

# **Aplicación del Método de Elementos Finitos en la Torsión de un Elemento Prismático**

Martín Achondo Mercado, Catalina Santibañez Mercado

Universidad Técnica Federico Santa María, Departamento de Ingeniería Mecánica, Valparaíso, Chile, martin.achondo@sansano.usm.cl, catalina.santibanez@sansano.usm.cl

## **Abstract**

En el presente documento se abordó un problema de mecánica de sólidos en 2D mediante el método de elementos finitos (MEF), utilizando Matlab. El problema consistió en estudiar el comportamiento de una barra con sección elíptica sometida a torsión, con especial énfasis en la variación del semieje mayor  $b$  de la sección elíptica mediante la teoría de esfuerzos de Prandtl. Esta teoría permitió simplificar el problema a una ecuación de Poisson, para así obtener los esfuerzos cortantes y el torque.

Respecto a los resultados obtenidos, se destaca la importancia del valor de  $b$  (semieje mayor) en el comportamiento del esfuerzo cortante, ya que el esfuerzo aumenta al aumentar  $b$ . Además, se demuestra que la concentración de esfuerzos ocurre en el borde más cercano al centro geométrico. Por otra parte, la convergencia de la malla indica que la independencia de la malla depende de  $b$ , ya que se logra una estabilidad con una mayor cantidad de nodos en el esfuerzo de Prandtl y Torque, pero no se logra en su totalidad con el esfuerzo cortante, que tiende a aumentar. Esto demuestra la diferencia en convergencia entre variables primarias y secundarias.

El trabajo demuestra la gran ventaja de formular los problemas de torsión mediante la utilización de la función de esfuerzos de Prandtl. La utilización de esta función escalar permite reducir las ecuaciones de equilibrio a una ecuación de Poisson, la cual corresponde a un caso bastante estudiado con soluciones analíticas disponibles. Las demás variables de interés puede ser obtenidas a partir de la función de esfuerzos de Prandtl, en donde su gradiente corresponde al esfuerzo cortante, y su integral al torque aplicado sobre la barra.

## **Palabras claves**

Métodos de elementos finitos, Formulación débil de Galerkin, Mecánica de Sólidos, Función de Esfuerzos de Prandtl

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Objetivo General . . . . .	3
1.2. Objetivos Específicos . . . . .	3
1.3. Problema planteado . . . . .	4
<b>2. Metodología</b>	<b>6</b>
2.1. Problema Elástico . . . . .	6
2.1.1. Función de Esfuerzos de Airy . . . . .	8
2.1.2. Formulación Débil de Galerkin . . . . .	8
2.2. Teoría Esfuerzos de Prandtl para Torsión . . . . .	9
2.2.1. Solución Analítica . . . . .	11
2.2.2. Formulación Débil de Galerkin para Ecuación Poisson . . . . .	12
2.3. Método de Elementos Finitos para Ecuación de Poisson . . . . .	12
2.3.1. Discretización en 2D . . . . .	13
2.4. Procedimientos y cálculos . . . . .	15
<b>3. Resultados</b>	<b>17</b>
3.1. Resultados para $b = 1$ . . . . .	17
3.2. Resultados para $b = 1.5$ . . . . .	20
3.3. Resultados para $b = 2$ . . . . .	23
3.4. Resultados para $b = 2.5$ . . . . .	26
3.5. Convergencia de malla . . . . .	29
3.6. Errores Obtenidos . . . . .	30
<b>4. Análisis</b>	<b>31</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>6. Anexos</b>	<b>35</b>
6.1. Código Elaborado . . . . .	35

# 1. Introducción

En el presente trabajo se expone un problema de mecánica de sólido en 2D que será abordado mediante el método de elementos finitos, donde se tiene como objetivo estudiar el comportamiento de una barra con sección elíptica sometida a torsión, con especial énfasis en la variación del semieje mayor  $b$  de la sección elíptica mediante la teoría de esfuerzos de Prandtl. Este problema será programado utilizando el software comercial de MATLAB. Además para el completo entendimiento del problema se detalla un marco teórico aplicable a la situación planteada, contemplando la mecánica de sólidos y el método de elementos finitos.

## 1.1. Objetivo General

Programar códigos de MEF para resolver el problema de mecánica de sólidos planteado en el documento, con el fin de estudiar la teoría de Prandtl en un sólido bajo torsión.

## 1.2. Objetivos Específicos

- Detallar un marco teórico de mecánica de sólidos y del método de elementos finitos que sea aplicable a los problemas planteados.
- Encontrar expresiones teóricas (en caso que se requiera) respecto a la solución del problema.
- Programar el método de elementos finitos para resolver el problema.
- Obtener las variables de interés (esfuerzo de Prandtl, esfuerzo cortante y Torque) y compararlos con los de referencia para generar una discusión y evaluación de lo realizado y obtenido.

Dicho lo anterior, el documento se organizará de la siguiente manera: Presentación del problema a desarrollar, metodología para detallar el marco teórico y su aplicación al problema, sección de resultados para visualizar lo obtenido, una sección de análisis para generar una discusión de lo obtenido, y una conclusión del documento.

### 1.3. Problema planteado

La teoría de Prandtl sobre la torsión de un elemento prismático conduce a,

$$-\nabla^2 u = 2G\theta \quad \text{en } \Omega, \quad (1)$$

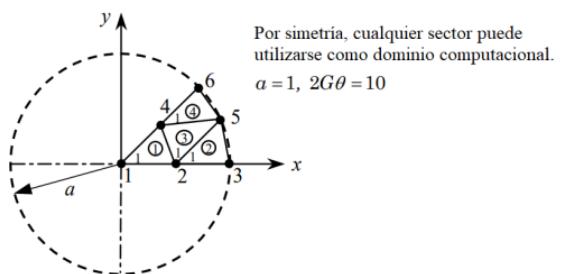
$$\text{con } u = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

Siendo:  $u$ , la función de esfuerzo,  $\Omega$ , la sección transversal del elemento bajo torsión,  $\Gamma$ , la frontera de la región  $\Omega$ ,  $G$ , el módulo de rigidez del material del elemento y  $\theta$  el ángulo de torsión. En el caso de una sección transversal elíptica, la EDP 1 conlleva a la siguiente solución teórica para  $u$ ,

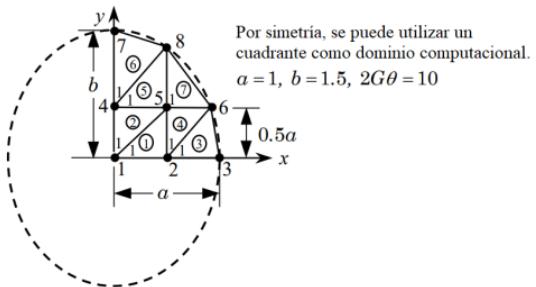
$$u = \frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (2)$$

donde  $a$  y  $b$  representan el semieje mayor y menor respectivamente.

1. Utilizando los scripts proporcionados en las referencias [1, 2, 3], desarrolle un código para analizar este problema mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) [4]. Considere funciones de forma lineales y utilice el lenguaje de programación que Ud. estime adecuado.
2. Estudie los casos dados por:  $f_0 = 2G\theta = 10$ ,  $a = 1$ , y  $b = \{1, 1.5, 2.0, 2.5\}$ , revise las figuras 1a y 1b.
3. Realice un estudio de convergencia de malla en función de los resultados obtenidos mediante el código desarrollado y **su enfoque de análisis**.
4. Analice sus resultados numéricos, compárelos con valores de referencia y desarrolle estudios considerando **su enfoque de análisis**. Reflexione: ¿Qué representa la función de esfuerzos?, ¿Cómo se relaciona con el Torque?, ¿Por qué en la práctica se emplean ejes circulares por sobre otro tipo de áreas?, ¿Este Sr. Prandtl será el mismo de .... ?, etc.



(a)



(b)

Figura 1: Geometría del elemento de (a) sección circular, y (b) sección elíptica.

## 2. Metodología

### 2.1. Problema Elástico

Las ecuaciones de equilibrio para un medio continuo sólido estacionario en forma diferencial, son las siguientes [5]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T\end{aligned}\tag{3}$$

En donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy, y  $\mathbf{f}$  las fuerzas de cuerpo.

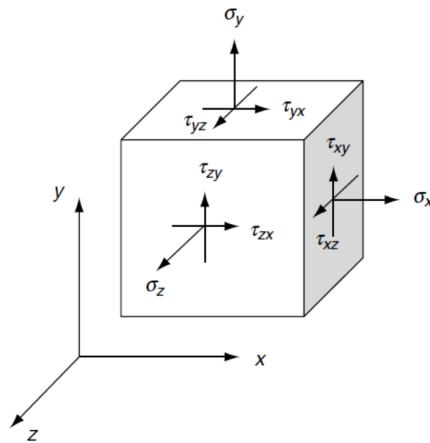


Figura 2: Elemento diferencial

Para este trabajo, se utilizará el modelo de elasticidad lineal, lo que conlleva a las siguientes suposiciones:

- El sólido es continuo.
- El sólido es isotrópico.
- El sólido es homogéneo.
- Existe una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones.

A partir de las suposiciones presentadas, la relación entre los esfuerzos y las deformaciones será lineal (Ley de Hooke):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}\end{aligned}\tag{4}$$

En donde  $\mathbf{C}$  es el tensor de constantes elásticas,  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de Lamé, y  $\boldsymbol{\epsilon}$  el tensor de deformaciones.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})\tag{5}$$

Las constantes de Lamé,  $\lambda$  y  $\mu$  se relacionan con el módulo de Young  $E$ , el módulo de corte  $G$ , y el coeficiente de Poisson  $\nu$  como:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\tag{6}$$

Junto a las ecuaciones presentadas anteriormente, se debe considerar la relación entre deformaciones y desplazamientos. Estas tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)\tag{7}$$

En donde  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos.

Todas las ecuaciones detalladas anteriormente forman un sistema de 15 ecuaciones y 15 incógnitas (6 componentes de esfuerzo, 6 componentes de deformación y 3 desplazamientos), las cuales bajo condiciones de borde adecuadas pueden ser resueltas.

Existen formulaciones, como las ecuaciones de Lamé-Navier para elasticidad, que simplifican este sistema de 15 ecuaciones en 3. Estas 3 ecuaciones pueden ser resueltas para los desplazamientos, y de esa forma, obtener las deformaciones o esfuerzos si se requiere.

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0\tag{8}$$

### 2.1.1. Función de Esfuerzos de Airy

De la misma forma, para problemas 2D, se pueden escribir las ecuaciones en términos de un potencial  $\Phi$  denominado: función de esfuerzos de Airy. La función de esfuerzos de Airy cumple las siguientes relaciones, en coordenadas cartesianas:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V_f ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V_f ; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

Para utilizar esta formulación, las fuerzas de cuerpo deben ser conservativas, siendo derivables del potencial  $V_f$ . Reemplazando la definición de la función de Airy en las ecuaciones de equilibrio dadas en la ecuación 3, se obtiene:

$$\nabla^4 \Phi + (2 - s) \nabla^2 V_f = 0 \quad (10)$$

En donde  $s$  es un parámetro utilizado para diferenciar condición de esfuerzo plano o deformación plana.

