



UNIVERSIDAD TÉCNICA  
FEDERICO SANTA MARÍA



# Modelación del Flujo dentro una Cavidad a Reynolds Bajos

Fundamentos de la Dinámica de Fluidos Computacional

MEC-223 - 2021

Martín Achondo Mercado

Rol: 201860005-9

Catalina Santibañez Mercado

Rol: 201804108-4

Profesor: Christopher Cooper

10 de Noviembre de 2021

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>3</b>
<b>3. Método de Discretización</b>	<b>6</b>
<b>4. Problema Inicial</b>	<b>11</b>
4.1. Paso de tiempo de 100 . . . . .	11
4.2. Paso de tiempo de 1.000 . . . . .	13
4.3. Paso de tiempo de 10.000 . . . . .	14
<b>5. Estabilidad en el Código</b>	<b>17</b>
<b>6. Variación del Número de Reynolds</b>	<b>21</b>
6.1. Reynolds de 100 . . . . .	21
6.2. Reynolds de 400 . . . . .	24
6.3. Comparación con la Literatura Complementaria . . . . .	26
<b>7. Variación de la Geometría de la Cavity</b>	<b>28</b>
7.1. Relación de Aspecto Menor a Uno . . . . .	28
7.2. Relación de Aspecto Mayor a Uno . . . . .	29
7.3. Comparación de las Distintas Relaciones de Aspecto . . . . .	29
<b>8. Conclusión</b>	<b>31</b>
<b>9. Referencias</b>	<b>32</b>
<b>10. Anexos</b>	<b>33</b>
10.1. Código Principal . . . . .	33

## 1. Introducción

En el siguiente informe se busca modelar el comportamiento de un fluido incompresible dentro de una cavidad, mediante ciertas simplificaciones de la ecuación de Navier-Stokes y de continuidad. Se utilizarán diferencias finitas para discretizar las ecuaciones de conservación y el método de proyección para forzar la incompresibilidad del flujo. La simulación realizada se implementará en Python utilizando las librerías de numpy y matplotlib. De esta manera, se logrará analizar como varía la estructura del flujo para distintos números de Reynolds, distintos pasos de tiempo y cuando se varía la geometría de la cavidad. Para ejemplificar lo dicho anteriormente, se graficarán los campos de velocidad, presión y las líneas de iso-vorticidad. Adicionalmente, se analizará la estabilidad del código dependiendo la malla a utilizar y el paso temporal. Por último, se calcularán los residuales de las ecuaciones de conservación para tener una medida de la convergencia del método. Los resultados obtenidos podrán ser comparados con los trabajos citados en las referencias.

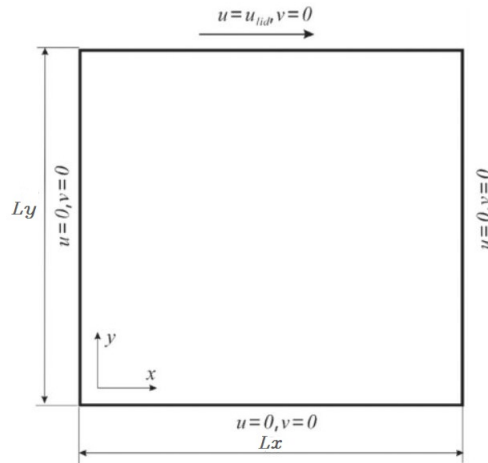


Figura 1: Diagrama de la Cavidad a Modelar

En la figura 1, se puede ver una imagen del modelo de la cavidad. En esta se notan las notaciones para la geometría. Una cavidad cuadrada de  $L_x \times L_y$  con la pared superior móvil a velocidad constante. Esta velocidad de la pared se denotará como  $u_0$ .

## 2. Marco Teórico

La mecánica de fluidos se basa en ecuaciones de conservación. Dentro de estas, se tiene la conservación de masa y la conservación de cantidad de movimiento. En este proyecto se trabajará con versiones simplificadas de estas ecuaciones bajo las siguientes suposiciones:

- Se considerará un flujo incompresible, lo que quiere decir que la densidad será constante  $\rho = cste$
- Se considerará un fluido Newtoniano. Esto implica que los esfuerzos de corte varían de manera proporcional con las tasas de deformación, a una viscosidad constante,  $\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- Se considerará un flujo bidimensional.
- Se desprecian los efectos gravitatorios.
- No se considerarán variaciones de temperatura del fluido.

Las ecuaciones de conservación en forma vectorial para estas suposiciones son las siguientes [5].

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) se pueden escribir por componentes como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Las condiciones de borde de estas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} u = 0, v = 0 \text{ en } x = 0, y = 0, x = L \\ u = u_0, v = 0 \text{ en } y = L_y \end{aligned} \quad (3)$$

Estas serán las ecuaciones a resolver mediante el método de discretización explicado en la siguiente sección. Con la resolución de (2) se podrán obtener las distribuciones de velocidad y

presión dentro de la cavidad. Además, tener estos valores permitirá calcular la vorticidad, dada en forma vectorial por:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (4)$$

Y expresando el único componente no nulo, en dirección  $z$ :

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

El cálculo de estas expresiones permitirá graficar estas distribuciones de velocidad y presión dentro de la cavidad y además, se presentarán gráficos con las líneas de iso-vorticidad. Es importante notar que teniendo las distribuciones de velocidad, se podrán graficar las líneas de corriente del flujo, sin necesidad de calcularlas (la librería utilizada lo realizará). De todas formas, las relaciones con la función corriente son las siguientes:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

Estas son las ecuaciones básicas con las que se trabajará la modelación.

En secciones posteriores, se graficarán los campos de velocidad de manera adimensional. Esto es debido a que se logrará una mejor comparación con ciertos trabajos citados en las referencias. La forma de la adimensionalización es la siguiente:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_x} ; \quad y^* = \frac{y}{L_x} \\ u^* &= \frac{u}{u_0} ; \quad v^* = \frac{v}{u_0} \\ t^* &= \frac{tu_0}{L_x} ; \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0} \end{aligned} \quad (7)$$

De esta manera, se tiene el número de Reynolds que caracteriza al flujo:

$$\text{Re} = \frac{u_0 L_x}{\nu} \quad (8)$$

Además, se presentan las ecuaciones de conservación adimensionalizadas para demostrar que estas variables adimensionales cumplen las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \\
 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\
 \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

### 3. Método de Discretización

Se nos presenta una complicación al resolver las ecuaciones de Navier Stokes, pues al trabajar con un flujo incompresible, la presión pierde sentido termodinámico y se convierte en un parámetro para lograr la incompresibilidad. Para solucionar este problema se utiliza el “Método de Proyección” [4] que separa en dos pasos la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes. De esta manera, se calcula una velocidad que no cumple con la incompresibilidad para luego proyectarla en un espacio donde si se cumple esta condición. Este método de proyección se planteará con un esquema de Euler Explícito para resolver las ecuaciones.

El método de proyección entonces consiste en calcular una velocidad intermedia  $\mathbf{V}^*$  teniendo la velocidad en el paso temporal  $n$  y espaciamiento temporal  $\Delta t$ . Esto consiste en la predicción, dada por:

$$\frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{V}^n \cdot \nabla) \mathbf{V}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{V}^n \quad (10)$$

Teniendo esta velocidad intermedia, se puede calcular la velocidad en el paso  $n + 1$ . Esto es conocido como la corrección (proyección), donde se añade la presión:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \quad (11)$$

Lo que faltaría es poder encontrar la presión. Esta se calcula con la siguiente ecuación elíptica.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^* \quad (12)$$

La velocidad intermedia tendrá las mismas condiciones de borde que la velocidad del flujo. Para la presión, se usará la siguiente condición de borde de Neumann:

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (13)$$

El problema se discretizará con  $(N_x \times N_y)$  nodos en el espacio. Bajo las dimensiones especificadas, se pueden calcular los espaciamientos espaciales:

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x - 1} ; \Delta y = \frac{L_y}{N_y - 1} \quad (14)$$

La estrategia de solución a grandes rasgos será a partir de una malla con las velocidades en cada nodo en un paso temporal, poder encontrar las velocidades en cada nodo para el paso temporal siguiente. Un ejemplo ilustrativo en 1 dimensión se ve en la siguiente imagen:

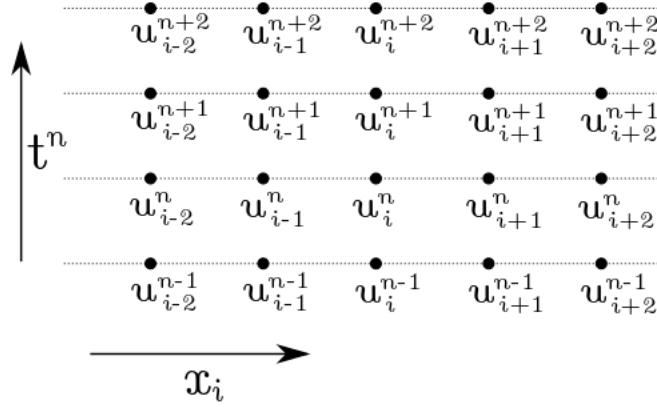


Figura 2: Esquema de Solución

Para resolver entonces el problema planteado se discretizará la ecuación de predicción (10) con diferencias centradas en el espacio para las segundas derivadas y diferencias atrasadas para las derivadas del término convectivo.

