



UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA



Modelación de las Ondas de Choque Dentro un Tubo de Sod

Fundamentos de la Dinámica de Fluidos Computacional

MEC-223 - 2021

Martín Achondo Mercado

Rol: 201860005-9

Eduardo Hasbun Contreras

Rol: 201841031-4

Profesor: Christopher Cooper

6 de Diciembre de 2021

1. Resumen

En el presente se trabajó con un Sod's shock tube, el cual es el ejemplo canónico del flujo compresible unidimensional. Este problema se modeló con dos discretizaciones: Lax-Friedrichs y de Richtmyer. De esta manera, se pudo constatar la diferencia en los errores de cada método. Respecto a esto, se notó que el primero entregaba errores difusivos y el segundo errores dispersivos. Por otra parte, se pudo visualizar y estimar la velocidad de las ondas de presión que se propagaron por el tubo. Se pudo notar que esta velocidad varió dependiendo de la diferencia de presión planteada en la condición inicial del tubo de Sod. Por último, cada uno de los análisis se realizaron para una malla fina y una gruesa para verificar la mayor convergencia de los métodos.

Índice

1. Resumen	1
2. Introducción	3
3. Objetivos	3
3.1. Objetivos generales.	3
3.2. Objetivos específicos.	3
4. Marco Teórico	4
5. Discretización	6
6. Análisis	8
6.1. Variación Temporal del Flujo	8
6.1.1. Malla Gruesa	8
6.1.2. Malla Fina	10
6.2. Variación en la Diferencia de Presión	12
6.2.1. Diferencia de presión de 0.8	12
6.2.2. Diferencia de presión de 1.1	16
6.3. Comparación con la Literatura	20
7. Conclusión	22
8. Referencias	23
9. Anexos	24
9.1. Código Principal	24

2. Introducción

El Sod's shock tube consiste en un tubo muy largo el cual contiene dos secciones las cuales son separadas por una membrana. Estas dos secciones contienen el mismo fluido pero con propiedades físicas distintas, tal como se observa en la figura 1. El experimento consiste en remover la membrana que separa ambos gases y observar la evolución dentro del tubo a lo largo del tiempo.

A continuación, se buscara resolver el problema de utilizando una resolución numérica de las ecuaciones conservativas que rigen el sistema.

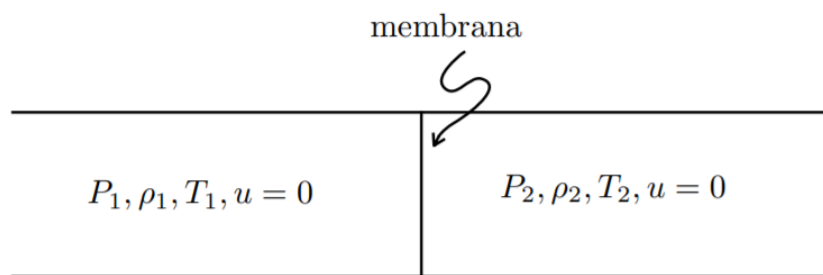


Figura 1: Sod's shock Tube

3. Objetivos

3.1. Objetivos generales.

Crear un código para la resolución del problema planteado y poder obtener información con respecto a la evolución del fluido a través del tiempo y del espacio.

3.2. Objetivos específicos.

- Elaborar un código que implemente la resolución a un caso de Sod's Shock Tube.
- Visualizar la evolución temporal de la velocidad, densidad y presión en el tubo.
- Analizar las diferencias que aparecen al cambiar la diferencia de presión inicial.
- Obtención de distintos resultados variando variables tales como la malla.
- Análisis de resultados y de errores entre los métodos utilizados.

4. Marco Teórico

La mecánica de fluidos se basa en ecuaciones de conservación. Dentro de estas, se tiene la conservación de masa, la conservación de cantidad de movimiento y la conservación de la energía. En este proyecto se trabajará con versiones simplificadas de estas ecuaciones bajo las siguientes suposiciones:

- Se considerará un flujo compresible.
- Se considerará un flujo inviscido, lo que quiere decir que no tiene viscosidad, $\mu = 0$
- Se considerará un flujo unidimensional.
- Se desprecian los efectos gravitatorios.
- El fluido de trabajo será aire y se considerará como gas ideal.

Las ecuaciones de conservación en forma vectorial para estas suposiciones son las siguientes [2].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{\nabla p}{\rho} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) e &= -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \mathbf{V}\end{aligned}\tag{1}$$

Donde ρ , e , p y \mathbf{V} representan la densidad, la energía total por unidad de masa, la presión y la velocidad respectivamente. Dado que se estará trabajando en 1 dimensión, se escribirán estas ecuaciones en términos de sus componentes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p u}{\partial x}\end{aligned}\tag{2}$$

Estas ecuaciones de conservación se escribirán en forma conservativa para su resolución. Esto será siguiendo la siguiente estructura para un volumen de control:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{U} dV + \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0\tag{3}$$

Gráficamente:

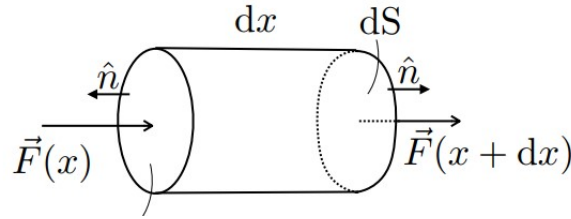


Figura 2: Volumen de Control

En forma diferencial, esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (4)$$

Donde el vector \mathbf{U} corresponde al valor de la propiedad, y por ende su derivada temporal corresponde a su acumulación y el vector \mathbf{F} corresponde al flujo de esta propiedad. Notar que se considera \mathbf{U} como vector ya que se estarán trabajando con 3 propiedades a la vez, dado las 3 ecuaciones de conservación. En 1D, la ecuación queda como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

En el caso a trabajar, los vectores representan:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}$$

La ecuación (5) se resolverá utilizando condiciones de borde de Neumann nulas para \mathbf{U} .

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0 \quad (7)$$

Para cerrar el sistema, dado que se asumió la utilización de aire como gas ideal, se presentará la ecuación de estado a utilizar:

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (8)$$

Por ende, para la resolución del flujo en el tubo, se utilizarán las ecuaciones de conservación (5) y la ecuación de estado (8). Es importante destacar que en el código se utilizará la energía total por unidad de volumen, dada por $E = \rho e$.

En este trabajo, al considerar un flujo compresible y no necesariamente isentrópico, se espera que se produzcan ondas de choque que se propaguen a lo largo del tubo.

5. Discretización

Para la resolución numérica del problema, se considera la ecuación (5), la cual se encuentra en su forma conservativa y en una dimensión, junto a esto, se utilizan dos métodos para resolver la ecuación: Lax-Friedrichs y Richtmeyer.