### 2.1.2. Formulación Débil de Galerkin

El problema elástico puede ser escrito en forma variacional utilizando el método de Galerkin. Para esto, se deben integrar los residuales de la ecuación 3 multiplicados por  $\phi$ , correspondiente a un desplazamiento virtual arbitrario consistente con las condiciones de borde y cinemáticamente admisible. De esta manera, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\phi) \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \phi \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n \cdot \phi \, dS - \sum_{x_i \in \partial\Omega} \mathbf{P}_i \cdot \phi_i = 0 \quad (11)$$

En donde  $\boldsymbol{\sigma}$  corresponde al tensor de esfuerzos,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\phi)$  las deformaciones virtuales,  $\mathbf{f}$  las fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{T}^n$  al vector de esfuerzos,  $\mathbf{P}$  a las cargas puntuales y  $\phi$  al desplazamiento virtual. Esta ecuación coincide con el principio de trabajo virtual.

Comúnmente, esta formulación del problema elástico es utilizada para el método de elementos finitos.

## 2.2. Teoría Esfuerzos de Prandtl para Torsión

Para el escenario de torsión pura, solo se tiene un momento  $M$  (torque) actuando en la dirección  $z$ , según la siguiente imagen.

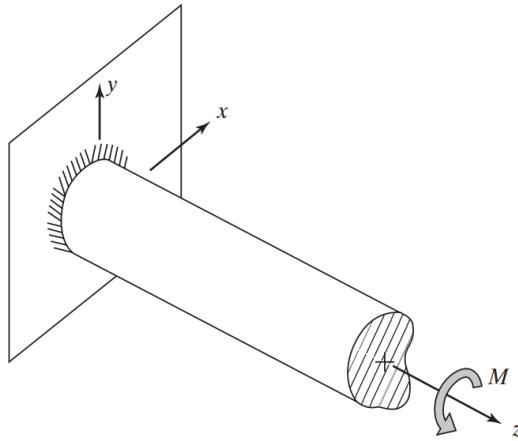


Figura 3: Torque aplicado sobre una barra

Bajo este escenario, y el estudio de la deformación de cilindros bajo torsión, se pueden plantear ciertas suposiciones:

- Cada sección del sólido (plano  $x - y$ ) rota como un cuerpo rígido respecto al centro de rotación.
- Para deformaciones pequeñas, la rotación es una función lineal de la coordenada axial.
- No necesariamente se mantiene plana la sección, lo que se traduce en desplazamientos axiales.

Con estas suposiciones, el desplazamiento se puede escribir en función del ángulo de rotación por unidad de longitud  $\theta$ , el cual se calcula como  $\theta = z\beta$  con  $\beta$  el ángulo de rotación pequeño.

$$\begin{aligned} u &= -\theta yz \\ v &= \theta xz \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \tag{12}$$

Utilizando las expresiones anteriores, es fácil notar que las deformaciones tendrán la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right)\end{aligned}\tag{13}$$

Y aplicando la Ley de Hooke, siendo  $G$  el módulo de corte, los esfuerzos adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right) \\ \tau_{yz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right)\end{aligned}\tag{14}$$

Reemplazando estas expresiones para los esfuerzos en la ecuación 3, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0\tag{15}$$

Además de esta expresión, se puede obtener una ecuación de compatibilidad, dada por:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\theta\tag{16}$$

Las dos ecuaciones anteriores gobiernan el problema planteado para la formulación de esfuerzos. El sistema de ecuaciones se puede reducir introduciendo una nueva función, *La función de esfuerzos de Prandtl*,  $u$  (se utilizará esta notación, sin confundir con el desplazamiento en el eje  $x$ ). La función de esfuerzos de Prandtl se puede calcular como:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial u}{\partial x}\tag{17}$$

Y reemplazando ambas expresiones en la ecuación 16, se obtiene una ecuación de Poisson que modela el problema detallado:

$$\nabla^2 u = -2G\theta\tag{18}$$

A esta ecuación se le deben añadir condiciones de borde de Dirichlet, de la forma:  $u = 0$ . Por último,

a partir de esta formulación, el torque aplicado puede ser calculado como:

$$M = 2G\theta \iint_R u \, dA \quad (19)$$

### 2.2.1. Solución Analítica

Al problema representado por la función de esfuerzos de Prandtl, dado en la ecuación 18, tiene una solución analítica en caso de que las sección de la barra sea una elipse.

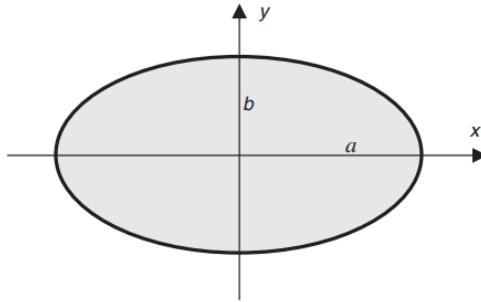


Figura 4: Sección elíptica

Para este caso, la función de esfuerzos de Prandtl toma la siguiente forma:

$$u = \frac{a^2 b^2 G \theta}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (20)$$

Además, los esfuerzos cortantes serán:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{2a^2 G \theta}{a^2 + b^2} y \\ \tau_{yz} &= \frac{2b^2 G \theta}{a^2 + b^2} x \end{aligned} \quad (21)$$

De donde el esfuerzo de corte resultante en el borde, tiene la siguiente forma:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2a^2 b^2 G \theta}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad (22)$$

### 2.2.2. Formulación Débil de Galerkin para Ecuación Poisson

La ecuación de Poisson dada en 18, puede ser escrita en forma integral a partir de la formulación débil de Galerkin. Para esto, se deben integrar los residuales de la ecuación 18 multiplicados por  $w$ , correspondiente a una función arbitraria consistente con las condiciones de borde. De esta manera, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\iint_R w(\nabla^2 + 2G\theta) \, dA = 0 \quad (23)$$

Integrando por partes, y aplicando las condiciones de contorno, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\iint_R \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \, dA - \iint_R 2G\theta w \, dA = 0 \quad (24)$$

La ecuación anterior será la utilizada para aplicar el Método de Elementos Finitos.

### 2.3. Método de Elementos Finitos para Ecuación de Poisson

El método de Elementos Finitos busca encontrar la mejor aproximación de la solución del problema a partir de un conjunto de funciones dadas. Para esto, se discretiza el dominio en elementos y se resuelve para los valores en los nodos de la malla. La solución en los elementos es interpolada por los valores nodales y las funciones de forma seleccionadas. El detalle del método se visualizará en la siguiente sección.

Con lo dicho anteriormente, se busca resolver la ecuación 24 en el dominio discretizado. De esta forma, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\sum_e \iint_e \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \, dA - \sum_e \iint_e 2G\theta w \, dA = 0 \quad (25)$$

En donde  $e$  hace referencia a cada elemento. Este sistema de ecuaciones debe ser trabajado para cada aplicación. Sin embargo, se podrá llegar al siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (26)$$

En donde la matriz  $\mathbf{K}$  corresponde a la matriz de rigidez global ensamblada a partir de las matrices de rigidez de cada elemento,  $\mathbf{U}$  el vector de los valores de la función objetivo en cada nodo (función

de esfuerzos de Prandtl), y  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas ensamblado, el cual considera las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie externas en cada elemento, según la aplicación.

### 2.3.1. Discretización en 2D

Para el caso 2D, se utilizará la siguiente numeración local para cada elemento. Por simplicidad, se considerarán solo elementos de 3 vértices. De esta manera, el vector de valores nodales local queda como:  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ .

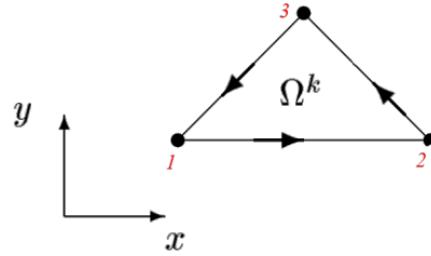


Figura 5: Elemento 2D

Para las funciones de forma, se utilizarán funciones lineales de la forma:

$$N_1(\xi, \eta) = \xi ; \quad N_2(\xi, \eta) = \eta ; \quad N_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (27)$$

De esta manera, la función de esfuerzo de Prandtl en el interior del elemento puede ser calculado como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (28)$$

En donde la matriz  $\mathbf{N}$  tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Con esta definición, los esfuerzos de corte en el elemento pueden ser calculadas como:

$$[-\tau_{yz}, \tau_{xz}]^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right]^T = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (30)$$

En donde la matriz  $\mathbf{B}$  puede ser calculada como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para la función de esfuerzos de Prandtl virtual  $w$ , se adoptan las mismas ecuaciones que para  $u$ . De esta forma:

$$w = \mathbf{N}\psi ; \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T = \mathbf{B}\psi \quad (32)$$

En donde  $\psi$  corresponde a los valores nodales virtuales arbitrarios en numeración local.

Con estas definiciones, las integrales para cada elemento dadas en la ecuación 25 pueden ser aproximadas de la siguiente manera:

1. Término relacionado con las derivadas de  $u$  y  $w$ :

$$\iint_e \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA = \psi^T \mathbf{k}^e \mathbf{u} \quad (33)$$

De donde se obtiene la matriz de rigidez local  $\mathbf{k}^e$  para cada elemento como:

$$\mathbf{k}^e = A_e \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (34)$$

2. Término relacionado con el término fuente:

$$\iint_e 2G\theta w dA = \psi^T \mathbf{f}^e \quad (35)$$

En donde el vector de fuerzas  $\mathbf{f}^e$  puede calcularse como:

$$\mathbf{f}^e = \frac{2G\theta A_e}{3} [1 \ 1 \ 1]^T \quad (36)$$

Con esta discretización, la matriz  $\mathbf{K}$  se obtiene al ensamblar todas las matrices de rigidez de cada elemento  $\mathbf{k}^e$  y  $\mathbf{F}$  a partir de los vectores de fuerzas para cada elemento  $\mathbf{f}^e$ . De esta manera, el problema puede ser resuelto utilizando la ecuación 26.

Como adicional, al obtener la solución del problema se puede obtener el torque aplicado. Para esto,

se discretiza la siguiente integral como:

$$M = 2G\theta \iint_R u \, dA = 2G\theta \left[ \sum_e \frac{A_e}{3} (u_1^e + u_2^e + u_3^e) \right] \quad (37)$$

## 2.4. Procedimientos y cálculos

Para adaptar este problema para ser aplicado bajo el método de Elementos Finitos, se discretizará el sólido en elementos bidimensionales triangulares. El método de Elementos Finitos para resolver el problema planteado, será aplicado según la sección anterior utilizando el lenguaje de programación MATLAB. La malla se creará utilizando la librería de PDETool. Para aprovechar la simetría del problema, solo se resolverá un cuarto del dominio. Para la discretización, se fijará el parámetro  $H_{max}$  que pide la distancia máxima entre dos nodos en un elemento. A continuación se presentan distintas imágenes con discretizaciones de referencia, aplicados al cuarto del dominio.