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^* &= u_{i,j}^n - u_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) + \\
 &\quad + \nu \Delta t \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\
 v_{i,j}^* &= v_{i,j}^n - u_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n) + \\
 &\quad + \nu \Delta t \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Obteniendo la velocidad intermedia, se puede calcular la presión con la ecuación (12). Esta se discretizó utilizando diferencias centradas en el espacio.

$$\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2\Delta y} \right) \tag{16}$$

La resolución de esta ecuación implica resolver un sistema lineal, en donde la matriz asociada, llamada matriz de Poisson, es de  $(N_x - 2)(N_y - 2) \times (N_x - 2)(N_y - 2)$ . Para esto, el espacio bidimensional se pasó a una dimensión utilizando el siguiente recorrido:



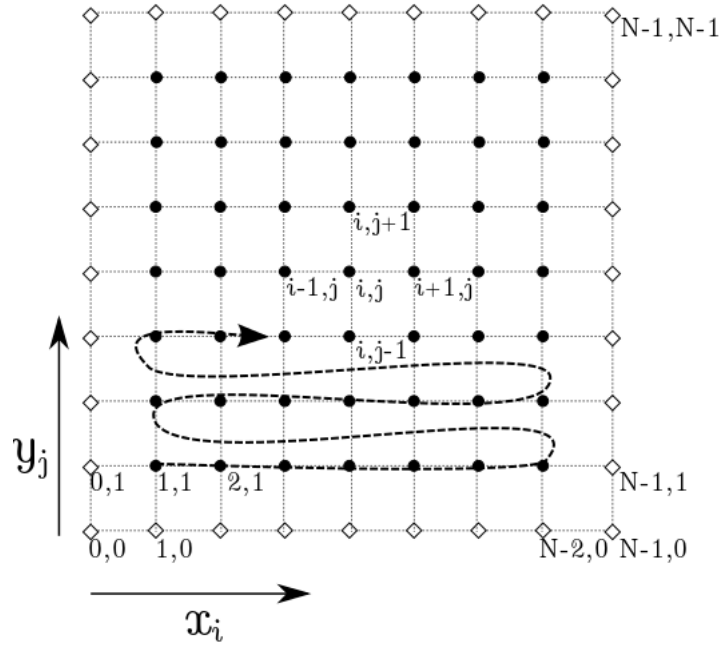


Figura 3: Esquema Resolución Ecuación de Poisson

Se nota que se resuelve para los nodos interiores. Los de los bordes, se reemplazarán después de resolver el sistema considerando (13) discretizando con diferencias de primer orden. Además, aquí no se detallará la matriz formada, pero esta contiene toda la información de las condiciones de contorno. Además, dado que se forma una matriz singular por tener solo condiciones de Neumann, se fijará una presión de cero en el nodo central de la malla. De esta manera, se obtiene una solución única.

Por otra parte, la ecuación de corrección (11) se discretiza con diferencias centradas en el espacio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (17)$$

De esta manera, se obtienen las velocidades y presiones para todos los pasos de tiempo. Posterior en cada paso de tiempo se calculará la vorticidad en los nodos interiores de la cavidad. Para esto, se utilizarán diferencias centradas dadas por:

$$\omega_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (18)$$

De todas formas, solo interesa la vorticidad en el último paso de tiempo. Por lo tanto, no se calculará en cada paso de tiempo, sino al tener las velocidades finales. Dada la discretización utilizada, se espera que el método tenga un orden de  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x, \Delta y)$ , primer orden en tiempo y espacio.

Además, para tener una medida de la convergencia en cada paso temporal, se calcularán los residuales de la ecuación de Navier-Stokes y de continuidad. Primero se calcularán los errores en cada nodo de la malla para cada ecuación:

$$\begin{aligned}
 e_{ij}^C &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\
 e_{ij}^{M_x} &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \\
 &\quad - \nu \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\
 e_{ij}^{M_y} &= \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - \\
 &\quad - \nu \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

En estas ecuaciones, el superíndice  $C$ ,  $M_x$  y  $M_y$ , hacen referencia a la ecuación de continuidad y Navier-Stokes en dirección  $x$  e  $y$  respectivamente.

Teniendo los errores en cada nodo, se pasa a calcular los residuales respectivos, donde  $N = (N_x - 2)(N_y - 2)$

$$\begin{aligned}
 R_C &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{i=1}^{N_x-1} (e_{ij}^C)^2} \\
 R_{NSx} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{i=1}^{N_x-1} (e_{ij}^{M_x})^2} \\
 R_{NSy} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{i=1}^{N_x-1} (e_{ij}^{M_y})^2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Donde:  $R_C$  corresponde a los residuales en la ecuación de continuidad,  $R_{NSx}$  y  $R_{NSy}$  los residuales de la ecuación de Navier-Stokes en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Se nota que estos solo se calculan en los nodos interiores de la cavidad y se escala respecto a estos para poder comparar problemas con distintas cantidades de nodos. Estos se calcularán en cada paso de tiempo y se

podrán graficar para analizar la convergencia.

En resumen, el algoritmo a utilizar para modelar esta cavidad será el siguiente:

1. Inicializar todos los parámetros del flujo (geometría, propiedades).
2. Definir la malla computacional y crear la matriz de poisson.
3. Inicializar las velocidades iniciales del flujo.
4. Iterar desde  $n = 0$  hasta  $n = n_t - 1$ , sobre todos los pasos temporales
  - Calcular la velocidad intermedia con la expresión (15)
  - Encontrar la presión con la expresión (16)
  - Calcular la velocidad en el paso siguiente la ecuación (17)
  - Calcular los residuales con las expresiones en (20)
5. Calcular la vorticidad en el paso final con (18)
6. Graficar los campos necesarios.

El código en detalle se encuentra en el anexo.

## 4. Problema Inicial

Se estudiará el comportamiento de un flujo dentro de una cavidad cuadrada, con una tapa que se desliza con velocidad constante. Sabemos que existe la condición de no deslizamiento y que produce vórtices debido al movimiento de la placa que arrastra al fluido. Para el caso "canónico", se considerará una cavidad cuadrada de  $2 \times 2$  [m] cuya tapa se mueve con velocidad  $u_0 = 1$  [m/s]. La densidad del fluido es  $\rho = 1$  [kg/m<sup>3</sup>], su viscosidad cinemática  $\nu = 0.1$  [m<sup>2</sup>/s], y se puede considerar como incompresible. Para este caso "canónico" a trabajar, se utilizará una malla de  $(41 \times 41)$  nodos y un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.001$  [s]. Todas las variaciones de los parámetros del problema se realizarán respecto a este caso canónico. Para estos valores, se estará trabajando con un Reynolds de 20.

Para analizar el comportamiento del flujo a lo largo de tiempo se evaluará para los pasos de tiempo de 100, 1.000 y 10.000, Permitiendo obtener las siguientes graficas: Velocidad y Presión, Residuos, Líneas de Iso-vorticidad y vórtice en los bordes. De esta manera, se podrá analizar como se comporta el flujo a medida que alcanza un estado estacionario.

### 4.1. Paso de tiempo de 100

Para el primer caso correspondiente al paso de tiempo de 100, se observa que el flujo esta percibiendo las primeras perturbaciones que son producidas por el movimiento de la placa superior, las cuales no tienen suficiente fuerza para producir vórtices en los bordes. Vale decir que se genera un gran vórtice central en la cavidad. Además, se nota que existen gradientes de presión altos en las esquinas superiores de la cavidad.

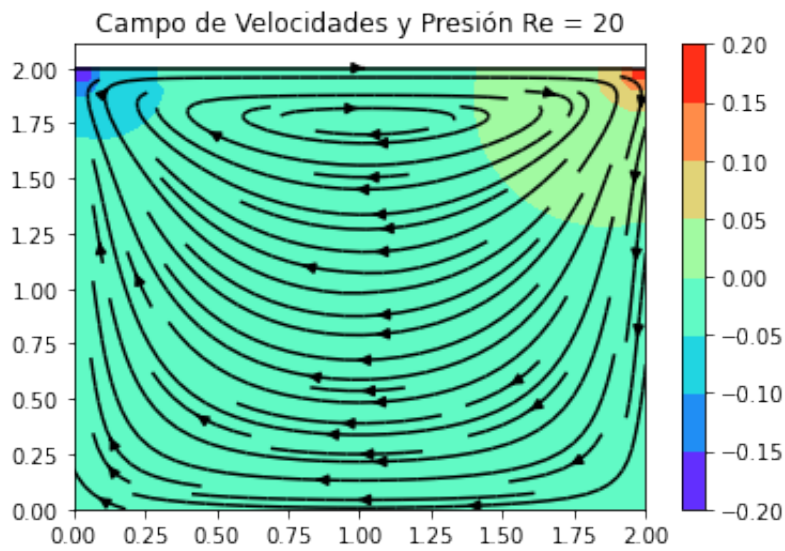


Figura 4: Campo de Velocidad y Presión

Si se grafican las esquinas de la cavidad para obtener una vista de las líneas de corriente, se nota que no existen vórtices en estas zonas.

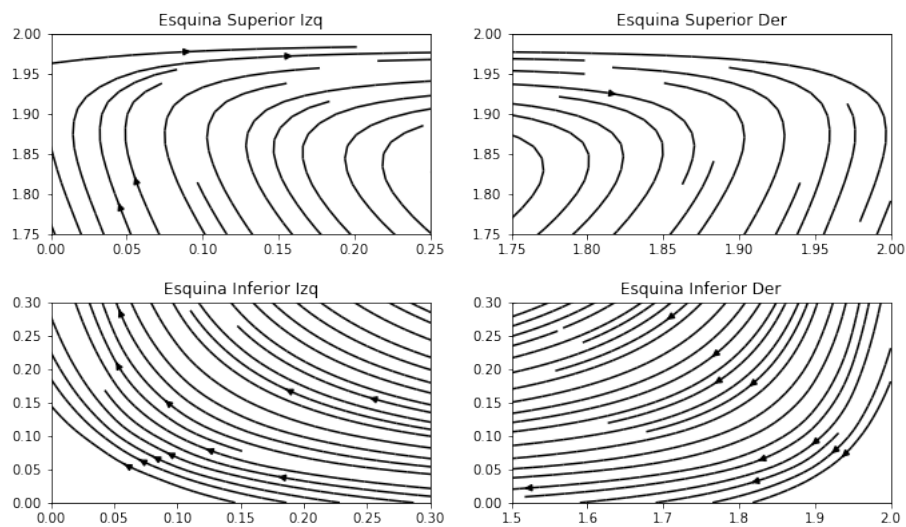


Figura 5: Campo de Velocidad y Presión

## 4.2. Paso de tiempo de 1.000

Para el paso de tiempo de 1000 se observa las primeras apariciones de vórtices en las esquinas inferiores, que son provocadas por el estancamiento del fluido en la pared y el vórtice central producido por el impulso del fluido al avanzar por la cavidad.