- Lax-Friedrichs: Este metodo se obtiene al discretizar la ecuacion con diferencia adelantada en el tiempo y centrada en el espacio, luego se reemplaza el el termino i por el promedio de los nodos mas cercanos. La ecuacion queda de la sigueinte forma:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (9)$$

Este método es de segundo orden en el espacio y primer orden en el tiempo.

- Richtmeyer: Este consiste en una resolución de dos pasos (predictor-corrector) modificado para el caso no lineal. En la primera etapa, calculamos variables en un paso de tiempo intermedio $t^{n+1/2}$.

$$\begin{aligned} U_{i+1}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n) \\ U_{i-1}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_i^n - F_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (10)$$

Luego viene la etapa de corrección, en la cual proyectamos el tiempo final $n+1$ evaluando los flujos en los tiempos $t^{n+1/2}$

$$U_{i+1}^{n+1/2} = (U_{i+1}^n + U_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1}^{n+1/2} - F_i^{n+1/2}) \quad (11)$$

Este método es de segundo orden en el espacio y en el tiempo.

La condición de borde se va a discretizar con diferencias de primer orden y tal que el valor de la condición es nulo, se obtiene:

$$U_{N-1} = U_N ; U_0 = U_1 \quad (12)$$

Con la discretización planteada, en resumen el algoritmo a utilizar para modelar este tubo será el siguiente.

1. Inicializar todos los parámetros del flujo (geometría, propiedades).
2. Definir la malla computacional.
3. Inicializar las condiciones iniciales del flujo.
4. Iterar desde $n = 0$ hasta $n = n_t - 1$, sobre todos los pasos temporales.
 - Calcular U para el siguiente paso temporal con la ecuación de conservación discretizada.
 - Con la ecuación de estado, encontrar F para el siguiente paso temporal utilizando el U calculado.
5. Graficar los campos necesarios.

El código en detalle se encuentra en el anexo.

6. Análisis

6.1. Variación Temporal del Flujo

En esta sección se analizarán las variaciones temporales de la presión, densidad y velocidad en el tubo para tiempos de 0, 0.001, 0.05, 0.1 y 0.2 segundos. Para esto se asumieron condiciones iniciales de $p = 1$, $\rho = 1$ y $u = 0$ para la zona $x < 1$. Para la zona $x > 1$, se asumió condiciones de $p = 0.1$, $\rho = 0.125$ y $u = 0$.

6.1.1. Malla Gruesa

La simulación se realizará con una discretización espacial $N_x = 300$ nodos y un paso temporal $\Delta t = 0.0005$.

Discretización de Lax-Friedrichs

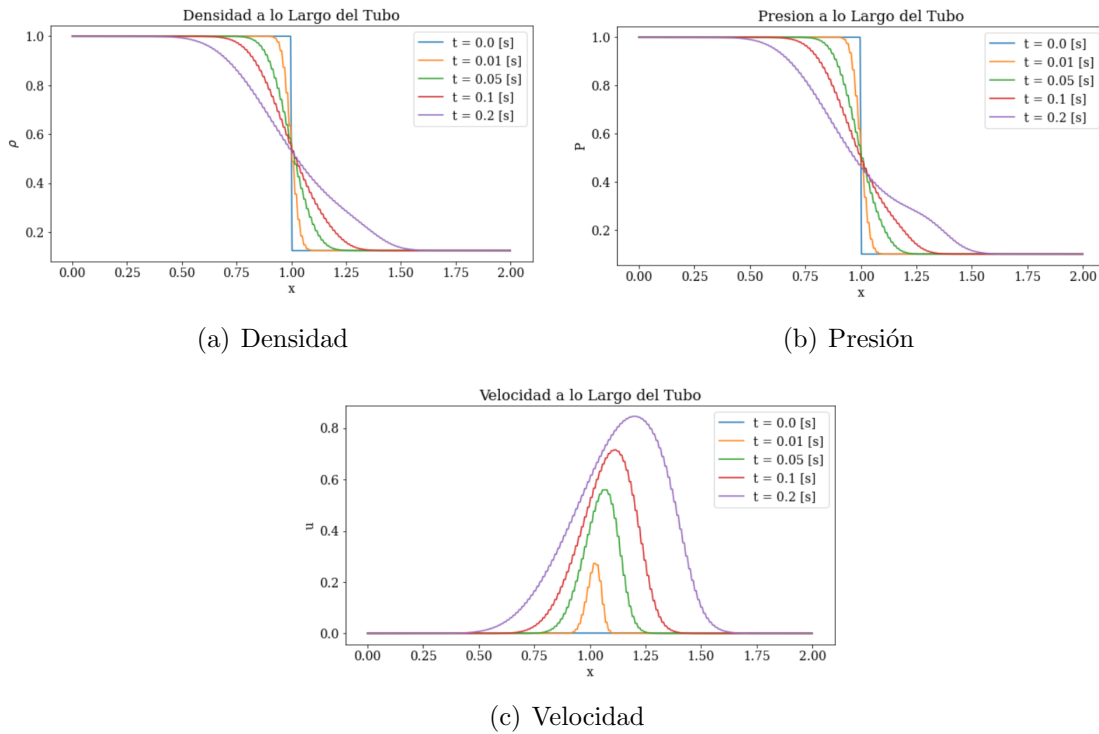


Figura 3: Propiedades para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Se nota que al ocurrir este cambio repentino en la presión y densidad, a medida que pasa el tiempo, el gradiente se vuelve cada vez más pequeño. Se comporta como un fenómeno de difusión.