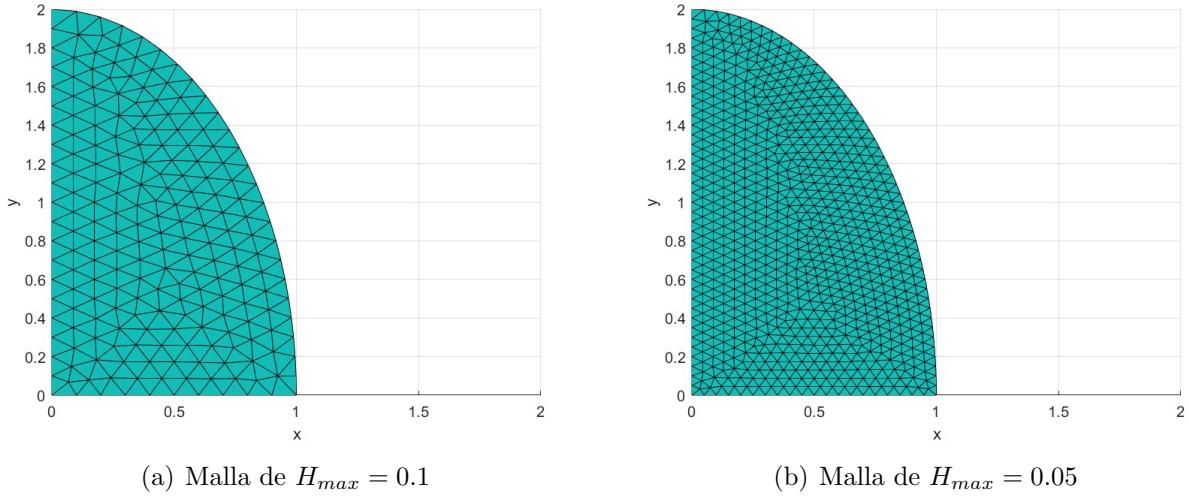


Figura 6: Discretización del sólido utilizando herramienta de PDETool

Con el código elaborado, se estudiarán los casos dados por:  $2G\theta = 10$ ,  $a = 1$  y  $b = \{1, 1.5, 2.0, 2.5\}$ . Esto permitirá visualizar el cambio en el esfuerzo cortante máximo al hacer crecer uno de los ejes de la elipse.

Adicionalmente, se realizará un estudio de convergencia de malla. Este se realizará monitorizando el valor máximo de la función de esfuerzos de Prandtl, el esfuerzo cortante resultante, y el

torque. Con esto se revisa la convergencia de una variable primaria y una secundaria. Las mallas que se utilizarán serán dadas por los siguientes valores para el tamaño máximo del elemento,  $H_{max} = \{0.2, 0.1, 0.06, 0.03, 0.01\}$ .

Por último, para cada solución obtenida, se calculará el error  $L_2$  relativo respecto a la solución teórica para la función de esfuerzos de Prandtl en cada nodo, el esfuerzo cortante en cada elemento y el torque aplicado.

$$\|e\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_i (\alpha_{i,aprox} - \alpha_{i,teorica})}{\sum_i \alpha_{i,teorica}}} \quad (38)$$

Donde  $\|e\|_2$  corresponde al error  $L_2$  relativo y  $\alpha$  la variable de interés.

### 3. Resultados

A continuación se presentan los resultados para los esfuerzos de Prandtl  $u$ , el esfuerzo cortante  $\tau$ , y el torque  $T$ . Se mostrarán los resultados para el caso de  $b = \{1, 1.5, 2.0, 2.5\}$  y diferentes mallas dadas por  $H_{max} = \{0.2, 0.1, 0.06, 0.03, 0.01\}$ .

#### 3.1. Resultados para $b = 1$

Tabla 1: Resultados para  $b = 1$

Hmax	Nodos	Elementos	max $u$	max $\tau$	$T$	$e_u$	$e_\tau$	$e_T$
0.01	9590	18821	2.5000	4.9875	7.8536	4.19E-06	4.04E-04	4.98E-05
0.03	1080	2040	2.5002	4.9567	7.8504	4.80E-05	1.06E-03	4.56E-04
0.06	288	514	2.5015	4.9402	7.8396	2.37E-04	2.44E-03	1.83E-03
0.1	112	186	2.5019	4.8656	7.8152	7.45E-04	4.48E-03	4.94E-03
0.2	32	44	2.5114	4.7143	7.6932	4.48E-03	1.30E-02	2.05E-02

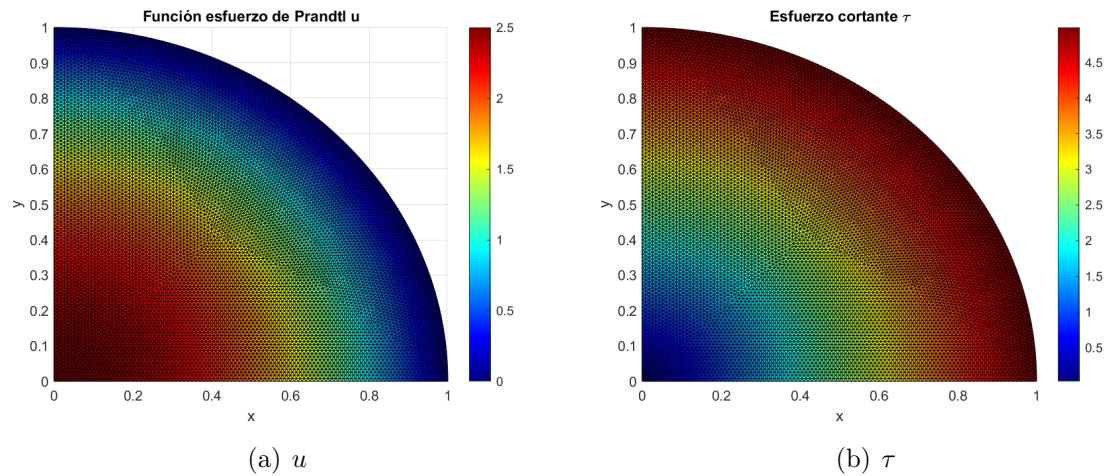


Figura 7: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1$  y  $H_{max} = 0.01$

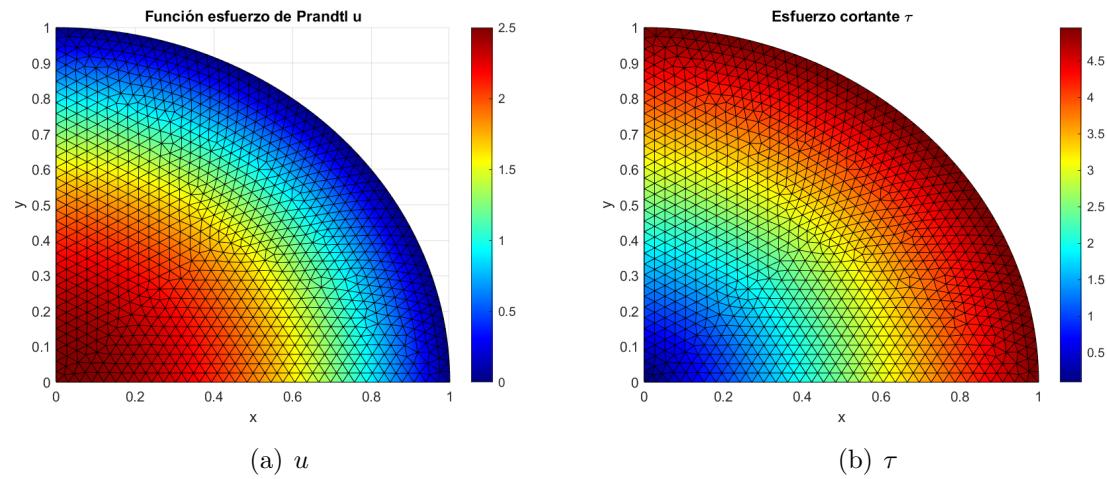


Figura 8: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1$  y  $H_{max} = 0.03$

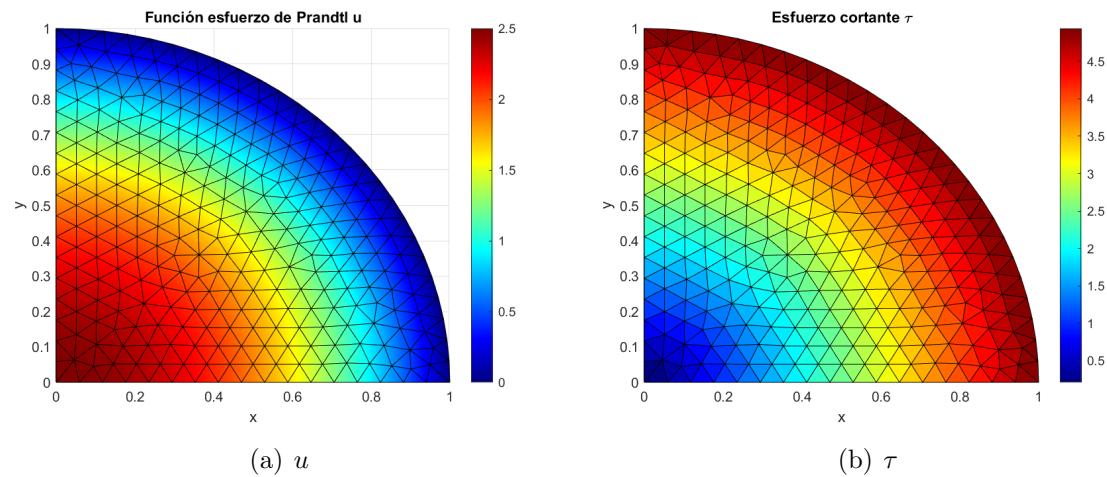


Figura 9: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1$  y  $H_{max} = 0.06$

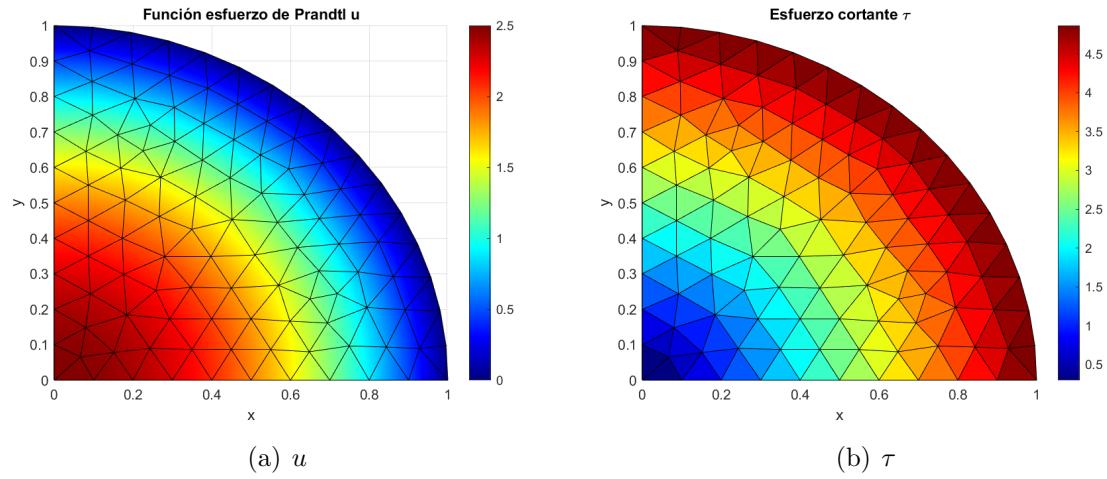


Figura 10: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1$  y  $H_{max} = 0.1$

