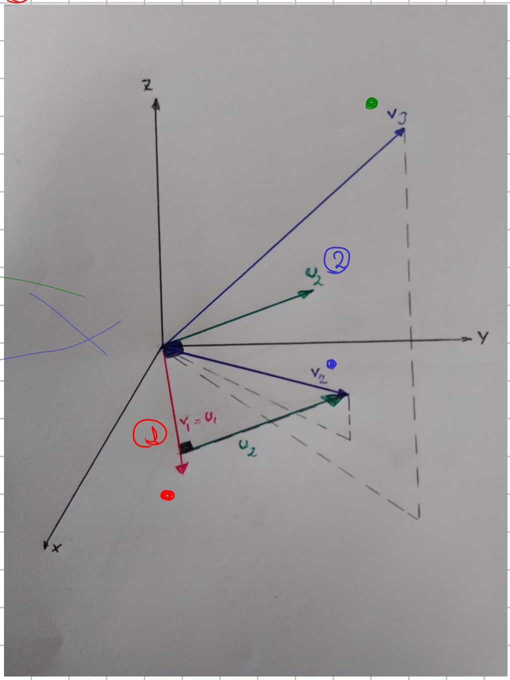
BONILLA SARMIENTO MARTIN – TAREA SEMANAL 2

PREGUNTA 1

A



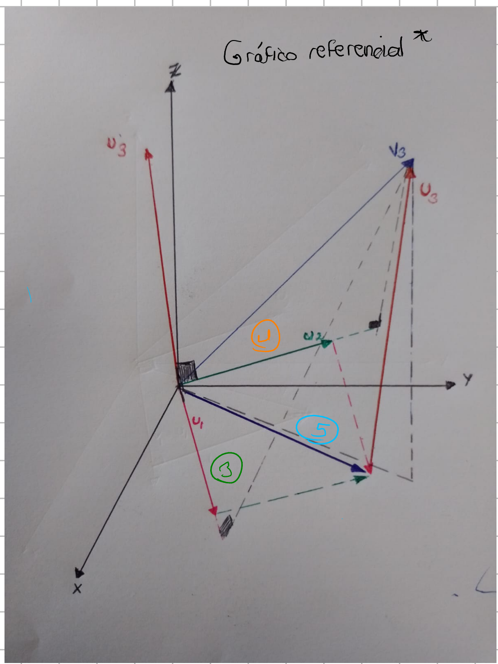
En el proceso de Gram-Schmidt tenemos 3 vectores no coplanarios cualesquiera que en el gráfico denotaremos: v_1, v_2 y v_3.

Para encontrar 3 vectores ortogonales que describan el mismo espacio tenemos:

$u_1 = v_1$ 1

Para el vector u_2 proyectamos el vector v_2 en u_1 y al restar $v_2 - proy_{u_1} v_2$ de esa manera tenemos el vector u_2 2

Como se muestra en la imágen el vector u_2 con u_1 son ortogonales entre sí.



Para el vector u_3 aplicaremos el mismo criterio de encontrar la proyección con los vectores u_1 y u_2. Podemos interpretar de mejor manera.

$$u_3 = v_3 - proy_{u_1} v_3 - proy_{u_2} v_3$$

$$= v_3 - (\underbrace{\overset{3}{proy_{u_1} v_3} + \overset{4}{proy_{u_2} v_3}}_{\text{Vector RESULTANTE de las proyecciones. } 5})$$

Al realizar esta operación ya tendríamos los 3 vectores ortogonales generando el mismo espacio.

b

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Para demostrar si los vectores v_1, v_2 y v_3 son coplanarios podemos usar el triple producto escalar $v_1 \cdot (v_2 \times v_3)$ y demostrar que es distinto de cero.

$$v_2 \times v_3 = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \langle 2, -25, 11 \rangle$$

$$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = \langle 0,2,0 \rangle \cdot \langle 2,-25,11 \rangle$$

$$= 0 - 50 + 0 = -50 \neq 0$$ No son coplanarios.

Para encontrar nuevos vectores ortogonales usaremos el proceso de Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = v_2 - proy_{u_1} v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{u_1 \cdot v_2}{|u_1|^2}(u_1)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{\cancel{-2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - proy_{u_1} v_3 - proy_{u_2} v_3$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{u_1 \cdot v_3}{|u_1|^2}(u_1) - \frac{u_2 \cdot v_3}{|u_2|^2}(u_2)$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{-4}^{\,-1}}{\cancel{4}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \cancel{0}^{\,0} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los nuevos vectores generan el mismo espacio ya que cada vector es una combinación lineal de los vectores anteriores y están los vectores ortogonales en el mismo subespacio que los anteriores.

c

Los vectores ortonormales serán: e_1, e_2 y e_3

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$|u_1| = 2$ $|u_2| = 5$ $|u_3| = 5$

$e_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$ $e_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$ $e_3 = \frac{u_3}{|u_3|}$

e_1, e_2 y e_3 serán los vectores unitarios de u_1, u_2 y u_3 eso significa que las combinaciones que generan en el espacio son las mismas

d

Demostrar:

- $v_j \cdot e_i = 0$ si $i > j$ ... (1)
- $v_i \cdot e_i \neq 0$ $\forall i$ ... (2)

Podemos probar con el subíndice de cada vector:

$$v_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto se cumple (1).

$$v_1 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$v_3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = 5$$

$$v_2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} = 4\left(\frac{4}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{5}\right) = 5$$

Por lo tanto se cumple (2) ya que los valores son $\neq 0$.

