

## 75.29 Teoría de Algoritmos

Andújar, Martín

Moriello, Khalil Alejandro  
Guerini, Francisco Tomás

Gavrilov, Seva

### Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Parte 1: Cálculo empírico de tiempos de ejecución</b>    | <b>2</b>  |
| Consigna . . . . .  | 2         |
| Solución . . . . .  | 2         |
| A) . . . . .  | 2         |
| D) . . . . .  | 8         |
| E y F) . . . . .  | 10        |
| G) . . . . .  | 11        |
| <b>Parte 2: Variante del algoritmo Gale-Shapley</b>         | <b>15</b> |
| Consigna . . . . .  | 15        |
| Solución . . . . .  | 15        |
| <b>Instalación</b>  | <b>17</b> |
| Parte 1: Cálculo empírico de tiempos de ejecución . . . . . | 17        |
| Parte 2: Variante del algoritmo Gale-Shapley . . . . .      | 17        |

# Parte 1: Cálculo empírico de tiempos de ejecución

## Consigna

Implementar los siguientes algoritmos de ordenamiento para números enteros positivos:

- Selección
  - Inserción
  - Quicksort
  - Heapsort
  - Mergesort
- a) Para cada uno de ellos analizar su complejidad teórica y compararlos (tiempo promedio y peor tiempo). Tener en cuenta las constantes para la comparación.
- b) Construir 10 sets de números aleatorios con 10.000 números positivos.
- c) Calcular los tiempos de ejecución de cada algoritmo utilizando los primeros: 50, 100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 7500, 10000 números de cada set.
- d) Estimar los tiempos medios de ejecución para cada rango-algoritmo y graficar.
- e) Determinar para cada algoritmo anterior las características que debe tener un set para que se comporte de la peor forma posible (si el algoritmo lo permite).
- f) Construir para cada algoritmo y para los rangos del punto “C” sets con las peores características y evaluar los tiempos de ejecución. Comparar con los generados con los sets aleatorios y graficar.
- g) En base a los tiempos obtenidos compare con los valores teóricos y analice (Extensión máxima de 2 párrafos).

## Solución

A)

| Algoritmo | Complejidad teórica( Promedio ) | Mejor caso | Peor caso     |
|-----------|---------------------------------|------------|---------------|
| Selección | $O(n^2)$                        | $O(n^2)$   | $O(n^2)$      |
| Inserción | $O(n^2)$                        | $O(n)$     | $O(n^2)$      |
| Quicksort | $O(n \log n)$                   | $O(n)$     | $O(n^2)$      |
| Heapsort  | $O(n \log n)$                   | $O(n)$     | $O(n \log n)$ |
| Mergesort | $O(n \log n)$                   | $O(n)$     | $O(n \log n)$ |

## Demostraciones

### Selección

Dado nuestro código utilizado

```
def selection_sort(list_test) :  
    for x in range(len(list_test) - 1, 1, -1):  
        pos_of_max = 0  
        for y in range(x, len(list_test)):  
            if list_test[y] > list_test[pos_of_max]:  
                pos_of_max = y
```

```

    swap(list_test, x, pos_of_max)
return list_test

```

| Algoritmo                                  | Complejidad  | Ejecuciones |
|--|--|-------------|
| for x in range(len(list_test) - 1, 1, -1): | C1   | n           |
| pos_of_max = 0                             | C2   | n-1         |
| for y in range(x, len(list_test)):         | C3   |             |
| if list_test[y] > list_test[pos_of_max]:   | $(C3/ n(n+1)/2/   pos\_of\_max = y/C3    $<br>$list\_test[pos\_of\_max] = list\_test[y]/C4/(n-1) \quad 3$<br>(porque son 3 lineas) |             |
| return list_test                           |  |             |

(\*) Se llega al C3 porque se ejecuta de la siguiente manera: Primer loop :  $2 \xrightarrow{\text{hasta}} n$  Segundo loop :  $3 \rightarrow n - 1$  Tercer loop :  $4 \rightarrow n - 2$  Ultimo loop :  $n - 1 \rightarrow 1$  Sumando todo da

$$n + (n - 1) + +1 = n\left(\frac{n + 1}{2}\right)$$

*Tiempo Total*

$$\begin{aligned}
 T(n) &= C1 \times n + C2 \times (n - 1) + C3 \times \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right) + C4 \times (n - 1) \times 3 \\
 &= C3 \times \frac{n^2}{2} + (C1 + C2 + \frac{C3}{2} + C4 \times 3) \times n + (-C2 - C4 \times 3) \\
 &= a^2 + b * n + c = O(n^2)
 \end{aligned}$$

## Inserción

Dado nuestro código utilizado

```

def insertion_sort(list_test) :
    for y in range(1, len(list_test)) :
        key = list_test[y]
        x = y - 1
        while x > 0 and list_test[x] > key :
            list_test[x + 1] = list_test[x]
            x = x - 1
        list_test[x + 1] = key
    return list_test