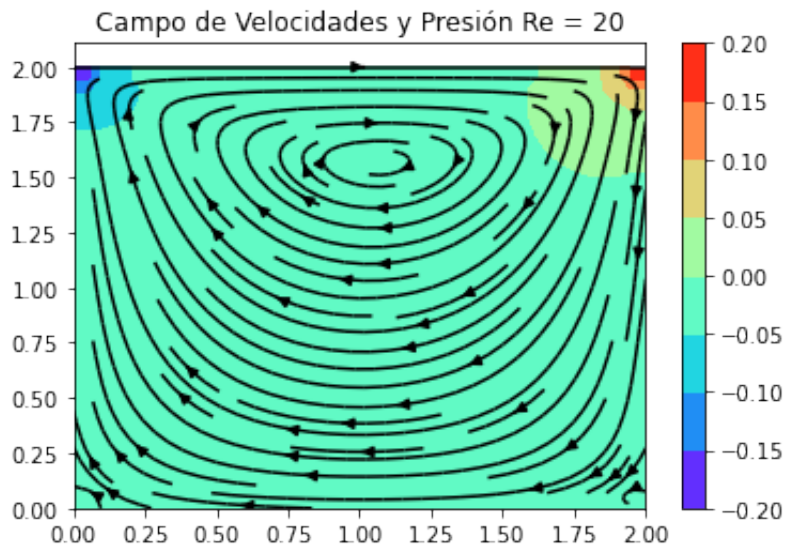


Figura 6: Campo de Velocidad y Presión

Se nota que el vórtice central empieza a desplazarse hacia abajo en la cavidad.

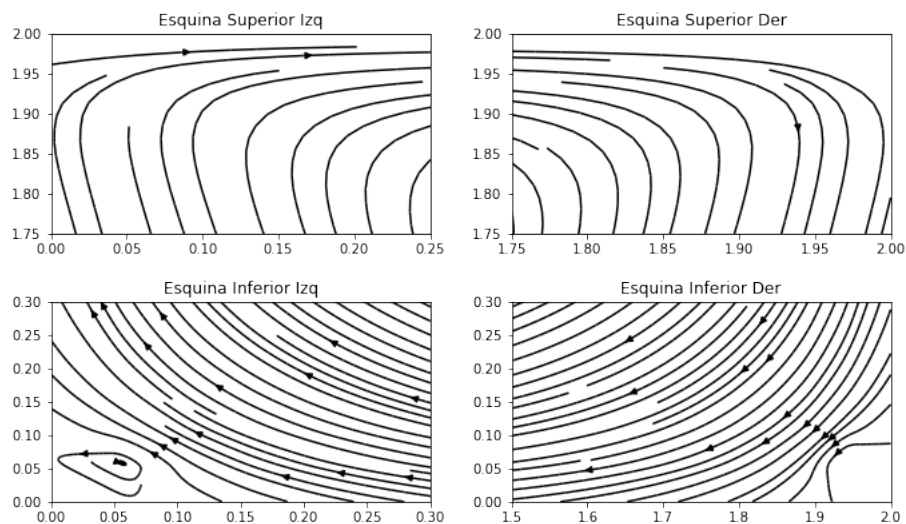


Figura 7: Campo de Velocidad y Presión

Las graficas en las esquinas de la cavidad demuestra la primera aparición de los vórtices en estos sectores.

### 4.3. Paso de tiempo de 10.000

Para el paso de tiempo de 10000, ya se aprecian pequeños vórtices en las esquinas inferiores que pueden ser producidas por el estancamiento del fluido en la pared o las fuerzas cortantes que actúan como reacción al movimiento del fluido. A su vez, también se ve el efecto del vórtice central producido por el flujo que se mueve dentro de la cavidad.

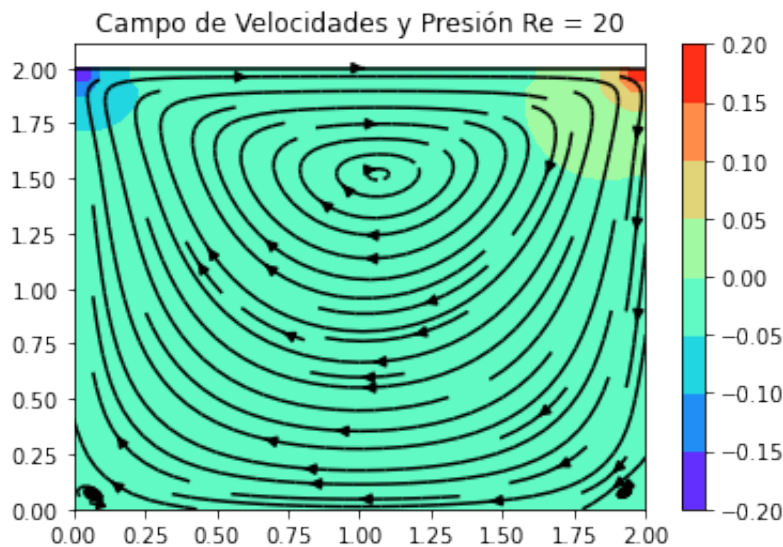


Figura 8: Campo de Velocidad y Presión

Se nota además, que el flujo se ve bastante simétrico. Además, se considera que en este punto el flujo ya llegó a un estado estacionario. Esto se determinó de manera visual, pero de todas formas, se calcularon las derivadas temporales en cada paso de tiempo. También, se visualiza que los gradientes de presión se mantienen similares a los de los pasos de tiempo anteriores, con sus máximos en las esquinas superiores.

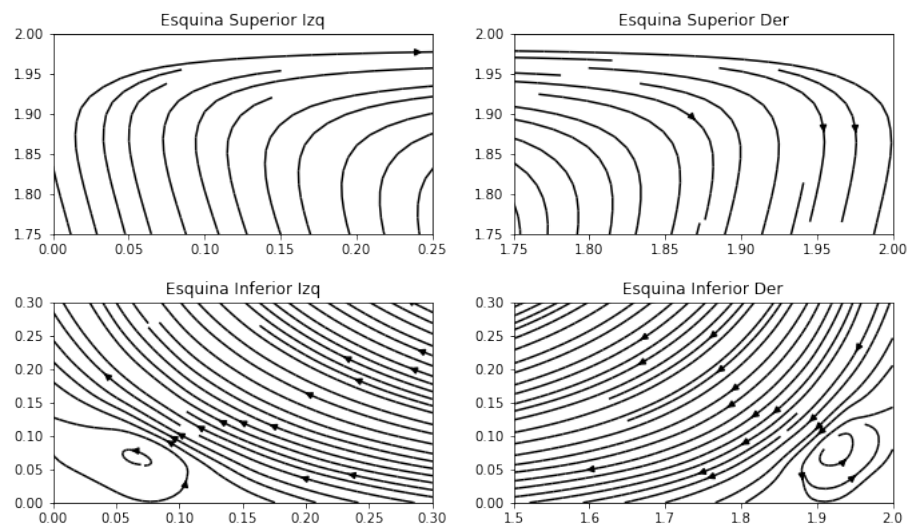


Figura 9: Campo de Velocidad y Presión

Se nota fácilmente que aparecen los vórtices en las esquinas. Para este caso, estos vórtices tienen aproximadamente el mismo tamaño. Se espera que estos crezcan a medida que se aumente el número de Reynolds en la cavidad.

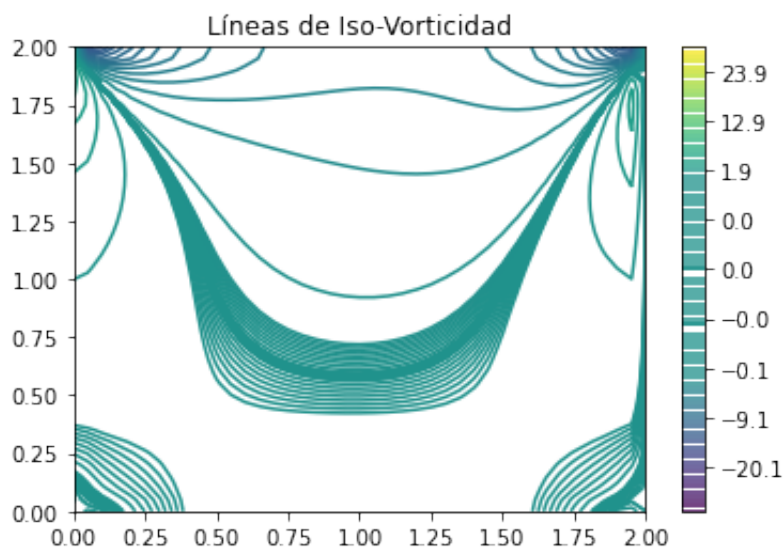


Figura 10: Líneas de Iso-vorticidad

Se adjuntan las líneas de iso-vorticidad. Estas reflejan una estructura bien característica. Se espera también que esta varíe a medida que se modifica el número de Reynolds.



Para comprobar que se llegó a un estado estacionario, se graficaron las derivadas temporales de los componentes de la velocidad y de la presión en cada paso de tiempo.

