Lógica dinámica – Dynamic logic

Ma. Laura Cobo

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Argentina

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación – Universidad Nacional del Sur, Argentina

Hasta ahora …

Utilizamos **JML** para la especificación de programas Java

Introducimos una variante de la lógica de primer orden que nos sirvió de marco para describir y razonar sobre estructuras de datos, relaciones entre objetos, valores de variables pero ….no así sobre estados de programas

La idea ahora es … extender la lógica y el cálculo para describir y razonar sobre el comportamiento de los programas (se requiere considerar no solo uno sino varios estados del programa)

Motivación

Se desea contar con una lógica-cálculo que permite expresar-probar propiedades

Veamos un ejemplo:

Propiedad: **if** a <> null **then** doubleContent termina normalmente **and** todos los elementos tienen el doble de su valor anterior.

método:

```
public doubleContent (int [] a) {
      int i = 0;
      while (i < a.length) {
            a[i]= a[i]*2;
            i++ } }
```

Motivación

Propiedad: **if** a <> null **then** doubleContent termina normalmente **and** todos los elementos tienen el doble de su valor anterior.

En **lógica dinámica (DL)** la propiedad se vería de esta manera:

$$
\begin{aligned}
& a \neq null \\
\wedge\ & a \neq b \\
\wedge\ & \forall\ int\ i;((0 \leq i \wedge i < a.length) \rightarrow a[i] \mathring{=} b[i]) \\
\rightarrow\ & \langle\ doubleContent(a);\rangle \\
& \quad \forall\ int\ i;((0 \leq i \wedge i < a.length) \rightarrow a[i] \mathring{=} 2*b[i])
\end{aligned}
$$

Se combina FOL con programas.
DL extiende FOL

Motivación

Lógica dinámica = extensión de FOL con

- **Interpretaciones dinámicas**
- **Programas que describen cambios de estados**

Repasemos los conceptos de FOL …

FOL: aspectos semánticos

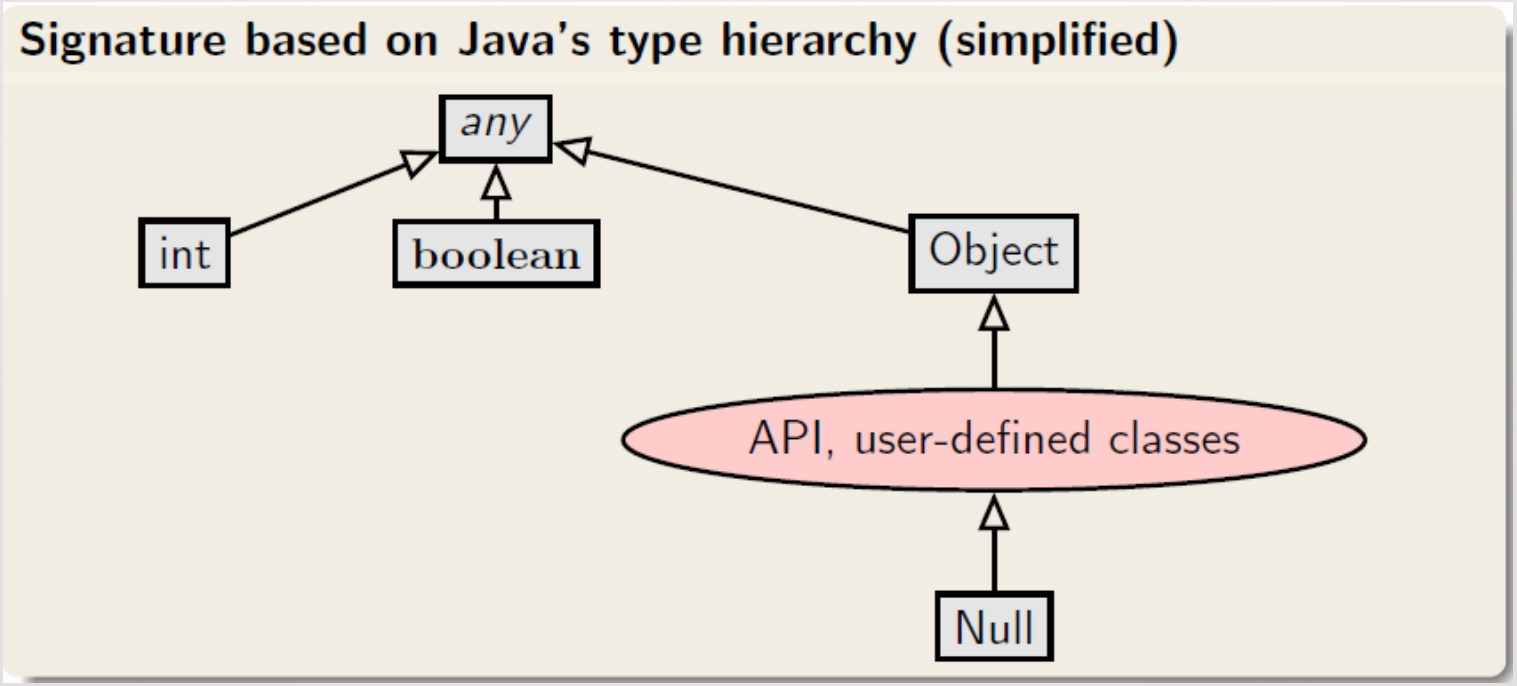
Es necesario refinar varias nociones. En FOL un sistema de tipos estaba definido como:

Definition (Type Hierarchy)

- T_Σ is set of types
- Given subtype relation '$\sqsubseteq$', with top element '*any*'
- $\tau \sqsubseteq any$ for all $\tau \in T_\Sigma$

El sistema minimal considera un único tipo: ***any***. Todos los símbolos de signatura tienen el mismo tipo

Jerarquía de tipos en Java



FOL: clases y atributos

Person
int age int id
int setAge(int newAge) int getId()

- El domino de todas los objetos Person: $\mathcal{D}^{\text{Person}}$
- Cada objeto o $\in \mathcal{D}^{\text{Person}}$ tiene asociado un valor edad (age)
- $\mathcal{I}(\text{age})$ es el mapeo desde Persona a int.
- Para cada clase C con atributo de tipo a: FSym declara una función a(C) de ese tipo.

Field Access

Signature FSym: `int age(Person);` `Person p;`

Java/JML expression `p.age >= 0`

Typed FOL `age(p)>=0`

KeY postfix notation for FOL `p.age >= 0`

Navigation expressions in KeY look exactly as in JAVA/JML

FOL: hacia una vista dinámica

En FOL solo se pueden expresar propiedades estáticas, por ejemplo:

- Valores de atributos en un cierto rango
- Propiedades (invariantes) de una subclase que implican propiedades de la superclase
- Etc.

La idea es poder expresar propiedades funcionales del programa

Como por ejemplo:
If el método `setAge` es invocado sobre un objeto `o` de tipo `Person`
And el argumento del método, de nombre `newAge`, es positivo
Entonces el atributo `age` del objeto `o`, tiene es mismo valor que `newAge`

FOL: hacia una vista dinámica

La lógica debe permitirnos:

- Relacionar diferentes estados del programa (**antes** y **después** de la ejecución en una sola fórmula)
- Las variables/atributos del programa representados mediantes símbolos constantes/funciones dependen del estado del programa.

La lógica dinámica es apropiada para cubrir estos requerimientos

Lógica dinámica

La lógica dinámica (para Java) es:

lógica te primer orden tipada

- + programas p
- + modalidades $\langle p \rangle \phi$, $[p]\phi$ (p es un programa, ϕ es una fórmula DL)
- + ……

$i>5 \rightarrow [i=i+10;]\ i>15$

Si una variable del programa, i, es mayor que 5 entonces luego de ejecutar i=i+10, i es mayor que 15

Lógica dinámica

$$i>5 \rightarrow [i=i+10;]\ i>15$$

La variable i hace referencia a los valores de la misma antes y después de la ejecución del programa.

Las variables del programa, como i, son constantes simbólicas que dependen del estado. El valor de los símbolos dependientes del estado cambian durante la ejecución del programa.

A este tipo de símbolos se los suele llamar: flexibles, estado-dependientes, no-rígidos

Lógica dinámica: signatura

Una signatura en DL está definida de la misma manera que para FOL pero agrega símbolos flexibles

Signature

A first-order signature Σ consists of

- a set T_Σ of types
- a set F_Σ of function symbols
- a set P_Σ of predicate symbols
- a typing α_Σ

- **Rígido: son los símbolos que tienen la misma interpretación en todos los estados del programa.**
  Variables de primer orden – funciones y predicados built-in
- **Flexible: son los símbolos cuya interpretación depende del estado de la ejecución.**
  Variables del programa y atributos

Lógica dinámica: signatura

Una signatura en DL está definida de la misma manera que para FOL pero agrega símbolos flexibles

- **Rígido: son los símbolos que tienen la misma interpretación en todos los estados del programa.**
  Variables de primer orden – funciones y predicados built-in
- **Flexible: son los símbolos cuya interpretación depende del estado de la ejecución.**
  Variables del programa y atributos

Las variables de primer orden son aquellas que están declaradas localmente en los cuantificadores (**no** pueden ser variables del programa)