```

| Algoritmo                          | Complejidad | Ejecuciones           |
|------------------------------------|-------------|-----------------------|
| def inser-<br>tion_sort(list_test) |             |                       |
| :                                  |             |                       |
| for y in                           | C1          | $n$                   |
| range(1,<br>len(list_test))        |             |                       |
| :                                  |             |                       |
| key =                              | C2          | $n - 1$               |
| list_test[y]                       |             |                       |
| x = y - 1                          | C3          | $n - 1$               |
| while x > 0                        | C4          | (*)                   |
| and list_test[                     |             | $\sum_{x=1}^n t_j$    |
| x ] > key :                        |             |                       |
|                                    |             | list_test[x           |
|                                    |             | + 1]                  |
|                                    |             | =                     |
|                                    |             | list_test[x] C5       |
|                                    |             | $\sum_{x=1}^n (t_j -$ |
|                                    |             | 1)   x                |
|                                    |             | = x -                 |
|                                    |             | 1 C6                  |
|                                    |             | $\sum_{x=1}^n (t_j -$ |
|                                    |             | 1)                    |
|                                    |             | list_test[x           |
|                                    |             | + 1]                  |
|                                    |             | =                     |
|                                    |             | key C7                |
|                                    |             | \$ n -                |
|                                    |             | 1 \$                  |
|                                    |             | re-                   |
|                                    |             | turn                  |
|                                    |             | list_test             |

(\*) Número de veces que se ejecuta el while para un valor de j

$$T(n) = C1n + C2(n - 1) + C3(n - 1) + C4 \sum_{j=1}^n (t_j) + C5 \sum_{j=1}^n (t_j - 1) + C6 \sum_{j=1}^n (t_j - 1) + C7(n - 1)$$

$$\sum_{j=1}^n (t_j - 1) = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n = \frac{n(n - 1)}{2}$$

$$\sum_{x=1}^n (t_j) = \frac{n(n - 1)}{2} - 1$$

Sabiendo

Entonces :

$$\begin{aligned}
 &= C1n + C2(n-1) + C3(n-1) + C4\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) + C5\frac{n(n-1)}{2} + C6\frac{n(n-1)}{2} + C7(n-1) \\
 &= \left(\frac{C4}{2} + \frac{C5}{2} + \frac{C6}{2}\right)n^2 + (C1 + C2 + C3 - \frac{C4}{2} - \frac{C5}{2} - \frac{C6}{2} + C7)n - (C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7) \\
 &= an^2 + bn + c = O(n^2)
 \end{aligned}$$

## Quicksort

Implementacion recursiva: Nota: en el trabajo se utilizó una implementación iterativa pero para explicar este punto se utiliza la implementación recursiva

```

def quick_sort_method(list_test, start, end) :
    if ( start < end ) :
        newIndex = partition(list_test, start, end)
        quick_sort_method(list_test, start, newIndex - 1)
        quick_sort_method(list_test, newIndex + 1, end)

def partition(list_test, start, end) :
    pivot = list_test[end]
    x = start - 1
    for y in range(start, end):
        if list_test[y] <= pivot:
            x = x + 1
            swap(list_test, x, y)
    swap(list_test, x + 1, end)
    return x + 1

```

| Algoritmo   | Complejidad | Tiempo de ejecucion   |
|---|-------------|---|
| def<br>quick_sort_method(list_test,<br>start, end) :<br>if ( start < end<br>) :<br>newIndex =<br>parti-<br>tion(list_test,<br>start, end)<br>quick_sort_method(list_test,<br>start, newIndex<br>- 1)<br>quick_sort_method(list_test,<br>newIndex + 1,<br>end) |             | n<br><br><br><br><br><br><br>i ( tiempo en ejecutar<br>primer subarray)<br><br>n - 1 - i ( tiempo en ejecutar<br>último subarray) |

Esto se traduce como

$$T(n) = cn + T(i) + T(n - 1 - i)$$

Para el caso promedio de todas las posibles particiones se escribe como:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (T(i) + T(n-i-1) + cn) \\ &= \frac{2}{n} [T(0) + T(1) + \dots + T(n-2) + T(n-1)] + cn \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} nT(n) &= 2(T(0) + T(1) + \dots + T(n-2) + T(n-1)) + n^2 \\ (n-1)T(n-1) &= 2(T(0) + T(1) + \dots + T(n-2)) + c(n-1)^2 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} n(T(n)) - (n-1)T(n-1) &= 2T(n-1) + 2cn - c \approx 2T(n-1) + 2cn \\ nT(n) - (n-1)T(n-1) &= 2T(n-1) + 2cn \end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2c}{n+1}$$

Aplicando un telescopio a  $\frac{T(n)}{n+1}$ :

$$\frac{2c}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n}$$

y se obtiene la forma explícita:

$$\begin{aligned} \frac{T(n)}{n+1} + \frac{T(n-1)}{n} + \frac{T(n-2)}{n-1} + \dots + \frac{T(2)}{3} + \frac{T(1)}{2} - \frac{T(n-1)}{n} - \frac{T(n-2)}{n-1} - \dots - \frac{T(2)}{3} - \frac{T(1)}{2} - \frac{T(0)}{1} = \\ \frac{2c}{n+1} + \frac{2c}{n} + \dots + \frac{2c}{3} + \frac{2c}{2} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n)}{2} + 2c \sum_{j=3}^{n+1} \left(\frac{1}{j}\right)$$

Como  $n$  se hace muy grande,  $\sum_{i=3}^{n+1} \left(\frac{1}{j}\right)$  se aproxima a  $\ln(n) + \gamma$  donde  $\gamma$  es la constante de Euler  $\approx 0,577\dots$

Por lo tanto

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n)}{2} + 2c \ln(n) + 2c\gamma = \ln(n) + c2 = O(\ln(n))$$