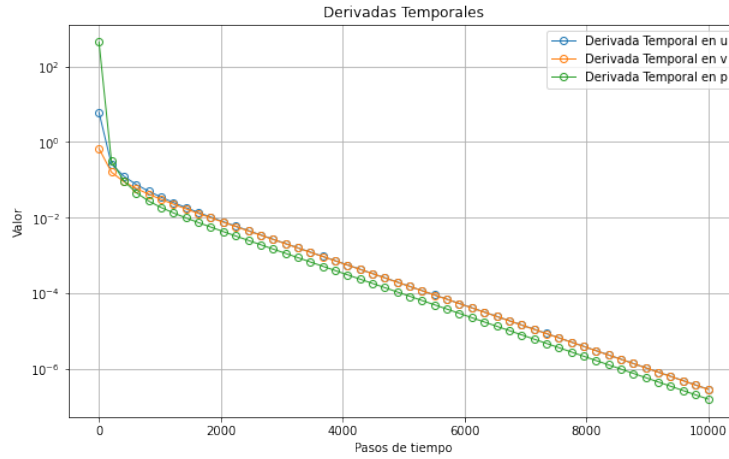
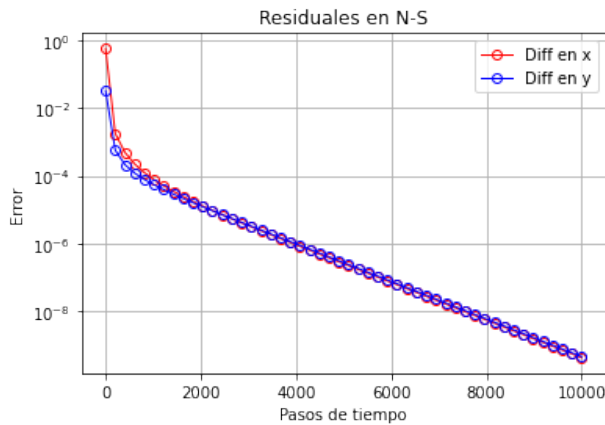


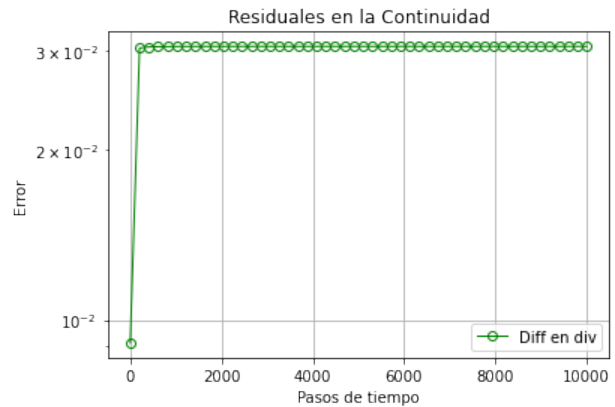
Figura 11: Comportamiento de las Derivadas Temporales

En este caso, se nota claramente que son inferiores a  $10^{-6}$ , lo que refleja que ya se ha alcanzado un estado estacionario. En todo caso, es importante notar que estos valores se calcularon de manera similar a como se calcularon los residuales. De todas formas, se nota que se podría plantear que el estado estacionario se habría alcanzado a los 6000 pasos de tiempo.

Para este caso canónico, se graficaron los residuales respecto a las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad. Se nota que estos demuestran una alta convergencia, dado que para N-S, se obtienen residuales inferiores a  $10^{-8}$ . Algo interesante que ocurre es que el residual de la continuidad parece mantenerse constante en el tiempo, pero a un valor cercano a cero.



(a)



(b)

Figura 12: (a) Residual en Navier-Stokes (b) Residual en la Continuidad

## 5. Estabilidad en el Código

El método explícito empleado es condicionalmente estable. Esto implica que la cantidad de nodos y el paso temporal empleado pueden provocar ciertas inestabilidades en el método. Para estabilizar el método, se plantean condiciones CFL para la discretización. Esto se puede reflejar con los siguientes números adimensionales:

$$\begin{aligned} \text{Co} &= u \frac{\Delta t}{\Delta x} + v \frac{\Delta t}{\Delta y} < 1 \\ \text{Fo} &= \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Donde Co corresponde al número de Courant, que tiene relación con el término convectivo de la ecuación y Fo corresponde al número de Fourier que tiene relación con el término difusivo de la ecuación.

Además, se descubrió que ambos números no pueden fijarse excesivamente pequeños. Esto es debido a que se producen ciertas oscilaciones en el flujo que crecen en cada paso de tiempo. Dado esto, aparece la siguiente restricción [3]:

$$\text{Pe} = \frac{\text{Co}}{\text{Fo}} < 2 \quad (22)$$

Donde Pe corresponde al número de Peclet. Es importante destacar que mientras más cerca estos números se encuentren de sus restricciones, más probable que el método se inestabilice. Además, claramente el número de Courant y Peclet dependen de la velocidad en cada nodo de la malla, por lo que irán variando en cada paso temporal.

Algo interesante de revisar es que el número de Courant (convección) se podría suponer máximo justo en la pared móvil. Este tendría el valor de:

$$\text{Co} = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (23)$$

Reemplazando en la expresión (22), y suponiendo que:  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ , se puede llegar a lo siguiente:

$$\text{Pe} = \frac{u_0 \Delta}{2\nu} \quad (24)$$

De aquí, aparece naturalmente el número de Reynolds, teniendo en cuenta que  $\Delta = L/(N - 1)$ .

$$\frac{\text{Re}}{(N - 1)} < 4 \quad (25)$$

La ecuación (25) revela que claramente para mantener el método estable al aumentar el Reynolds, necesariamente hay que aumentar la cantidad de nodos. Además, el aumentar la cantidad de nodos, reduce el espaciamiento y por ende, aumentar los números definidos en (21). Por esta razón se tiene que reducir el espaciamiento temporal. Esto provoca que el método utilizado sea bastante costoso para modelar Reynolds moderados y altos. Por esta razón, en la siguiente sección se aumenta la cantidad de nodos en la malla y se disminuye el paso temporal para las modelaciones.

Otra fuente de inestabilidad es el hecho de fijar una presión en un nodo para resolver la ecuación elíptica de la presión (16) evitando el problema de singularidad. Esta claramente no es la mejor forma de abordar este problema, pero trabajando con los números explicados antes lejos de sus restricciones, parece no presentar grandes problemas. Lo interesante es que cuando se alcanza cierta inestabilidad, estando cerca de las restricciones para  $\text{Co}$ ,  $\text{Fo}$  o  $\text{Pe}$ , la solución parece "explotar" justo en el punto donde se fijó la presión y converge hacia una esquina de la cavidad. Esto se puede revisar en las siguientes imágenes:

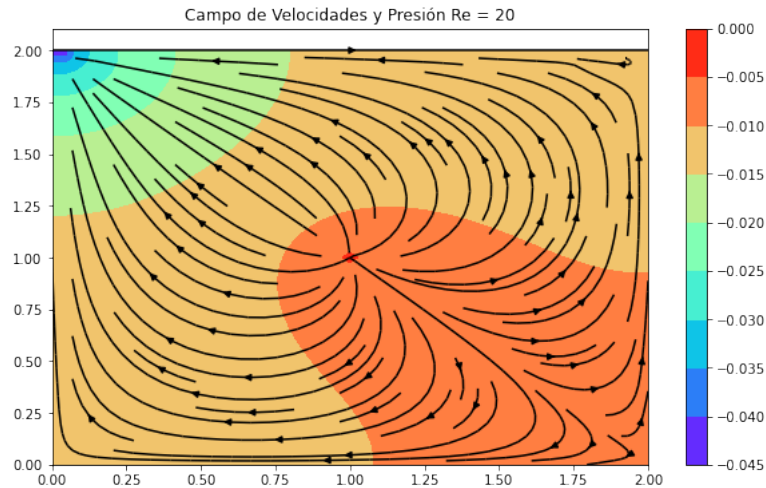


Figura 13: Divergencia de la Solución en el Punto Fijo

También, aumentando bastante el número  $Co$  para exagerar los resultados, el flujo tiende a formar vórtices en la esquina superior izquierda y ahora el punto fijo de la presión funciona como sumidero

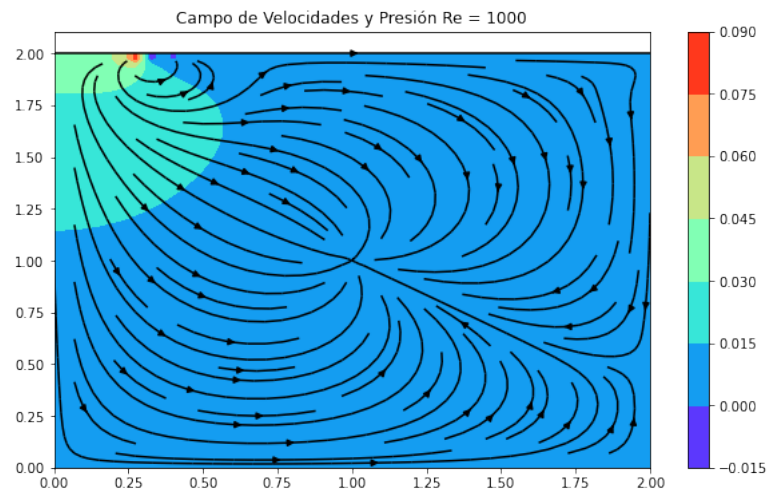


Figura 14: Divergencia de la Solución para  $Co$  alto

Por último, también se trabajó con números de  $Fo$  y  $Pe$  altos y se pudo captar la fuente de la inestabilidad, donde se visualizan oscilaciones en la esquina superior derecha que terminan en especies de vórtices. Esto se refleja en las 2 imágenes siguientes.

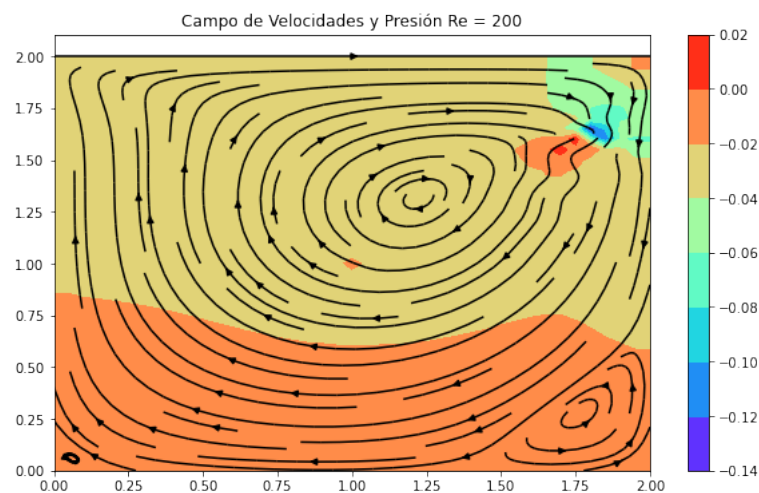


Figura 15: Oscilaciones en el Flujo

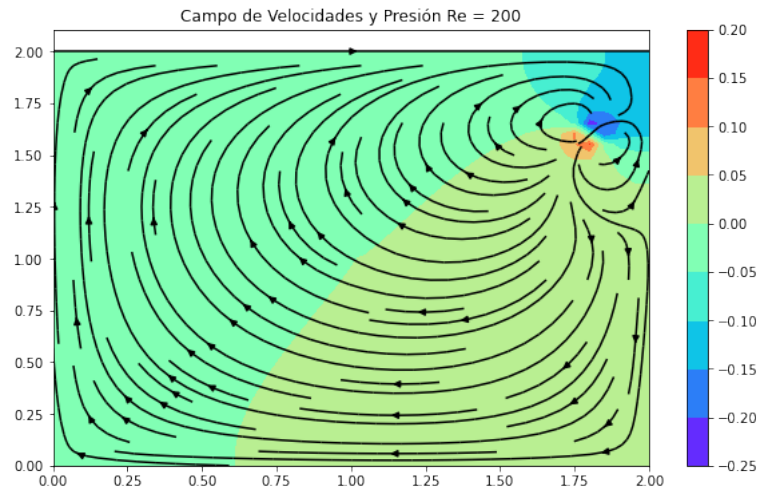


Figura 16: Consecuencia de las Oscilaciones

Estos resultados no reflejan que siempre que se pase uno de estos números se forme este tipo de estructuras, ya que para todos estos casos la solución divergió, y por ende, ya perdió su sentido físico. Además, no es muestra aquí pero para todos los casos los residuales tendieron a infinito.

