



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA



Modelación de un Flujo Atrás de un Escalón

Dinámica de Fluidos Computacional

IPM-468 - 2022

Departamento Ing. Mecánica UTFSM

Martín Achondo Mercado, 201860005-9

Eduardo Hasbun Contreras, 201841031-4

Profesor: Dr. Olivier Skurlys

27 de Enero de 2022

Resumen

En el presente trabajo se entregan los resultados obtenidos al modelar un flujo desarrollado al pasar por un escalón. Lo anterior con el propósito de encontrar los puntos de separación y reattachment. Para las modelaciones se estudiarán casos numéricos, físicos en estados laminar y turbulento.

Las primeras simulaciones consistieron en un estudio numérico del flujo dentro de un dominio de 2 dimensiones utilizando distintos métodos numéricos y parámetros característicos de estos, obteniendo así que los modelos SIMPLE y SIMPLEC con esquema upwind fueron los que requieren menos iteraciones y menor tiempo para converger. Además se observó que el esquema de Gauss linear es el que requiere mas tiempo en todos los casos.

Posteriormente se realizaron simulaciones para el estudio físico del problema, para esto, se resolvió el flujo dentro del dominio utilizando un método laminar y con el modelo de $k - \omega$ SST, con respecto al numero de Reynolds y la malla del dominio. Para el primer caso se aprecia que el perfil de velocidad no varia mucho cambiando el numero de Reynolds debido a que se está trabajando con un comportamiento laminar. Pasando el escalón, se aprecia que la difusión del perfil de Poiseuille varia dependiendo del Reynolds. Además se graficaron los puntos obtenidos del coeficiente de fricción con respecto al Reynolds para comparar los resultados con los obtenidos por Armaly [6]. De esto se observó que los puntos de separación y reincorporación del flujo fueron simulados correctamente en la mayor parte de los casos aunque en otros no se pudieron obtener los vórtices más pequeños. Esto se asocia al código implementado y al tamaño de las estructuras que representan los puntos que no pudieron ser modelados. Para la simulación utilizando el modelo $k - \omega$ SST se observó que el perfil de Poiseuille se pierde antes del escalón ya que el flujo es turbulento. Además de que para distintos números de Reynolds las curvas de coeficientes de fricción son similares entre si. Adicionalmente los resultados obtenidos se compararon con los resultados numéricos de Kumar [7] obteniendo ciertas variaciones.

Finalmente se realizó la simulación del dominio en 3D. Para este caso se utilizaron dos modelos: $k - \epsilon$ y LES. Para el primer caso se obtuvo que el modelo no es tan capaz si se consideran los resultados de experimentales de Armaly las simulaciones en 2d realizadas, obteniendo punto de estancamiento lejanos a los experimentales ($x/h = 5$) los cuales empeoraron cuando se afinó la malla. Por su contraparte, los modelos LES (Smagorinsky y WALE) entregaron resultados mucho más cercanos a los que se obtuvieron experimentalmente dando a entender que este modelo funciona de mejor manera. Además se demostró la importancia que tiene el factor de amortiguamiento en el modelo de Smagorinsky en los resultados obtenidos.

Índice

1. Introducción	3
2. Objetivos	4
2.1. Objetivos Generales	4
2.2. Objetivos Específicos	4
3. Marco Teórico	5
3.1. Ecuaciones de Conservación	5
3.2. Turbulencia	5
3.2.1. Modelos RANS	5
3.2.2. Modelos LES	7
3.3. Teoría adicional	9
3.3.1. Capa Límite	9
3.3.2. Ley de pared	10
4. Modelo	11
4.1. Dimensiones	11
4.2. Discretización	12
4.3. Modelos	14
4.4. Condiciones de borde	14
5. Análisis y Resultados	16
5.1. Casos 2D	16
5.1.1. Estudio numérico	16
5.1.2. Estudio físico laminar	20
5.1.3. Caso turbulento: $k - \omega$ SST	24
5.2. Casos 3D	27
5.2.1. Estudio numérico modelo $k - \epsilon$	27
5.2.2. Estudio numérico del modelo LES	33
6. Conclusión	38
7. Referencias	39

1. Introducción

En este trabajo se presentarán los resultados obtenidos al modelar un flujo desarrollado al pasar por un escalón. Lo anterior con el propósito de encontrar los puntos de separación y reattachment. Para las modelaciones se estudiarán casos numéricos, físicos en estados laminar y turbulento. Además se modelarán casos 2D y 3D. Todo lo anterior será usando el software de código libre OpenFOAM dado su amplia posibilidad de modificación de esquemas, solvers y del código mismo. Complementariamente se añadirán códigos en Python para automatizar las simulaciones a partir de parámetros como el número de Reynolds. El código puede ser revisado en el repositorio de GitHub: <https://github.com/MartinAchondo/Proyecto-CFD-OpenFOAM>.

Respecto a las modelaciones a realizar, se resolverán casos laminares para $Re \leq 1200$ y casos turbulentos $Re \geq 7000$ con el modelo de $k - \omega$ SST en 2D. Para las modelaciones en 3D se utilizará el modelo de $k - \epsilon$, 2 métodos de LES, Smagorinsky y WALE con $Re = 9000$. Todas las mallas a utilizar serán estructuradas con refinamientos si es mencionado. Para la evaluación de los puntos de recirculación se calcularán los coeficientes de fricción y presión en las paredes, además de los campos de velocidad y presión en el dominio.

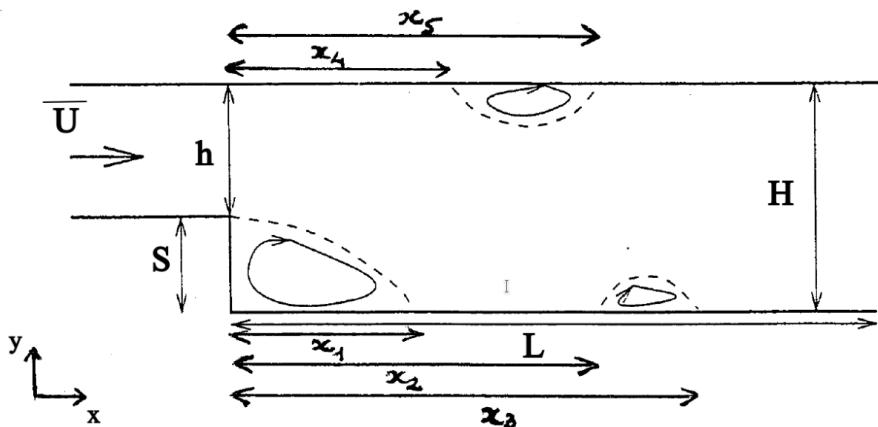


Figura 1.1: Imagen de referencia del dominio a modelar

2. Objetivos

2.1. Objetivos Generales

Modelar un flujo atrás de un escalón en casos laminares y turbulentos.

2.2. Objetivos Específicos

- Identificar los vórtices que aparecen en la simulación del flujo para casos laminares y turbulentos.
- Analizar las curvas de los coeficientes de fricción y presión en las paredes superior e inferior.
- Analizar los campos de velocidad y presión para los diferentes números de Reynolds.
- Revisar variaciones en la modelación a partir de cambios en la malla y parámetros de los modelos de turbulencia.
- Revisar el cumplimiento de la ley de pared.

3. Marco Teórico

3.1. Ecuaciones de Conservación

Para el desarrollo del modelo, se utilizó la conservación de masa y la conservación de cantidad de movimiento para el medio continuo. Estas ecuaciones son las siguientes: [1].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.1)$$

En este proyecto se trabajará con versiones simplificadas de estas ecuaciones bajo las siguientes suposiciones:

- El fluido será agua y se considerará incompresible.
- Se considerará un fluido Newtoniano.

El fluido al ser Newtoniano e incompresible, se le podrán desarrollar los esfuerzos de corte de la siguiente manera:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

Para las modelaciones se trabajarán con casos transientes y estacionarios.

3.2. Turbulencia

Las ecuaciones mencionadas anteriormente pueden ser desarrolladas mediante técnicas de simulación directa, pero es inviable dada la malla fina que habría que crear. Es por esto que se usará para la conservación de momento la ecuación promediada. De aquí aparecen los modelos RANS, los cuales promedian en el tiempo, y los LES que promedian en el espacio.

De esta manera las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2.1. Modelos RANS

Se promedia la ecuación de cantidad de movimiento respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.4)$$

Todas las ecuaciones de conservación se resolverán en términos promedios. Dado que aparecen en esta ecuación los términos fluctuantes de la velocidad en el tensor de esfuerzos de Reynolds: $\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$, la idea es encontrar relaciones entre este término con las velocidades promedios para cerrar el sistema. En efecto, el tensor de esfuerzos de Reynolds puede formar la siguiente relación:

$$-\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \mu_t \bar{S}_{ij} \quad (3.5)$$

En donde se introduce el concepto de viscosidad turbulenta: ν_t y siendo k la energía cinética turbulenta. Así, las ecuaciones de flujo promedio quedan:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.6)$$

Entonces los modelos buscan en encontrar relaciones para la viscosidad turbulenta ν_t .

- **Modelo $k - \varepsilon$:**

Se añadirán dos ecuaciones de transporte para cerrar el sistema [2]. Una para la energía cinética turbulenta (k) y otra para la disipación viscosa (ε). De esta manera se podrá modelar la viscosidad aumentada dada por la turbulencia (ν_t).

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= C_{\varepsilon_1} C_\mu k \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ \nu_t &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Las constantes tiene un valor (calificado de estándar) de: $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$, $C_{\varepsilon_1} = 1.44$, $C_{\varepsilon_2} = 1.92$ y $C_\mu = 0.09$

- **Modelo $k - \omega$:**

Se añadirán dos ecuaciones de transporte para cerrar el sistema [2]. Una para la energía cinética turbulenta (k) y otra para una frecuencia característica de la turbulencia (ω). De esta manera se podrá modelar la viscosidad aumentada dada por la turbulencia (ν_t).

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} &= \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta \omega^2 \\ \nu_t &= \frac{k}{\omega} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las constantes tiene un valor (calificado de estándar) de: $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$, $C_{\varepsilon_1} = 1.44$, $C_{\varepsilon_2} = 1.92$ y $C_\mu = 0.09$

3.2.2. Modelos LES

El modelo Large Eddy Simulation es utilizado principalmente para predecir el comportamiento de a gran escala de flujos turbulentos incompresibles. Lo que caracteriza este modelo es principalmente que las grandes escalas de movimiento se calculan explícitamente utilizando las ecuaciones de Navier Stokes, mientras que los efectos de pequeña escala deben ser modelados.

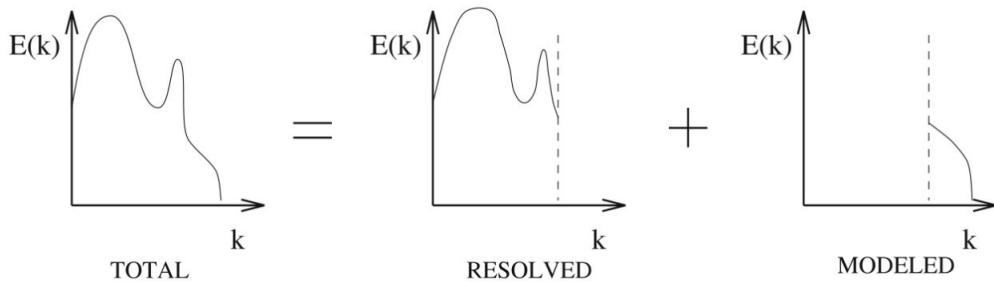


Figura 3.1: Descomposición del espectro de energía del modelo LES

Para las grandes escalas, se resuelven las ecuaciones de Navier Stokes para un flujo incompresible y no Newtoniano que corresponden a las siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{(u_i u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial x_i}{\partial u_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Utilizando la ecuación de momento filtrada resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau^{SGS} \\ \frac{\bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En esta expresión encontramos el término no lineal $u_i \bar{u}_j$ que se debe expresar en función de $\bar{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}' . Además, aparecen las tensiones turbulentas de sub-malla:

$$\tau_{ij}^{SGS} = u_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.11)$$

Estas tensiones representan el efecto del movimiento a pequeñas escalas actuando como tensiones y deben ser resueltas utilizando un modelo de sub-malla.

- **Modelo sub-malla Smagorinsky**

Este es uno de los modelos más conocidos el cual entrega una expresión de ν_{SGS} en función de las escalas resueltas.

$$\nu_{SGS} \propto lq \quad (3.12)$$

Donde l es la longitud característica de la sub-malla y q la velocidad característica de sub-malla.

$$\begin{aligned} l &= C_s \Delta \\ q &= l |\bar{S}_{ij}| \end{aligned} \quad (3.13)$$

En donde C_s es la constante de Smagorinsky. Para encontrar el perfil de velocidad adecuado cerca de la pared se utiliza una función de amortiguamiento. De este modo, la viscosidad turbulenta de la submalla queda como:

$$\begin{aligned} \nu_{sm} &= (f(y^+) C_s \Delta)^2 |\bar{S}_{ij}| \\ f(y^+) &= 1 - e^{\frac{y^+}{A^+}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde y^+ es la normal a la pared y A^+ es una constante.