Finalmente entonces

$$T(n) = O(n \log(n))$$

## Heapsort

```
def heap_sort(list_test) :
    heap_size = len(list_test) - 1
    build_heap(list_test, heap_size)
    for x in range(len(list_test) - 1, 0, -1) :
        swap(list_test, 0, x)
        heap_size = heap_size - 1
        max_heapify(list_test, heap_size, 0)
```

| Algoritmo                                 | Tiempo de ejecución            |
|---|--------------------------------|
| def heap_sort(list_test) :                |                                |
| heap_size = len(list_test) - 1            | 1                              |
| build_heap(list_test, heap_size)          | $n$ ( por definicion)          |
| for x in range(len(list_test) - 1, 0, -1) |                                |
| swap(list_test, 0, x)                     | $3n$                           |
| heap_size = heap_size - 1                 | $n$                            |
| max_heapify(list_test, heap_size, 0)      | $O(n \log n)$ (por definicion) |

En promedio se realiza en  $n$  iteraciones un max\_heapify que lleva  $O(\log n)$ , por lo tanto el costo temporal de este algoritmo en promedio es de  $O(n \log n)$

### Megesort

```
def merge_sort_method(list_test, start, end) :
    if start < end :
        middle = int(( start + end) / 2)
        merge_sort_method(list_test, start, middle)
        merge_sort_method(list_test, middle + 1, end)
        merge(list_test, start, middle , end)
```

| Algoritmo                                      | Tiempo de ejecución |
|--|---------------------|
| def merge_sort_method(list_test, start, end) : |                     |
| if start < end :                               | $n$                 |
| middle = int(( start + end) / 2)               | $n$                 |
| merge_sort_method(list_test, start, middle)    | $n/2$               |
| merge_sort_method(list_test, middle + 1, end)  | $n/2$               |
| merge(list_test, start, middle , end)          | $n$                 |

El número de comparaciones de una lista con tamaño  $n$  satisface la forma recurrente:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + a(n)$$

$$1 \leq a(n) \leq n - 1$$

Resolviendo la ecuacion de recurrencia usando  $n = 2^m$  en la ecuación

$$T(n = 2^m) = 2T(2^{m-1}) + \alpha 2^m$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 T(2^m) &= 2T(2^{m-1}) + \alpha 2^m \xrightarrow{\times 2^0} T(2^m) - 2T(2^{m-1}) &&= \alpha 2^m \\
 T(2^{m-1}) &= 2T(2^{m-2}) + \alpha 2^{m-1} \xrightarrow{\times 2^1} 2T(2^{m-1}) - 2^2T(2^{m-2}) &&= \alpha 2^m \\
 T(2^{m-2}) &= 2T(2^{m-3}) + \alpha 2^{m-1} \xrightarrow{\times 2^2} 2^2T(2^{m-2}) - 2^3T(2^{m-3}) &&= \alpha 2^m \\
 T(2^2) &= 2T(2^1) + \alpha 2^2 \xrightarrow{\times 2^{m-2}} 2^{m-2}T(2^2) - 2^{m-1}T(2^1) &&= \alpha 2^m \\
 T(2^1) &= 2T(2^0) + \alpha 2^1 \xrightarrow{\times 2^{m-1}} 2^{m-1}T(2^1) - 2^mT(2^0) &&= \alpha 2^m
 \end{aligned}$$

$$T(1) = 0$$

$$T(2^m) = \alpha 2^m m$$

Entonces,  $T(n) \approx \alpha n \log(n)$

**D)**

**Tiempo medio con 50 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)     |
|-----------|------------------------|
| Heapsort  | 0.0003298004807970045  |
| Selección | 0.00013083834977933861 |
| Mergesort | 0.00023580199998107787 |
| Quicksort | 0.00012194083406313894 |
| Inserción | 0.00010067983583716966 |

**Tiempo medio con 100 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)     |
|-----------|------------------------|
| Heapsort  | 0.0007247297246397721  |
| Selección | 0.0004486266798213734  |
| Mergesort | 0.00047982986346184475 |
| Quicksort | 0.0002497603338049714  |
| Inserción | 0.0003789045405540037  |

**Tiempo medio con 500 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.004888808857476334 |
| Selección | 0.011094667812789893 |
| Mergesort | 0.002757735193334554 |
| Quicksort | 0.001501715076367205 |
| Inserción | 0.01042211682185723  |

**Tiempo medio con 1000 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.01082875558189933  |
| Selección | 0.04502248397095876  |
| Mergesort | 0.00584529233796971  |
| Quicksort | 0.003506901652045258 |
| Inserción | 0.0409498724160553   |



**Tiempo medio con 2000 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.02383555138088056  |
| Selección | 0.17983277715210022  |
| Mergesort | 0.012822466433798141 |
| Quicksort | 0.007783576734286868 |
| Inserción | 0.16681784541239786  |

**Tiempo medio con 3000 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.037735805689562696 |
| Selección | 0.4071431871011413   |
| Mergesort | 0.01896053938660458  |
| Quicksort | 0.011680128970684933 |
| Inserción | 0.3761444555486815   |

**Tiempo medio con 4000 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.05221940992985097  |
| Selección | 0.7219840037342387   |
| Mergesort | 0.026011349667937722 |
| Quicksort | 0.016142009466967977 |
| Inserción | 0.6706326836875611   |

**Tiempo medio con 5000 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)   |
|-----------|----------------------|
| Heapsort  | 0.06716955575572925  |
| Selección | 1.1285243604194548   |
| Mergesort | 0.032795204257913824 |
| Quicksort | 0.0222334473710184   |
| Inserción | 1.0522567008789494   |