PREGUNTA 2

a) Demostrar $(v_j\cdot e_1)e_1+(v_j\cdot e_2)e_2+(v_j\cdot e_3)e_3 = Q\begin{vmatrix} (v_j\cdot e_1)\\ (v_j\cdot e_2)\\ (v_j\cdot e_3)\end{vmatrix}$

$Q: \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}$

Partiendo que $v_1\cdot e_2=0$, $v_1\cdot e_3=0$ y $v_2\cdot e_3=0$. Podemos analizar para cada caso de j (1,2,3).

Para $j=1$

$(v_1\cdot e_1)e_1+(v_1\cdot e_2)e_2+(v_1\cdot e_3)e_3=(v_1\cdot e_1)e_1+0+0=Q\begin{vmatrix}(v_1\cdot e_1)\\(v_1\cdot e_2)\\(v_1\cdot e_3)\end{vmatrix}$

$\square\ (v_1\cdot e_1)e_1 = Q\begin{vmatrix}(v_1\cdot e_1)\\0\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(v_1\cdot e_1)\\0\\0\end{vmatrix}$

$= e_1(v_1\cdot e_1)$

Para $j=2$

$(v_2\cdot e_1)e_1+(v_2\cdot e_2)e_2+(v_2\cdot e_3)e_3=(v_2\cdot e_1)e_1+(v_2\cdot e_2)e_2+0$

$=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_2\cdot e_1\\v_2\cdot e_2\\0\end{vmatrix} = e_1(v_2\cdot e_1)+e_2(v_2\cdot e_2)$

Para $j=3$

$(v_3\cdot e_1)e_1+(v_3\cdot e_2)e_2+(v_3\cdot e_3)e_3=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_3\cdot e_1\\v_3\cdot e_2\\v_3\cdot e_3\end{vmatrix}$

$e_1(v_3\cdot e_1)+e_2(v_3\cdot e_2)+e_3(v_3\cdot e_3)$

b) Demostrar $\begin{vmatrix}Qc_1 & Qc_2 & Qc_3\end{vmatrix}=QR$

$c_j=\begin{vmatrix}v_j\cdot e_1\\v_j\cdot e_2\\v_j\cdot e_3\end{vmatrix}$ $\quad R:\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ $\quad Q=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}$

$$\left|\ \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_1\cdot e_1\\v_1\cdot e_2\\v_1\cdot e_3\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_2\cdot e_1\\v_2\cdot e_2\\v_2\cdot e_3\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_3\cdot e_1\\v_3\cdot e_2\\v_3\cdot e_3\end{vmatrix}\ \right|$$

$$\left|\ \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_1\cdot e_1\\0\\0\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_2\cdot e_1\\v_2\cdot e_2\\0\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_3\cdot e_1\\v_3\cdot e_2\\v_3\cdot e_3\end{vmatrix}\ \right|$$

$$\begin{vmatrix} e_1(v_1\cdot e_1) & e_1(v_2\cdot e_1) & e_1(v_3\cdot e_1)\\ 0 & e_2(v_2\cdot e_2) & e_2(v_3\cdot e_2)\\ 0 & 0 & e_3(v_3\cdot e_3)\end{vmatrix} = QR$$

c) $A=\begin{vmatrix}0 & 4 & 3\\2 & -1 & 2\\0 & -3 & 4\end{vmatrix}=QR$

R: matris triang. superior $\quad Q=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}$

Columnas c_j

$R=\begin{vmatrix}v_1\cdot e_1 & v_2\cdot e_1 & v_3\cdot e_1\\0 & v_2\cdot e_2 & v_3\cdot e_2\\0 & 0 & v_3\cdot e_3\end{vmatrix}$ $\quad Q=\begin{vmatrix}0 & 0{,}8 & 0{,}6\\1 & 0 & 0\\0 & -0{,}6 & 0{,}8\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\langle 0;2;0\rangle\cdot\langle 0;1;0\rangle & \langle 4;-1;-3\rangle\cdot\langle 0;1;0\rangle & \langle 3;2;4\rangle\cdot\langle 0;1;0\rangle\\ 0 & \langle 4;-1;-3\rangle\cdot\langle 0{,}8;0;-0{,}6\rangle & \langle 3;2;4\rangle\cdot\langle 0{,}8;0;-0{,}6\rangle\\ 0 & 0 & \langle 3;2;4\rangle\cdot\langle 0{,}6;0;0{,}8\rangle\end{vmatrix}$