- **Modelo sub-malla WALE**

Este modelo busca mejorar el modelo de Smagorinsky eliminando la función de amortiguación cerca de las paredes y se basa en las escalas resueltas considerando el tensor de deformación y de rotación al mismo tiempo. Este tiene la ventaja de que es invariante a la translación y rotación de coordenadas y se formula de la siguiente forma:

$$\nu_{sgs} = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (3.15)$$

Con C_w una constante y:

$$s_{ij}^d s_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\bar{S}_{mm} \bar{S}_{mm} - \bar{\Omega}_{mm} \bar{\Omega}_{mm}) \quad (3.16)$$

Siendo $\bar{\Omega}_{ij}$ el tensor de rotación filtrado:

$$\bar{\Omega}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.17)$$

3.3. Teoría adicional

3.3.1. Capa Límite

La capa límite es la zona en la cual el flujo se encuentra perturbado por una pared. Debido a la condición de no deslizamiento, el flujo en la pared tiene valor 0 y a medida que se va alejando de esta va aumentando la velocidad formando un perfil de velocidad. La capa límite termina cuando el valor de la velocidad alcanza un 99 % de la velocidad no perturbada. Existe dos capas límites:

- Capa límite laminar: En esta zona, el flujo es suave y laminar por lo que genera baja resistencia en la pared aunque es poco estable. La ecuación que gobierna esta zona para flujos incompresibles es:

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0 \quad (3.18)$$

En donde $\eta = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}$ y $f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$. Esta ecuación modela el perfil de velocidad, llamada ecuación de Blasius.

- Capa límite turbulenta: A cierta distancia del borde de la pared la capa límite laminar se rompe y se genera un flujo turbulento lo cual genera un aumento en la resistencia en la pared. Esta estructura es muy compleja e irregular por lo que se recurre a aproximaciones para predecir su comportamiento. La capa turbulenta genera una subcapa viscosa en donde el flujo es laminar. Aproximadamente el 20 % de esta capa límite es modelada por la ley de pared, y tiene un comportamiento universal.

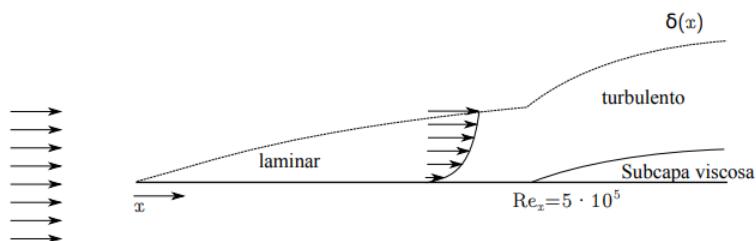


Figura 3.2: Esquema capa límite

3.3.2. Ley de pared

Como se dijo antes, los efectos viscosos cerca de una pared toman gran importancia para determinar el comportamiento del flujo turbulento. El comportamiento a esta distancia de la pared toma un carácter universal y comúnmente es escrito en coordenadas de pared, Estas están dadas por:

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{\bar{u}}{u_\tau} \\ y^+ &= \frac{u_\tau y}{\nu} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En donde $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$. Con esto se presentan 3 escenarios en la capa límite

- Subcapa viscosa, $y^+ < 5$: En esta zona $u^+ = y^+$, predominan los esfuerzos viscosas, el flujo es laminar.
- Zona intermedia $5 < y^+ < 30$
- Zona logarítmica, $y^+ > 30$: En esta zona $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$, se tiene una relación logarítmica.

Una imágen de la ley de pared se encuentra a continuación:

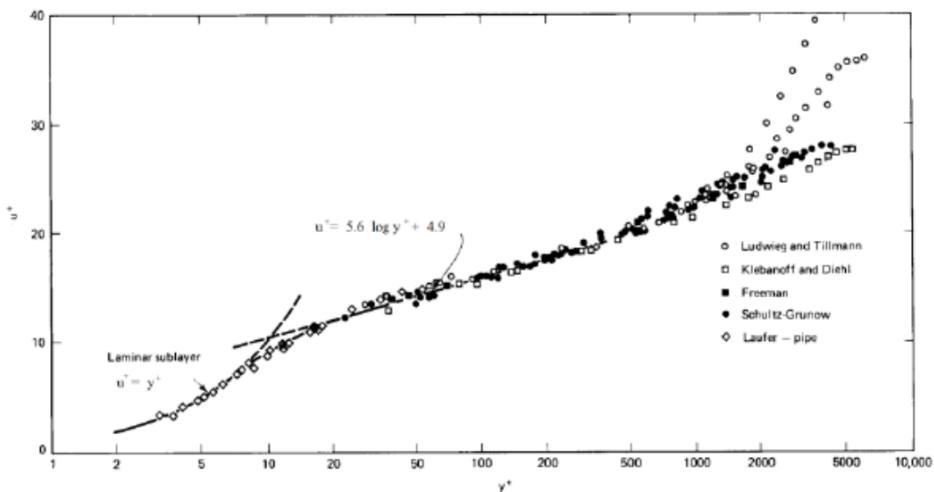


Figura 3.3: Ley de pared

4. Modelo

Se modelará el flujo posterior a un escalón. Las dimensiones, ecuaciones, condiciones de borde y discretización serán presentadas a continuación:

4.1. Dimensiones

Se presenta un esquema de la geometría 2D a utilizar:

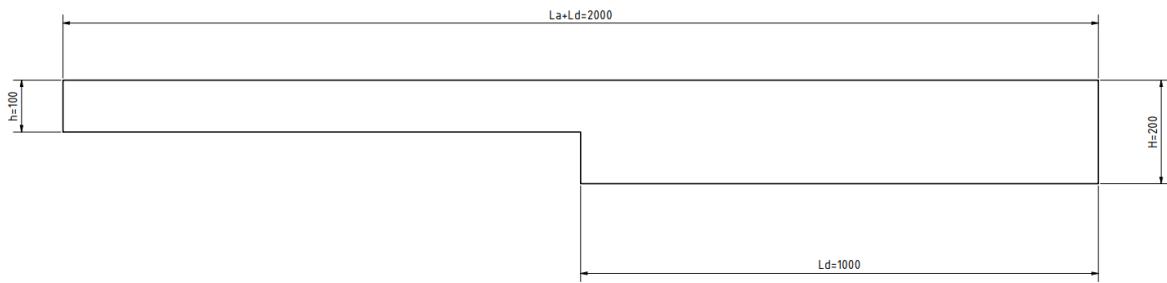


Figura 4.1: Geometría 2D. Medidas en [mm]

Notar que el dominio tendrá un *step ratio* de $\frac{h}{H} = 0.5$. En los casos que se extienda la geometría, la distancia Ld tendrá un valor de 1700 [mm]. Para la geometría 3D se utilizan las siguientes dimensiones:

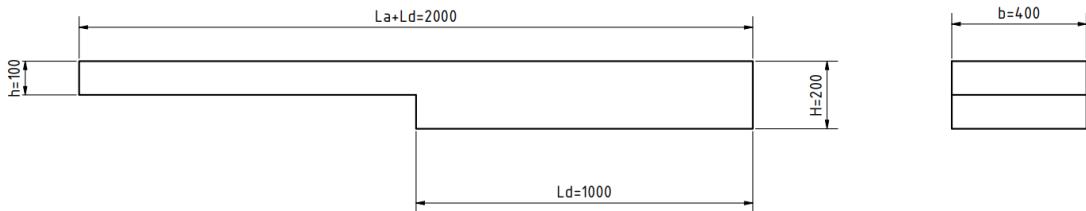


Figura 4.2: Geometría 3D. Medidas en [mm]

4.2. Discretización

La discretización realizada en todas las simulaciones fue una estructurada con el propósito de mejorar la estabilidad y convergencia. Además, en los casos en donde la malla fue refinada, se utilizó una función de expansión en las paredes. Se presenta a continuación tablas con los parámetros de cada malla. Es importante notar que la caracterización de cada malla, ej. 10x10, indica 10x10 volúmenes en la zona formada después del escalón hasta 1 metro (zona Ld).

Tabla 4.1: Parámetros mallas 2D

Malla	Nodos	Volúmenes
100x30	9462	4500
250x100	111552	55000
600x600	1506446	751000

Las mallas fueron utilizados en los siguientes casos:

- Malla 100x30: Se utilizó para el estudio numérico.
- Malla 250x100: Se utilizó para el estudio físico. Es importante notar que se utilizó una geometría extendida con 1.7 metros en la zona Ld para poder replicar las recirculaciones.
- Malla 600x600: Se utilizó para el caso turbulento ($k - \omega$ SST). Esta malla fue refinada con una función de expansión en las paredes.

Se incluye una imagen de la malla 100x30:

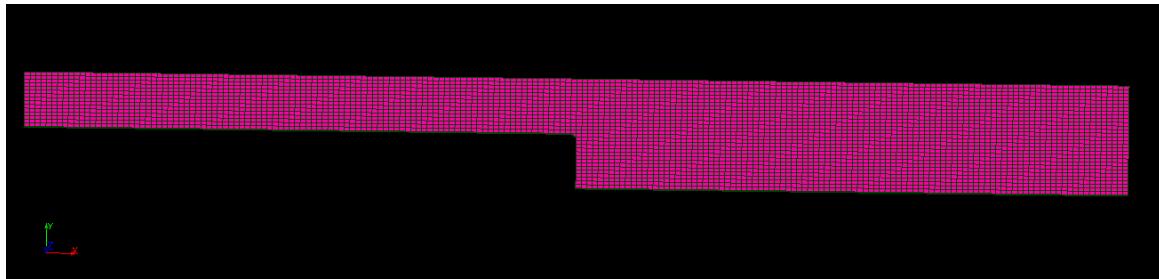


Figura 4.3: Malla de 100x30

Para el caso de 3D, se utilizaron discretizaciones estructuradas uniformes y también con refinado en el cual se utiliza una función de expansión en las paredes para mejorar los resultado en esa zona que es en la cual se forman las estructuras de menor tamaño. Las mallas que se utilizaron fueron las siguientes:

- Malla 150x50x20: Utilizada para el estudio numérico del modelo $k - \epsilon$
- Malla 150x50x20 refinada: Utilizada para mejorar los resultados del modelo $k - \epsilon$
- Malla 200x80x30: Utilizada para el estudio numérico del modelo LES

Tabla 4.2: Parámetros mallas 3D

Malla	Nodos	Volúmenes
150x50x20	122346	112499
150x50x20R	462294	432000
200x80x30	380711	360000

4.3. Modelos

Para las simulaciones se utilizará el software de código libre OpenFOAM. Junto a este se programaron diversas funciones para extraer los coeficientes y automatizar el post processing. El código puede ser revisado en el repositorio de GitHub: <https://github.com/MartinAchondo/Proyecto-CFD-OpenFOAM>.

Los modelos implementados son los siguientes:

- Casos 2D:
 - Laminar: $100 \leq \text{Re} \leq 1200$
 - $k - \omega$ SST: $7000 \leq \text{Re} \leq 9000$
- Casos 3D:
 - $k - \epsilon$: $\text{Re} = 9000$
 - LES Smagorinsky: $\text{Re} = 9000$
 - LES WALE: $\text{Re} = 9000$

Todos estos casos serán resueltos con solvers estacionarios (`simpleFoam`), salvo los modelos LES para los cuales se resolverán en estados transientes con (`pisoFoam`). Para todos los casos estacionarios, salvo que se indique lo contrario, se utilizará el método de acoplamiento de presión SIMPLEC. Para los casos transientes se utilizará PISO.

4.4. Condiciones de borde

Para las modelaciones se utilizarán las siguientes condiciones de borde.

- Inlet:
 - Para la velocidad se considerará como entrada un flujo de Poiseuille. A continuación se presentan las ecuaciones en función de la velocidad promedio.

Caso 2D:

$$u(y) = \frac{6\bar{U}y(h-y)}{h^2} \quad (4.1)$$

Caso 3D:

$$u(y, z) = \frac{\frac{12\bar{U}}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cosh(\beta_n y^*) (1 - \cosh(\beta_n z^*) / \cosh(\beta_n b/2))}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{192}{(2n+1+3/2)\pi^5} \frac{h}{b} \tanh((2n+1)\pi b/2h)} \quad (4.2)$$

En donde $\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{h}$, $y^* = y - h/2$, $z^* = z - b/2$.

- Para la presión se utilizará la función de `zeroGradient`:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (4.3)$$

- Para las propiedades de turbulencia se utilizarán las siguientes ecuaciones:

Para k :

$$k = 1.5(\bar{U}T)^2 \quad (4.4)$$

Para ϵ :

$$\epsilon = \frac{0.09^{0.75} k^{1.5}}{0.07H} \quad (4.5)$$

Para ω :

$$\omega = \frac{\epsilon}{k} \quad (4.6)$$

- **Outlet:** Se fijará la condición de `zeroGradient` a la velocidad y los propiedades de la turbulencia. Para el caso de la presión se le fijará una condición de Dirichlet: $p = 0$.
- **Paredes:** Para la velocidad se fijará una condición de `noSlip`, $u = 0$. Para las propiedades de turbulencia se utilizarán las funciones: `kqRWallFunction`, `epsilonWallFunction`, `omegaWallFunction`. Para la presión se utilizará la condición de `zeroGradient`.