Discretización de Richtmyer

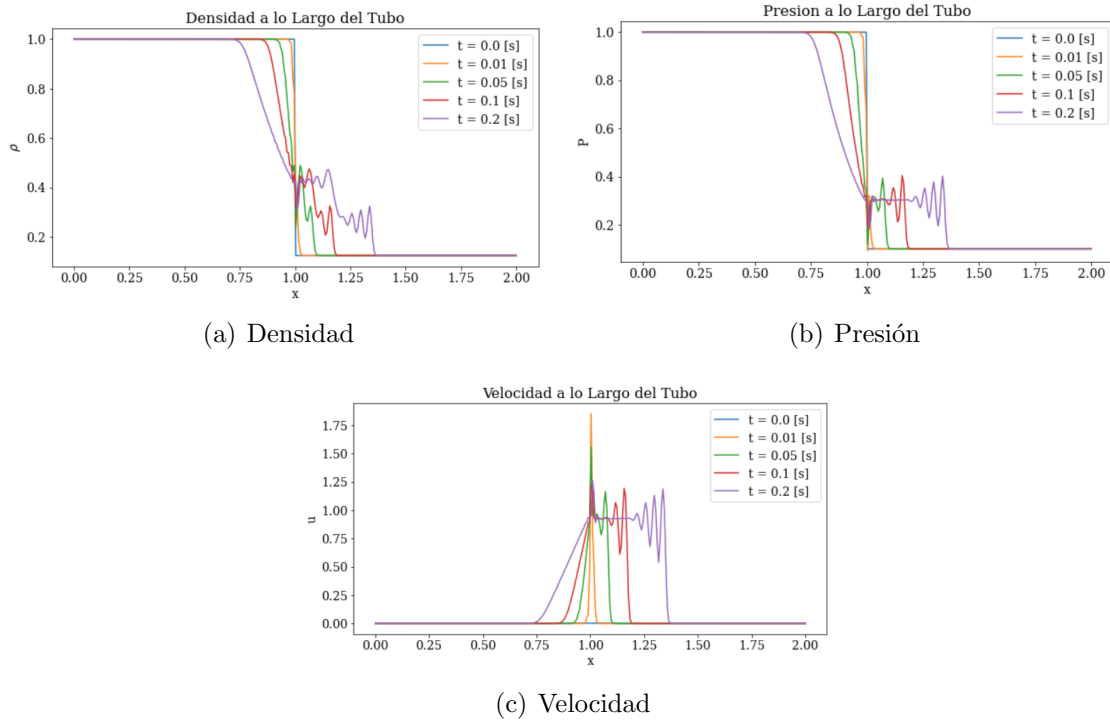


Figura 4: Propiedades para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

Para este método, también se nota como la presión y densidad varían a lo largo del flujo. Lo interesante es que este método logra reproducir muy bien los gradientes altos. Aquí se nota que la presión va avanzando, perturbando a todo el tubo a medida que aumenta el tiempo. Con esto entonces, se puede identificar que existen 2 ondas de presión propagándose en el tubo, una hacia cada lado. Se estimará la velocidad de propagación con la curva de 0.2 [s].

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{0.375}{0.2}$$

Este cálculo da una velocidad aproximada de 1.875 [m/s]. A simple vista se nota que ambas ondas viajan a esta misma velocidad, lo cual tiene sentido.

El método de Richtmyer, como se dijo anteriormente, logra reproducir de mejor manera los gradientes, pero aparecen errores de dispersión. Además, logra reproducir de mejor manera los escalones en las propiedades, en comparación a Lax-Friedrichs.

6.1.2. Malla Fina

La simulación se realizará con una discretización espacial $N_x = 1500$ nodos y un paso temporal $\Delta t = 0.0001$. Esta malla se comparará con la malla gruesa.

Discretización de Lax-Friedrichs

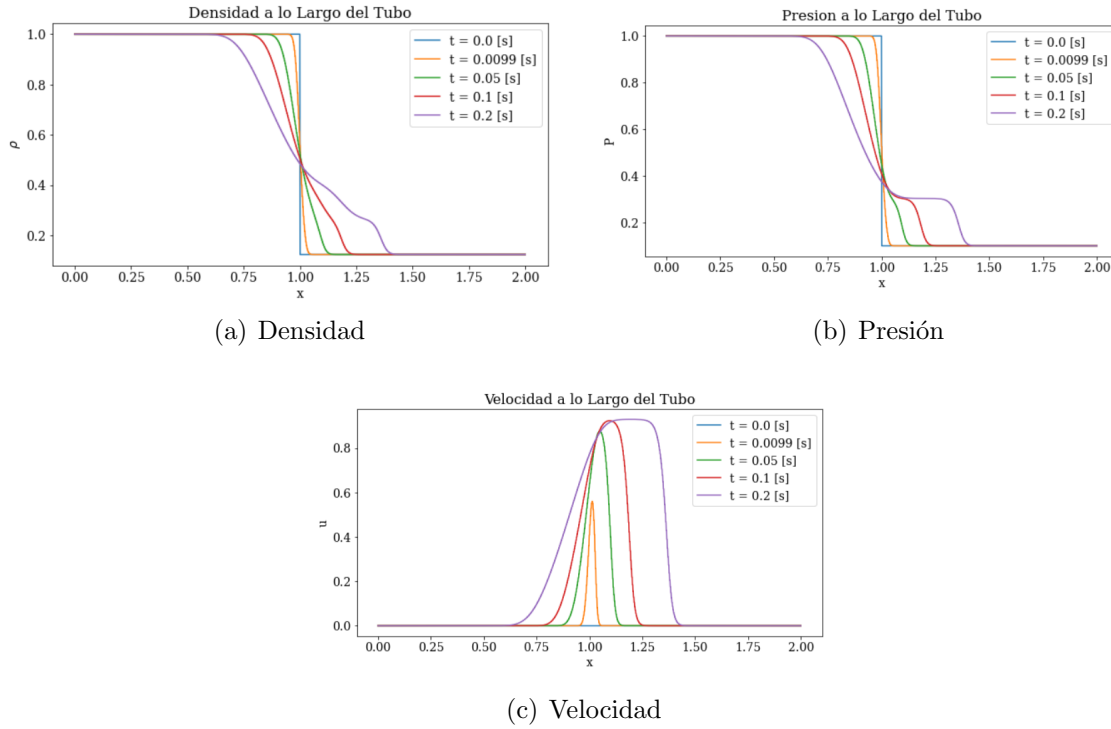


Figura 5: Propiedades para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Se nota que para el método de Lax-Friedrichs, con la malla fina se logra reproducir de mejor manera los gradientes respecto a la malla gruesa. Esto se debe principalmente a la utilización de más nodos a lo largo del tubo. De igual manera, se logra reducir el error de difusión que aparece respecto al caso anterior.

