 = 5, \; X_2 = 9$

$X_{n+2} = 3X_{n+1} - 2X_n, \quad n \geq 1$

Demostrar $X_n = 2^{n+1} + 1, \; n \in \mathbb{Z}^+$

1) $X_1 = 2^2 + 1 = 5 \; \wedge \; X_2 = 2^3 + 1 = 9$

2) $P(k)$: $X_k = 2^{k+1} + 1$

$P(k+1)$: $X_{k+1} = 2^{k+2} + 1$

Por demostrar que $P(k+2)$ es verdadero

o $X_{k+2} = 2^{k+3} + 1$

$X_{k+2} = 3X_{k+1} - 2X_k$

$X_{k+2} = 3(2^{k+2} + 1) - 2(2^{k+1} + 1)$

$\quad = 3 \cdot 2^{k+2} + 3 - 2^{k+2} - 2$

$\quad = 3 \cdot 2^{k+2} - 2^{k+2} + 1$

$\quad = 2 \cdot 2^{k+2} + 1$

$\quad = 2^{k+3} + 1$ Se cumple //

$\therefore X_n = 2^{n+1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Ej 5. F_n es la sucesión de Fibonacci.

$F_1 = 1 \quad F_2 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1$

$$f_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5}+5-\sqrt{5}+5=10 \checkmark$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5}+10+5\sqrt{5}-\sqrt{5}+10-5\sqrt{5} = 20 \checkmark$$

Inducción de dos en dos

$P_{(1)} \wedge P_{(2)}$ son verdaderas

Si $P_{(k)}$ es verdadera entonces $P_{(k+2)}$ es verdadero

$\therefore$ $P_{(n)}$ es verdadera.

Inducción de 3 en 3

$P_{(1)} \wedge P_{(2)} \wedge P_{(3)}$

Si $P_{(k)}$ es verdadera, entonces $P_{(k+3)}$ es verdadera

$\therefore$ $P_{(n)}$ es verdadera

Ej 5. $P_{(n)}: n = 3 \cdot a + 7 \cdot b,\ a, b \in \mathbb{Z}_0^+$

1) $P_{(12)} = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 0$

$P_{(13)} = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1$

$P_{(14)} = 7 \cdot 2$

2) Se asume que $P_{(k)}: k = 3a + 7b$, para $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$

3) Por demostrar que $P_{(k+3)}: k+2 = 3 \cdot k_1 + 7 \cdot k_2$, para $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$.

$k = 3a + 7b \rightarrow k+3 = 3a + 7b + 3$

$k+3 = 3(a+1) + 7b \qquad a+1 \in \mathbb{Z}_0^+$ Se cumple

$\therefore P_{(n)} = 3a + 7b$

Ej 5. F_n es la sucesión de Fibonacci.

$F_1 = 1 \quad F_2 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \geq 1$

Demostrar: $F_n < 2^n$

1) $P_{(1)}$ $F_1 = 1 < 2^1$

$P_{(2)}$ $F_2 = 2 < 2^2$

2) Asumimos que son verdaderas:

$P_{(k)}$ $F_{(k)} < 2^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$

$P_{(k+1)}$ $F_{(k+1)} < 2^{k+1}$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$

3) Por demostrar que $P_{(k+2)}: F_{k+2} < 2^{k+2}$

$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k < 2^{k+1} + 2^k$

$\quad " \quad = \quad " < 2^k(3)$

$3 < 4 \rightarrow 3 \cdot 2^k < 4 \cdot 2^k$

$F_{k+2} < 2^k \cdot 2^2 \rightarrow F_{k+2} < 2^{k+2}$

$\therefore P_{(n)}$ es verdadera.

① Relación de orden parcial

Propiedades:

i) Reflexiva: $\forall a \in X$ se tiene que $(a,a) \in R$.

ii) Antisimétrica: Si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ entonces $a=b$.

iii) Transitiva: Si $(a,b) \in R \vee (b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.