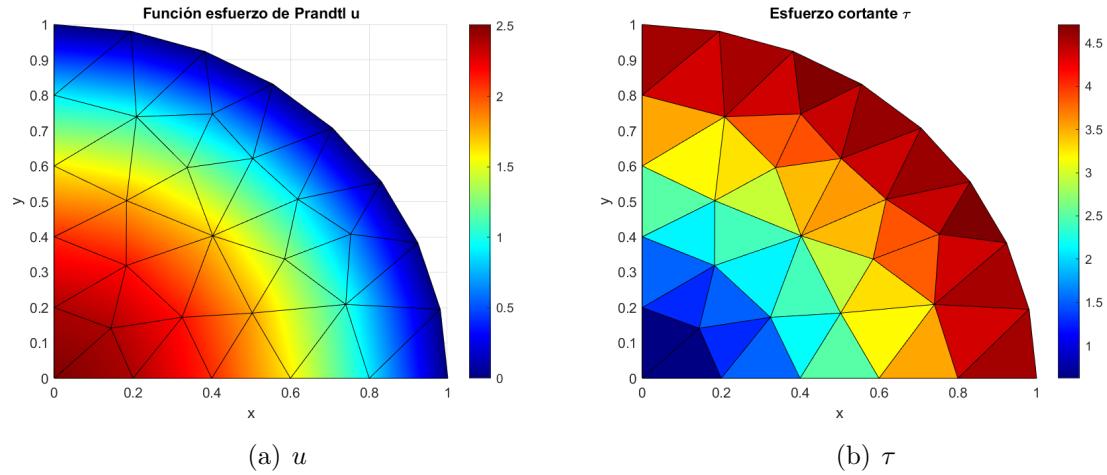


Figura 11: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1$  y  $H_{max} = 0.2$

### 3.2. Resultados para $b = 1.5$

Tabla 2: Resultados para  $b = 1.5$

Hmax	Nodos	Elementos	max $u$	max $\tau$	$T$	$e_u$	$e_\tau$	$e_T$
0.01	14232	28014	3.4616	6.8987	16.3115	2.77E-06	8.87E-04	3.63E-05
0.03	1621	3091	3.4617	6.8610	16.3067	3.01E-05	2.71E-03	3.29E-04
0.06	429	781	3.4631	6.7874	16.2907	1.62E-04	5.56E-03	1.31E-03
0.1	163	279	3.4632	6.6874	16.2523	5.19E-04	9.42E-03	3.67E-03
0.2	46	67	3.4775	6.4237	16.0657	3.21E-03	2.12E-02	1.51E-02

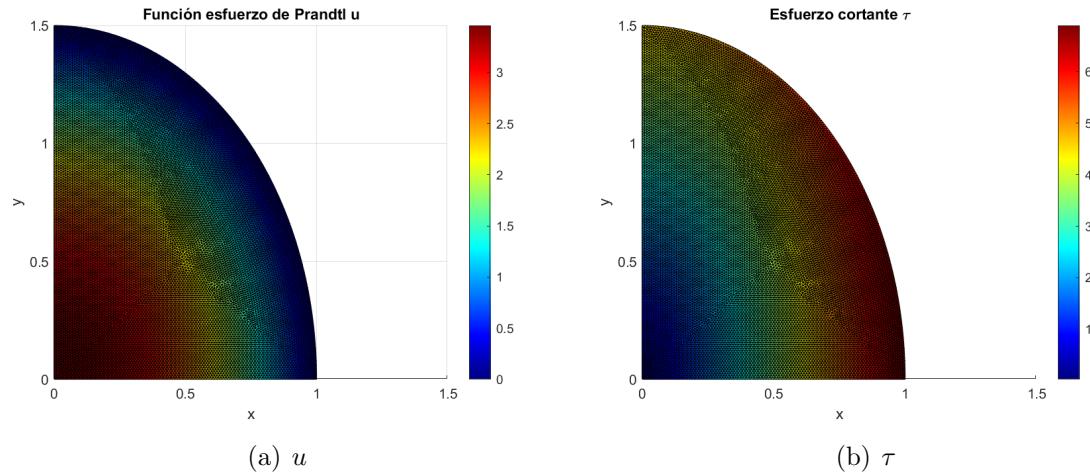


Figura 12: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1.5$  y  $H_{max}=0.01$

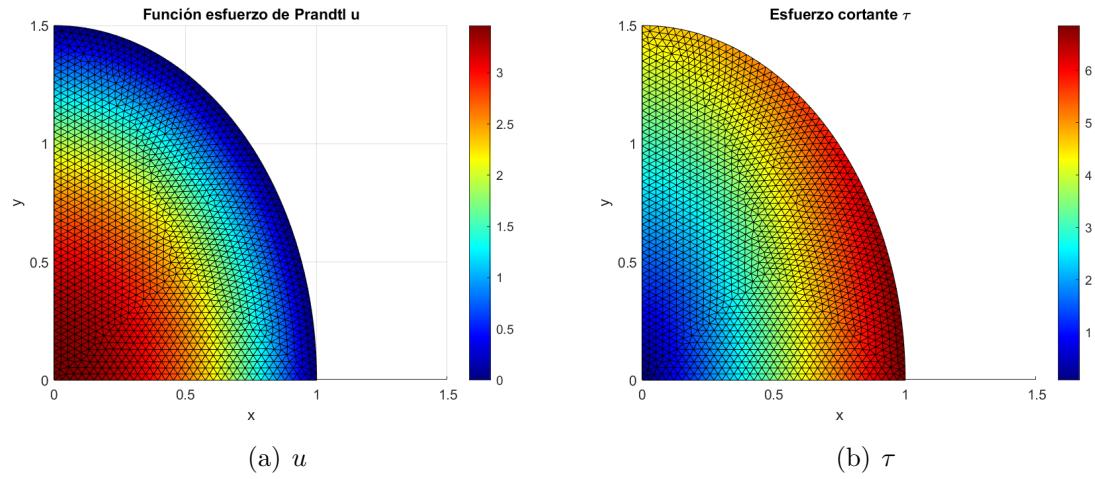


Figura 13: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1.5$  y  $H_{max}=0.03$

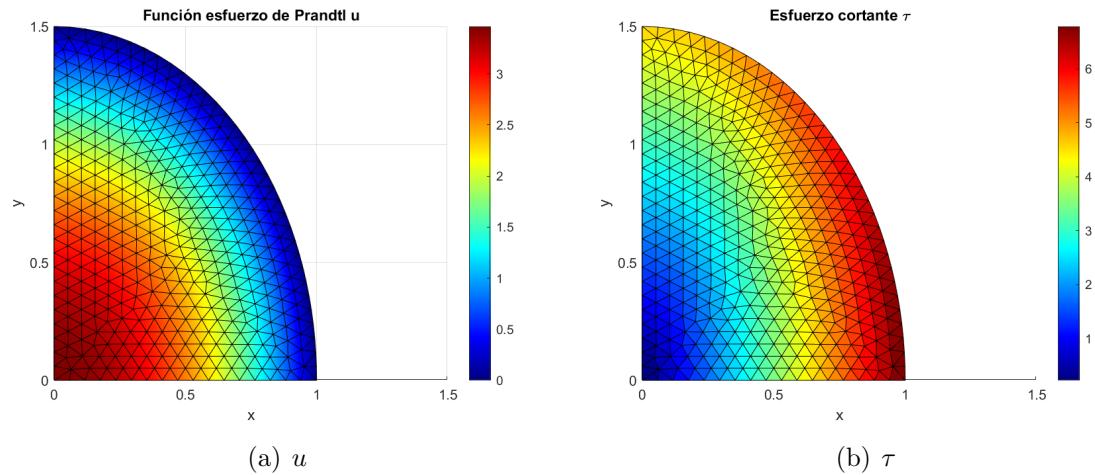


Figura 14: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1.5$  y  $H_{max}=0.06$

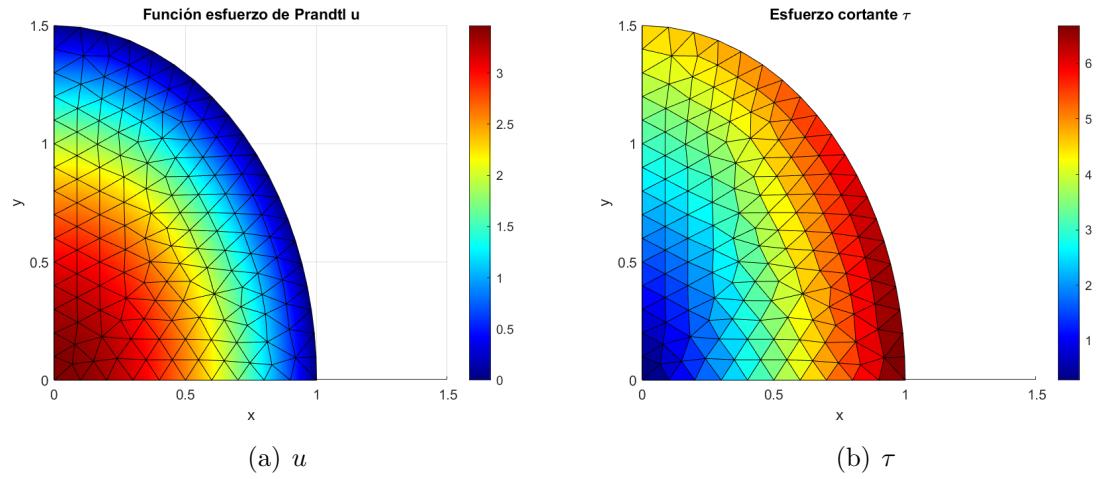


Figura 15: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1.5$  y  $H_{max}=0.1$

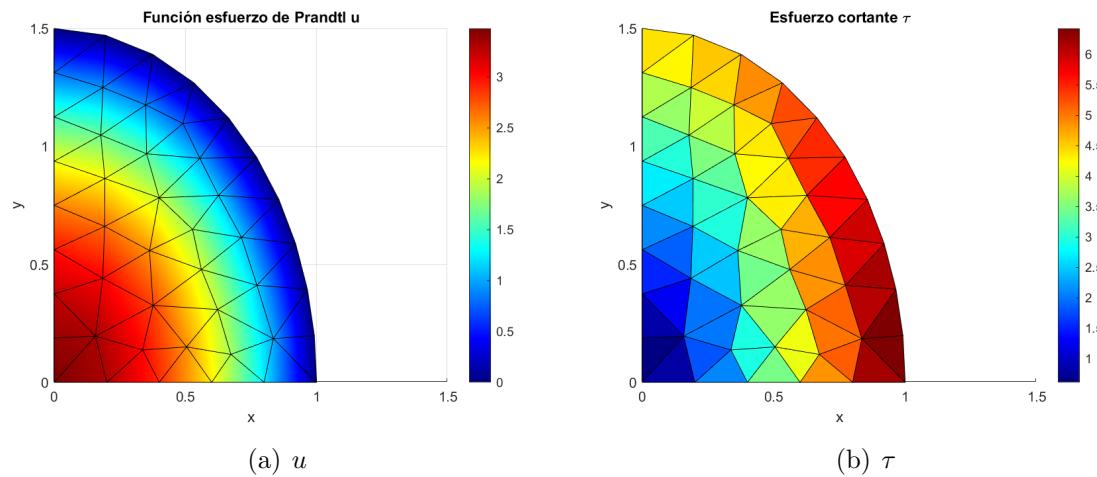


Figura 16: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 1.5$  y  $H_{max}=0.2$