Discretización de Richtmyer

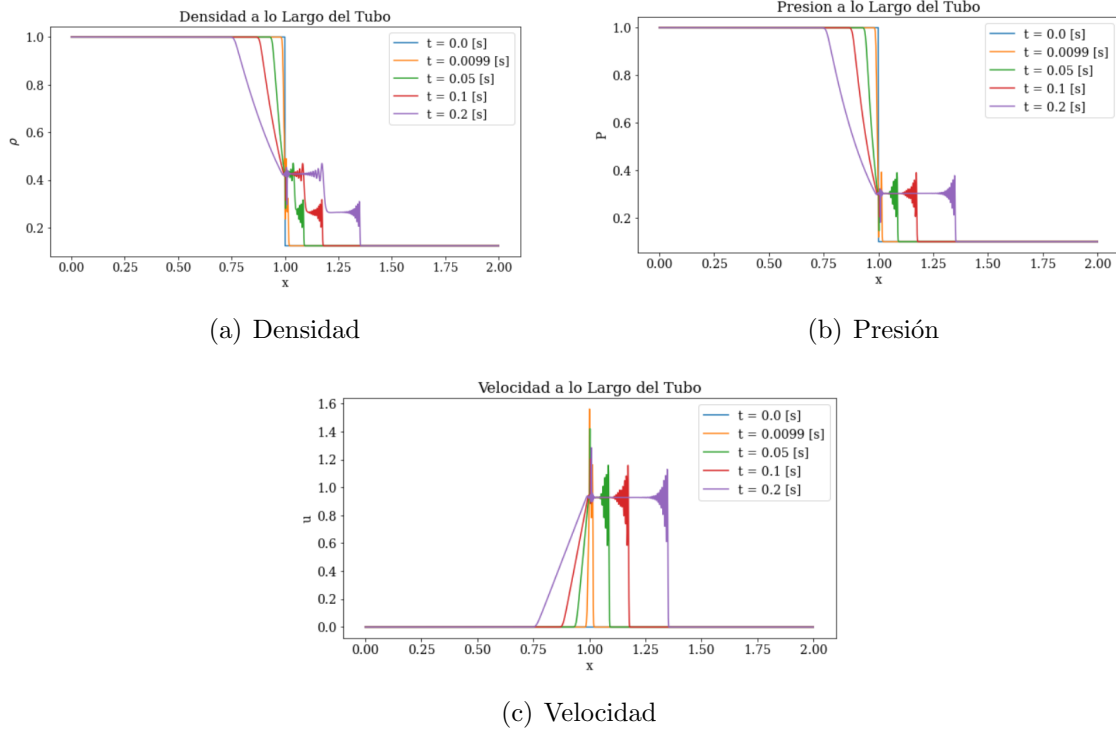


Figura 6: Propiedades para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

Para el método de Richtmyer, se nota que la utilización de una malla más fina reduce considerablemente los errores de dispersión generados. De esta manera, se logra visualizar de mejor manera los escalones en las variables.

6.2. Variación en la Diferencia de Presión

En esta sección se compararán ambos métodos y mallas para variaciones de presión de $\Delta p = 0.8$ y $\Delta p = 1.1$ y así ver como varían las estructuras respecto al caso anterior.

6.2.1. Diferencia de presión de 0.8

Para realizar el análisis, se considera que la presión del fluido 1 es $p_1 = 1.2$ y del fluido 2 de $p_2 = 0.4$.

Discretización de Lax-Friedrichs con malla gruesa

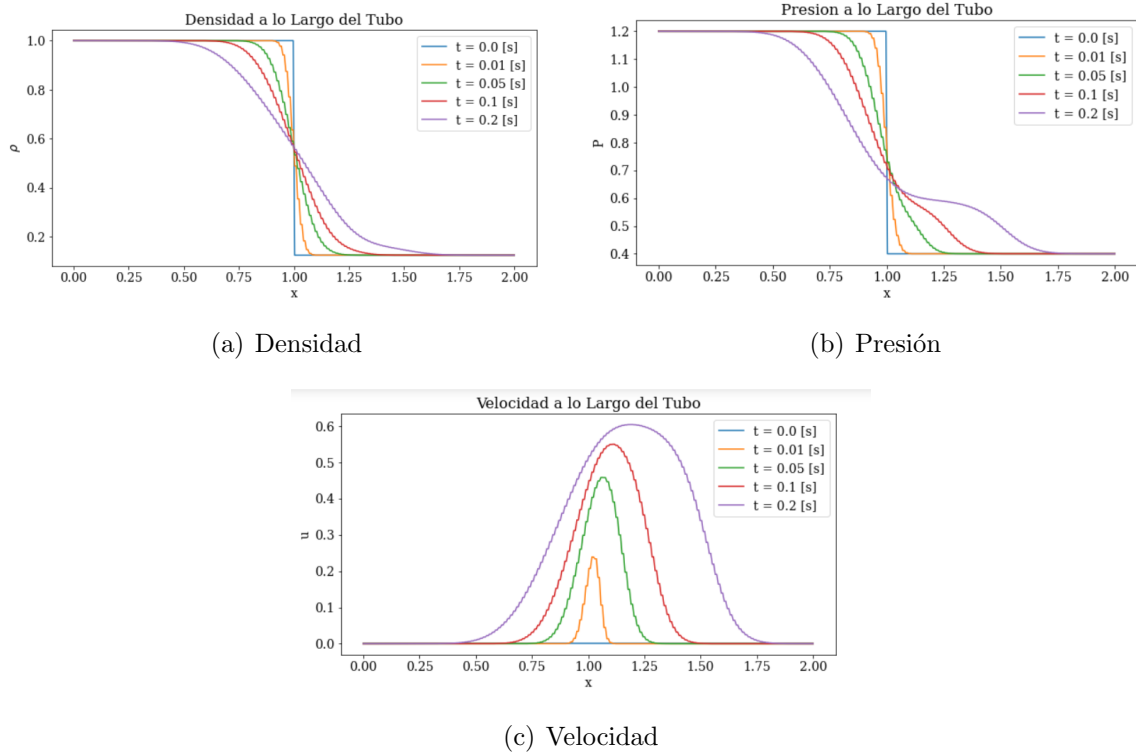


Figura 7: Propiedades con $\Delta p = 0.8$ para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Discretización de Lax-Friedrichs con malla fina

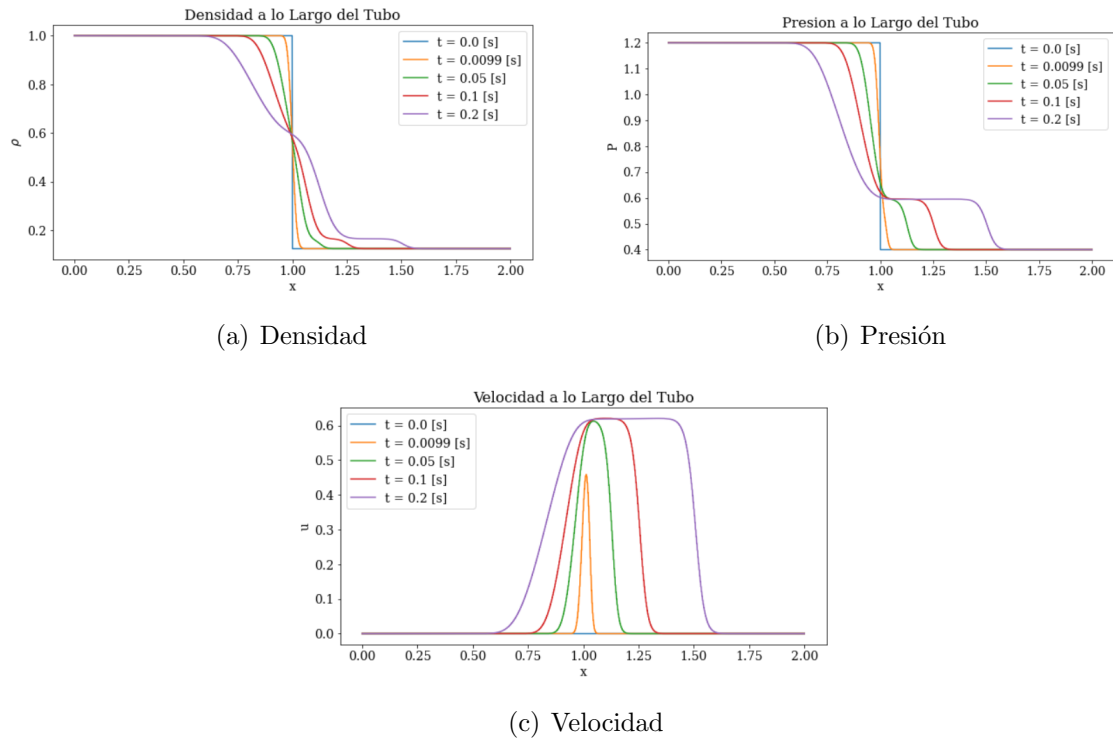


Figura 8: Propiedades con $\Delta p = 0.8$ para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Discretización de Richtmyer's con malla gruesa