En el caso de la geometría 2D, para las paredes delantera y trasera (front and back), se utilizará la condición de `empty`.

En todos los casos, el número de Reynolds fijará la velocidad promedio en el Inlet a partir de la siguiente relación:

$$\bar{U} = \frac{\nu \text{Re}}{H} \quad (4.7)$$

Para las propiedades del flujo, se consideró agua con una densidad de $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y una viscosidad cinemática de $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Para el post processing, se evaluarán los campos de velocidad y presión. Además, se graficarán los coeficientes de fricción y presión en las paredes, los cuales están dados por:

$$cf = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} \quad cp = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} \quad (4.8)$$

5. Análisis y Resultados

5.1. Casos 2D

Se presentan los resultados para los casos en 2D

5.1.1. Estudio numérico

Para esta sección se realizó un estudio numérico de los métodos utilizados dejando un Reynolds fijo de 300 y unos residuales de 10^{-3} . Para esto se utilizaron los métodos de SIMPLE y SIMPLEC y los esquemas de upwind y Gauss linear disponibles en OpenFOAM.

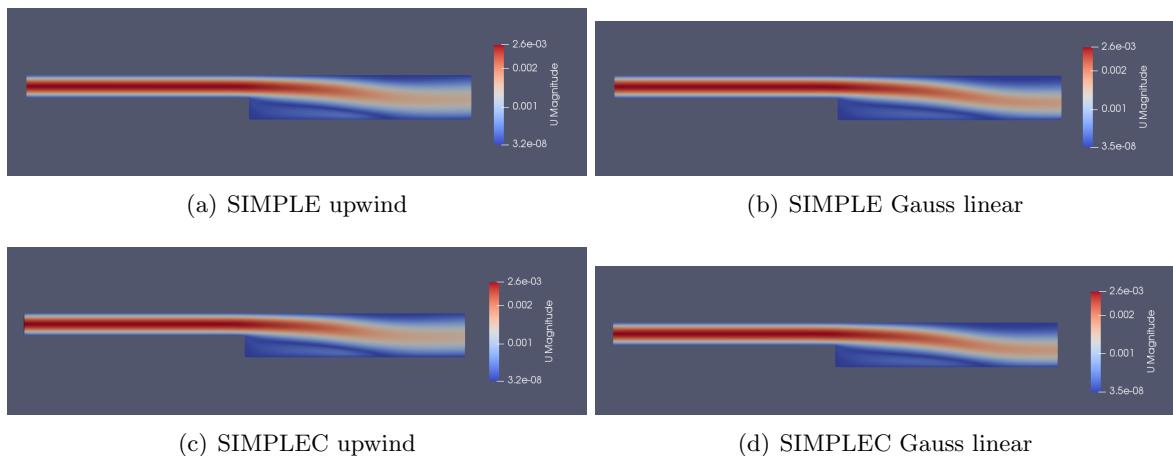


Figura 5.1: Campo de velocidad para los distintos esquemas

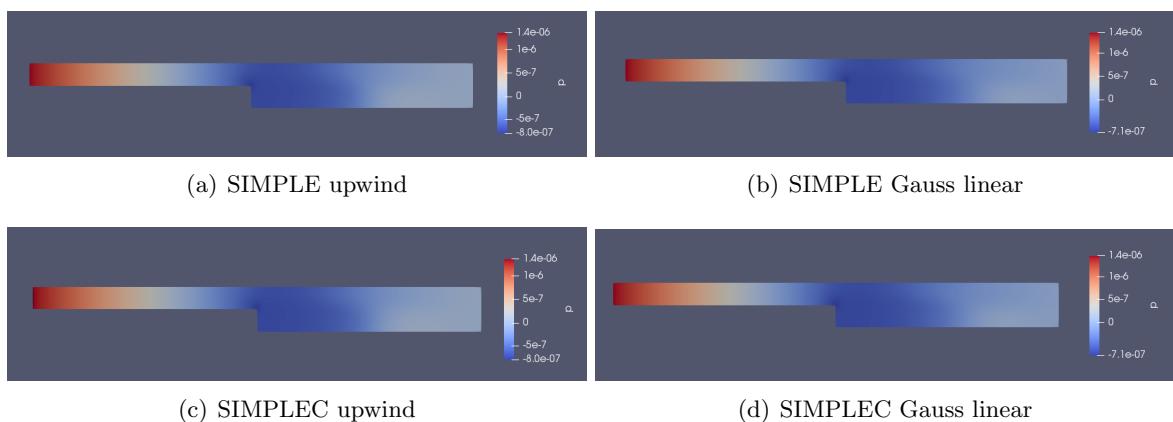


Figura 5.2: Campo de presión para los distintos esquemas

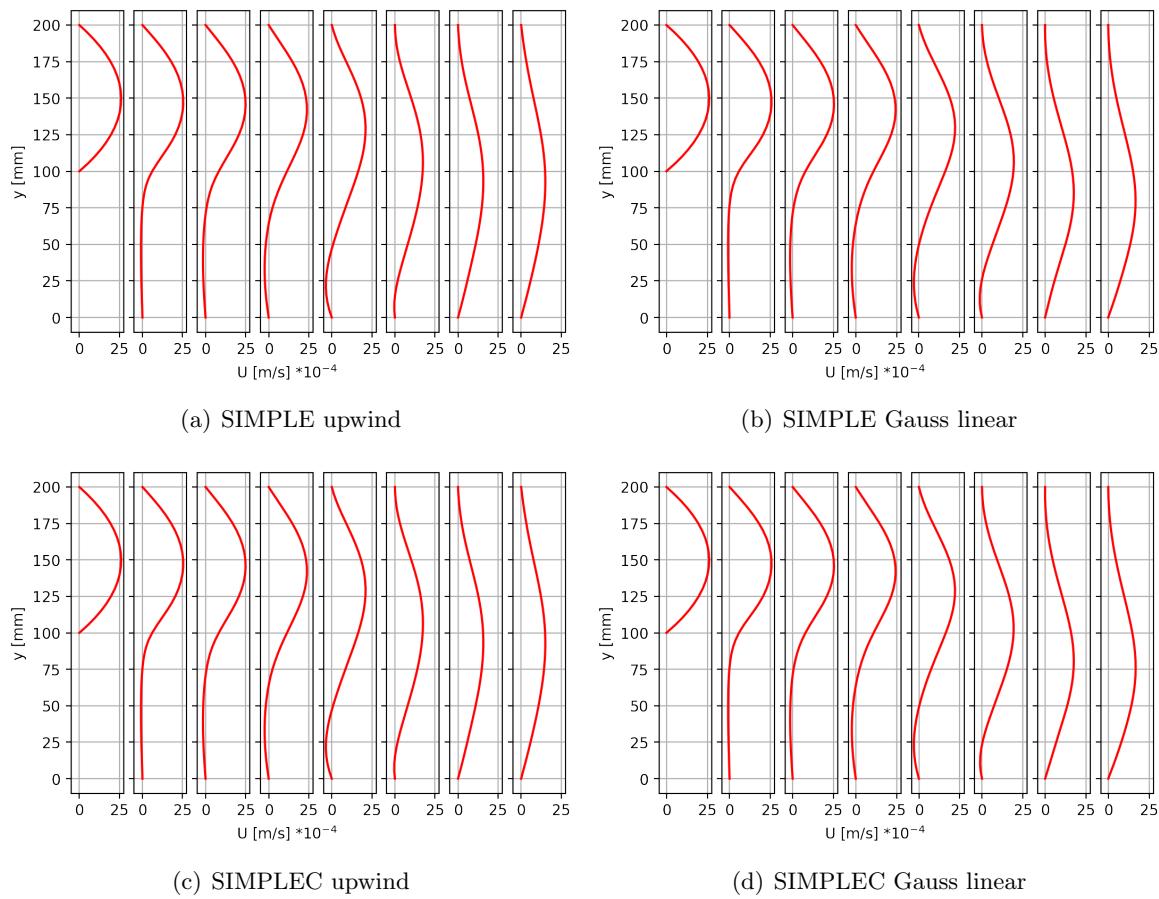


Figura 5.3: Perfil de velocidad para los distintos esquemas en distintas posiciones

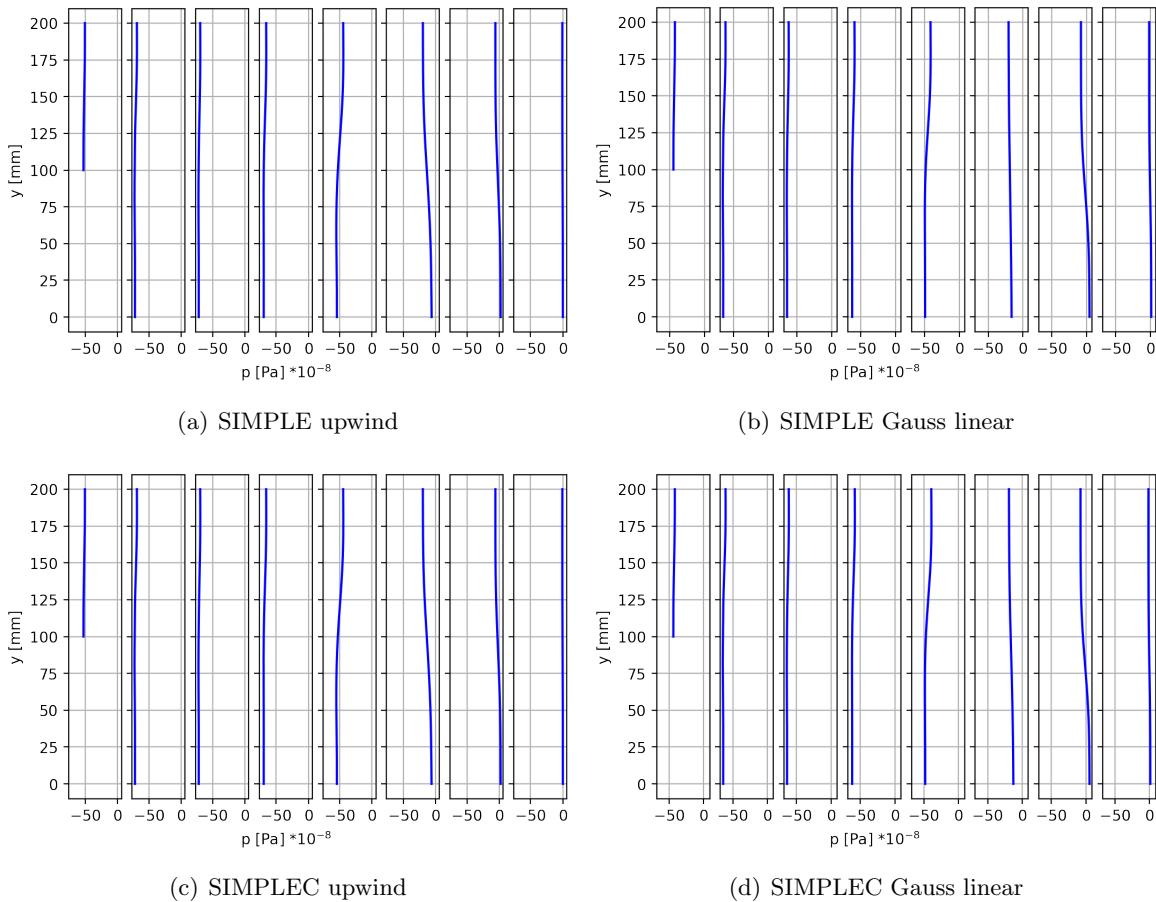


Figura 5.4: Presión para los distintos esquemas en distintas posiciones

Lo primero que hay que mencionar es que los campos de velocidad y presión se ven bastante similares en los 4 casos. A simple vista no se ven cambios notorios. De todas formas, revisando los perfiles obtenidos si se notan diferencias, especialmente cerca de la salida del dominio. Pareciera ser que para el caso de upwind, el perfil cercano a la salida toma una forma más parabólica que los casos Gauss linear, para ambos métodos de acoplamiento de presión. De todas formas ambos perfiles coinciden con los resultados obtenidos por Armaly [6].

Tabla 5.1: Resultados para los distintos métodos

Método	Esquema	Iteraciones	Tiempo [s]	E. continuidad	E. global	E. acumulado
SIMPLE	upwind	359	49	1.7E-8	4.1E-9	7.8E-6
SIMPLE	Gauss linear	523	56	7.5E-9	1.9E-9	2.1E-5
SIMPLEC	upwind	359	53	5.6E-8	1.2E-8	3.8E-5
SIMPLEC	Gauss linear	479	53	4.4E-8	1.7E-8	4.8E-5

Ya comparando los efectos sobre la resolución, se nota que para los casos de SIMPLE y SIMPLEC con upwind se obtuvieron las menores iteraciones (359) hasta converger. Esto se le añade el hecho que se obtuvieron los menores tiempo de cálculo en comparación con los casos de Gauss linear. De todas formas, no ocurre el mismo comportamiento respecto a los errores. En este caso se nota que los casos SIMPLE tuvieron menores errores que los casos SIMPLEC. Esto parece curioso dado que SIMPLEC pareciera ser una mejora al método de SIMPLE.