### 3.3. Resultados para $b = 2$

Tabla 3: Resultados para  $b = 2$

Hmax	Nodos	Elementos	max $u$	max $\tau$	$T$	$e_u$	$e_\tau$	$e_T$
0.01	18724	36904	4.0000	7.9700	25.1319	2.27E-06	1.36E-03	3.17E-05
0.03	2153	4123	4.0002	7.9221	25.1256	2.30E-05	4.24E-03	2.86E-04
0.06	551	1010	4.0014	7.8133	25.1034	1.38E-04	8.35E-03	1.17E-03
0.1	211	366	4.0014	7.7319	25.0502	4.24E-04	1.46E-02	3.29E-03
0.2	59	89	4.0033	7.4693	24.8011	2.18E-03	2.89E-02	1.32E-02

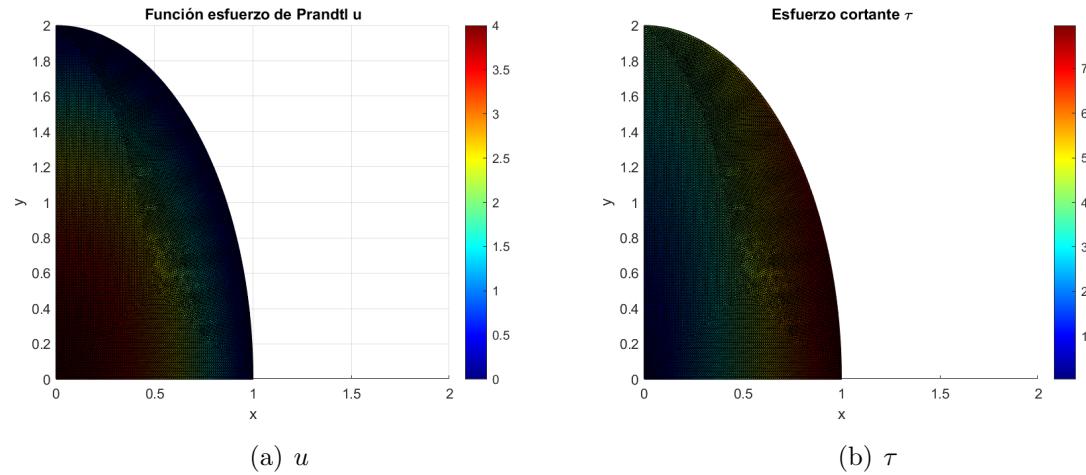


Figura 17: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2$  y  $H_{max}=0.01$

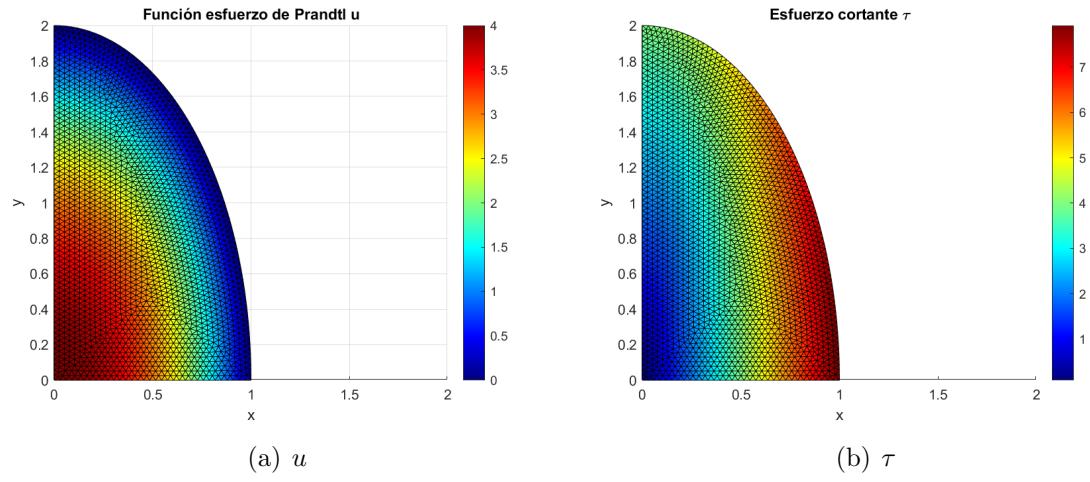


Figura 18: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2$  y  $H_{max}=0.03$

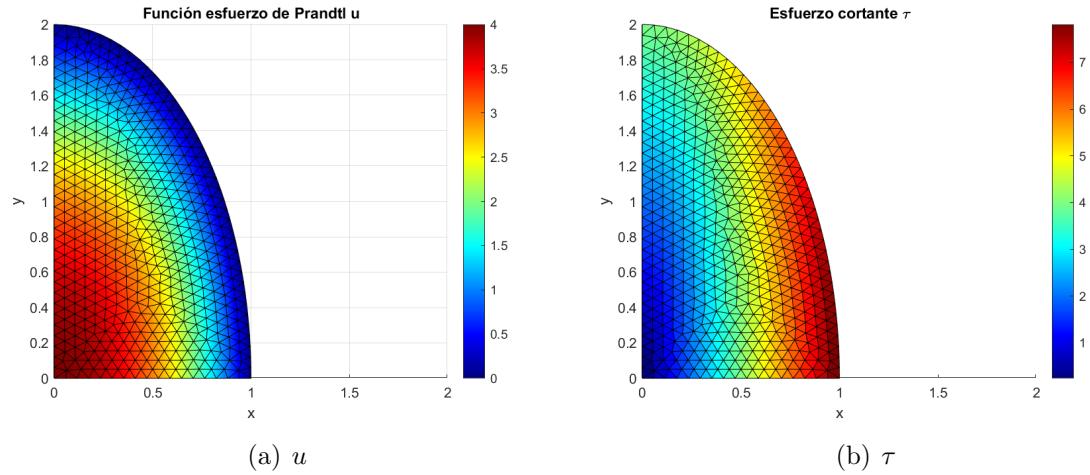


Figura 19: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2$  y  $H_{max}=0.06$

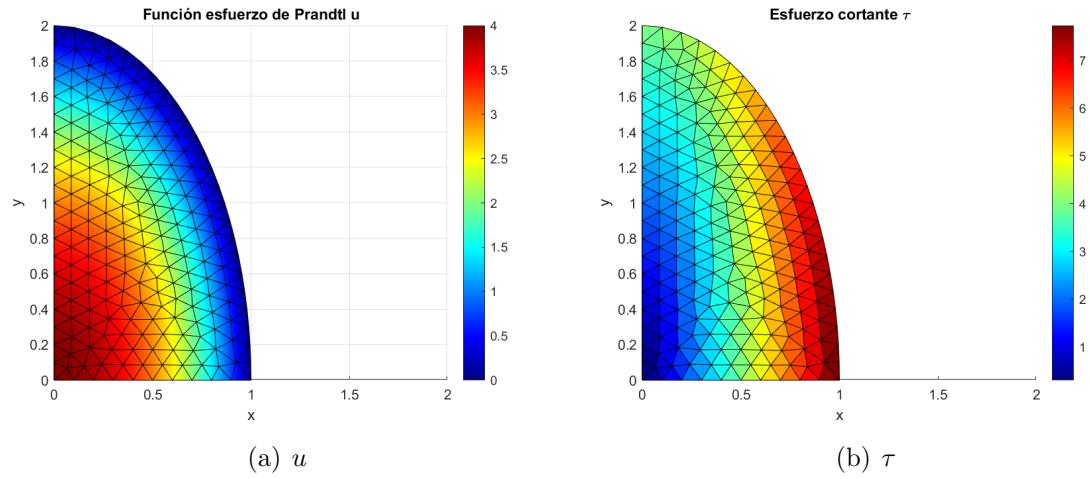


Figura 20: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2$  y  $H_{max}=0.1$

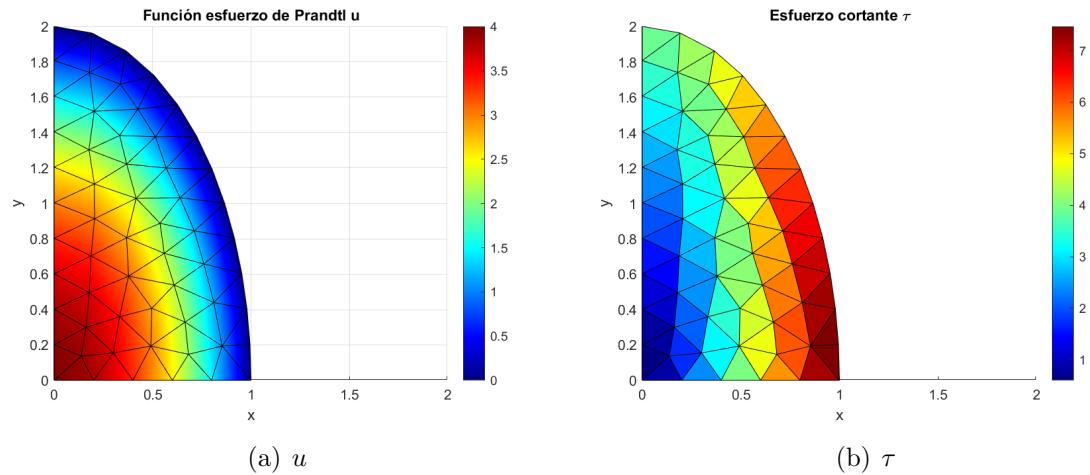


Figura 21: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2$  y  $H_{max}=0.2$

### 3.4. Resultados para $b = 2.5$

Tabla 4: Resultados para  $b = 2.5$

Hmax	Nodos	Elementos	max $u$	max $\tau$	$T$	$e_u$	$e_\tau$	$e_T$
0.01	23124	45609	4.3104	8.5877	33.8524	2.11E-06	1.68E-03	2.98E-05
0.03	2661	5108	4.3105	8.5334	33.8444	1.99E-05	5.17E-03	2.66E-04
0.06	696	1283	4.3118	8.4175	33.8172	1.10E-04	1.04E-02	1.07E-03
0.1	262	458	4.3118	8.3293	33.7512	3.65E-04	1.79E-02	3.02E-03
0.2	74	114	4.3257	7.9979	33.4399	2.39E-03	3.40E-02	1.22E-02