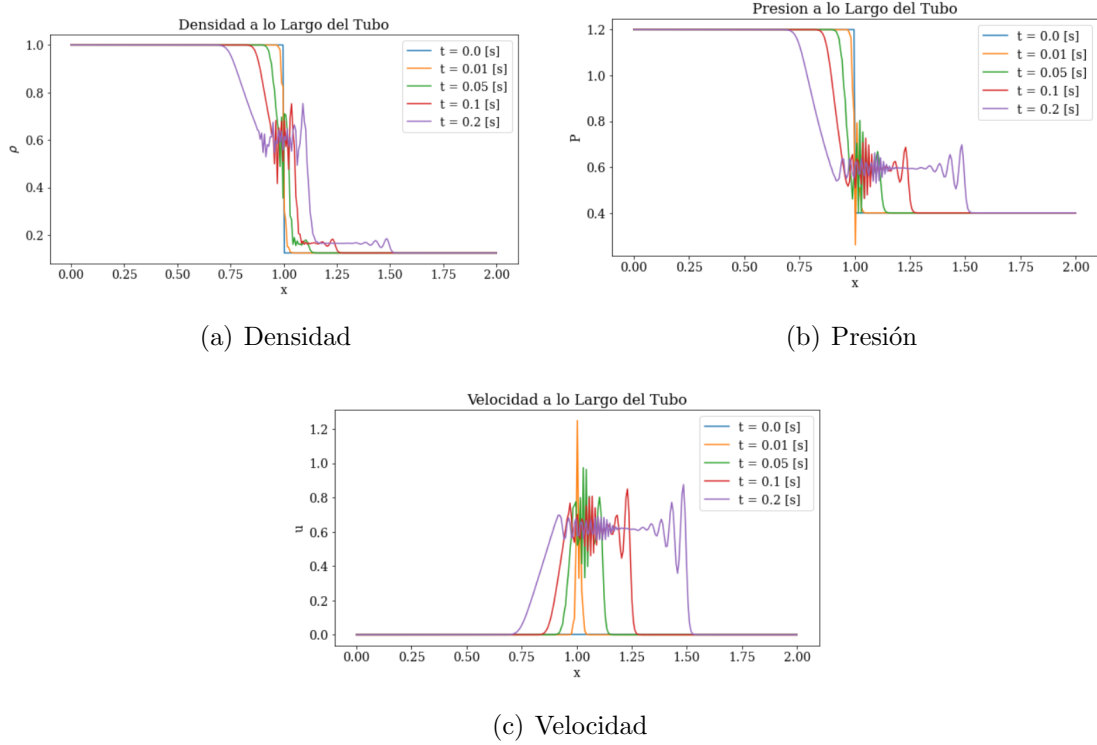


Figura 9: Propiedades con $\Delta p = 0.8$ para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

Discretización de Richtmyer's con malla fina

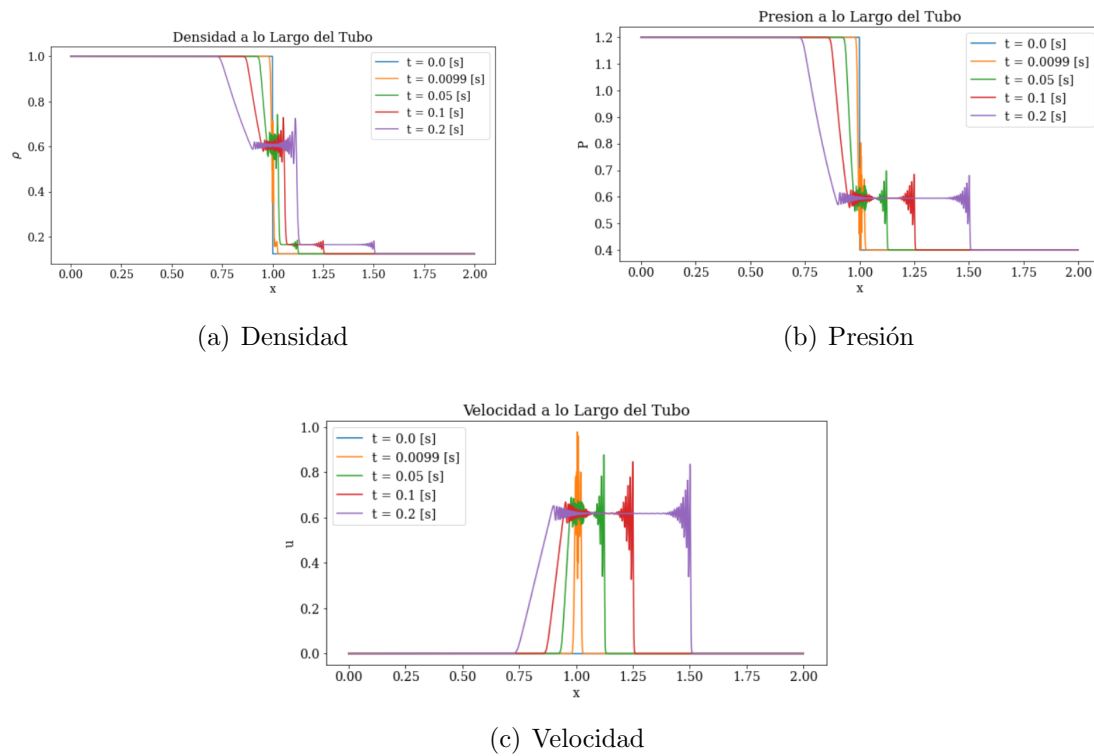


Figura 10: Propiedades con $\Delta p = 0.8$ para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

6.2.2. Diferencia de presión de 1.1

Para realizar el análisis, se considera que la presión del fluido 1 es $p_1 = 1.2$ y del fluido 2 de $p_2 = 0.1$