Los resultados obtenidos son válidos para el caso planteado, de todas formas hubiera sido interesante probar con residuales cercanos a 10^{-8} por ejemplo, y para distintos números de Reynolds. Como dato adicional, para la siguiente sección se utilizó SIMPLEC dado que para Reynolds superiores entregó resultados más estables y convergentes a una solución.

5.1.2. Estudio físico laminar

Se presentan los campos de velocidad para los distintos números de Reynolds:

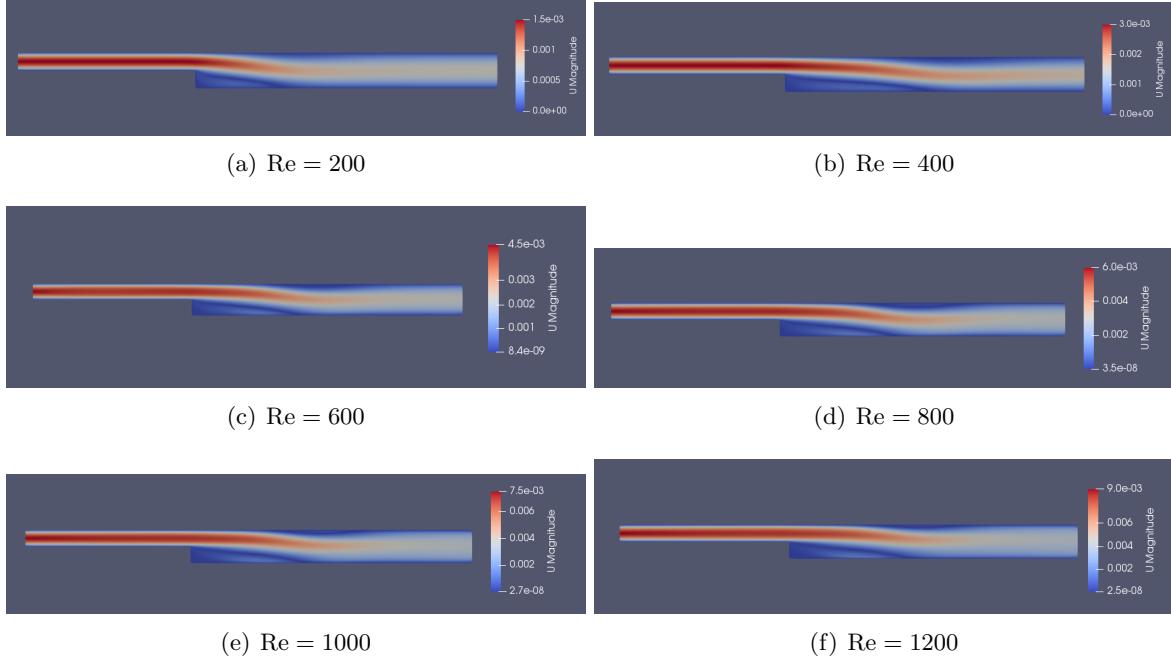


Figura 5.5: Campo de velocidad para los distintos números de Reynolds

Los campos de velocidad se ven bastante similares para los diferentes números de Reynolds. Esto lleva la mantención del perfil de Poiseuille en la sección antes del escalón. Esto se debe a qué el flujo a estudiar tiene un comportamiento laminar. De todas formas al pasar el escalón, este perfil se difunde abarcando mayor área y por ende reduciendo su magnitud. Esta difusión que genera el perfil es distinta dependiendo del número de Reynolds, lo que genera distintos puntos de separación y recirculación.

Se presentan los coeficientes de fricción de la pared superior e inferior. Estos serán utilizados para encontrar los puntos de separación y recirculación en las paredes.

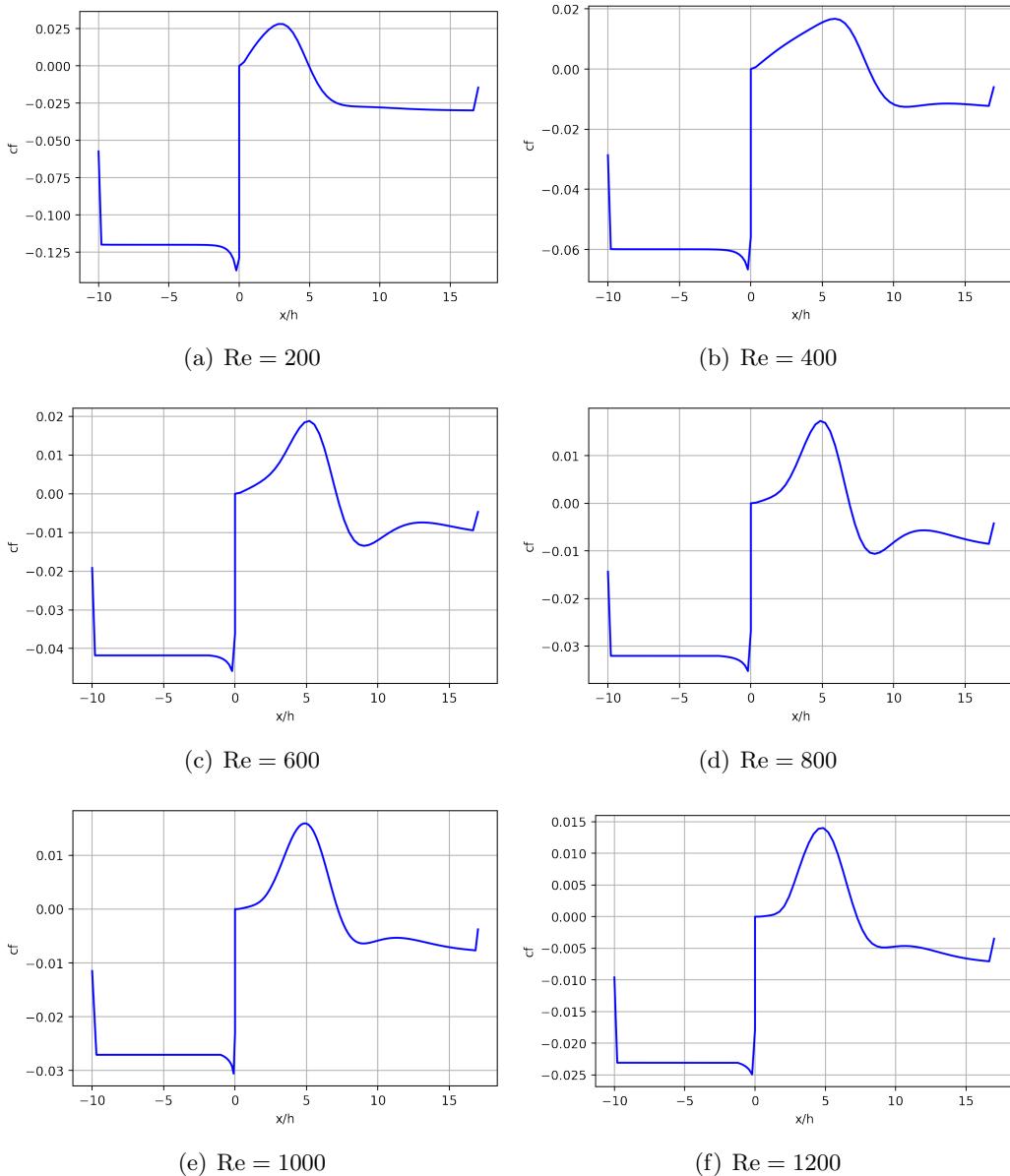


Figura 5.6: Coeficiente de fricción en la pared inferior para los distintos números de Reynolds

Revisando los resultados de la pared inferior, se puede notar que el coeficiente tiene un valor constante en la zona antes del escalón, esto confirma lo dicho anteriormente respecto a que se está resolviendo un caso laminar. De todas formas, lo que parece curioso es que todos los casos son bastante similares entre si, un salto en el valor de c_f luego del escalón que luego baje. Este salto principalmente representa la separación del flujo producto del escalón, que luego se reincorpora en el punto en donde $c_f = 0$. Claramente ese punto de reincorporación no es el mismo para todos los casos. El análisis respecto a estos puntos se realizará más adelante.

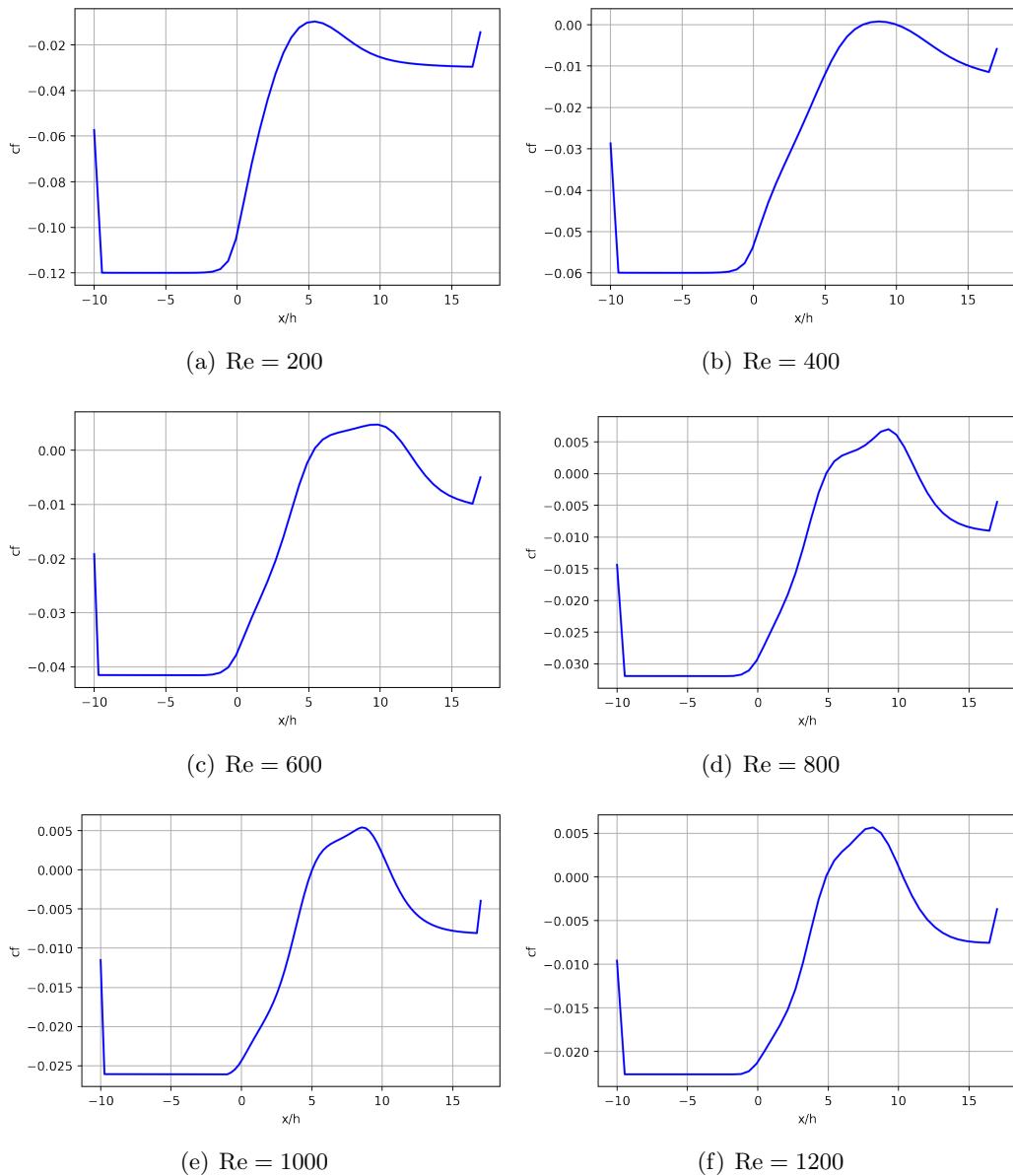


Figura 5.7: Coeficiente de fricción en la pared superior para los distintos números de Reynolds

Para el caso de la pared superior, desde el Reynolds de 600 se nota que existe un punto de separación y luego una recirculación. El tamaño de este vórtice que se genera no es constante para todos los Reynolds, pero si, no se aleja mucho respecto a esa posición.

De los gráficos obtenidos para el coeficiente de fricción, se grafican los puntos x_i respecto al número de Reynolds.

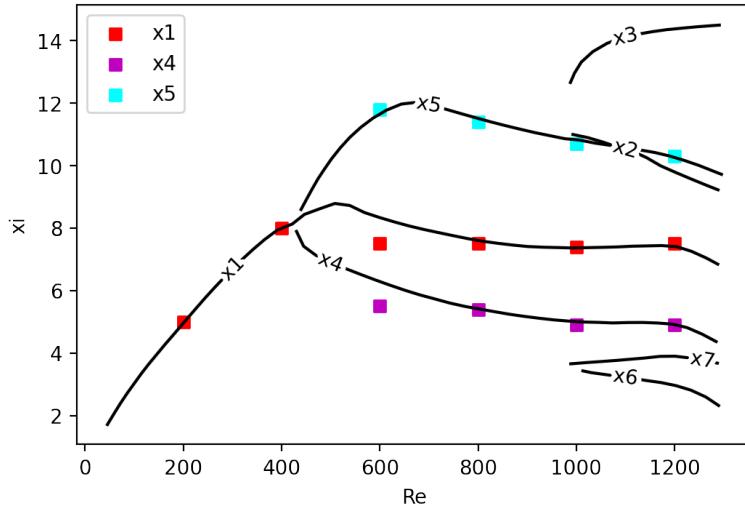


Figura 5.8: Puntos x_i en comparación con los resultados de Armaly

Con las gráficas del coeficiente de fricción obtenidos anteriormente, se pueden comparar los puntos con las curvas obtenidas por Armaly [6]. Se nota claramente que los puntos de separación y reincorporación del flujo fueron simulados correctamente en los casos del x_1, x_4, x_5 , salvo para el Reynolds de 600. Estos representan la separación del flujo por el escalón y la recirculación que se genera en la pared superior.