Formas de corregir estas inestabilidades pueden ser la utilización de un método implícito dada su estabilidad incondicional. Además, se podrían emplear técnicas más estables para evitar el problema de la singularidad en la ecuación elíptica de la presión. De todas formas, ambos cambios sugieren continuar con una discretización por diferencias finitas de las ecuaciones de conservación. Sería interesante utilizar métodos conservativos para discretizar las ecuaciones y por ejemplo utilizar el método de volúmenes finitos. De esta manera, se podría variar la geometría de la malla cerca de las esquinas donde se generan los vórtices, ya que en esas zonas parece comenzar la inestabilidad.

## 6. Variación del Número de Reynolds

Un análisis importante del código implementado es ver como varían las estructuras del flujo a medida que el número de Reynolds aumenta. Esta sección se compararán estas estructuras para Reynolds de 20, 100 y 400. Además, se compararán las distribuciones de velocidad en los centros de la cavidad con el documento [1] de Ghia, Ghia y Shin. Esto permitirá evaluar el método empleado. Lamentablemente, solo se podrá comparar los resultados en este trabajo con los Reynolds de 100 y 400 dado el alto costo computacional que necesita el método para mantener la estabilidad. Para todos los cálculos dependiente del número de Reynolds en esta sección, solo se varió la velocidad de la pared manteniendo la geometría y la viscosidad constante. Los gráficos para el Reynolds de 20 no se incluirán en esta sección ya que están ya expuestos en las secciones anteriores, pero se referenciarán para la comparación.

### 6.1. Reynolds de 100

Para esta modelación, se utilizó una malla de  $(81 \times 81)$  y un paso temporal de  $\Delta t = 0.001$  [s]. La velocidad de la pared  $u_0 = 5$  [m/s]. Con estos datos, se procedió a realizar 10000 pasos de tiempo, resultando lo siguiente:

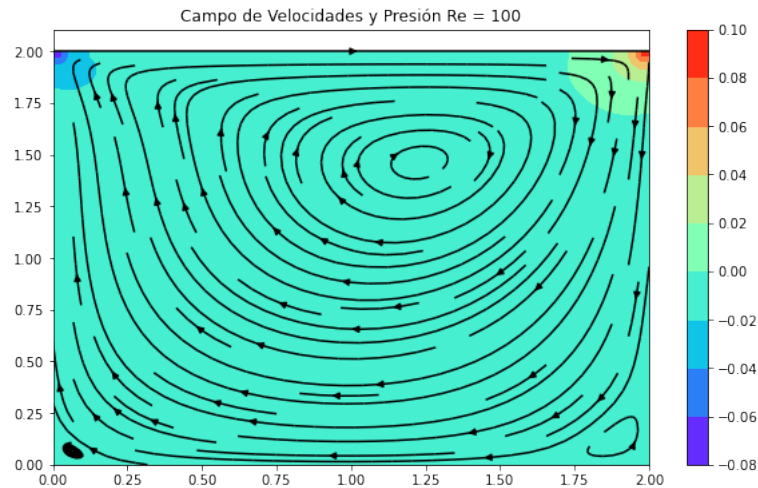


Figura 17: Campo de Velocidad y Presión

Se nota que el campo de flujo tiene 3 vórtices principales. Uno grande en el centro, y 2 en las esquinas inferiores. Ambos parecen haber crecido respecto a la solución en 8. Esto claramente se debe al aumento de la velocidad del flujo. Además, pareciera ser que los gradientes de presión disminuyeron respecto a esa solución. Para un mayor detalle se graficará el flujo con mayor densidad de líneas en las esquinas.

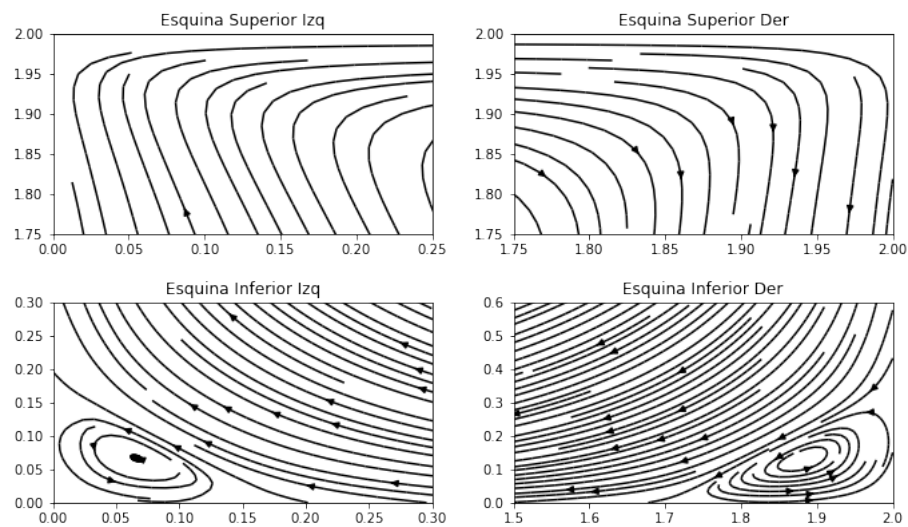


Figura 18: Líneas de Corriente en las Esquinas de la Cavity

En la imagen 18, se puede ver con más detalle los vórtices generados en las esquinas. Se nota además que ambos crecieron en tamaño. Además, no se logran distinguir vórtices en las esquinas superiores.

Se graficarán las líneas de iso-vorticidad.

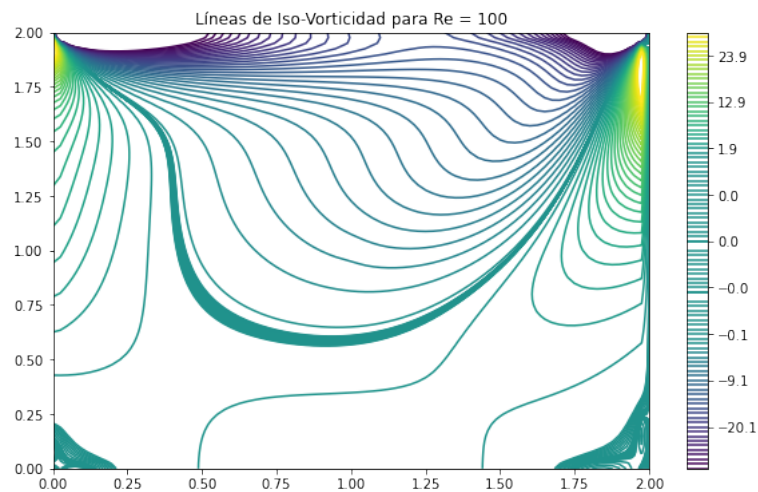


Figura 19: Líneas de Iso Vorticidad

Este gráfico muestra una gran similitud con los gráficos de [1]. Lo mismo para el campo de velocidad 17. Esto puede reflejar resultados confiables. Además, se nota una gran variación a las líneas para Reynodls de 20.

De todas formas, analizando la convergencia obtenida, se llegan a residuales en la ecuación de Navier- Stokes menores a  $10^{-7}$ . Esto demuestra una convergencia alta por parte de la simulación y puede explicar la similitud de los gráficos con [1]

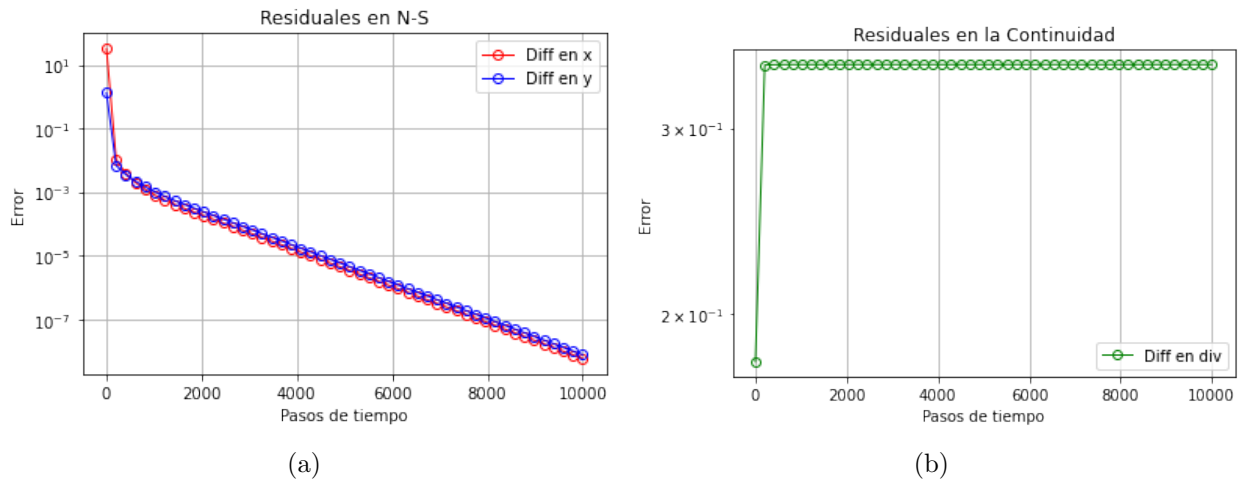


Figura 20: (a) Residuales en Navier-Stokes (b) Residuales en la Continuidad



## 6.2. Reynolds de 400

Para esta modelación, se utilizó una malla de  $(150 \times 150)$  y un paso temporal de  $\Delta t = 0.0003$  [s]. La velocidad de la pared  $u_0 = 20$  [m/s]. Con estos datos, se procedió a realizar 10000 pasos de tiempo, resultando lo siguiente:

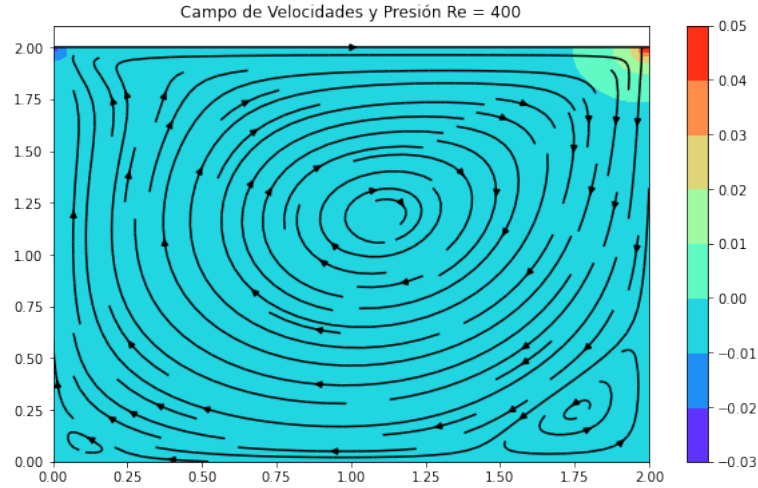


Figura 21: Campo de Velocidad y Presión

Se nota que los vórtices en las esquinas empiezan a crecer en tamaño, especialmente el de la esquina inferior derecha. Además, el vórtice central parece desplazarse hacia el medio de la cavidad. Se graficarán las líneas de corriente con mayor densidad en las esquinas.

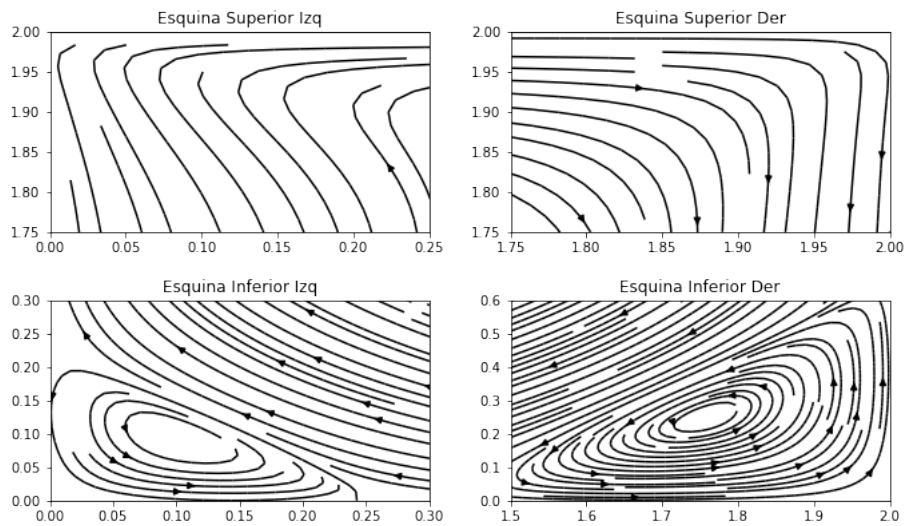


Figura 22: Líneas de Corriente en las Esquinas de la Cavidad

En la imagen 22 se puede ver como los vórtices que aparecen en la esquina comienzan a crecer a medida que se aumenta el número de Reynolds. Además, se nota que las líneas de corriente en

la esquina superior izquierda tienen una pendiente mayor. Se espera que en esa zona se forme un vortice si se sigue aumentando el número de Reynolds.

Se grafican las líneas de Iso Vorticidad

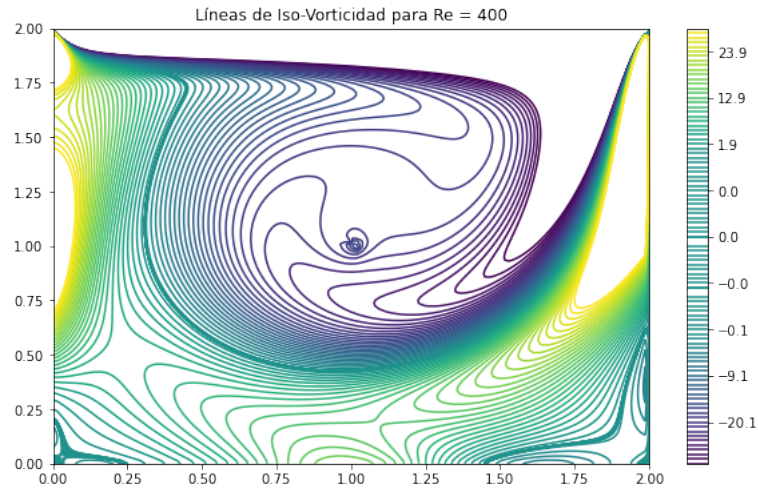


Figura 23: Líneas de Iso Vorticidad

Las líneas de vorticidad cambian bastante respecto a los Reynolds más bajos. Esta estructura es bastante similar a la graficada en [1]. Además, las líneas de corriente explicadas anteriormente también tienen estructuras similares a las de este trabajo, reflejando el crecimiento de los vórtices.

Para ver el comportamiento de la convergencia en las ecuaciones a resolver, se graficaron los residuales.

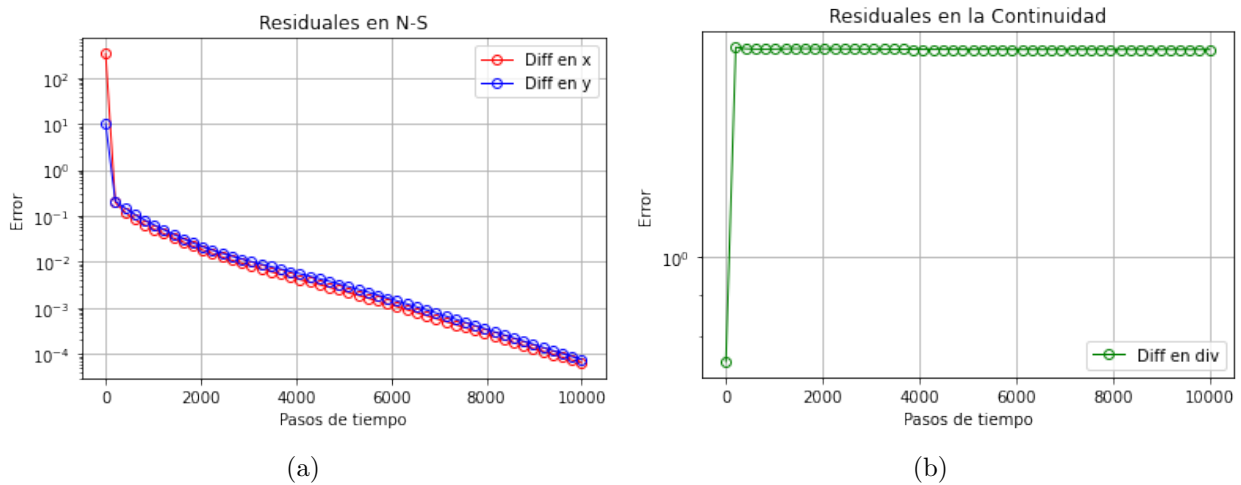


Figura 24: (a) Residuales en Navier-Stokes (b) Residuales en la Continuidad

Se puede analizar que el método tuvo una alta convergencia, llegando a residuales en las ecuaciones de N-S inferiores a  $10^{-4}$ . Es importante notar que si se hubiera realizado un mayor número de pasos, estos irían disminuyendo, pero se dejó en 10000 por temas de costos computacionales.

### 6.3. Comparación con la Literatura Complementaria

Los resultados obtenidos para los distintos números de Reynolds se compararán con el trabajo de Ghia [1]. Para esta sección, se graficarán las distribuciones de velocidad adimensionalizadas (7) horizontal y vertical en el centro de la cavidad.

#### Reynolds de 100

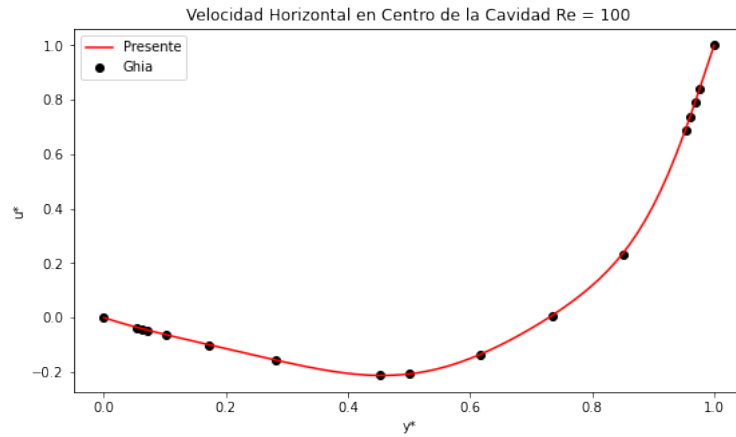


Figura 25: Comparación Distribución de Velocidad Horizontal

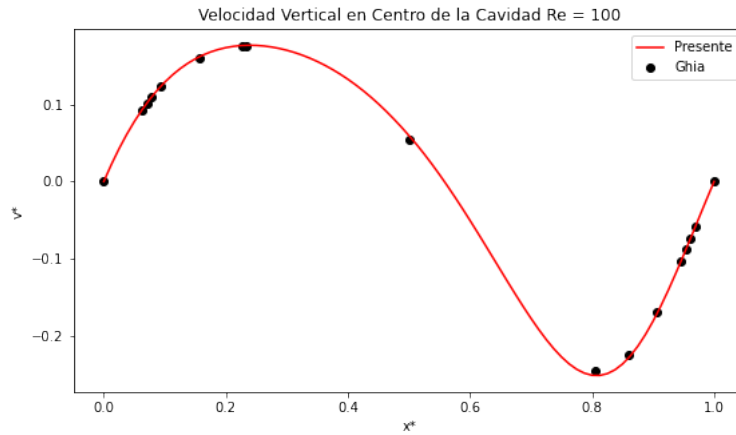


Figura 26: Comparación Distribución de Velocidad Vertical

Estos gráficos muestran que las distribuciones obtenidas en este trabajo concuerdan con los de [1]. Esto refuerza el hecho de que las líneas de corriente y vorticidad se parecieran.