Discretización de Lax-Friedrichs con malla gruesa

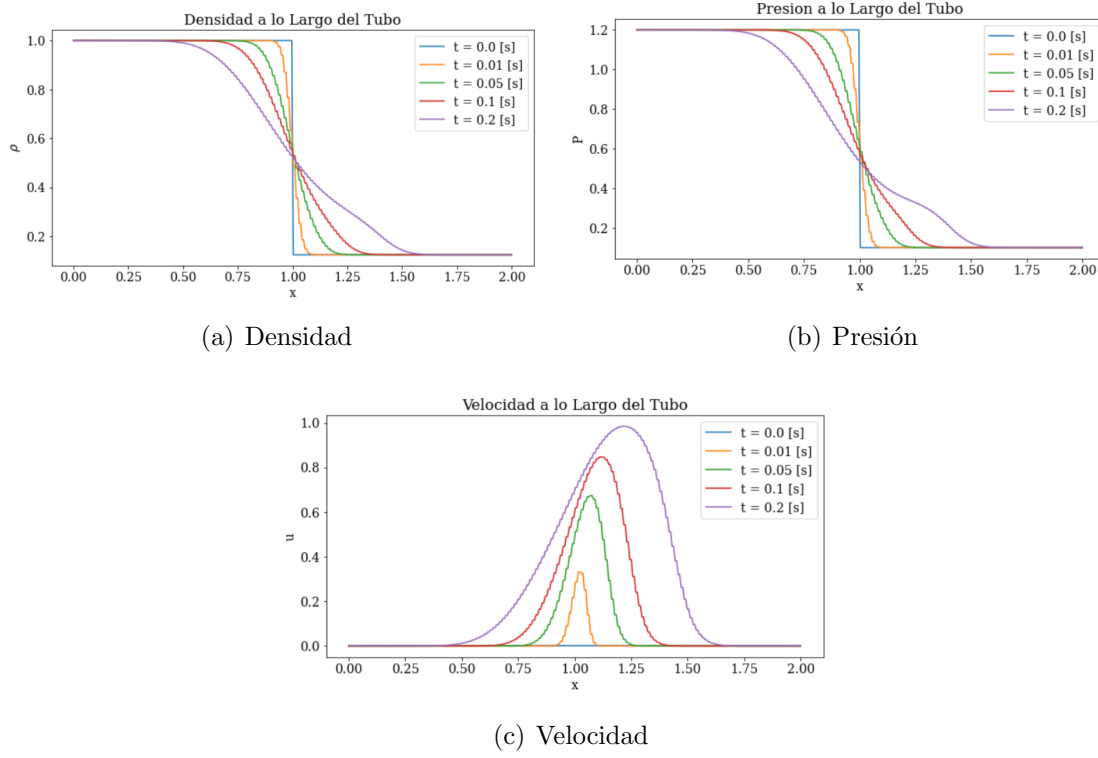


Figura 11: Propiedades con $\Delta p = 1.1$ para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Discretización de Lax-Friedrichs con malla fina

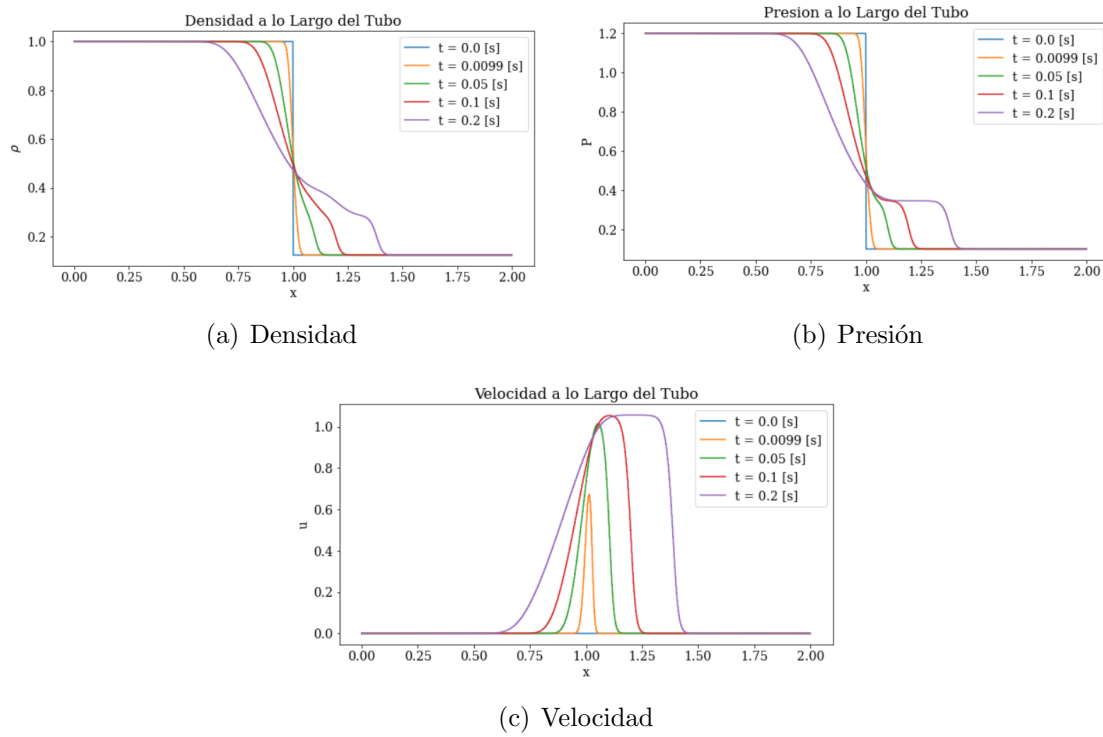


Figura 12: Propiedades con $\Delta p = 1.1$ para diversos pasos de tiempo con Lax-Friedrichs