**Tiempo medio con 7500 iteraciones:**

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)  |
|-----------|---------------------|
| Heapsort  | 0.10555483218916883 |
| Selección | 2.533056245873178   |
| Mergesort | 0.05055741457614715 |
| Quicksort | 0.03188779323241775 |
| Inserción | 2.3673165623728547  |

Tiempo medio con 10000 iteraciones:

| Algoritmo | Tiempo medio (seg)  |
|-----------|---------------------|
| Heapsort  | 0.1456751018200908  |
| Selección | 4.51789061094763    |
| Mergesort | 0.06924800057395863 |
| Quicksort | 0.04411823011679061 |
| Inserción | 4.242444782562448   |

Gráfico para comparar todos los algoritmos con los tiempos medios

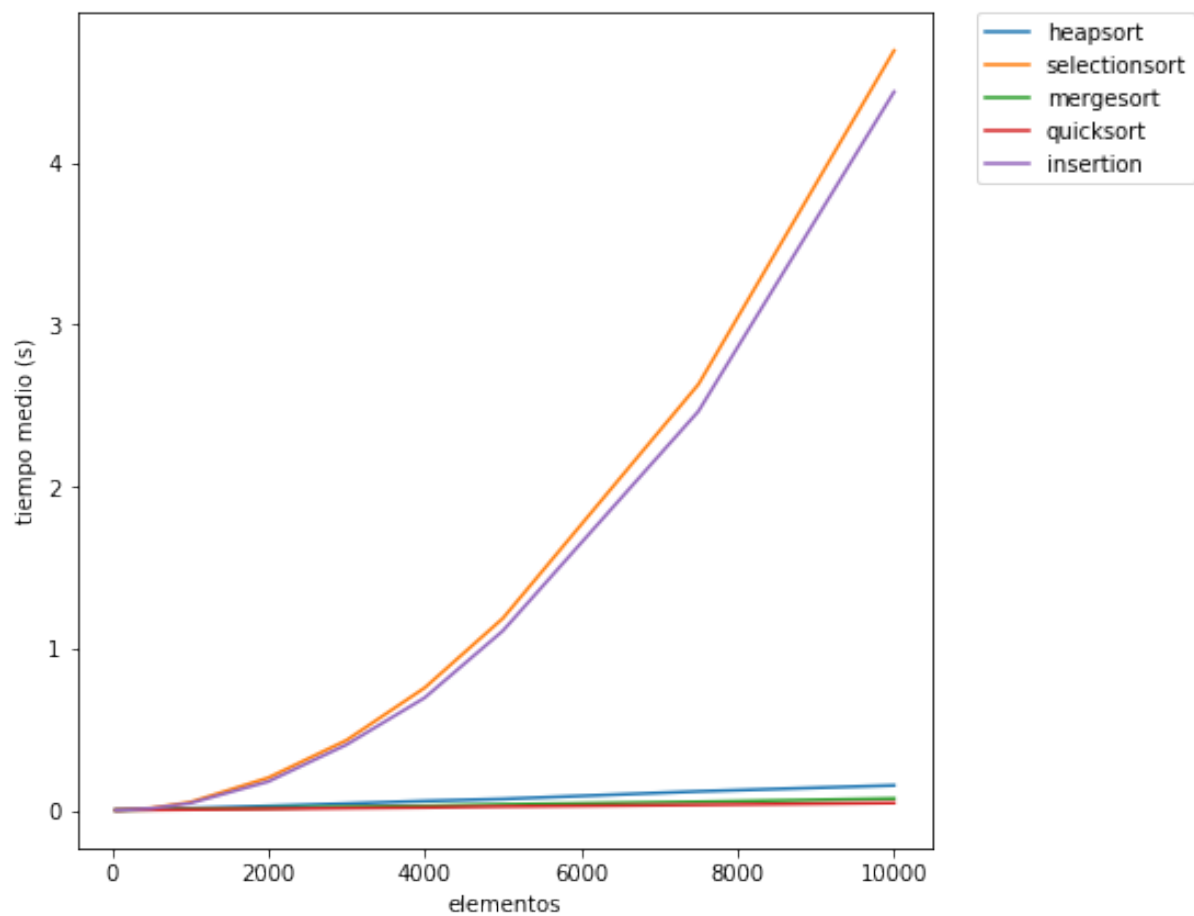


Figura 1:

Gráfico para comparar todos los algoritmos con los tiempos medios (excepto heapsort e Inserción )

E y F)

**Selección:** En este algoritmo de ordenamiento no hay un set de datos que haga que se comporte de la peor manera posible ya que indistintamente de los datos el algoritmo hará la misma cantidad de comparaciones.