## Reynolds de 400

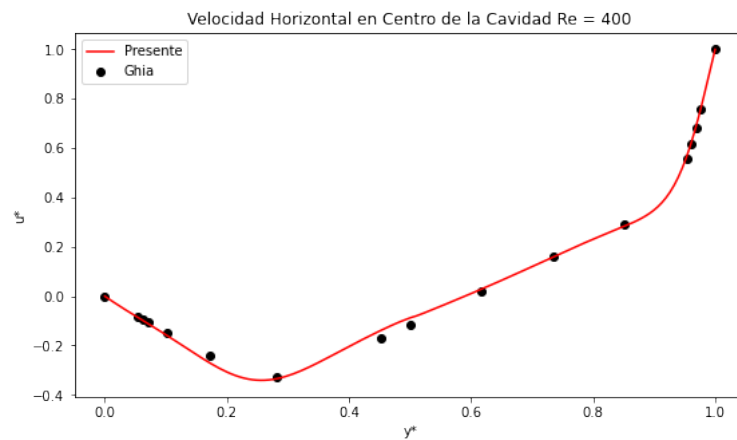


Figura 27: Comparación Distribución de Velocidad Horizontal

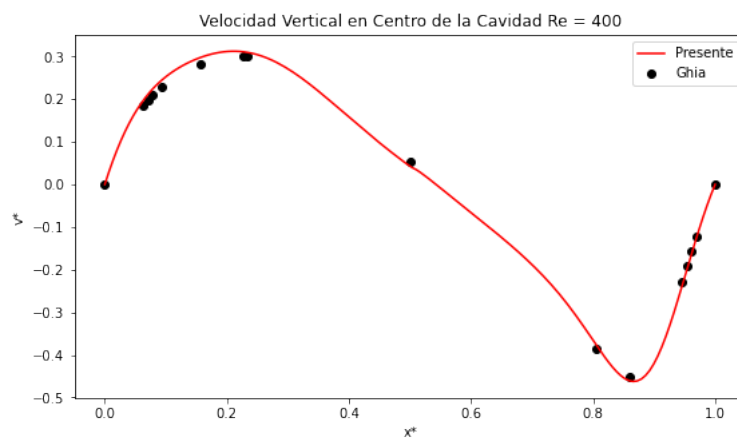


Figura 28: Comparación Distribución de Velocidad Vertical

Para el Reynolds de 400, se nota que también las distribuciones obtenidas concuerdan con la publicación de Ghia [1]. Existe una pequeña desviación en algunos puntos pero se puede deber al bajo orden del método o al hecho de que la simulación todavía no alcanzaba un estado estacionario. De todas formas, si era así, estaba próximo a alcanzarlo.

Por otra parte, se nota que estos gráficos tienen gradientes más elevadas que para el caso del Reynolds de 100. Esto se puede deber al aumento de la velocidad y al tamaño de los vórtices.

## 7. Variación de la Geometría de la Cavity

Para el último análisis, se usarán geometrías no cuadradas en la cavity. Para esto, se definió:

$$AR = \frac{L_y}{L_x} \quad (26)$$

Donde a AR se le llamará relación de aspecto. Para esto, con una malla de  $(81 \times 81)$  nodos y un espaciamiento temporal de  $\Delta t = 0.0005$  [s] para asegurar convergencia. Con esto, se simuló para un Reynolds de 100,  $AR = \{0.5, 1.0, 1.5\}$  en 10000 pasos de tiempo. De esta manera, se podrá comparar los resultados con la publicación de Omari [2].

### 7.1. Relación de Aspecto Menor a Uno

Para este caso, se grafica las líneas de corriente para un  $AR = 0.5$

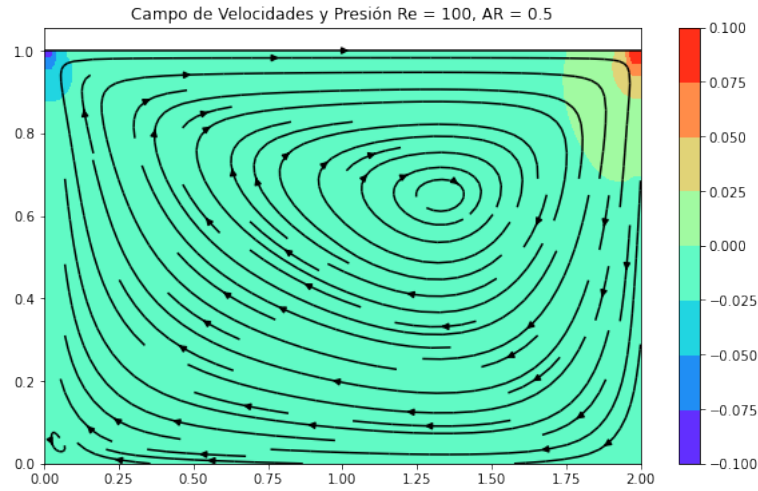


Figura 29: Distribución de Velocidad y Presión para  $AR = 0.5$

Para el  $AR = 0.5$ , se nota que el vórtice central se desplaza hacia abajo en relación al caso de  $AR = 1$ , graficado en (17). Además, se nota que los vórtices en las esquinas inferiores tienden a desaparecer. Se espera que este comportamiento se mantenga para AR cercanos a 0.5.

## 7.2. Relación de Aspecto Mayor a Uno

Para este caso, se grafica las líneas de corriente para un  $AR = 1.5$

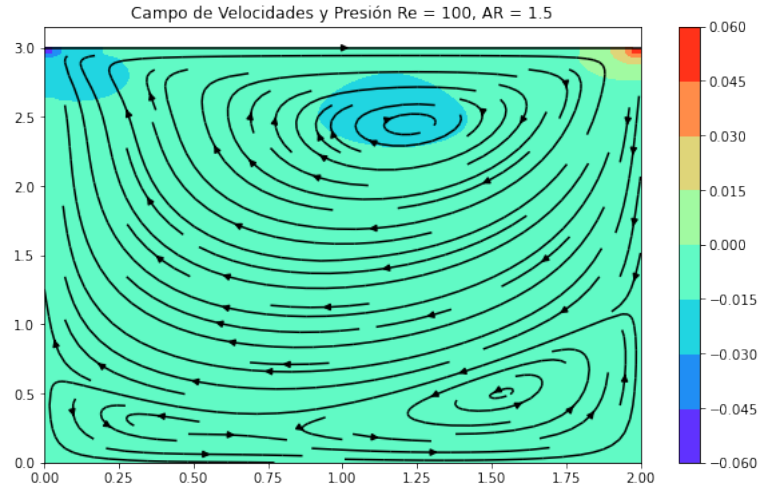


Figura 30: Distribución de Velocidad y Presión para  $AR = 1.5$

Analogamente, para el caso de  $AR = 1.5$ , el vórtice central se acerca a la pared superior. Además, dado el aumento de tamaño, se nota que se forma un vórtice más grande en la zona inferior, el cual parece combinarse conteniendo el que se formaba en ambas esquinas. Estas estructuras concuerdan con los graficados en [2]. Adicionalmente, se nota que la variación de la geometría de la cavidad modifica las distribuciones de presión dentro de esta, nuevamente obteniendo resultados similares a la publicación de Omari.

## 7.3. Comparación de las Distintas Relaciones de Aspecto

Para una mejor comparación de los  $AR$  (Relación de Aspecto) utilizados, se grafican las velocidades horizontales y verticales en la línea central de la cavidad. Es importante notar que para reflejar todos los resultados en un mismo gráfico, se grafican las variables adimensionalizadas (7).

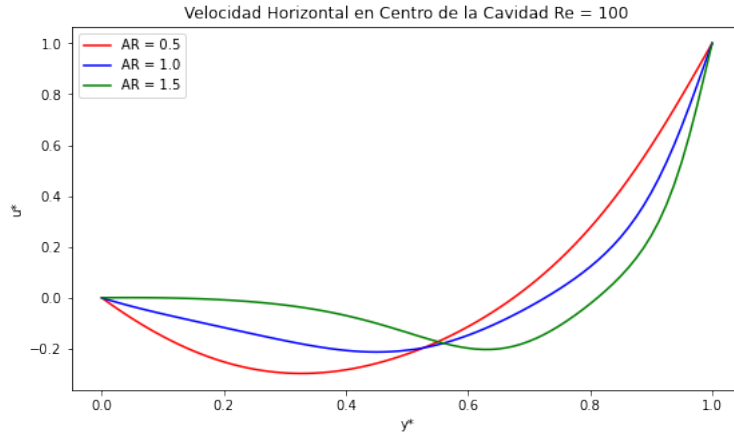


Figura 31: Comparación Distribución de Velocidad Horizontal para Distintos AR

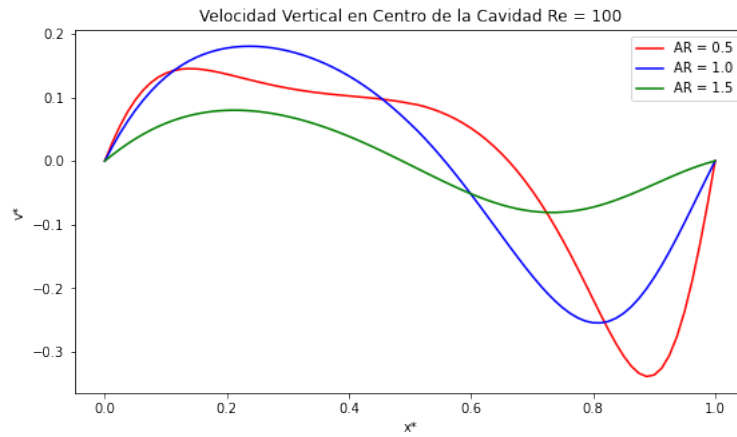


Figura 32: Comparación Distribución de Velocidad Vertical para Distintos AR

Estos gráficos reflejan como varían las velocidades en el centro para distintos AR. La velocidad horizontal parece no tener grandes diferencias, salvo pequeñas oscilaciones. Esto se debe a que en la línea central, el flujo es bastante similar. La gran diferencia ocurre en la velocidad vertical. Para  $AR = 0.5$  se logra ver una mayor pendiente, llegando a velocidades mayores que en los otros casos. Para el  $AR = 1.5$ , el gráfico se nota bastante suave. De todas formas, las curvas obtenidas en ambas componentes son bastantes similares al trabajo realizado en [2]. Esto refleja una gran concordancia y por ende un trabajo bien realizado. Es importante notar que para todos los casos se obtuvieron residuales bastantes bajos, los cuales indican la convergencia de las soluciones.