Lógica dinámica: signatura – formato del archivo KeY

Las secciones vacías pueden no incluirse

```
\sorts {
  // only additional sorts (predefined:  int/boolean/any)
}
\functions {
 // only additional rigid functions
 // (arithmetic functions like +,- etc.  predefined)
}
\predicates {  /* same as for functions */  }

\programVariables { // flexible functions
   int i, j;
   boolean b;
}
```

Lógica dinámica: Términos

Son como los definidos para FOL pero pueden contener tanto símbolos flexibles como rígidos

Terms

A first-order term of type $\tau \in T_\Sigma$

- is either a variable of type τ, or
- has the form $f(t_1, \ldots, t_n)$,
  where $f \in F_\Sigma$ has result type τ, and each t_i is term of the correct type, following the typing α_Σ of f.

Lógica dinámica: programas

Un programa en este contexto es cualquier secuencia legal de sentencias Java.

Signature for $FSym_f$: `int r; int i; int n;`
Signature for $FSym_r$: `int 0; int +(int,int); int -(int,int);`
Signature for $PSym_r$: `<(int,int);`

```
i=0;
r=0;
while (i<n) {
  i=i+1;
  r=r+i;
}
r=r+r-n;
```

¿cuál es el valor computado en r?

Lógica dinámica: relacionando estados del prog.

DL agrega dos operadores nuevos.
Estos operadores son modales

- $\langle p \rangle \phi$ (diamante)
- $[p] \phi$ (cuadrado)

p es un programa
ϕ es otra formula DL

Significado intuitivo

- $\langle p \rangle \phi$: **p termina y la fórmula ϕ se verifica en el estado final (correctitud total)**
- $[p] \phi$: **SI p termina entonces la fórmula ϕ se verifica en el estado final (correctitud parcial)**

Los programas Java son deterministas

Lógica dinámica: fórmula

Formulas

- each atomic formula is a formula
- with ϕ and ψ formulas, x a variable, and τ a type, the following are also formulas:
  - $\neg\phi$ (*"not ϕ"*)
  - $\phi \wedge \psi$ (*"ϕ and ψ"*)
  - $\phi \vee \psi$ (*"ϕ or ψ"*)
  - $\phi \rightarrow \psi$ (*"ϕ implies ψ"*)
  - $\phi \leftrightarrow \psi$ (*"ϕ is equivalent to ψ"*)
  - $\forall\, \tau\ x;\ \phi$ (*"for all x of type τ holds ϕ"*)
  - $\exists\, \tau\ x;\ \phi$ (*"there exists an x of type τ such that ϕ"*)

Definition (Dynamic Logic Formulas (DL Formulas))

- Each FOL formula is a DL formula
- If p is a program and ϕ a DL formula then $\left\{ \begin{matrix} \langle \mathrm{p} \rangle \phi \\ [\mathrm{p}]\phi \end{matrix} \right\}$ is a DL formula
- DL formulas closed under FOL quantifiers and connectives

Lógica dinámica: fórmulas

Definition (Dynamic Logic Formulas (DL Formulas))

- Each FOL formula is a DL formula
- If p is a program and ϕ a DL formula then $\left\{ \begin{matrix} \langle \mathrm{p} \rangle \phi \\ [\mathrm{p}] \phi \end{matrix} \right\}$ is a DL formula
- DL formulas closed under FOL quantifiers and connectives

Observaciones

- Las variables del programa son constantes flexibles, por lo tanto no pueden estar ligadas en cuantificadores.
- Las variables del programa no necesitan ser declaradas o inicializadas en el programa.
- Los programas no contienen variables lógicas
- Los operadores modales pueden anidarse en forma arbitraria.

Lógica dinámica: estado

Program states as first-order states

From now, consider program state s as first-order state $(\mathcal{D}, \delta, \mathcal{I})$

- Only interpretation $\mathcal{I}$ of flexible symbols in FSym_f can change
  $\Rightarrow$ only record values of $f \in \mathrm{FSym}_f$
- *States* is set of all states s

El estado sigue representado por el dominio y la interpretación

Lógica dinámica: semántica

Definition (Kripke Structure)

Kripke structure or Labelled transition system $K = (States, \rho)$

- State (=first-order model) $s = (\mathcal{D}, \delta, \mathcal{I}) \in States$
- Transition relation $\rho : Program \to (States \rightharpoonup States)$

$$\rho(\mathrm{p})(s1) = s2$$

iff.

program p executed in state $s1$ terminates and its final state is $s2$, otherwise undefined.

La relación de transición define la semántica de los programas.
La relación de transición del programa a partir de s puede no estar definida, esto indica que el programa puede no terminar comenzando desde el estado s.
La relación es un **función**, ya que los programas son deterministas.