Por alguna razón, no se pudieron obtener los puntos de x_2, x_3, x_6, x_7 . Pareciera ser que el código implementado entrega el comportamiento general del flujo y no fue capaz de representar las estructuras pequeñas. Se intentó con distintos esquemas, mallas más finas e incluso se alcanzaron residuales de 10^{-11} , pero los puntos no aparecieron. Sería interesante revisar qué componente faltó para que estos puntos aparecieran, y poder simularlos más adelante.

Por último, Para Reynolds mayores a 600, el x_1 parece quedarse constante, lo que implica que el flujo se reincorpora en la misma posición. No es así para el vórtice generado en la pared superior, el cual se va desplazando hacia el escalón.

5.1.3. Caso turbulento: $k - \omega$ SST

Se presentan los campos de velocidad y los gráficos del coeficiente de fricción y presión en las distintas paredes. Para esta modelación se utilizó el modelo $k - \omega$ SST.

Se presentan los campos de velocidad:

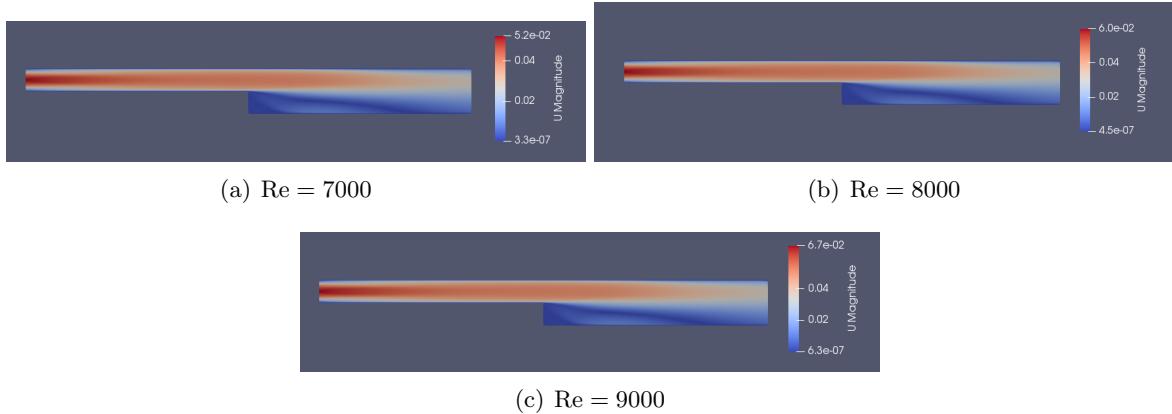


Figura 5.9: Campos de velocidad para diferentes valores del número de Reynolds

Revisando los campos de velocidad, se nota rápidamente que la recirculación en la pared superior desaparece, esto se puede deber principalmente a que el flujo al llevar mayor inercia, se tiende a quedar pegado a la pared superior. De todas formas, el flujo se adapta y existe un punto de reattachment. Este será encontrado con el coeficiente de fricción. Por último se nota que como se está trabajando con un flujo turbulento, el perfil de Poiseuille se pierde en la sección antes del escalón.

Se presentan los valores del coeficiente de fricción:

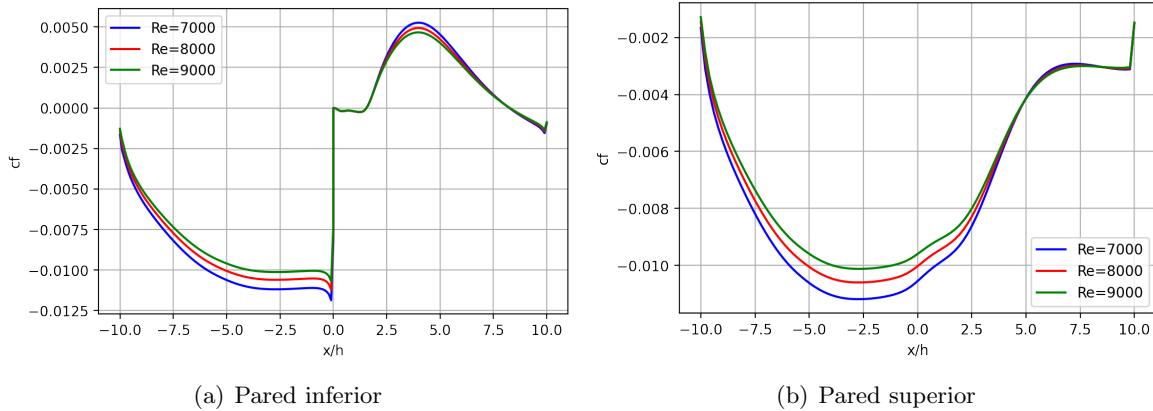


Figura 5.10: Coeficiente de fricción en ambas paredes

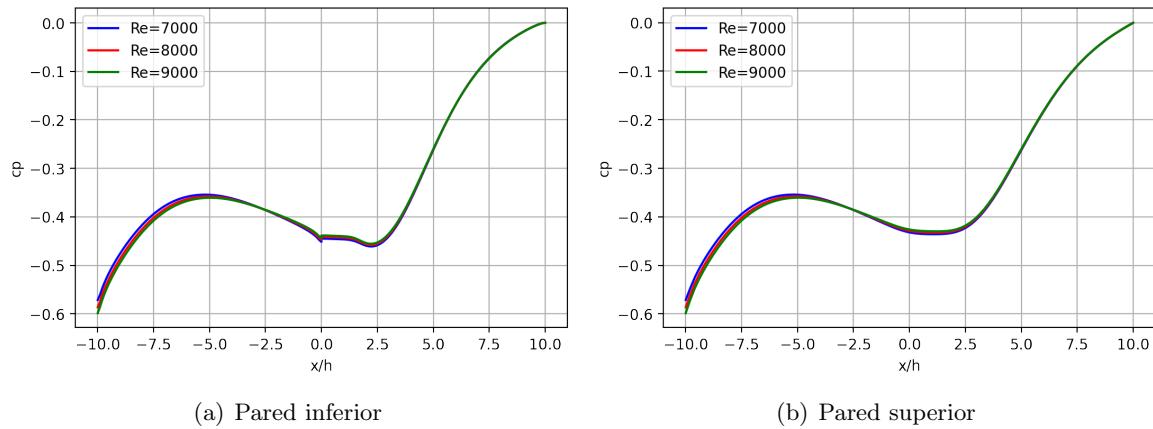


Figura 5.11: Coeficiente de presión en ambas paredes

Se nota que para los distintos números de Reynolds, las curvas del coeficiente de fricción son bastante similares entre si, mantienen la forma. Respecto a la pared inferior, se nota como el punto de reattachment ocurre en el mismo punto: $x/h = 8$. Este punto pareciera ser constante cuando se tienen números de Reynolds superiores a 6600 como dice el artículo de Armaly [6]. De todas formas existen variaciones en la magnitud máxima del coeficiente respecto al número de Reynolds. El punto antes destacado ($x/h = 8$) no coincide con los resultados de Kumar [7], pero si con los resultados experimentales de Armaly. Esto lleva a pensar que las modelaciones fueron realizadas de manera correcta ya que replica la realidad. De todas formas, la forma de curva coincide con los resultados de Kumar. Se nota además que no existe una separación en la pared superior, lo que se evidenció analizando el campo de velocidad.

En términos del coeficiente de presión, según Kumar el punto de reattachment ocurre cuando el coeficiente toma un valor máximo. Los gráficos presentados en este informe no presentan ese comportamiento.

tamiento ya que el valor máximo ocurre justo a la salida del dominio. De todas maneras se nota que al llegar al punto $x/h = 8$ pareciera ser que la gráfica está llegando a un punto máximo reduciendo su pendiente. Este comportamiento se puede deber a que el largo de la placa no fue el necesario. Quizás probando con una placa más larga, como la del caso laminar, el coeficiente de presión hubiera entregado el resultado deseado. Por último se nota la gran pendiente en la presión que adopta el flujo producto de la separación por el escalón.

5.2. Casos 3D

Se presentan los resultados para los casos 3D

5.2.1. Estudio numérico modelo $k - \epsilon$

Para esta sección se realizó un estudio numérico del método utilizando un Reynolds fijo de 9000. Para esto se utilizaron distintas mallas para analizar la capacidad del modelo en cuestión además de variar coeficientes característicos para ver si impacto en la simulación.