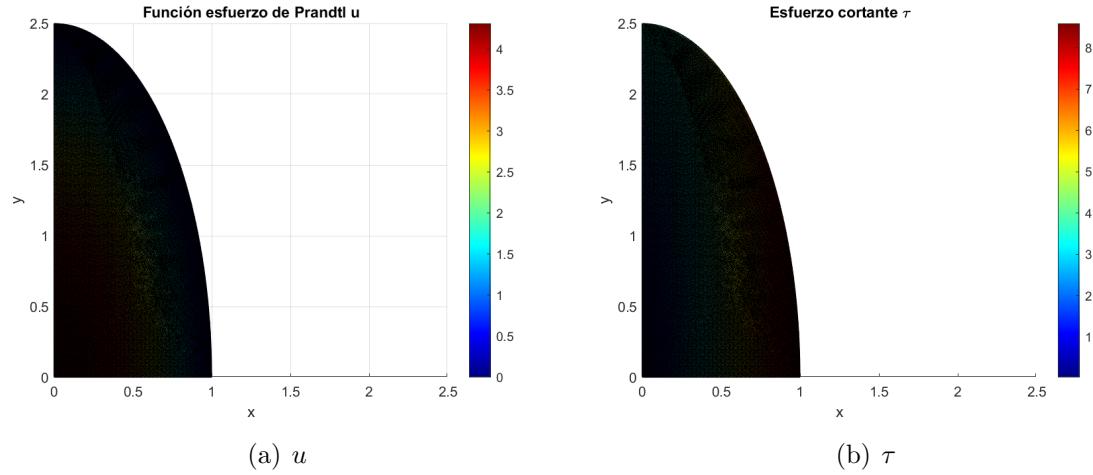


Figura 22: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2.5$  y  $H_{max}=0.01$

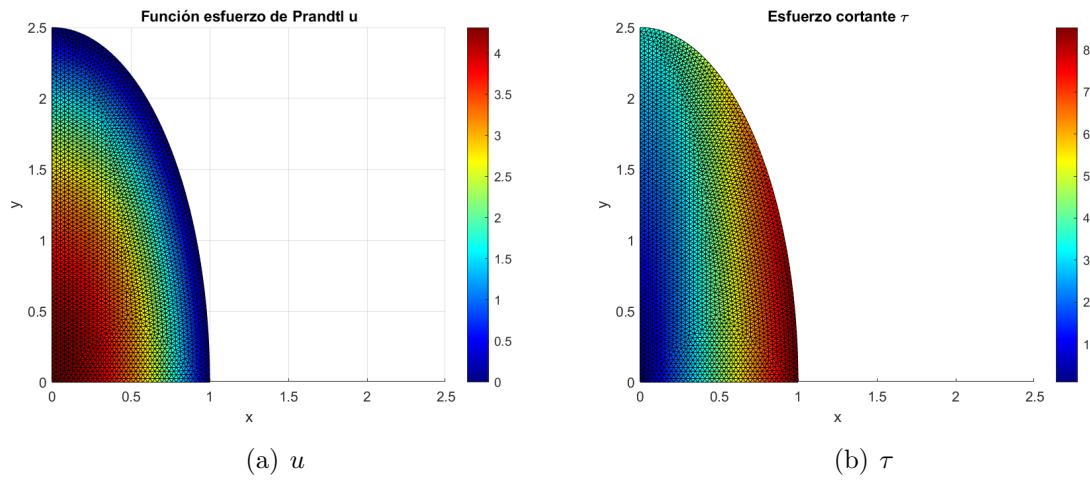


Figura 23: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2.5$  y  $H_{max}=0.03$

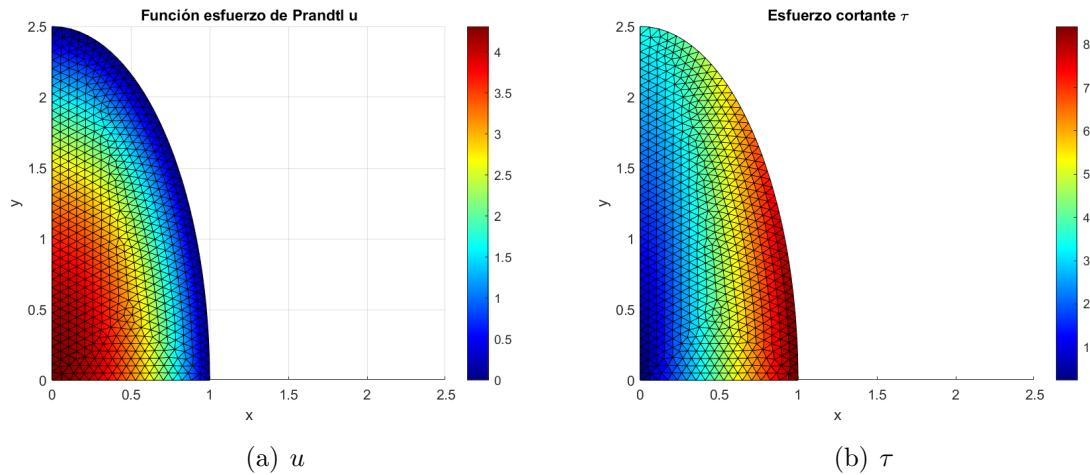


Figura 24: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2.5$  y  $H_{max}=0.06$

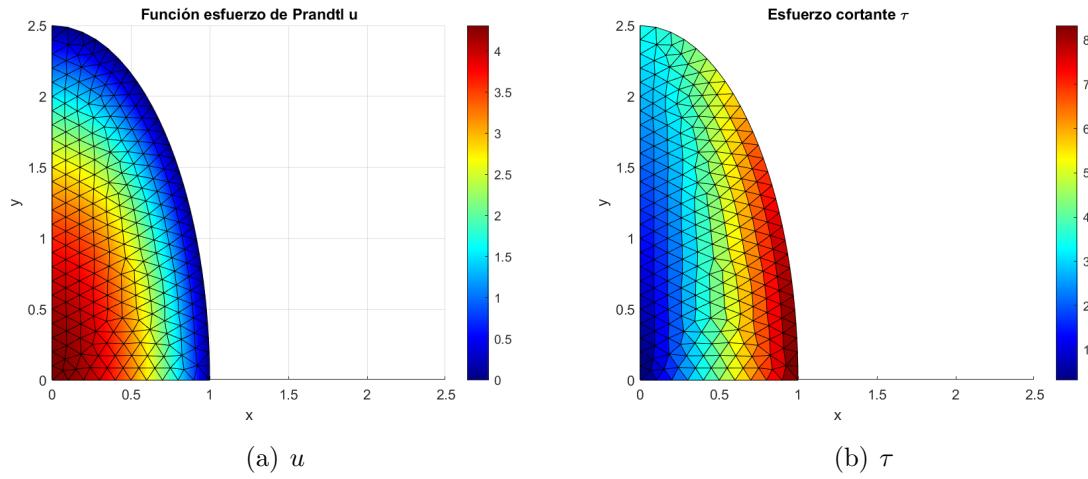


Figura 25: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2.5$  y  $H_{max}=0.1$

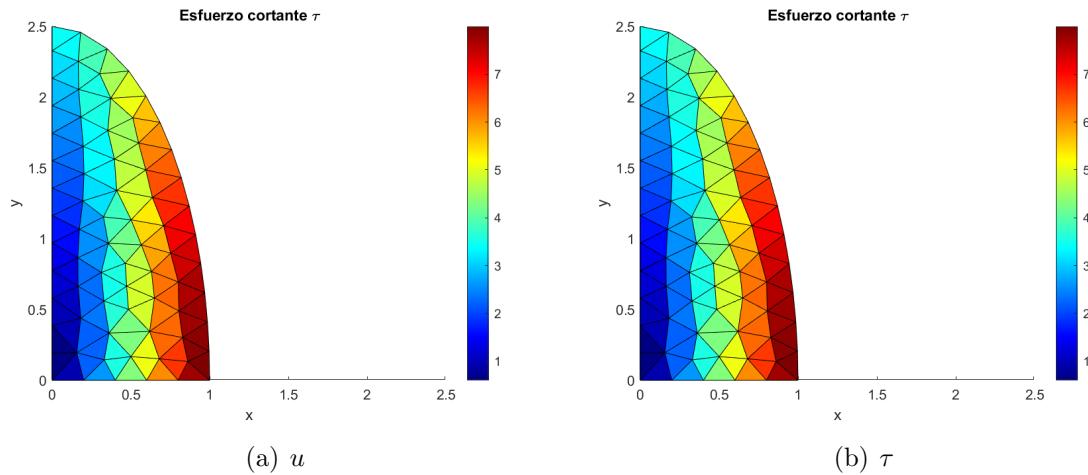


Figura 26: Resultados de esfuerzos de Prandtl y esfuerzo cortante para  $b = 2.5$  y  $H_{max}=0.2$

### 3.5. Convergencia de malla

Se presenta el estudio de convergencia de malla realizado para los valores de  $b = \{1, 1.5, 2.0, 2.5\}$ . Se estudio el esfuerzo de Prandtl máximo, el esfuerzo cortante máximo y el torque en el sólido.

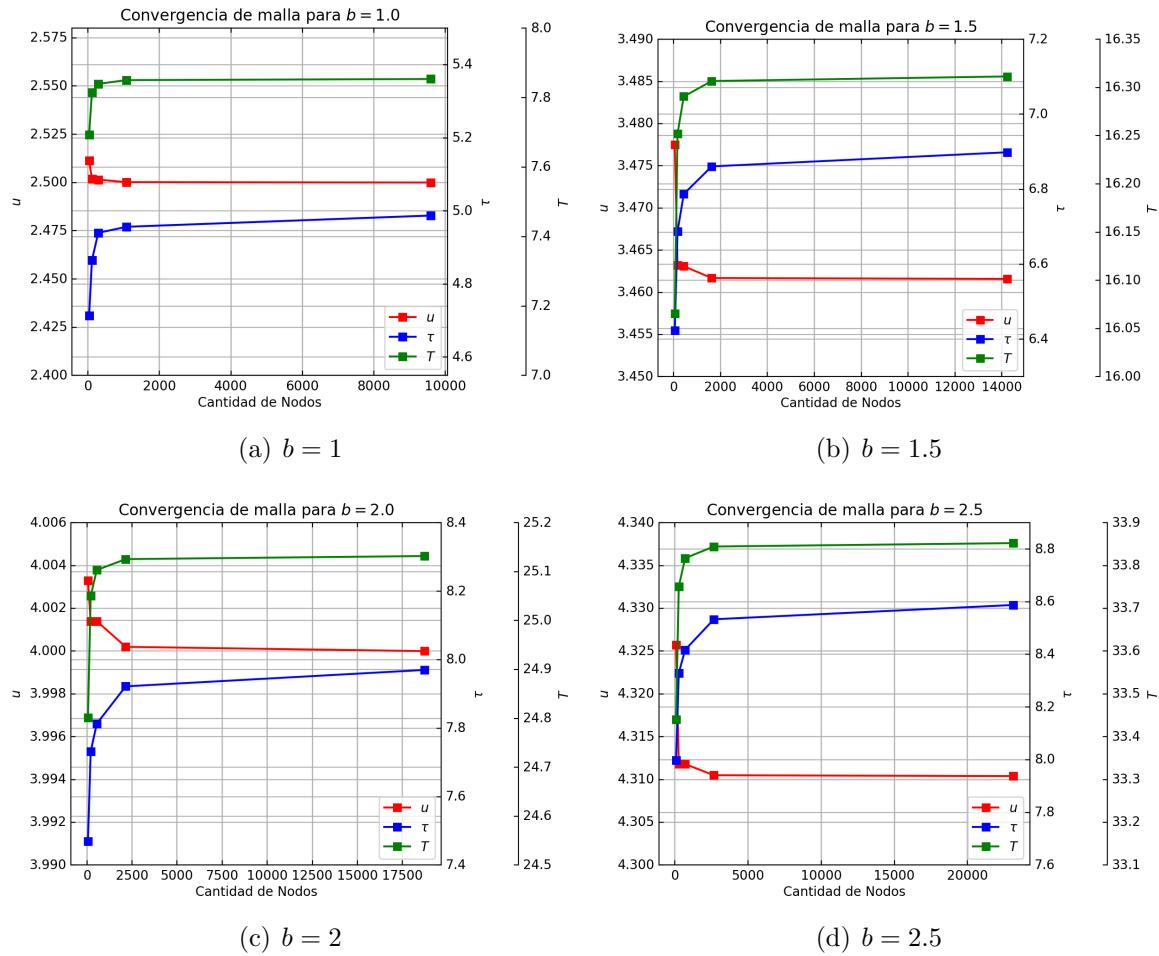


Figura 27: Convergencia de malla para  $u$ ,  $\tau$  y  $T$

### 3.6. Errores Obtenidos

Por último, se muestra el error L2 respecto a la solución analítica para el esfuerzo de Prandtl máximo, el esfuerzo cortante máximo y el torque en el sólido, respecto a los valores de  $b$ . Todo lo anterior respecto a la cantidad de nodos de la malla.