Discretización de Richtmyer's con malla gruesa

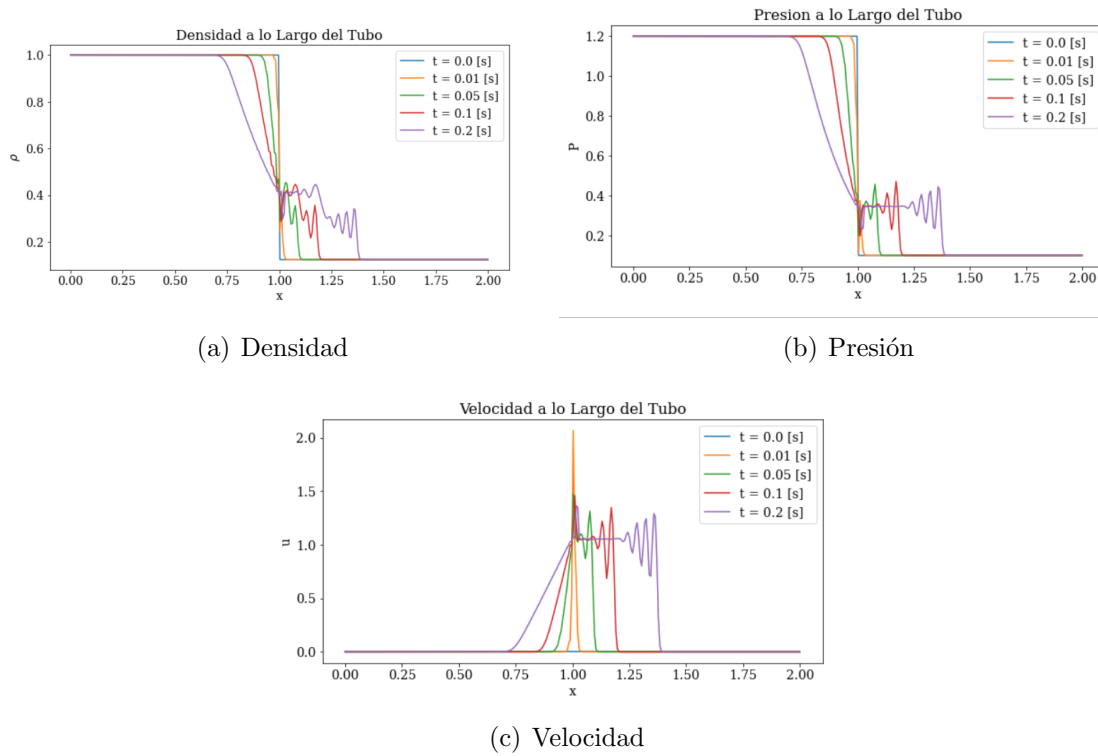


Figura 13: Propiedades con $\Delta p = 1.1$ para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

Discretización de Richtmyer's con malla fina

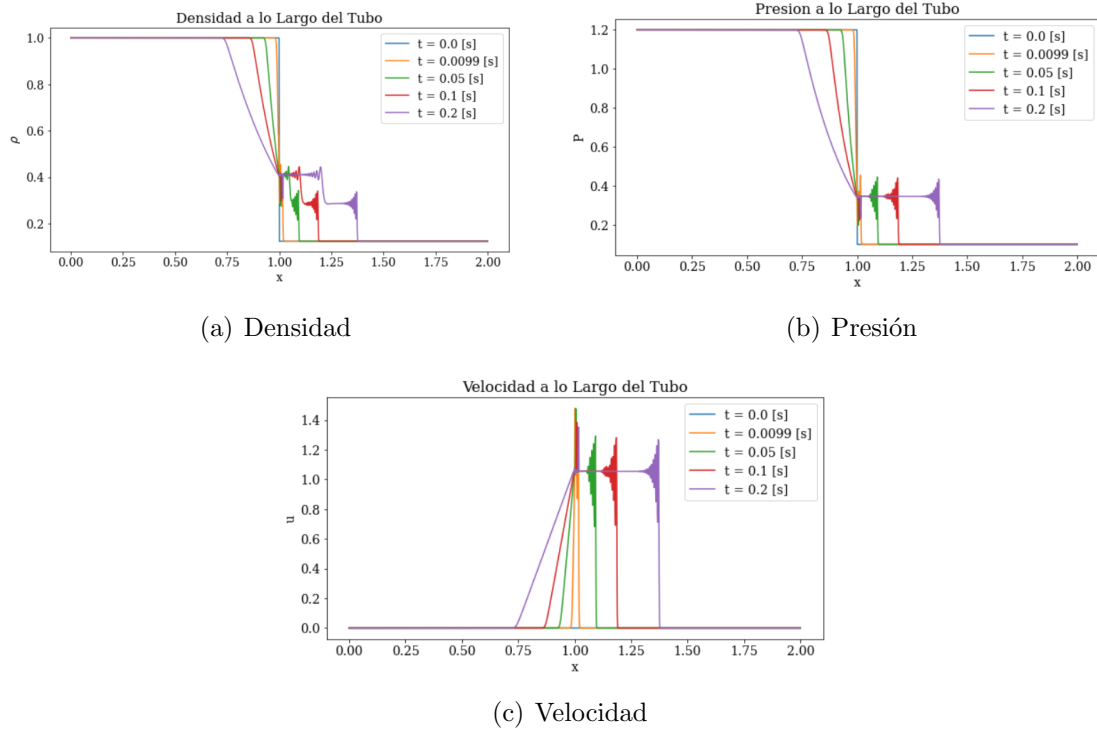


Figura 14: Propiedades con $\Delta p = 1.1$ para diversos pasos de tiempo con Richtmyer

Tras el análisis de los gráficos y la comparación entre las distintas configuraciones de ΔP , se observan los siguientes resultados:

- Cuando se disminuye el Δp , la velocidad de onda de choque aumenta.
- A mayor Δp , menor es la caída de densidad en el punto medio del tubo.
- Con un Δp mayor, el flujo obtiene una mayor velocidad.
- La caída de presión aumenta al aumentar Δp
- Se nota además que la utilización de una malla gruesa al variar la diferencia de presión genera ciertas inestabilidades, las cuales con una malla fina son corregidas.

6.3. Comparación con la Literatura

El trabajo realizado con el método de Richtmyers y Lax-Friedrichs se comparará con los resultados obtenidos en la publicación de Gary A. Sod [1] con el método de Glimm. Para esto, se utilizó una malla de $N_x = 1500$ nodos y un paso temporal de $\Delta t = 0.0001$ [s].