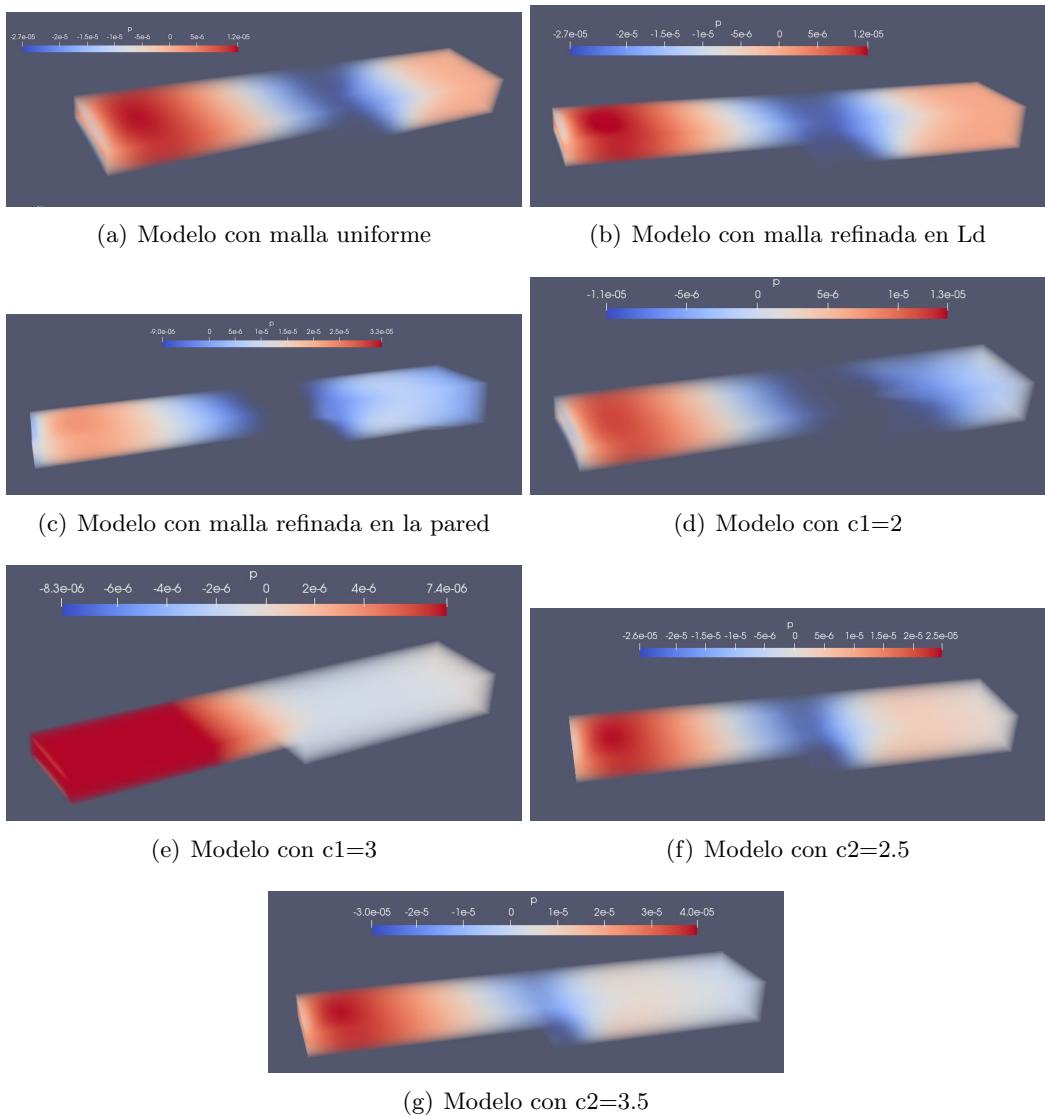


Figura 5.12: Campo de presión para distintos casos

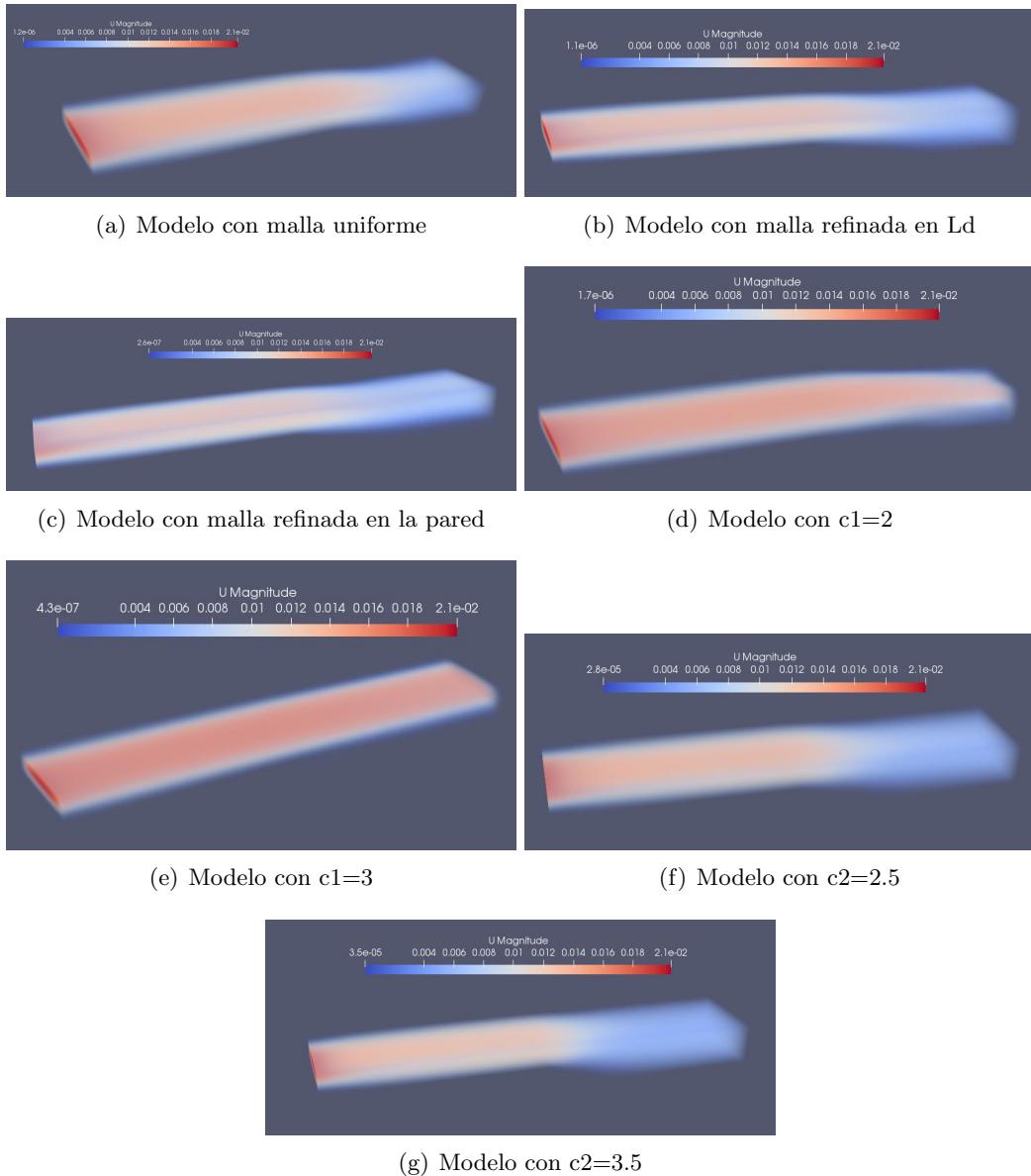


Figura 5.13: Campo de velocidad para distintos casos

Observando los perfiles de presión y velocidad, se aprecia que estos no varían mucho en los primeros 3 casos, por lo cual se intuye que la primera malla trabajada ya era lo suficientemente fina para dar con una correcta simulación aunque para el caso de la malla refinada el perfil de presión se aprecia de forma extraña pero es debido al tamaño de los elementos y la forma que tiene de mostrar los resultados el programa. Para los casos en los cuales se hacen variar los coeficientes es donde se observan cambios importantes en el comportamiento físico de la simulación. Para el caso de cuando se varía C_1 , se aprecia que el flujo tiende a seguir una dirección mas constantes hacia adelante, como si no se “mezclara” con el fluido bajo el escalón. Esto podría representar físicamente una viscosidad muy baja o una baja disipación de energía, por lo cual el flujo no alcanza a arrastrar fluido debajo del escalón y no se genera movimiento en esa zona. Por su contra parte, al aumentar C_2 se observa en el perfil de velocidad que el flujo de entrada se queda de alguna forma estancado en la salida del primer tramo de la geometría y en el tramo del escalón el movimiento es casi nulo. Esto se podría representar como un aumento en la viscosidad del flujo lo que hace que se disipe energía cinética muy rápido y la velocidad disminuye rápidamente.

A continuación se presentan los coeficientes de fricción, presión y ley de pared:

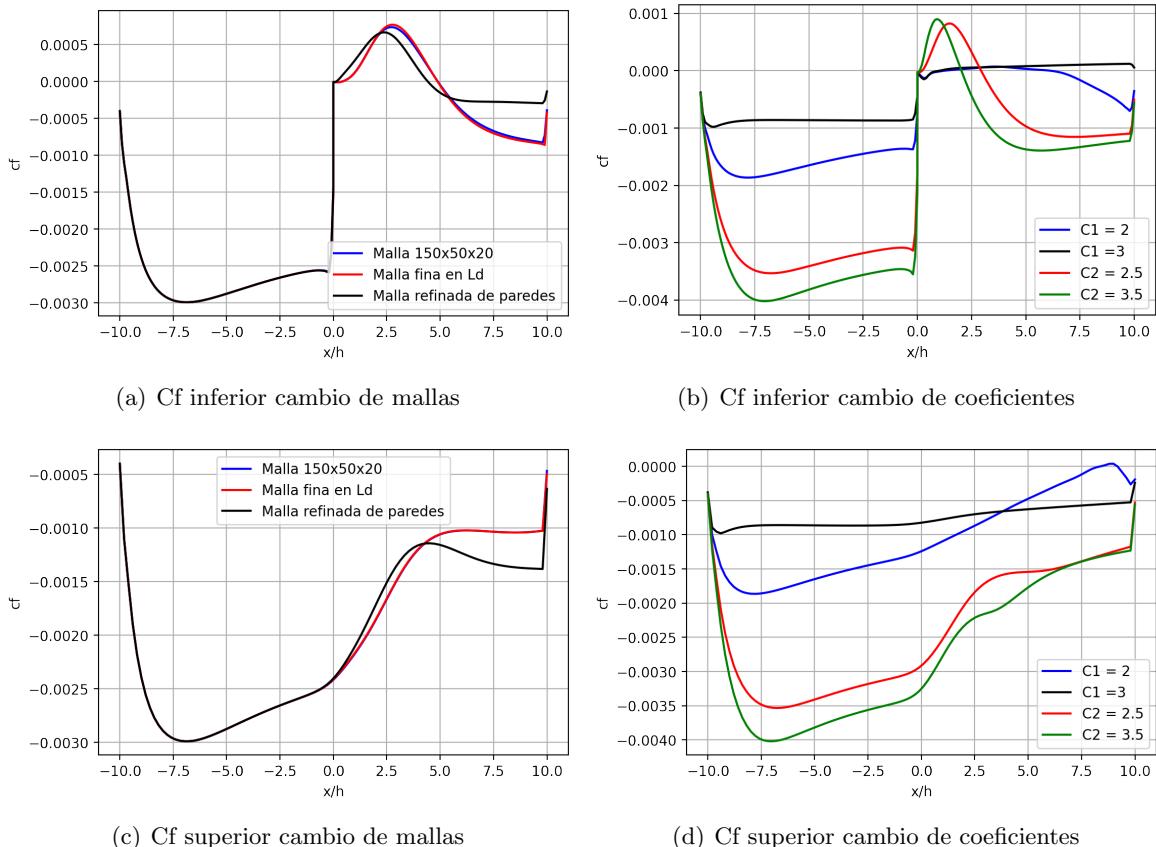
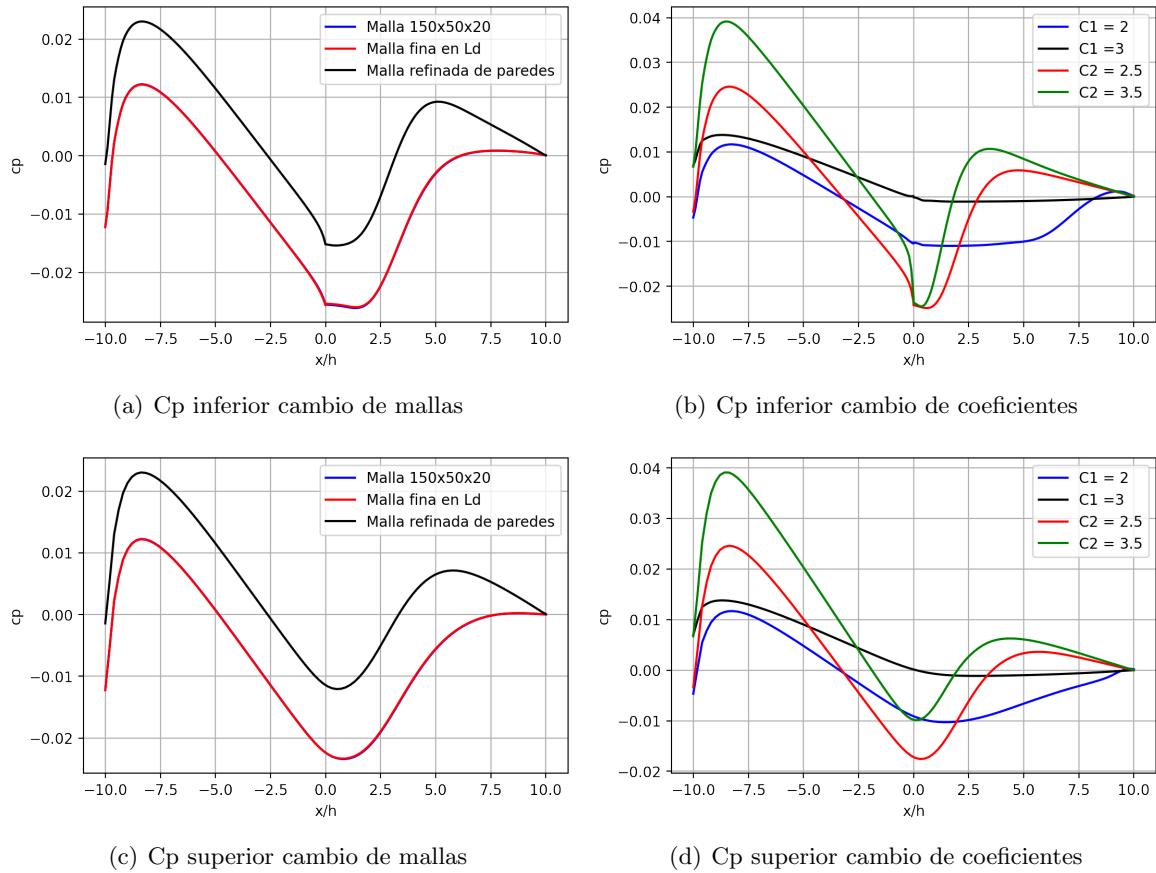
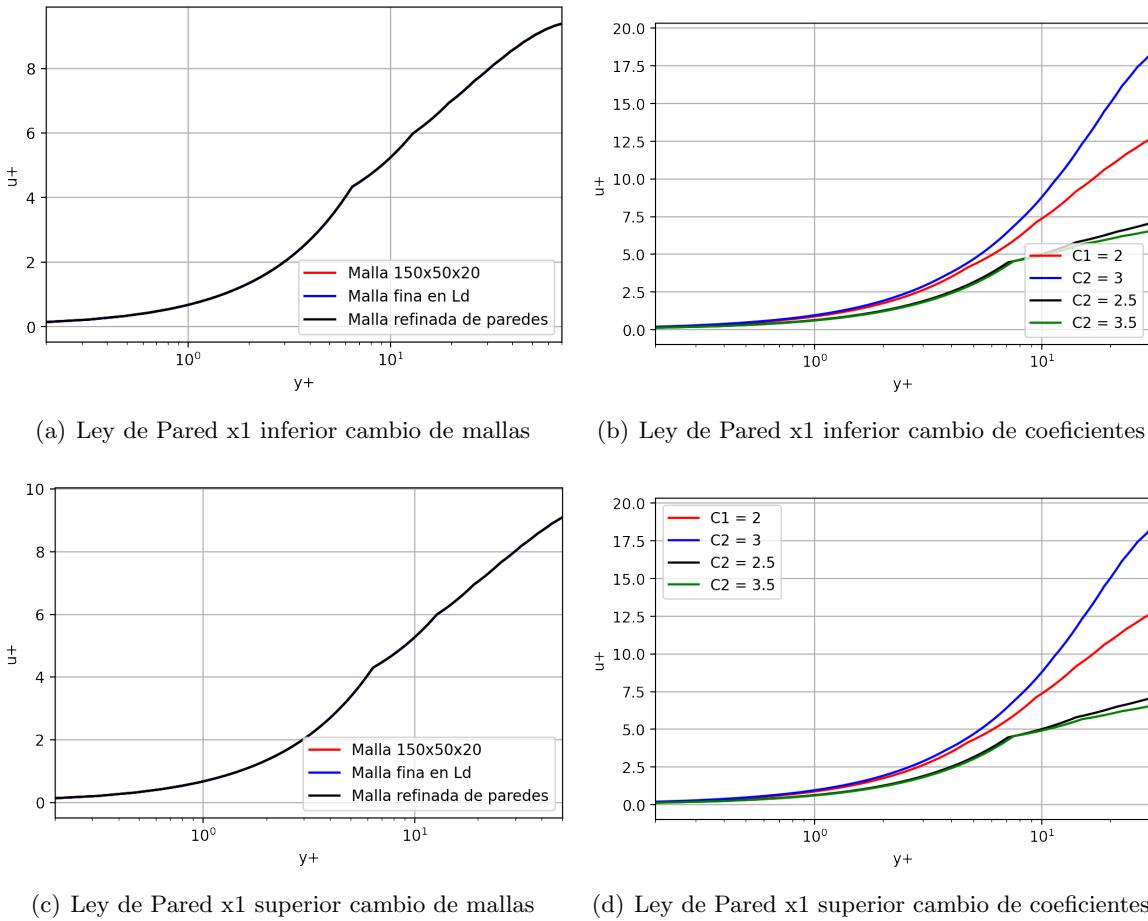
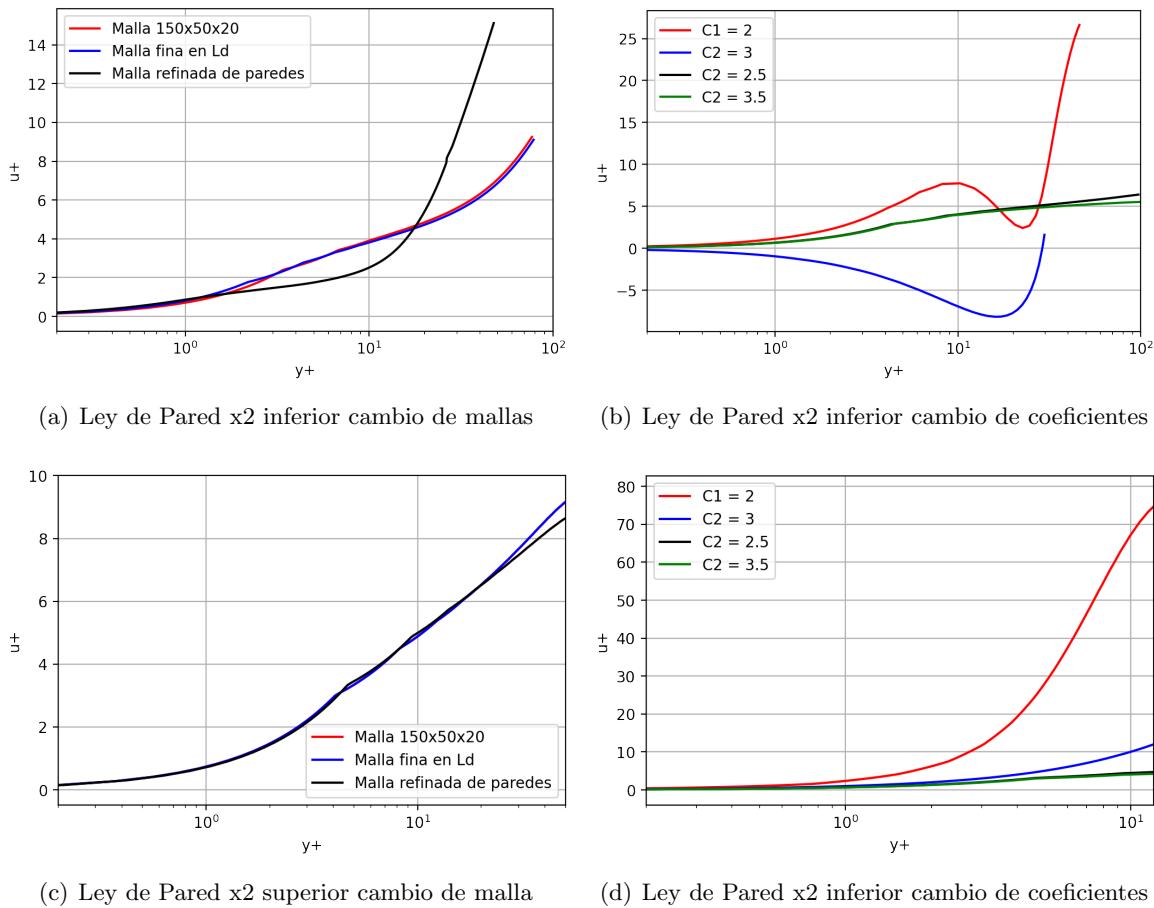