Dynamic Logic Calculus

Ma. Laura Cobo

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Argentina

Vinculación a la lógica de Hoare

Las fórmulas de correctitud tienen la forma:

$$\{pre\}\ P\ \{post\}$$

Siendo pre y $post$ fórmulas de primer orden

Al utilizar lógica dinámica este tipo de formulas de correctitud se exprepresan como:

$$Pre \rightarrow [P]\ Post$$

Siendo Pre y $Post$ cualquier fórmula de lógica dinámica

La clave ahora está en cómo probar que una fórmula es válida, es decir, se satisface en todos los estados

Ejecución simbólica

La ejecución simbólica sigue el flujo de control natural al momento de analizar el programa.
Algunas variables tienen valor desconocido: luego se utiliza una representación simbólica del estado.

- La regla simbólica ejecuta la primer sentencia (o sentencia activa)
- La aplicación repetida de la regla corresponde a la ejecución simbólica del programa.

Ejecución simbólica

Symbolic execution of conditional

$$\text{if}\ \frac{\Gamma, \mathtt{b} \doteq \mathtt{true} \Longrightarrow \langle \mathtt{p};\ \mathtt{rest} \rangle \phi, \Delta \qquad \Gamma, \mathtt{b} \doteq \mathtt{false} \Longrightarrow \langle \mathtt{q};\ \mathtt{rest} \rangle \phi, \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \langle \mathtt{if}\ (\mathtt{b})\ \{\ \mathtt{p}\ \}\ \mathtt{else}\ \{\ \mathtt{q}\ \}\ ;\ \mathtt{rest} \rangle \phi, \Delta}$$

Symbolic execution of loops: unwind

$$\text{unwindLoop}\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \langle \mathtt{if}\ (\mathtt{b})\ \{\ \mathtt{p};\ \mathtt{while}\ (\mathtt{b})\ \mathtt{p}\ \};\ \mathtt{rest} \rangle \phi, \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \langle \mathtt{while}\ (\mathtt{b})\ \{\mathtt{p}\};\ \mathtt{rest} \rangle \phi, \Delta}$$

Updates

Se necesita una notación para los cambios de estados simbólicos

- La ejecución simbólica debe "caminar" por el programa siguiendo el flujo de ejecución natural.
- Requiere una representación sucinta de los cambios de estado efectuados por el programa en una ejecución simbólica ramificada
- Se desea simplificar los efectos de la ejecución temprana de programas.
- Se desea aplicar los efectos tarde (en la condiciones de ramificación y post-condiciones)

Se utiliza una notación dedicada para cambios simple de estados: updates

Updates: estados explícitos

Definition (Syntax of Updates, Updated Terms/Formulas)

If v is program variable, t FOL term type-compatible with v, t' any FOL term, and ϕ any DL formula, then

- $\mathrm{v} := t$ is an update
- $\{\mathrm{v} := t\}t'$ is DL term
- $\{\mathrm{v} := t\}\phi$ is DL formula

Definition (Semantics of Updates)

State s interprets flexible symbols f with $\mathcal{I}_s(f)$
β variable assignment for logical variables in t, ρ transition relation:

$\rho(\{\mathrm{v} := t\})(s, \beta) = s'$ where s' identical to s except $\mathcal{I}_{s'}(v) = val_{s,\beta}(t)$

Updates

Detalles sobre los updates $\{v := t\}$

- La semántica del update es casi idéntica a la de las asignaciones
- El valor del update depende también de las variables lógicas en t, es decir β
- Los updates no son asignaciones: el lado derecho es un término FOL.
  - ✓ $\{x := n\}\,\phi$ no puede transformarse en una asignación (n variable lógica)
  - ✓ $\langle x=i++;\rangle\phi$ no puede transformarse directamente en update.
- Los updates no son ecuaciones: cambian los valores de los términos flexibles

Updates

Symbolic execution of assignment using updates

$$\text{assign}\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \{\mathtt{x} := t\}\langle \mathtt{rest}\rangle\phi, \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \langle \mathtt{x = t; \ rest}\rangle\phi, \Delta}$$

- Es simple
- Funciona bien siempre y cuando el lado derecho no tenga efectos colaterales (esto se garantiza en DL simple)
- Se requieren casos especiales para situaciones como `x=t1+t2`

Updates: otros usos

No esta permitido cuantificar sobre variables del programa pero ….. Se puede cuantificar sobre otro valor y asignarlo a una variable del programa

$$\forall\ \tau\ i_0;\ \{i := i_0\}\ \langle\ ..\ i\ ..\rangle\ \phi$$