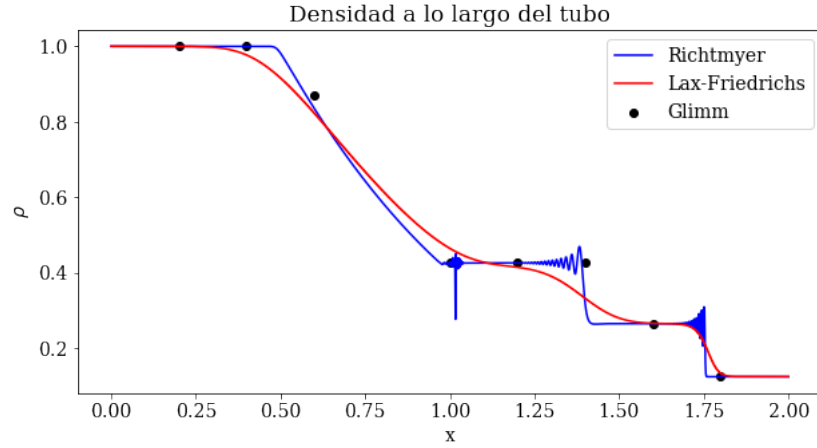


Figura 15: Comparación de la densidad

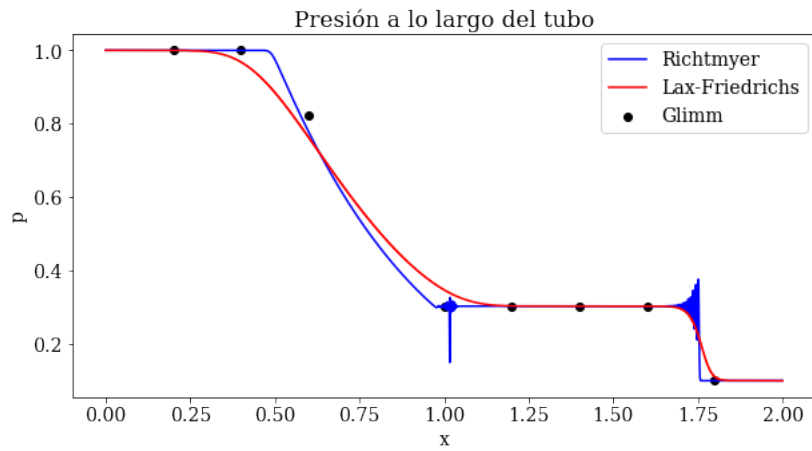


Figura 16: Comparación de la presión

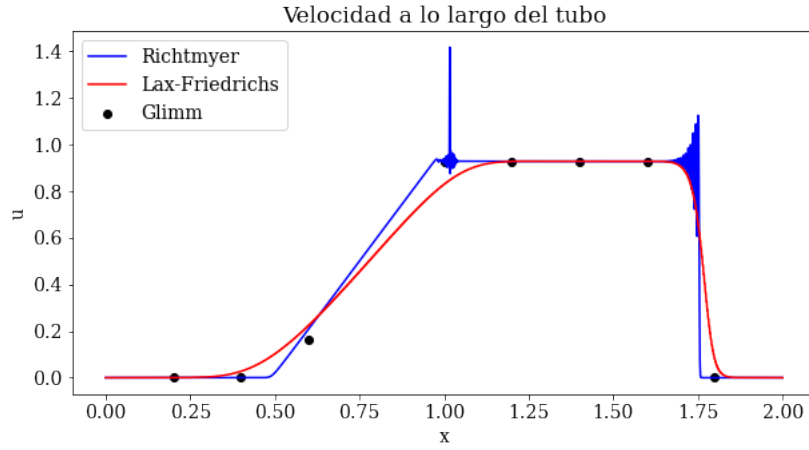


Figura 17: Comparación de la velocidad

En los 3 gráficos presentados se nota que el método de Richtmyers empleado en este trabajo predice de manera muy precisa los escalones en la presión, densidad y velocidad. Los valores de las propiedades del flujo en los escalones son aproximadamente los mismos. Además, se logra notar la comparación directa entre los métodos utilizados en este trabajo. Se nota claramente como el método de Lax-Friedrichs no produce de buena manera los gradientes dado el carácter difusivo de su error. De todas formas, con la malla empleada, se logra alcanzar los valores de los escalones. De igual manera, el método de Richtmyers, ignorando sus errores dispersivos, simula de mejor manera las estructuras en la publicación de Sod [1].

7. Conclusión

Se puede concluir que las soluciones numéricas representadas gráficamente en el informe cumplen con las ecuaciones de conservación para un flujo compresible. Los métodos numéricos empleados lograron reproducir con una buena aproximación las distribuciones de densidad, presión y velocidad en el tubo. Además, los resultados obtenidos concuerdan con la teoría física.

Se evidenció como se generan ondas de choque dada la discontinuidad en la presión. El modelo que logró predecir de mejor manera este fenómeno fue la discretización de Richtmyer, dado que no posee los errores difusivos de Lax-Friedrichs, pero al costo de incluir errores dispersivos. Además, se pudo calcular la velocidad de esta onda de choque y ver como variaba modificando el gradiente de presión inicial. Se notó que la onda de choque se propaga más rápido disminuyendo la diferencia de presión.

Por último, se nota que la utilización de mallas más finas disminuye considerablemente los errores producidos por ambos métodos. Se reducen tanto los errores difusivos y dispersivos. En la práctica, se estima que es recomendable siempre utilizar más de un método para resolver un problema ya que cada uno, como se presentó en este trabajo, posee un error. La comparación de estos, reduciendo cada vez más la malla, puede llevar a una simulación correcta de la realidad

8. Referencias

Referencias

- [1] Gary A. Sod. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*. Journal of Computational Physics 27, 1-31 (1978).
- [2] Fox, McDonald's. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8th Edition (2011)
- [3] Klaus A. Hoffmann, Steve T. Chiang. *Computational Fluid Dynamics*. 4th Edition (2000)

9. Anexos

9.1. Código Principal

```

1  def lax_friedrichs(U_inicial,nt,dt,nx):
2
3      dx = Lx/(nx-1)
4
5      U = U_inicial.copy()
6      f = flux(U)
7
8      for n in range(nt):
9
10         Un = U.copy()
11         fn = f.copy()
12
13         Ux = 0.5*(Un[:,2:] + Un[:,-2])
14         fx = 0.5*(fn[:,2:] - fn[:,-2])
15
16         U[:,1:-1] = Ux - (dt/dx)*fx
17         U[:,0] = U[:,1]
18         U[:, -1] = U[:, -2]
19
20         f = flux(U)
21
22     return U,f
23
24     #-----
25
26 def richtmyers(U_inicial,nt,dt,nx):
27
28     dx = Lx/(nx-1)
29
30     U = U_inicial.copy()
31     f = flux(U)
32     U1 = U.copy()
33     U2 = U.copy()
34
35     for n in range(nt):
36
37         Un = U.copy()
38         fn = f.copy()
39
40         U1[:,1:-1] = 0.5*(Un[:,2:] + Un[:,1:-1]) - (dt/dx)*0.5*(fn[:,2:] - fn[:,1:-1])
41         U2[:,1:-1] = 0.5*(Un[:,1:-1] + Un[:,-2]) - (dt/dx)*0.5*(fn[:,1:-1] - fn[:,-2])
42
43         U[:,1:-1] = Un[:,1:-1] - (dt/dx)*(flux(U1)[:,1:-1]-flux(U2)[:,1:-1])
44         U[:,0] = U[:,1]
45         U[:, -1] = U[:, -2]
46
47         f = flux(U)
48
49     return U,f
50
51
52     #-----
53
54 def obtener_var(A):
55     rho = A[0,:].copy()
56     u = (A[1,:]/rho)
57     E = A[2,:].copy()
58     p = (gamma-1)*(E-0.5*rho*u**2)
59     R = 287
60     T = p/(rho*R)
61
62     return rho,u,E,p,T
63
64 def flux(A):

```

```
65 |     f = np.zeros((3,nx))
66 |     rho,u,E,p,_ = obtener_var(A)
67 |
68 |     f[0,:] = np.full(nx,u*rho)
69 |     f[1,:] = np.full(nx,rho*u**2+p)
70 |     f[2,:] = np.full(nx,u*E+u*p)
71 |
72 |     return f
```