Figura 5.14: Cf para casos del modelo $k - \epsilon$

Figura 5.15: C_p para casos del modelo $k - \epsilon$

Figura 5.16: Ley de pared para casos del modelo $k - \epsilon$

Figura 5.17: Ley de pared para casos del modelo $k - \epsilon$

Observando los gráficos obtenidos se aprecia que los efectos de cambiar la malla en la zona de Ld no tiene gran impacto en los resultados, no así con refinarla en la pared y variar los coeficientes C_1 y C_2 en la cual se aprecian cambios importantes en los coeficientes resueltos y ley de pared. Es interesante que los resultados con mallas mas gruesas se asemejan a los del trabajo de Kumar en donde el punto de reattachment esta cercano a $x/h = 5$ pero a medida que se afina la malla este disminuye alejándose del valor de la literatura. Además que variar los coeficientes afecta en gran medida a los resultados obtenidos, no como en el caso 2D que sus variaciones eran mínimas. Para cambios en el coeficiente C_1 , se observan cambios numéricos pero no en el comportamiento de las curvas, mientras que para cambios en el C_2 , representa cambios en el comportamiento físico.

5.2.2. Estudio numérico del modelo LES

Para esta sección se realizo un estudio numérico del modelo LES utilizando un Reynolds fijo y variando entre el esquema de Smagorinsky y WALE.

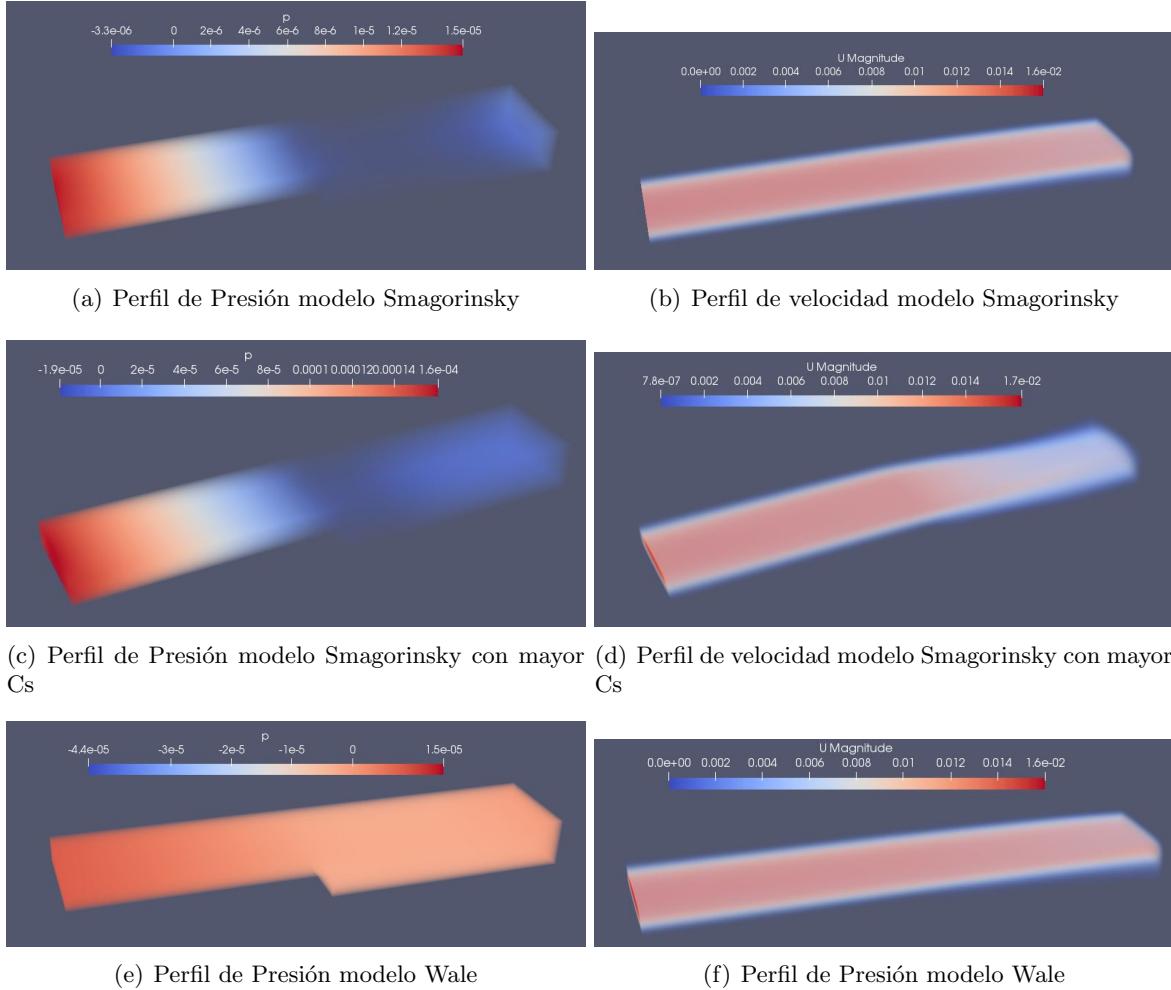


Figura 5.18: Perfiles de presión y velocidad Modelo LES

De los perfiles no se observan grandes diferencias entre las 3 simulaciones aunque si existen detalles a considerar. Lo primero que se nota es la gran diferencia que hay del perfil de presión en el modelo WALE aunque este esta relacionado con un error gráfico del programa, ya que como veremos a continuación, las curvas de C_p son muy similares en ambos modelos, además de que los valores máximos y mínimos son muy cercanos con respecto al modelo de Smagorinsky. Cabe destacar que se observa una pequeña diferencia en el perfil de velocidad al cambiar el coeficiente de amortiguación en el modelo de Smagorinsky aunque esta es muy leve a simple vista.

A continuación, se presentan los gráficos del coeficiente de fricción, presión y ley de pared