## 8. Conclusión

Se puede concluir que las soluciones numéricas representadas gráficamente en el informe cumplen con las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad para la cavidad cuadrada con una tapa en movimiento, pues utilizando el método de proyección se pudo estimar con buena aproximación la solución de estas, obteniendo los campos de velocidad y presión, dado que los resultados obtenidos concuerdan con la teoría física.

Se evidenció como el flujo a Reynolds bajos fue evolucionando en el tiempo hasta llegar a un estado estacionario. Así, se vio como fueron creciendo los vórtices centrales e inferiores de la cavidad hasta estabilizarse. Además, cabe mencionar que la variación de la forma de la cavidad influye en el comportamiento del fluido, generando vórtices de mayor o menos tamaño al igual que la cantidad de estos y, produce variaciones en los gradientes de presión. Adicionalmente se pudo revisar como varió la estructura del flujo variando el número de Reynolds. Respecto a este punto, se pudo revisar como estos vórtices crecen en tamaño. Todo esto, es debido a que el movimiento de la tapa arrastra al fluido, generando estas estructuras vorticales.

Sin embargo, la estabilidad del método empleado es condicionalmente estable y por lo tanto para trabajar con Reynolds altos se debe aumentar la cantidad de nodos y disminuir el espaciamiento temporal para no provocar que la solución pierda el sentido físico al perderse esta estabilidad. Esto implica que el método implementado es bastante costoso computacionalmente para Reynolds más altos. En si, estas inestabilidades pueden ser solucionadas con otros métodos, permitiendo simular Reynolds superiores.



## 9. Referencias

### Referencias

- [1] Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin C. T. *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*. J. Comput. Phys. 48 387-411 (1982)
- [2] Reyad Omari. *CFD simulations of lid driven cavity flow at moderate Reynolds number*. European Scientific Journal 9 15 (2013)
- [3] Sedat Biringen. *A note on the numerical stability of the convection-diffusion equation*. Nielsen Engineering & Research Inc. (s.f)
- [4] Chorin, A.J. *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations* Math. Comp. 22 745-762 (1968) doi:10.1090/s0025-5718-1968-0242392-2
- [5] Fox, McDonald's. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8th Edition (2011)
- [6] Klaus A. Hoffmann, Steve T. Chiang. *Computational Fluid Dynamics*. 4th Edition (2000)

## 10. Anexos

### 10.1. Código Principal

```

1
2 def metodo(U_inicial,V_inicial,nt,A,u_0,flag):
3
4     dx = Lx/(nx-1)
5     dy = Ly/(ny-1)
6
7     u = U_inicial.copy()
8     v = V_inicial.copy()
9
10    Res_u = np.zeros(nt)
11    Res_v = np.zeros(nt)
12    Res_div = np.zeros(nt)
13    Steady = np.zeros((3,nt))
14
15    u_st = np.zeros((ny,nx),dtype='float64')
16    v_st = np.zeros((ny,nx), dtype='float64')
17    P = np.zeros((ny,nx))
18
19    for n in range(nt):
20
21        #calculo de velocidad v*
22        #-----
23
24        un = u.copy()
25        vn = v.copy()
26        Pn = P.copy()
27
28        u_1x = (un[1:-1,1:-1]-un[1:-1,-2])/dx
29        u_1y = (un[1:-1,1:-1]-un[-2,1:-1])/dy
30        u_2x = (un[1:-1,2:] -2*un[1:-1,1:-1]+un[1:-1,-2])/(dx**2)
31        u_2y = (un[2:,1:-1] -2*un[1:-1,1:-1]+un[-2,1:-1])/(dy**2)
32
33        v_1x = (vn[1:-1,1:-1]-vn[1:-1,-2])/dx
34        v_1y = (vn[1:-1,1:-1]-vn[-2,1:-1])/dy
35        v_2x = (vn[1:-1,2:] -2*vn[1:-1,1:-1]+vn[1:-1,-2])/(dx**2)
36        v_2y = (vn[2:,1:-1] -2*vn[1:-1,1:-1]+vn[-2,1:-1])/(dy**2)
37
38        u_st[1:-1,1:-1] = un[1:-1,1:-1]+dt*(-un[1:-1,1:-1]*u_1x-vn[1:-1,1:-1]*u_1y)
39        +dt*mu*(u_2x+u_2y)
40        v_st[1:-1,1:-1] = vn[1:-1,1:-1]+dt*(-un[1:-1,1:-1]*v_1x-vn[1:-1,1:-1]*v_1y)
41        +dt*mu*(v_2x+v_2y)
42
43        u_st[0,:] = np.zeros(nx)
44        v_st[0,:] = np.zeros(nx)
45        u_st[-1,:] = np.full(nx,u_0)
46        v_st[-1,:] = np.zeros(nx)
47
48        u_st[:,0] = np.zeros(ny)
49        v_st[:,0] = np.zeros(ny)
50        u_st[:, -1] = np.zeros(ny)
51        v_st[:, -1] = np.zeros(ny)
52
53        #calculo de la presion
54        #-----
55
56        u_st_x = (u_st[1:-1,2:] -u_st[1:-1,-2])/(2*dx)
57        v_st_y = (v_st[2:,1:-1] -v_st[-2,1:-1])/(2*dy)
58        div_ji = (rho/dt)*(u_st_x + v_st_y)
59
60        b = -1*div_ji.flatten()
61        P_1d = spsolve(A,b)
62
63        P[1:-1,1:-1] = np.reshape(P_1d,(-1,nx-2))
64

```

```

65     P[0,:] = P[1,:]
66     P[-1,:] = P[-2,:]
67     P[:,0] = P[:,1]
68     P[:,-1] = P[:,-2]
69
70     #calculo de la velocidad en el paso siguiente
71     #-----
72
73     P_x = (P[1:-1,2:] - P[1:-1,-2]) / (2*dx)
74     P_y = (P[2:,1:-1] - P[-2,1:-1]) / (2*dy)
75
76     u[1:-1,1:-1] = u_st[1:-1,1:-1] - (dt/rho)*P_x
77     v[1:-1,1:-1] = v_st[1:-1,1:-1] - (dt/rho)*P_y
78
79     u[0,:] = np.zeros(nx)
80     v[0,:] = np.zeros(nx)
81     u[-1,:] = np.full(nx, u_0)
82     v[-1,:] = np.zeros(nx)
83
84     u[:,0] = np.zeros(ny)
85     v[:,0] = np.zeros(ny)
86     u[:,-1] = np.zeros(ny)
87     v[:,-1] = np.zeros(ny)
88
89     #calculo de residuales
90     #-----
91
92     if flag:
93         u_t = (u[1:-1,1:-1] - u_n[1:-1,1:-1]) / dt
94
95         u_x = (u[1:-1,1:-1] - u[1:-1,-2]) / dx
96         u_y = (u[1:-1,1:-1] - u[-2,1:-1]) / dy
97         u_xx = (u[1:-1,2:] - 2*u[1:-1,1:-1] + u[1:-1,-2]) / (dx**2)
98         u_yy = (u[2:,1:-1] - 2*u[1:-1,1:-1] + u[-2,1:-1]) / (dy**2)
99
100        P_x = (P[1:-1,2:] - P[1:-1,-2]) / (2*dx)
101
102        conv_u = u_t + u[1:-1,1:-1]*u_x + v[1:-1,1:-1]*u_y
103        diff_u = -P_x/rho + mu*(u_xx + u_yy)
104
105        Res_u[n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum((conv_u-diff_u)**2))
106
107        v_t = (v[1:-1,1:-1] - v_n[1:-1,1:-1]) / dt
108
109        v_x = (v[1:-1,1:-1] - v[1:-1,-2]) / dx
110        v_y = (v[1:-1,1:-1] - v[-2,1:-1]) / dy
111        v_xx = (v[1:-1,2:] - 2*v[1:-1,1:-1] + v[1:-1,-2]) / (dx**2)
112        v_yy = (v[2:,1:-1] - 2*v[1:-1,1:-1] + v[-2,1:-1]) / (dy**2)
113
114        P_y = (P[2:,1:-1] - P[-2,1:-1]) / (2*dy)
115
116        conv_v = v_t + u[1:-1,1:-1]*v_x + v[1:-1,1:-1]*v_y
117        diff_v = -P_y/rho + mu*(v_xx + v_yy)
118
119        Res_v[n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum((conv_v-diff_v)**2))
120
121        ux = (u[1:-1,2:] - u[1:-1,-2]) / (2*dx)
122        vy = (v[2:,1:-1] - v[-2,1:-1]) / (2*dy)
123
124        Res_div[n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum((ux+vy)**2))
125
126        Steady[0,n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum((u_t)**2))
127        Steady[1,n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum((v_t)**2))
128        Steady[2,n] = np.sqrt(1/((nx-2)*(ny-2))*np.sum(((P-Pn)/dt)**2))
129
130    if np.max(u) > 10**4:
131        break
132
133    return u, v, P, Res_u, Res_v, Res_div, Steady

```