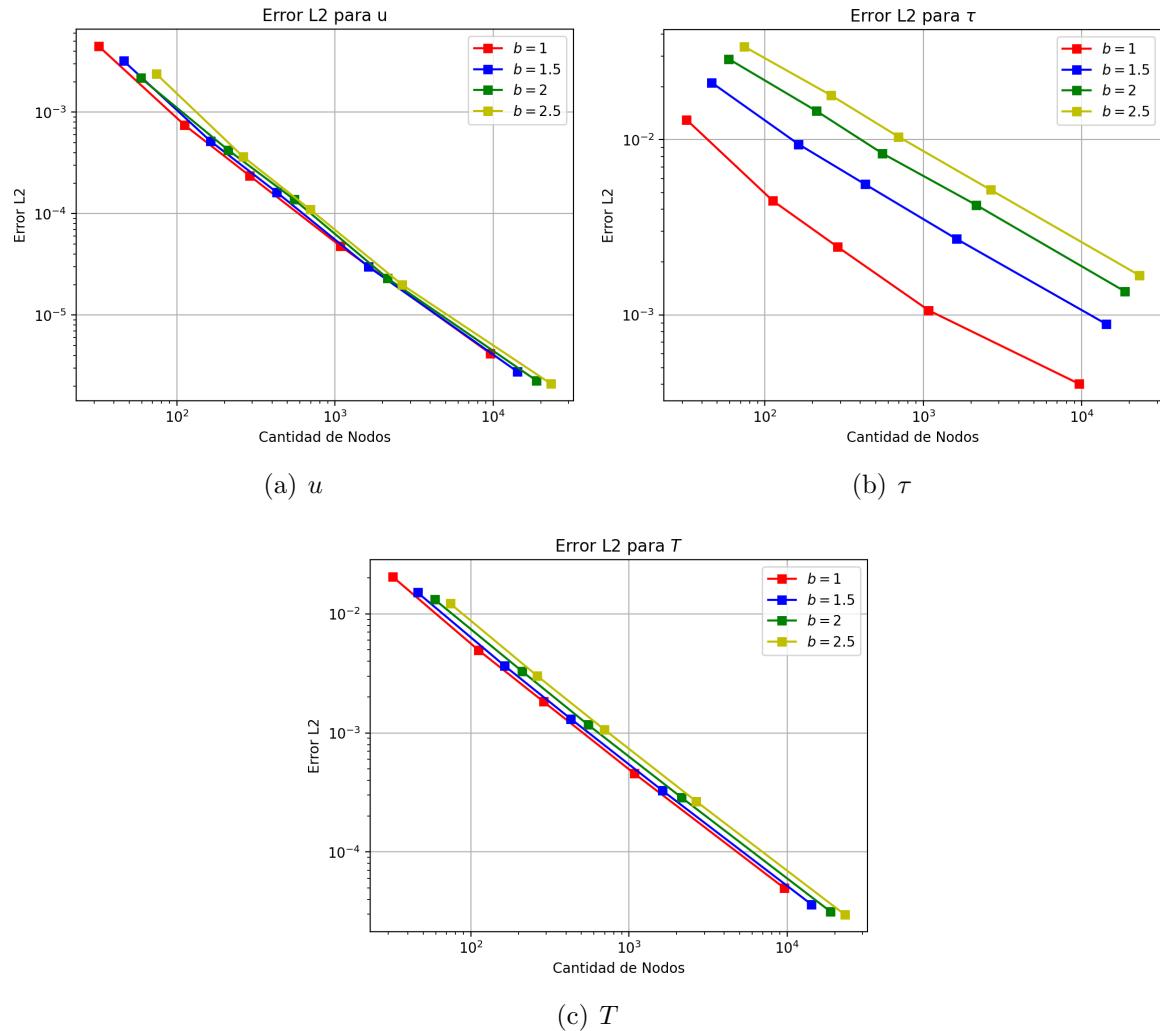


Figura 28: Errores obtenidos para  $u$ ,  $\tau$  y  $T$

## 4. Análisis

Para abordar la problemática planteada, se siguió el procedimiento detallado en la sección 2.4, el cual fue programado en Matlab e implementando el método de elementos finitos. En este proceso, se llevó a cabo la discretización del sólido a torsionar mediante elementos bidimensionales triangulares.

En relación con los resultados obtenidos, es crucial señalar que se realizó un estudio variando el semieje mayor de la sección elíptica correspondiente a  $b$ . Esta variación permitió estudiar el efecto del teorema de esfuerzos de Prandtl sobre un sólido a torsionar. Se realizaron representaciones gráficas de las variables de interés en función de la altura máxima de los elementos triangulares de la malla, que va relacionado con la cantidad de nodos. Para esto, se graficó la función de esfuerzos de Prandtl y el esfuerzo cortante resultante. Además, estos resultados permiten la comparación con la solución analítica.

Aunque la malla posibilita obtener una solución más precisa de los esfuerzos, el foco principal de estudio radica en el efecto del semieje  $b$ . Al analizar las gráficas, se observa que para  $b = 1$ , el comportamiento del esfuerzo de Prandtl es simétrico, con un valor máximo en el centro geométrico de la sección. Lo mismo ocurre con el esfuerzo cortante, pero obteniendo el máximo en todo el contorno de la sección. Sin embargo, al aumentar  $b$ , se evidencia que el esfuerzo de Prandtl pierde la simetría, pero mantiene el máximo en el centro. Además, el esfuerzo cortante tiende a aumentar en la superficie más cercana al centro de la elipse, es decir, en  $x = a$  e  $y = 0$ , generando una concentración de esfuerzos en ese punto. Este punto de concentración de esfuerzos aumenta a medida que crece el semieje  $b$ . Esto es debido a que aumenta el gradiente de la función de esfuerzos de Prandtl  $u$ , lo que se traduce en un esfuerzo cortante mayor. Es importante destacar que, dado que se mantuvo constante el ángulo de torsión  $\theta$ , al aumentar  $b$  se tiene un aumento de torque. El torque para  $b = 1$  corresponde a 7.85 y crece hasta 33.85 al aumentar el  $b$  a 2.5. Por ende, fijando el ángulo de torsión, necesariamente se aumentará el torque y el esfuerzo cortante al aumentar  $b$ .

En cuanto a la convergencia de la malla, los gráficos presentados en la figura 27 muestran las tendencias de los esfuerzos de Prandtl, el esfuerzo cortante y el torque. Para  $b = 1$ ,  $u$  y  $T$  tienden a estabilizarse al utilizar 1000 nodos; para  $b = 1.5$ , al usar 1800; para  $b = 2$ , en 2400 nodos; y para  $b = 2.5$ , en 2500 nodos. Es decir, a medida que aumenta el semieje, la estabilidad se logra en una mayor cantidad de nodos. De todas formas, estos nodos corresponden en todos los casos a un  $H_{max} = 0.03$ . Es importante destacar que no se observa una total estabilidad del esfuerzo cortante, ya que tiende a aumentar levemente. Esto lleva a inferir que el método no logra una total independencia de la malla para una variable

secundaria, a diferencia de una variable primaria como lo es  $u$ .

Por otro lado, en la figura 28, se muestran los errores obtenidos para cada variable al variar los valores de  $b$ . Para la función de esfuerzo de Prandtl, se observa que el error para todos los valores de  $b$  tiende al mismo comportamiento y disminuye a medida que aumenta la cantidad de nodos, e incluso el error calculado en el torque presenta el mismo patrón. Sin embargo, el comportamiento del error para el esfuerzo cortante varía, ya que, aunque disminuye con el aumento de nodos, el valor de  $b$  afecta, incrementando el error al aumentar  $b$ .

Al revisar los resultados, y los errores obtenidos, se puede verificar que el código elaborado entrega resultados razonables que coinciden con la teoría física. El esfuerzo cortante máximo, según la ecuación 22 para una sección elíptica con  $b$  como semieje mayor debería ser:

$$\tau_{max} = \frac{2ab^2G\theta}{a^2 + b^2} \quad (39)$$

El cual ocurre en el punto  $(a, 0)$ . Notar que esta ecuación demuestra que al mantener  $\theta$  constante,  $\tau_{max}$  aumenta al aumentar  $b$ , lo que coincide con lo obtenido.

Como análisis de los resultados, es evidente que los ejes circulares evitan esta concentración de esfuerzos dada por las secciones elípticas. Este se debe a que existe una simetría radial, y por ende, la “fibra” del material en la superficie siempre está a la misma distancia del centro. Por otra parte, la elección de la utilización de la función de esfuerzo de Prandtl es útil para estos casos ya que su derivada permite obtener directamente el esfuerzo cortante, y su integral corresponde al torque. Pese a ser un “potencial”, esta variable escalar guarda toda la información del problema. Esta teoría fue un gran avance en la mecánica de sólidos, en el entendimiento de la torsión mecánica, la cual fue formulada por Ludwig Prandtl. Es importante destacar que Prandtl realizó también contribuciones en la mecánica de fluidos, principalmente en el entendimiento de la capa límite y la aerodinámica.

## 5. Conclusiones

En conclusión, el método de elementos finitos proporciona información crucial sobre el comportamiento de los esfuerzos en relación con las variaciones en el semieje mayor  $b$  en la torsión de un sólido. Los resultados obtenidos fueron respaldados mediante gráficas generadas por el programa desarrollado en Matlab, el cual permite analizar el comportamiento del esfuerzo de Prandtl y los esfuerzos cortantes en un eje con sección circular o elíptica.

En respuesta a lo expuesto, se destaca que la variación del semieje  $b$  ejerce una influencia significativa en los resultados, especialmente en el comportamiento del esfuerzo cortante. A medida que  $b$  aumenta, se observa un incremento en el esfuerzo cortante y del torque, siendo este ultimo producto del ángulo de torsión que se mantiene constante. Lo anterior indica una relación crucial entre la geometría del sólido y la distribución de los esfuerzos, ya que el esfuerzo de Prandtl pierde simetría, generando concentraciones de esfuerzos cortantes en la superficie cercana al centro de la elipse.

En términos de convergencia de la malla, se aprecia que, al aumentar el semieje  $b$ , la estabilidad se logra en una mayor cantidad de nodos. A pesar de las variaciones en la estabilidad del esfuerzo cortante, los resultados obtenidos coincidieron razonablemente con la teoría física establecida. La comparación de errores reveló un comportamiento consistente para la función de esfuerzo de Prandtl y el torque, mientras que el esfuerzo cortante mostró una sensibilidad al valor de  $b$ . Ante esto, el código desarrollado proporciona resultados coherentes con la teoría física, validando la utilidad del método utilizado.