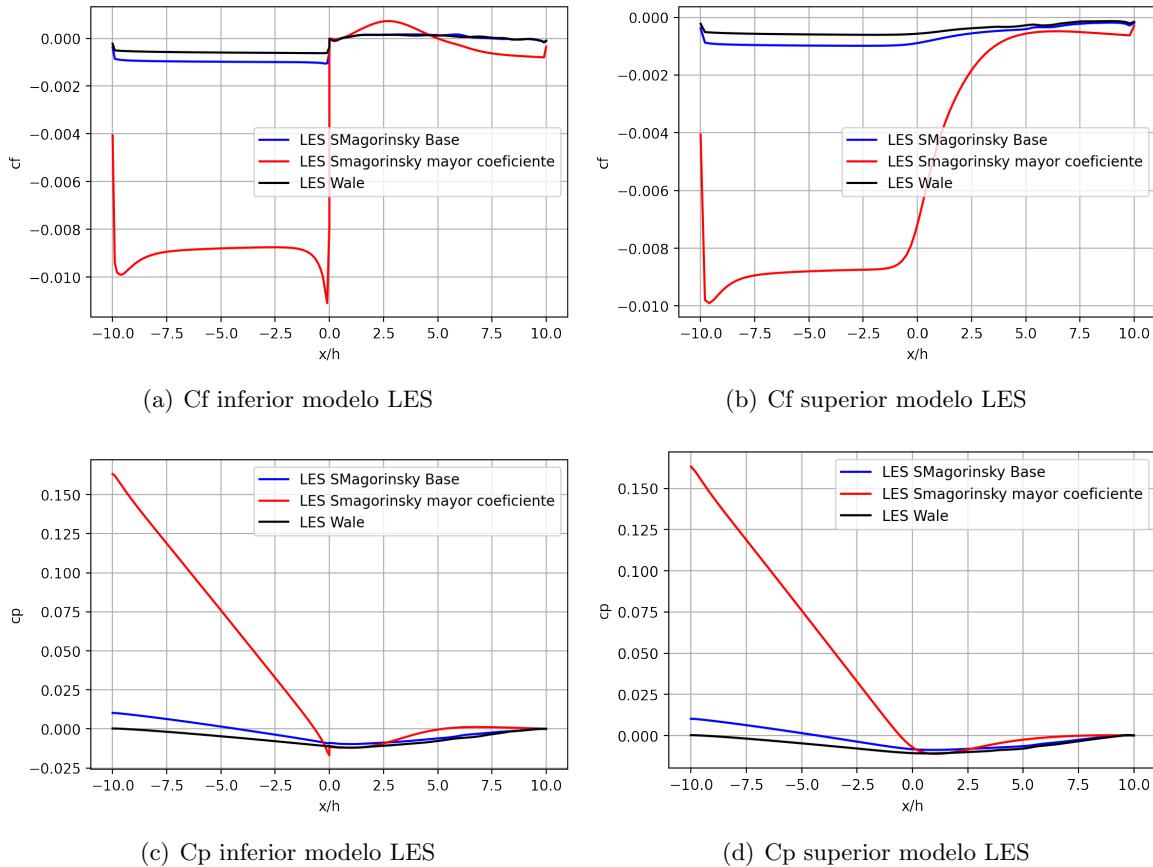
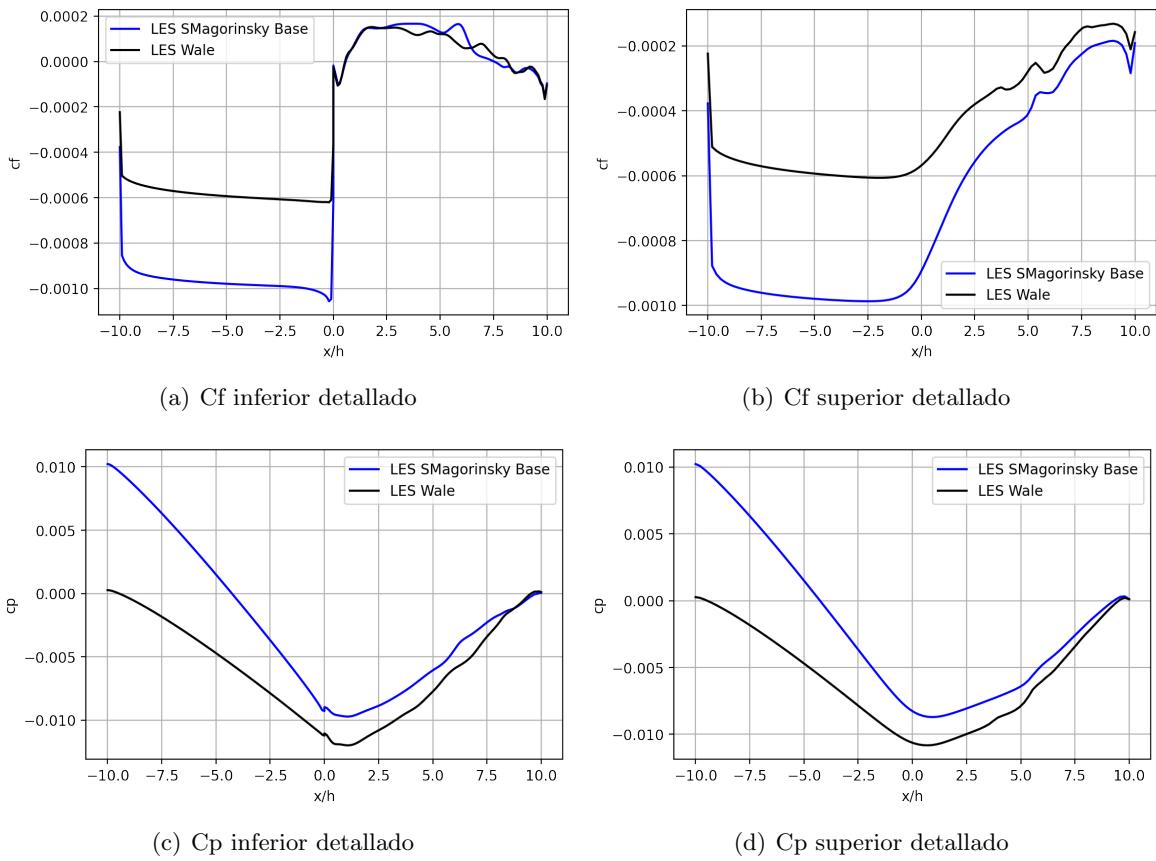


Figura 5.19: Coeficientes de Fricción y Presión

De los gráficos obtenidos se observa que los modelos de Smagorinsky y WALE entregan resultados muy similares entre si, manteniendo tiendo un comportamiento similar en sus curvas con pequeñas variaciones especialmente en los inicios de estas. Con respecto a las curvas que se obtuvieron cambiando el coeficiente de amortiguación estas tienen un comportamiento errático en la zona antes del escalón y luego se regula en la segunda zona, pareciéndose mas a las curvas mencionadas anteriormente aunque con errores considerables. Esto se puede deber a que la zona antes del escalón es mucho mas estrecha por lo que los efectos que producen las caras superior e inferior se ven superpuestos y genera estos resultados erráticos, mientras que en la zona mas ancha, el efecto se normaliza obteniendo así, resultados similares a los modelos iniciales.



Observando el detalle de los gráficos, se aprecia un comportamiento de las curvas mas caótico con respecto a los casos anteriores, esto se puede deber a que dentro del modelo esta considerado una perturbación en el flujo para poder calcular el flujo turbulento. Además se observa que el punto de reattachment esta cercano al $x/h = 8$, similar al caso 2d.

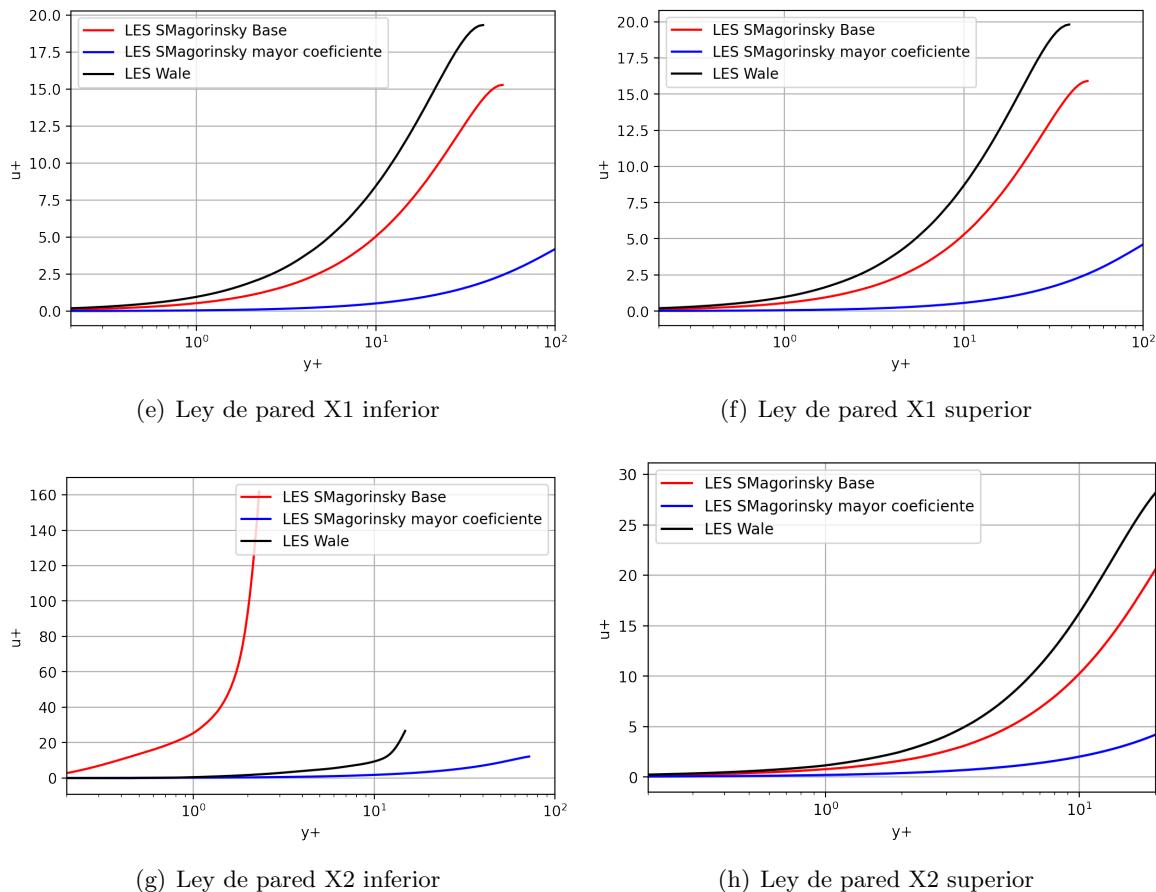


Figura 5.20: Ley de Pared

Observando los gráficos de ley de pared se distinguen grandes diferencias entre los 3 casos. Se observa que en el caso de Smagorinsky variar el coeficiente disminuye la pendiente de la curva en todos los casos. Esto se debe a que el coeficiente de amortiguación afecta principalmente a la zona de capa límite turbulenta en donde el modelo LES modela las pequeñas escalas las cuales son las que se generan en esta zona. Esto se observa también analizando el modelo Wale, el cual elimina el coeficiente de amortiguación y considera las escalas resultantes para resolver las siguientes, se nota que al aumentar el C_s la curva se diferencia más de la curva del modelo Wale.

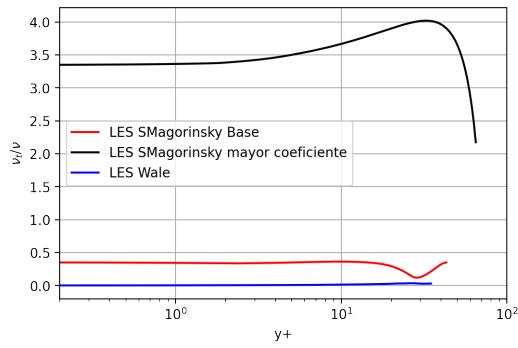


Figura 5.21: Relación de viscosidad

Del gráfico de relación entre viscosidad turbulenta y normal, se aprecia que el coeficiente afecta directamente a este lo cual tiene mucho sentido, ya que como se menciono anteriormente, la viscosidad turbulenta viene afectada por la longitud característica del modelo y esta es proporcional al coeficiente de amortiguación, por lo tanto, la viscosidad turbulenta resulta proporcional a este coeficiente lo que puede representar una gran desventaja para el modelo.

6. Conclusión

Luego de revisar los resultados obtenidos y de compararlos con la literatura existente, se puede decir que se tuvieron resultados bastante exitosos y otros un poco alejados de la realidad.

Recopilando la información, se realizaron 3 casos para las simulaciones 2D: Estudio numérico, estudio físico y caso turbulento. Para el estudio numérico en estado laminar, se obtuvo una gran similitud en las situaciones modeladas, similares tiempo de cálculos y parecidos órdenes de magnitud en los errores. Se obtuvo que el método SIMPLE junto a un esquema upwind podría ser una buena alternativa. Notar que este resultado no es extrapolable a casos con Reynolds, lo que incluso se comprobó con la práctica.

Para el estudio físico, los puntos de separación obtenidos se compararon con los resultados de Armaly [6], obteniendo una muy buena representación de los vórtices grandes de ambas paredes. Por alguna razón el modelo no fue capaz de representar las recirculaciones más pequeñas que aparecen con un Reynolds de 1200.

Por último para el caso turbulento se utilizó el modelo de $k - \omega$ SST. En este se obtuvieron resultados distintos a los modelados por Kumar [7] pero coincidentes con los experimentales de Armaly [6]. De todas formas se confirma que el punto de reattachment termina siendo constante para Reynolds superiores a 7000.

Analizando los resultados obtenidos de las simulaciones 3D se puede afirmar que se obtuvieron simulaciones exitosas en la mayoría de los casos aunque cada uno de los distintos modelos que se utilizaron demostraron sus ventajas y desventajas. Cabe mencionar que si se comparan los resultados obtenidos con lo que se tienen de experimentos tales como los resultados de Armaly, el modelo LES muestra mas cercanía con la realidad. Esto tiene gran sentido ya que es un modelo mas completo comparado al $k - \epsilon$ el cual resuelve las ecuaciones en gran escala y solo modela las pequeñas.

Para el caso de $k - \epsilon$ se obtuvieron valores mas cercanos a los del paper de Kurmar con valores de reattachment x/h cercanos a 5, aunque se observó que al reafinar la malla en la pared este valor disminuye llegando a estar cercano al 4 lo cual llama la atención ya que se alejaría de lo esperado físicamente.

Para el caso de LES, se observa que los modelos de Smagorinsky y Wale entregan simulaciones similares especialmente si se consideran únicamente los resultados de los coeficientes de fricción y presión. Se aprecia que los valores de reattachment x/h son muchos mas similares a los que se obtuvieron en el caso de 2D y a los resultados experimentales de Armaly lo cual le da mayor validez al modelo.

7. Referencias

- [1] Fox, McDonald's. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8th Edition (2011)
- [2] Klaus A. Hoffmann, Steve T. Chiang. *Computational Fluid Dynamics*. 4th Edition (2000)
- [3] Sagaut, Pierrer. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Thirs Edition (2005)
- [4] Versteeg, H. Malalasekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Second Edition (2007)
- [5] Ferziger, J. Peric, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics* Third Edition (2002)
- [6] B. F- Armaly, F. Drust, J. C. F. Pereira, and B.Schönung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127(-1):473, feb 1983.
- [7] Aravind Satheesh Kumar, Anugya Singh, and Kannan Budda Thiagarajan. Simulation of backward facing step flow using OpenFOAM. In *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing, 2020.