$R=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}$ $\quad QR=\begin{vmatrix}0 & 0{,}8 & 0{,}6\\1 & 0 & 0\\0 & -0{,}6 & 0{,}8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4 & 3\\2 & -1 & 2\\0 & -3 & 4\end{vmatrix}$

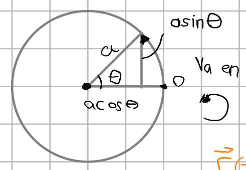
$A=QR$

PREGUNTA 3

Datos: $\qquad$ Nos pide $\vec{T}$ y $\vec{N}$ en $t=\pi/6$

- Velocidad vertical $=\frac{5}{3\pi}$ m/s
- En $t=\pi/3$ $\vec{v}\parallel L$: $\frac{x+2}{-2\sqrt{3}}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+3}{-5/3}$ $\Rightarrow$ Ecuación simétrica de la recta.
- radio $=a$

Podemos empezar armando la curva $\vec{r}(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle$.



Podemos definir los componentes:

$x(t)=a\cos(t)$

$y(t)=a\sin(t)$

$\vec{r}(t)=\langle a\cos(t),a\sin(t),z(t)\rangle$

Sabiendo que desciende verticalmente a una $v=\frac{5}{3\pi}$ podemos ver que es un MRU: $d=x_0-vt$

↳ va descendiendo $\quad x_0=10$ según la gráfica en $t=0$

$d=z(t)=10-\frac{5}{3\pi}t$

$\vec{r}(t)=\langle a\cos(t),a\sin(t),10-\frac{5}{3\pi}t\rangle$ | $\vec{v}(t)=\langle -a\sin(t),a\cos(t),-\frac{5}{3\pi}\rangle$

Para hallar a podemos partir que en $t=\pi/3$ la velocidad de la partícula será paralela a la recta L. El vector dirección de la recta será:

$\vec{v}=\langle -2\sqrt{3},2,-5/3\rangle$

$\therefore\ \langle -a\sin(\frac{\pi}{3}),a\cos(\frac{\pi}{3}),-\frac{5}{3\pi}\rangle=\lambda\langle -2\sqrt{3},2,-5/3\rangle$ $\quad t=\pi/3\ \ldots$

- $\frac{-5}{3\pi}=\lambda(\frac{-5}{3})$, $\lambda=\frac{1}{\pi}$
- $a\cos(\frac{\pi}{3})=2\lambda\ \rightarrow\ \frac{a}{2}=\frac{2}{\pi}$ $\quad a=\frac{4}{\pi}$

$\therefore\ \vec{r}(t)=\langle\frac{4}{\pi}\cos(t),\frac{4}{\pi}\sin(t),10-\frac{5}{3\pi}t\rangle$

$\vec{v}(t)=\langle -\frac{4}{\pi}\sin(t),\frac{4}{\pi}\cos(t),-\frac{5}{3\pi}\rangle$

1. $T(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ en $t=\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ 2. $N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ en $t=\frac{\pi}{6}$

1. $T(t)=\frac{\langle -\frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}),\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{6}),-\frac{5}{3\pi}\rangle}{\sqrt{\frac{16}{\pi^2}\sin^2(\frac{\pi}{6})+\frac{16}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{6})+\frac{25}{9\pi^2}}}=\frac{\langle -\frac{\cancel{4}2}{\pi}(\frac{1}{\cancel{2}}),\frac{\cancel{4}2}{\pi}(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}),-\frac{5}{3\pi}\rangle}{1{,}3793}$

$\frac{16}{\pi^2}(\sin^2(\frac{\pi}{6})+\cos^2(\frac{\pi}{6}))+\frac{25}{9\pi^2}$

$\sqrt{\frac{16}{\pi^2}+\frac{25}{9\pi^2}}$

$T(\frac{\pi}{6})=\langle -0{,}4616;2{,}515;-0{,}3846\rangle$

2. $N(t)=\frac{\langle -\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{6}),-\frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}),0\rangle}{\sqrt{\frac{16}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{6})+\frac{16}{\pi^2}\sin^2(\frac{\pi}{6})}}=\frac{\langle -\frac{\cancel{4}2}{\pi}(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}),-\frac{\cancel{4}2}{\pi}(\frac{1}{\cancel{2}}),0\rangle}{\frac{16}{\pi^2}}$

$\frac{16}{\pi^2}(\cos^2(\frac{\pi}{6})+\sin^2(\frac{\pi}{6}))$

$N(\frac{\pi}{6})=\langle -0{,}6802;-0{,}3927;0\rangle$