Finalmente, la función de esfuerzos de Prandtl es una herramienta valiosa para los casos de ejes circulares, elípticos, o de distintas geometrías, ya que facilita la obtención de los esfuerzos cortantes y del torque. Se espera que con esta base desarrollada en este trabajo, se estudie la utilización de geometrías triangulares o cuadradas, para revisar las variaciones edistribuciones de esfuerzos.

## Referencias

- [1] J. Alberty, C. Carstensen, S.A. Funken, y R. Klose. “Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity”. En: *Computing* 69 (2002), págs. 239-263.
- [2] Jonas Koko. “Vectorized Matlab codes for linear two-dimensional elasticity”. En: *Scientific Programming* 15.3 (2007), págs. 157-172.
- [3] J. Alberty, C. Carstensen y S.A. Funken. “Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation”. En: *Numerical Algorithms* 20 (1999), págs. 117-137.
- [4] Junuthula Narasimha Reddy. *An introduction to the finite element method*. Vol. 3. McGraw-Hill New York, 2013.
- [5] Junuthula Narasimha Reddy. *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press, 2013.
- [6] Martin H Sadd. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press, 2009.
- [7] SP Timoshenko y JN Goodier. “Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970”. En: *Fok-Ching Chong received the BS degree from the Department of Electrical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, in* (1971).
- [8] Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu, T. Ramesh y Chaitali Ray. *Introduction to finite elements in engineering*. Vol. 10. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [9] Steven C Chapra. *Numerical methods for engineers*. Mcgraw-hill, 2010.
- [10] Kenneth Franklin Riley, Michael Paul Hobson y Stephen John Bence. *Mathematical methods for physics and engineering*. 1999.

## 6. Anexos

### 6.1. Código Elaborado

Código 1: Código principal

```
1 format compact
2 clc
3
4 % Dimension geometria %
5 a = 1;
6 b = 2;
7
8 % Propiedad material %
9 G_mu = 5;
10
11 % Termino fuente %
12 f0 = 2*G_mu;
13
14 % Creacion malla %
15 Hmax = 0.01;
16 [coordinates,elements,dirichlet] = create_mesh(a,b,Hmax);
17 [centroids] = get_centroids(coordinates,elements);
18
19 % Matriz de rigidez %
20 K = sparse(size(coordinates, 1), size(coordinates, 1));
21 for j = 1:size(elements, 1)
22     I = elements(j, [1 2 3]);
23     K(I, I) = K(I, I) + local_K(coordinates(elements(j,:)),:);
24 end
25
26 % Fuerzas de cuerpo %
27 F = zeros(size(coordinates, 1), 1);
28 for j = 1:size (elements, 1)
29     I = elements(j, [1 2 3]);
30     F(I) = F(I) + local_F(coordinates(elements(j,:)),:,centroids(j),f0)
31     ;
32 end
33 % Condiciones de dirichlet %
```

```

34 DirichletNodes = unique(dirichlet);
35 d_values = u_d(coordinates(DirichletNodes,:));
36
37 % Sistema reducido %
38 excludeIdx = true(size(K,1),1);
39 excludeIdx(DirichletNodes) = false;
40 K_modified = K(excludeIdx,excludeIdx);
41 F_modified = F(excludeIdx);
42
43 % Resolucion %
44 x = K_modified \ F_modified;
45
46 % Construccion solucion %
47 u = zeros(size(F));
48 u(excludeIdx) = x;
49 u(DirichletNodes) = d_values(:);
50
51 % Calculo del esfuerzo cortante %
52 tau = zeros(size(coordinates,1),2);
53 for j = 1:size(elements, 1)
54     I = elements(j, [1 2 3]);
55     tau(j,:) = get_tau(coordinates(elements(j,:),:),u(I));
56 end
57 tau_yz = -tau(:,1);
58 tau_xz = tau(:,2);
59 tau = sqrt(tau_yz.^2+tau_xz.^2);
60
61 % Calculo del torque %
62 Torque = get_Torque(coordinates,elements,u);
63
64
65 % Postprocessing %
66
67 disp(" ")
68
69 disp("Valor maximo u")
70 disp(max(u))
71
72 disp("Valor maximo tau")
73 disp(max(tau))
74

```

```

75 | disp("Torque")
76 | disp(Torque)
77 |
78 | disp("Error L2 u")
79 | u_an = analytic_u(coordinates,a,b,G_mu);
80 | disp(strcat(" ",num2str(calc_L2_error(u,u_an),"%.3e")))
81 |
82 | disp("Error L2 tau")
83 | tau_an = analytic_tau(centroids,a,b,G_mu);
84 | disp(strcat(" ",num2str(calc_L2_error(tau,tau_an),"%.3e")))
85 |
86 | disp("Error L2 torque")
87 | Torque_an = analytic_torque(a,b,G_mu);
88 | disp(strcat(" ",num2str(calc_L2_error(Torque,Torque_an),"%.3e")))
89 |
90 |
91 | plot_solutions(coordinates,elements,u,tau,b)
92 |
93 |
94 | % Funciones %
95 |
96 | % Condiciones de Dirichlet %
97 | function [values] = u_d(x)
98 |     values = zeros(size(x,1),1);
99 | end
100 |
101 | % Fuerzas de cuerpo %
102 | function volforce = f(x,f0)
103 |     volforce = ones(size(x,1),3)*f0;
104 | end
105 |
106 | % Matriz de rigidez local %
107 | function local_K = local_K(vertices)
108 |     x = vertices(:,1);
109 |     y = vertices(:,2);
110 |     A = det([1,1,1;vertices']);/2;
111 |     det_J = A*2;
112 |     B = 1/det_J*[y(2)-y(3), y(3)-y(1), y(1)-y(2);
113 |                 x(3)-x(2), x(1)-x(3), x(2)-x(1)];
114 |     k = A*B'*B;
115 |     local_K = k;

```

```

116 | end
117 |
118 | % Fuerza en elementos %
119 | function local_F = local_F(vertices,centroid,f0)
120 |     A = det([1,1,1;vertices']);/2;
121 |     fs = f(centroid,f0)';
122 |     local_F = fs*A/3;
123 | end
124 |
125 | % Calcular esfuerzo en elemento %
126 | function [tau] = get_tau(vertices,u)
127 |     A = det([1,1,1;vertices']);/2;
128 |     x = vertices(:,1);
129 |     y = vertices(:,2);
130 |     det_J = A*2;
131 |     B = 1/det_J*[y(2)-y(3), y(3)-y(1), y(1)-y(2);
132 |                 x(3)-x(2), x(1)-x(3), x(2)-x(1)];
133 |     tau = B*u;
134 | end
135 |
136 | % Calcular el torque %
137 | function [Torque] = get_Torque(coordinates,elements,u)
138 |     Torque = 0;
139 |     for j = 1:size(elements, 1)
140 |         I = elements(j, [1 2 3]);
141 |         vertices = coordinates(elements(j,:));
142 |         A = det([1,1,1;vertices']);/2;
143 |         Torque = Torque + A*mean(u(I));
144 |     end
145 |     Torque = Torque*4*2;
146 | end
147 |
148 | % Soluciones analiticas %
149 | function [u] = analytic_u(X,a,b,G_mu)
150 |     x = X(:,1);
151 |     y = X(:,2);
152 |     u = G_mu*a^2*b^2/(a^2+b^2)*(1-x.^2/a^2-y.^2/b^2);
153 | end
154 |
155 | function [tau] = analytic_tau(X,a,b,G_mu)
156 |     x = X(:,1);

```

```

157     y = X(:,2);
158     T = analytic_torque(a,b,G_mu);
159     tau = 2*T/(pi*a*b)*sqrt(x.^2/a^4+y.^2/b^4);
160 end
161
162 function [torque] = analytic_torque(a,b,G_mu)
163     torque = pi*a^3*b^3*G_mu/(a^2+b^2);
164 end
165
166 % Calculo de error L2 %
167 function [error] = calc_L2_error(u_aprox,u_teo)
168     dif_u = (u_aprox - u_teo);
169     error = sqrt(sum(dif_u.^2)/sum(u_teo.^2));
170 end
171
172 % Funciones para crear la malla %
173 function [centroids] = get_centroids(coordinates,elements)
174     centroids = zeros(size(elements,1),2);
175     for j = 1:size(elements, 1)
176         centroids(j,:) = mean(coordinates(elements(j,:),:),1);
177     end
178 end
179
180 function [coordinates,elements3,dirichlet] = create_mesh(a,b,Hmax)
181     R1 = [3,4,-a,0,0,-a,-b,-b,b,b]';
182     R2 = [3,4,-a,a,a,-a,-b,-b,0,0]';
183     C1 = [4,0,0,a,b]';
184     C1 = [C1;zeros(length(R1)-length(C1),1)];
185     gm = [R1,R2,C1];
186     ns = char('R1','R2','C1'); ns=ns';
187     sf = 'C1-R1-R2';
188     d1 = decsg(gm,sf,ns);
189     model = createpde;
190     geometryFromEdges(model,d1);
191     Hgrad = 1.5;
192     generateMesh(model,'Hmax',Hmax,'Hgrad',Hgrad,'Jiggle','on','
193     GeometricOrder','linear')
194     [p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
195     coordinates = p';
196     elements3 = t(1:3,:)';
197     e2 = e';

```

```

197     dirichlet = e2(e2(:,5)==3, 1:2);
198 %pdegplot(d1,"EdgeLabels","on","FaceLabels","on")%
199 end
200
201 % Funciones para graficar la solucion %
202 function plot_solutions(coordinates,elements,u,tau,b)
203
204 if exist('plots', 'dir') ~= 7
205     mkdir('plots');
206 end
207
208 title = "Funci n esfuerzo de Prandtl u";
209 show(elements,coordinates,u,b,title)
210 filename = fullfile('plots', sprintf('u_n%d_b%.1f.png', size(
211     coordinates, 1), b));
211 saveas(gcf,filename)
212
213 title = "Esfuerzo cortante \tau";
214 show2(elements,coordinates,tau,b,title)
215 filename = fullfile('plots', sprintf('tau_n%d_b%.1f.png', size(
216     coordinates, 1), b));
217 saveas(gcf,filename)
218 end
219
220 function show(elements3, coordinates, X,b,plot_title)
221 figure
222 colormap('jet')
223 trisurf(elements3, coordinates(:, 1),coordinates(:, 2),zeros(size(
224     coordinates, 1), 1), X, 'facecolor', 'interp');
225 view (0,90)
226 colorbar('vert')
227 xlabel('x')
228 ylabel('y')
229 xlim([0,b])
230 title(plot_title)
231 end
232
233 function show2(elements, coordinates, X,b,plot_title)
234 figure
235 colormap('jet')
236 patch('Faces',elements,'Vertices',coordinates,'FaceVertexCData',X,'

```

```
235 |     FaceColor ',' flat ');
236 |     view(0,90)
237 |     colorbar('vert')
238 |     xlabel('x')
239 |     ylabel('y')
240 |     xlim([0,b])
241 |     title(plot_title)
241 | end
```