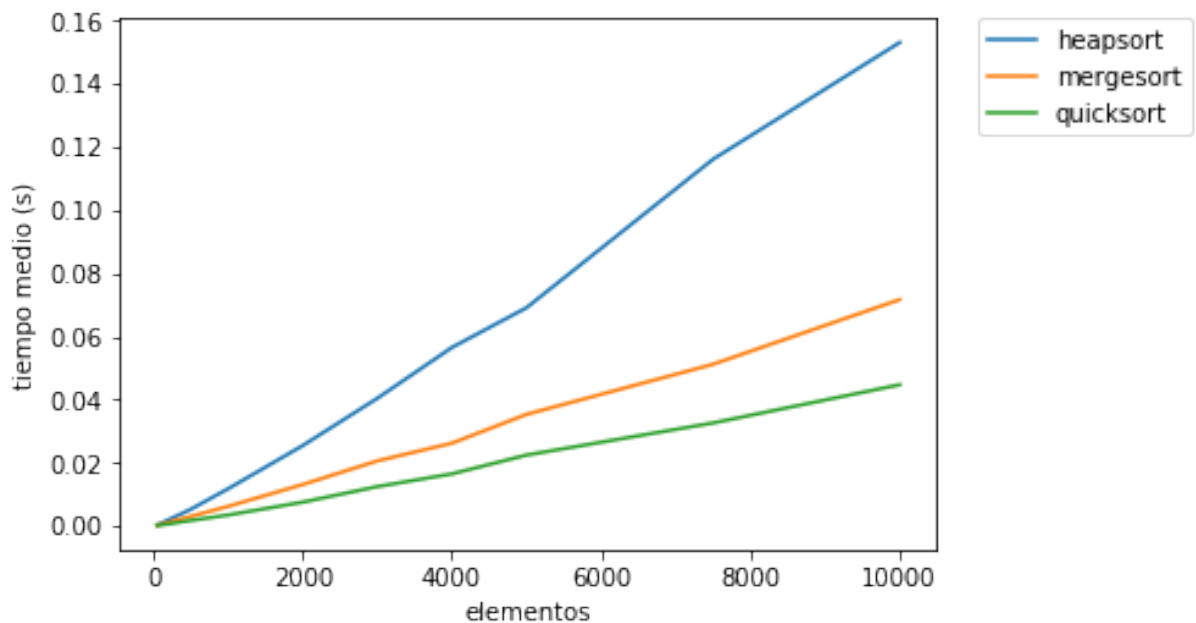


Figura 2:

**Inserción** El peor rendimiento de este algoritmo se dará en casos en los que los datos estén ordenados de manera inversa a lo que se quiere obtener. Por ejemplo si se quiere ordenar de menor a mayor los enteros del uno al diez. Para obtener el peor caso los datos deberían estar ordenados de esta mayor a menor [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1].

#### Comparación caso promedio con peor caso

**Quicksort** El algoritmo puede alcanzar el orden  $O(n^2)$  en algunos casos, siendo este el peor escenario posible. El caso se da cuando los pivotes elegidos son los menores o mayores elementos del arreglo en todas las iteraciones recursivas del arreglo. Por ejemplo si se quiere ordenar el arreglo ordenado [1, 2, 3, 4, 5] de menor a mayor y si toma el último elemento del arreglo como pivote en cada iteración. Lo que resulta en que se haga la mayor cantidad de comparaciones, alcanzando el orden cuadrático.

#### Comparación caso promedio con peor caso

**Heapsort** En el heapsort no importa el orden en el que se encuentren los datos ya que se realizan la misma cantidad de comparaciones (aproximadas) en todos los arreglos indistintos del orden o desorden de los datos. En cualquier caso el heapsort mantiene el orden  $O(n \log n)$ .

#### G)

- En los casos de SelectionSort e InsertionSort se puede ver que no hay demasiada diferencia con los tiempos medios de estos algoritmos con un sets de datos al azar, puesto que deben recorrer ciclos completos y hacer comparaciones, lo que no cambia mucho utilizar sets de datos considerados desfavorables.
- En el Quicksort la diferencia es abismal, al tener todo el array ya ordenado obliga a hacer todas las comparaciones y la diferencia se pronuncia aún más cuanto más grande es el tamaño del array

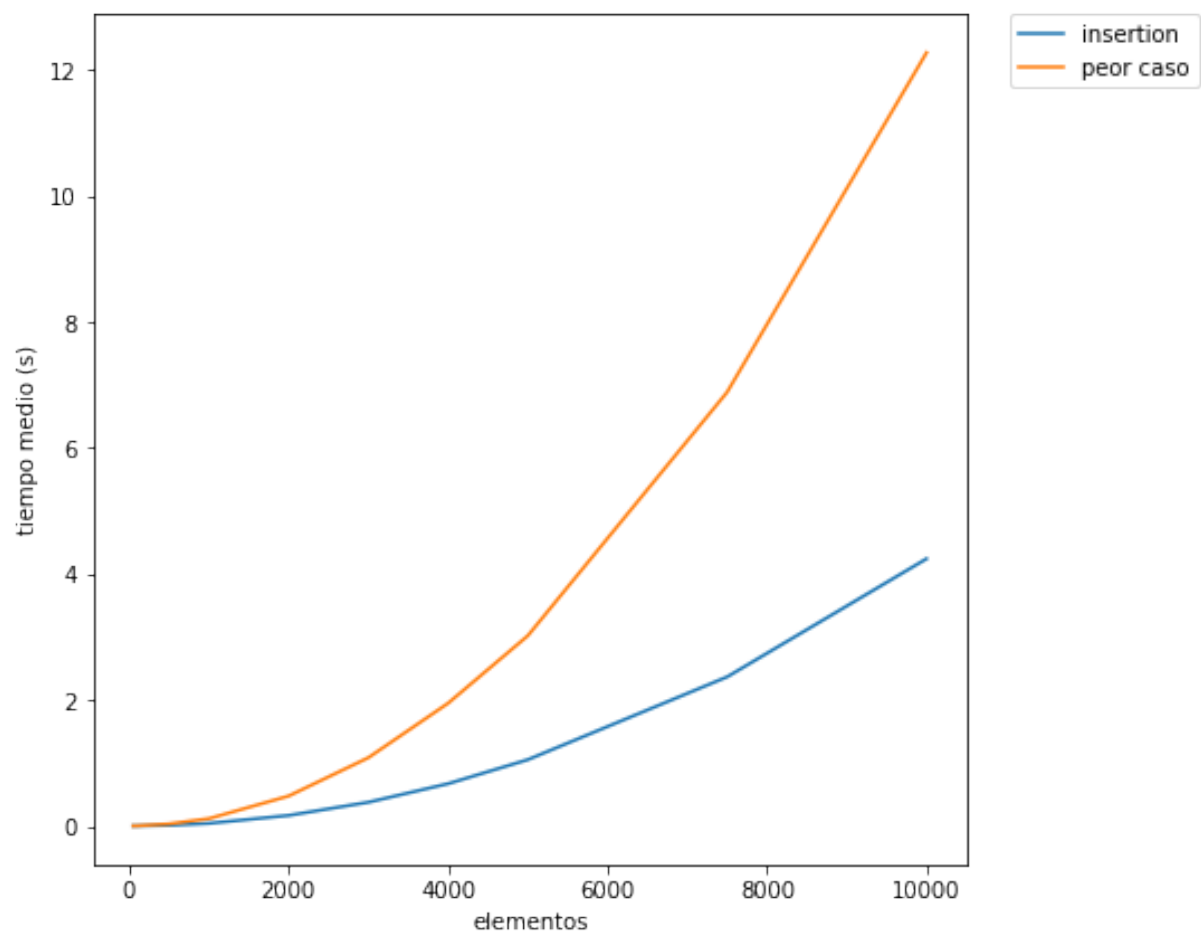


Figura 3:

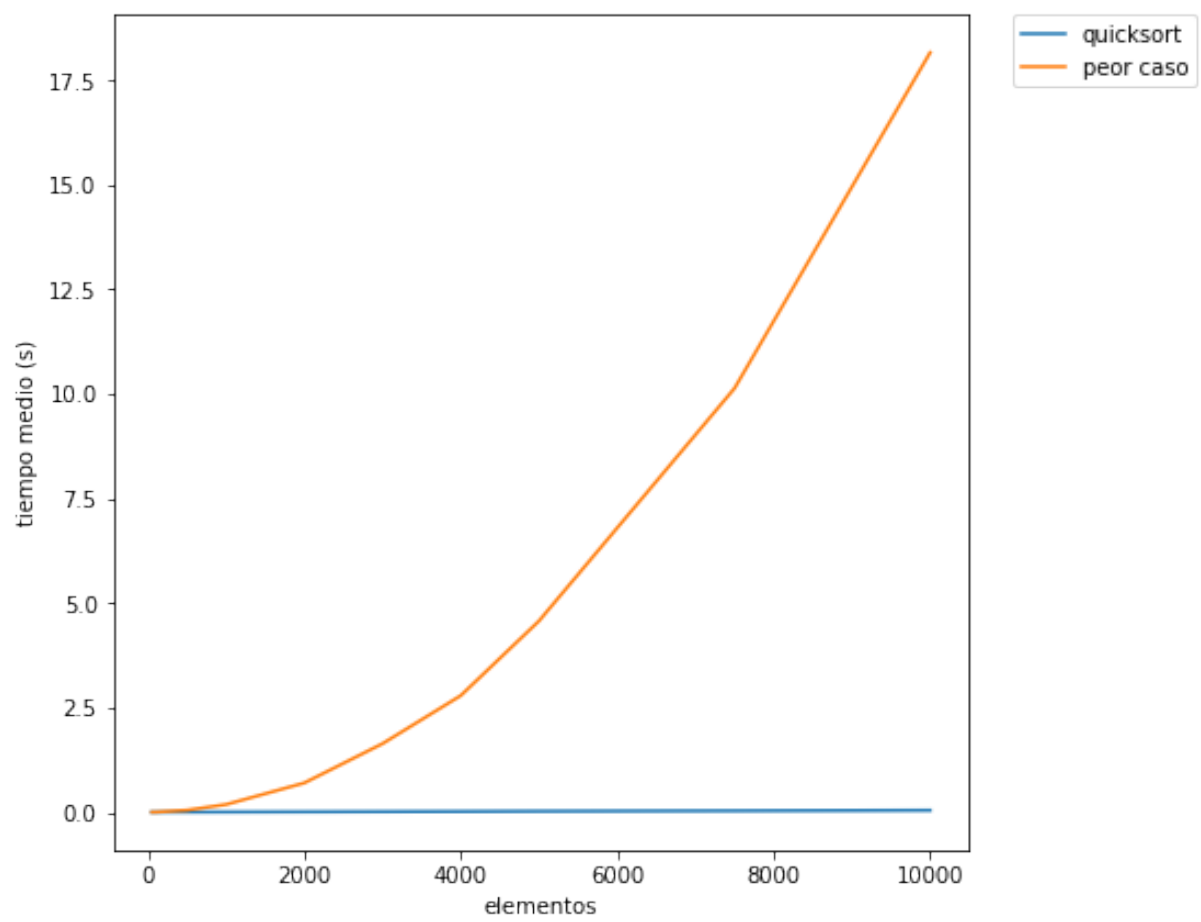


Figura 4:

- Tanto en el HeapSort como en el MergeSort, la cantidad de comparaciones que se deben realizar son de  $O(n \log n)$  por lo que casi no hay diferencia al compararse con arrays que puedan llevar a un peor caso.

## Parte 2: Variante del algoritmo Gale-Shapley

### Consigna

Una liga amateur de Basketball tiene una manera extraña de iniciar la temporada. Un draft se realiza entre 200 jugadores anotados entre los 20 equipos que participaran. Tanto los jugadores como los equipos tienen una lista de preferencia donde establecen en orden decreciente sus elecciones. Cada listado es completo (tienen a todos los jugadores/equipos) y sin empates de preferencia. Se pretende construir un matching estable que termine con 20 equipos de 10 jugadores cada uno.

- a) Construir el algoritmo de Gale-Shapley modificado para cumplir el requerimiento.
- b) Probar que el mismo terminará en tiempo polinómico y siempre entregará un matching estable.
- c) Ejecutar el algoritmo utilizando un set construido especialmente para el caso.

### Solución

Algoritmo de matching de Gale-Shapley devuelve un matching perfecto y estable entre dos conjuntos del mismo tamaño, y termina en tiempo polinómico ( $O(n^2)$ ). El hecho de que sea perfecto nos asegura que no va a haber un elemento de cualquier conjunto sin matchear, y el hecho de que sea estable nos asegura de que en el matching resultante no haya ningún par, en el que un elemento prefiera una pareja de otro par, qué a su vez lo prefiere a él. El problema es que no es directamente aplicable, dado que la cantidad de jugadores y equipos no es la misma.

La solución que elegimos es extender los datos del problema para poder aplicarle el Gale-Shapley. Desde alto nivel, nuestra solución se puede explicar de la siguiente forma: en vez de 20 equipos, el segundo set se compone de 200 “vacantes”, de modo que para cada equipo hay 10 vacantes. Las preferencias de las vacantes son las mismas que las del equipo al que corresponden. En las preferencias de los jugadores los equipos se reemplazan por las vacantes, de manera que si antes un jugador prefería equipo 1 antes que equipo 2, ahora va a pasar a preferir todas las vacantes del equipo 1 antes que cualquier vacante del equipo 2.

Nuestra resolución del trabajo práctico entonces consiste en:

- 1) Convertir el set de entrada, cambiando el set de equipos por set de vacantes y las preferencias de los jugadores.
- 2) Aplicar Gale-Shapley
- 3) Convertir el matching resultante a la forma inicial, es decir, reemplazar las vacantes por el equipo al que corresponden.

La complejidad de cada uno de esos pasos es (siendo  $n$  = cantidad de jugadores = cantidad de vacantes):

- 1) Consiste en recorrer las preferencias de cada jugador y cambiarles las preferencias de equipos por vacantes. Eso es  $O(n^2)$ . Luego a cada vacante se le agregan las preferencias del equipo correspondiente, lo cual tampoco debería tomar más de  $n^2$  iteraciones.
- 2) Gale-Shapley termina en  $O(n^2)$  (por la demostración del libro).
- 3) Consiste en recorrer el matching una vez:  $O(n)$

La complejidad total del algoritmo de esta forma va a ser de  $O(n^2)$ , osea que el tiempo es polinomial.

*Observación:* en nuestra implementación el ranking se calcula buscando un elemento en una lista de preferencias, la búsqueda en una lista de Python es  $O(n)$ , por lo cual, nuestra implementación de Gale-Shapley en realidad va a tomar  $n^3$  iteraciones en el peor caso. Ese tiempo sigue siendo polinomial, pero es bastante fácil convertir el cálculo de ranking en  $O(1)$  usando una estructura de datos acorde.

Nos queda ver que el matching resultante es estable. Para eso queremos ver que no existan dos pares de jugador-equipo  $(a, e1)$  y  $(b, e2)$ , donde el jugador  $a$  prefiera el equipo  $e2$  y el equipo  $e2$  lo prefiera al

jugador  $a$ . Para obtener ese resultado después de la ejecución de nuestro algoritmo, el Gale-Shapley debió haber devuelto un matching con  $(a, u)$  y  $(b, w)$ , donde  $u$  es una vacante de  $e1$  y  $w$  es una vacante de  $e2$ .

Supongamos que tal par existe. Eso significa en nuestra solución, que la última proposición de  $a$  fue hacia  $u$ . Si  $a$  no se le propuso a  $w$  previamente, entonces prefiere  $u$  por sobre  $w$  (osea que va a preferir cualquier vacante de  $e1$  antes de cualquiera de  $e2$ ), lo cual contradice la suposición de que  $a$  prefiere el equipo  $e2$  por sobre  $e1$ . Si  $a$  se le propuso a  $w$ , entonces  $w$  rechazó su propuesta a favor de un jugador  $c$  (que puede ser el mismo que  $b$ , con el que terminó en el matching, u otro que prefiere por sobre  $b$ ). Esto contradice la suposición de que  $e2$  prefiere  $a$  por sobre  $b$ . Por tanto, tales pares no pueden existir y el matching es estable.

---

Otra solución posible e incluso mejor (más eficiente) a este trabajo práctico es modificando el algoritmo de Gale-Shapley para que se pueda matchear más de un elemento de un set al otro set (parecido a la solución del problema de hospitales y estudiantes). El orden de esa solución debería ser de  $O(nm)$ , donde  $n$  es la cantidad de jugadores y  $m$  es la cantidad de equipos.



## Instalación

Para este tp se usó python 3.5

### Parte 1: Cálculo empírico de tiempos de ejecución

Para la primera parte es necesario instalar jupyter y matplotlib:

```
pip install jupyter matplotlib
```

Luego se debe ejecutar el siguiente comando para poder comenzar con las pruebas

```
jupyter notebook
```

Se debe dirigir hacia la carpeta tp1/tp1\_1.ipynb y hay que ejecutar todas las celdas del notebook desde el principio hasta el final

Seleccionar consecutivamente en cada celda

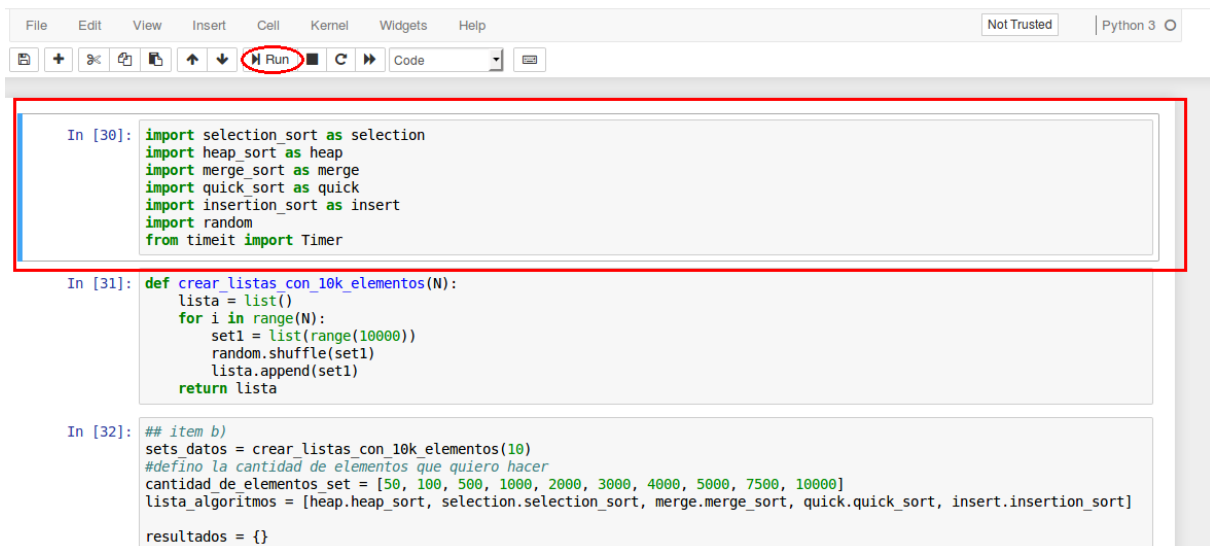


Figura 5:

Cuando aparece un [\*] significa que se debe esperar a que termine la ejecución para poder seguir ejecutando las otras celdas

### Parte 2: Variante del algoritmo Gale-Shapley

Para la segunda parte, jupyter es opcional. Sirve para ejecutar el código interactivamente y ver la salida.

Para ejecutar el tp:

```
python tp1_2.py
```

Por defecto, va a generar las preferencias randomizadas basadas en una semilla, va a crear una carpeta **preferencias** y guardar los archivos ahí. Los parametros por defecto se pueden alterar desde el código. Por ejemplo, para cambiar la semilla, la carpeta, y no generar archivos sino leer los que ya están, hay que modificar el código de la función main de la siguiente forma:

```

In [*]: ## item c)
tiempos_medio_algoritmo_rango = {}

for i in resultados.keys():
    print ('#### Set' + str(i))
    for j in resultados[i].keys():
        print ('**Cantidad de elementos: ' + str(j) + '**')
        print ('| Algoritmo | Tiempo de ejecución (s) |')
        print ('|-----|-----|')
        print ('| Heapsort | ' + str(resultados[i][j][0]) + ' |')
        print ('| Selección | ' + str(resultados[i][j][1]) + ' |')
        print ('| MergeSort | ' + str(resultados[i][j][2]) + ' |')
        print ('| Quicksort | ' + str(resultados[i][j][3]) + ' |')
        print ('| Inserción | ' + str(resultados[i][j][4]) + ' |')
    if i == 0:
        tiempos_medio_algoritmo_rango[j] = {
            'heapsort': resultados[i][j][0],
            'selectionsort': resultados[i][j][1],
            'mergesort': resultados[i][j][2],
            'quicksort': resultados[i][j][3],
            'insertion': resultados[i][j][4]
        }
    else:
        tiempos_medio_algoritmo_rango[j] = {
            'heapsort': (tiempos_medio_algoritmo_rango[j]['heapsort'] + resultados[i][j][0])*0.5,
            'selectionsort': (tiempos_medio_algoritmo_rango[j]['selectionsort'] + resultados[i][j][1])*0.5,
            'mergesort': (tiempos_medio_algoritmo_rango[j]['mergesort'] + resultados[i][j][2])*0.5,
            'quicksort': (tiempos_medio_algoritmo_rango[j]['quicksort'] + resultados[i][j][3])*0.5,
            'insertion': (tiempos_medio_algoritmo_rango[j]['insertion'] + resultados[i][j][4])*0.5
        }

```

Figura 6:

```

s = TPSolver(players=200, teams=20, seed=1000, path='mi_carpeta')
m = s.solve_tp(generate_files=False)

```