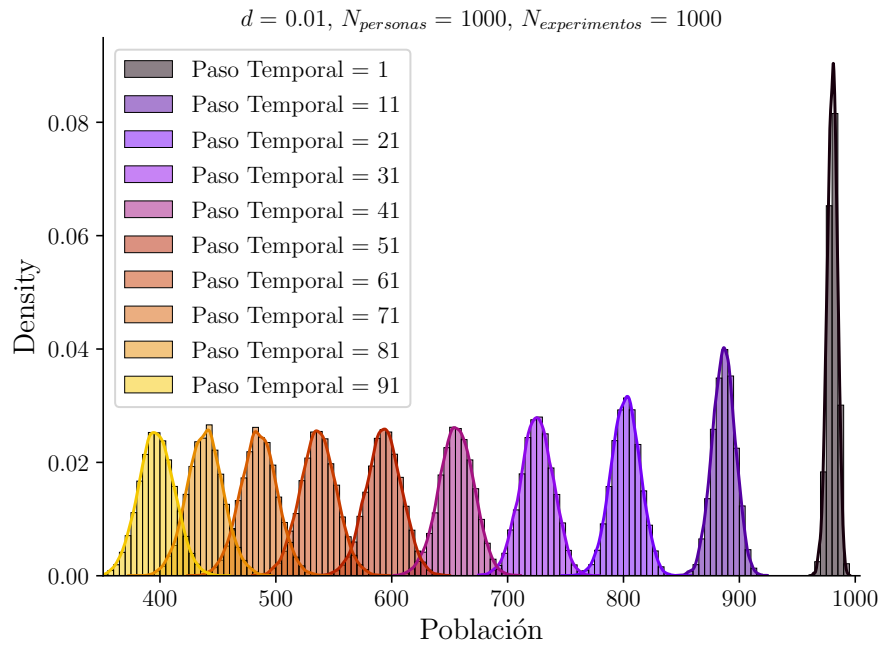


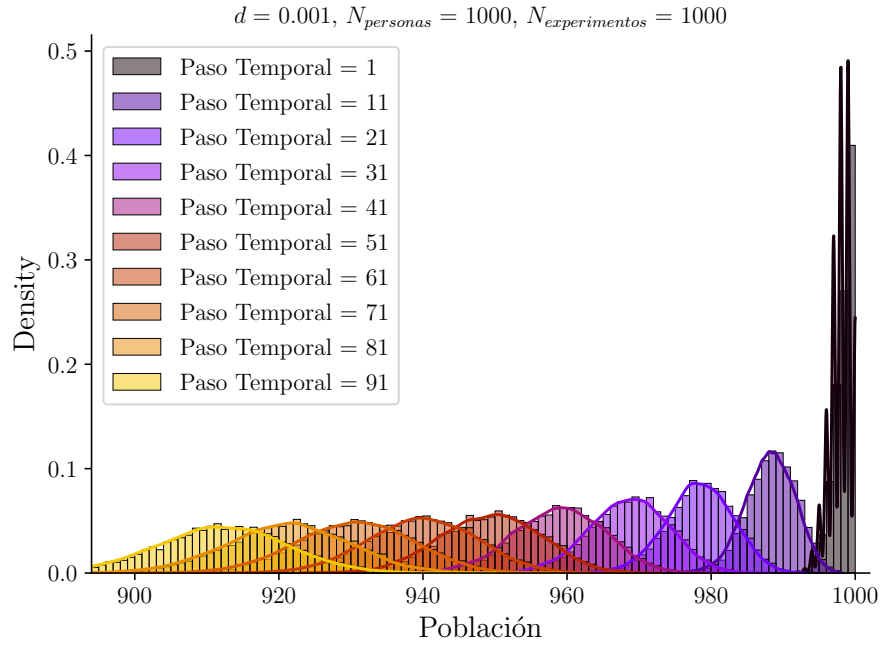
Práctico 3

M. G. Aramayo

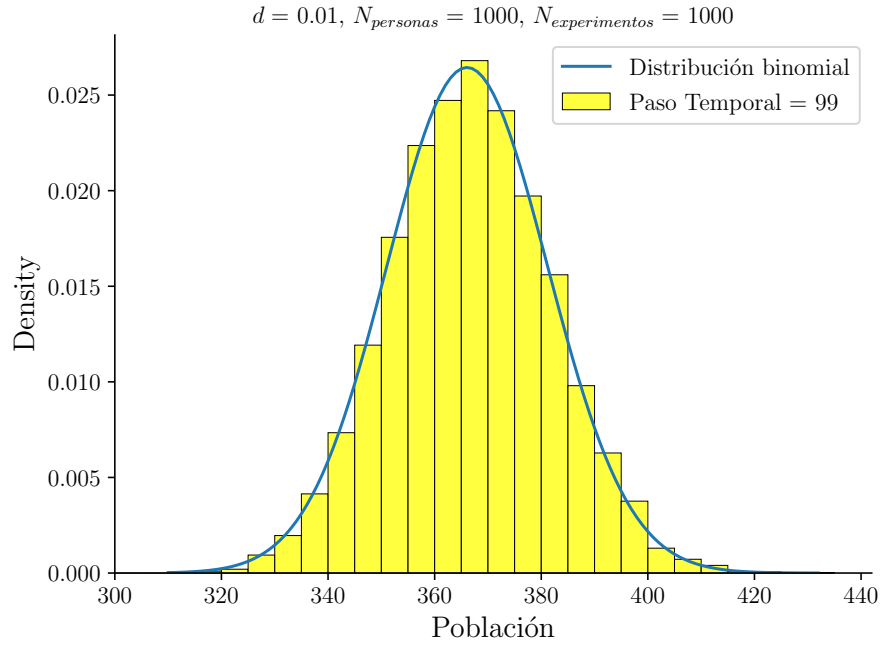
Resolución Ej 1



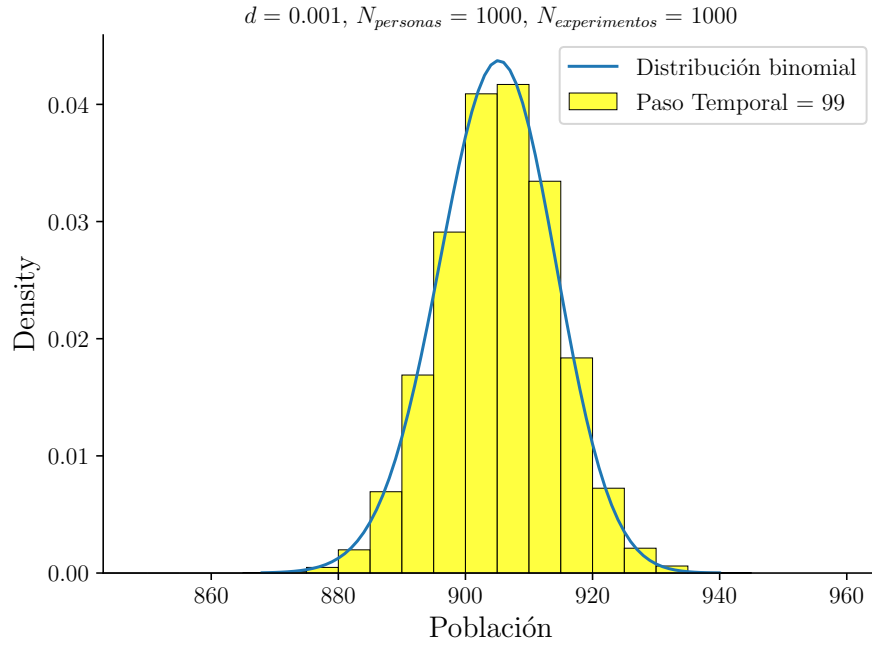
{#fig:tp03/figuras/ex01-a-evolucion_temporal width="99.9%"} [[fig:tp03/figuras/ex01-a-evolucion_temporal]] {#fig:tp03/figuras/ex01-a-evolucion_temporal label="fig:tp03/figuras/ex01-a-evolucion_temporal"}



{#fig:tp03/figuras/ex01-b-evolucion_temporal width="99.9%"} [[fig:tp03/figuras/ex01-b-evolucion_temporal]]{#fig:tp03/figuras/ex01-b-evolucion_temporal label="fig:tp03/figuras/ex01-b-evolucion_temporal"}



{#fig:tp03/figuras/ex01-a-ultima_iteracion width="99.9%"} [[fig:tp03/figuras/ex01-a-ultima_iteracion]] {#fig:tp03/figuras/ex01-a-ultima_iteracion label="fig:tp03/figuras/ex01-a-ultima_iteracion"}



{#fig:tp03/figuras/ex01-b-ultima_iteracion width="99.9%"} [[fig:tp03/figuras/ex01-b-ultima_iteracion]] {#fig:tp03/figuras/ex01-b-ultima_iteracion label="fig:tp03/figuras/ex01-b-ultima_iteracion"}

Se simula una población de individuos que no se reproducen y evolucionan en tiempo discreto. En cada paso de tiempo cada uno puede morir con probabilidad d . Si realizamos varias de estas simulaciones pueden obtenerse las distribuciones de probabilidad en la Fig. [fig:tp03/figuras/ex01-evolucion_temporal]. La distribución final parece seguir la forma de una distribución binomial como puede verse en la Fig. [fig:tp03/figuras/ex01-ultima_iteracion].

Resolución Ej 2

Se tiene un modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = ax_n + z_n$$

donde z_n es una variable estocástica con distribución gaussiana con media cero y desviación estándar σ . Esta expresión recursiva no es tan rápida en algunos lenguajes de programación. Pero puede reescribirse, veamos como se comporta a

distintos valores de n :

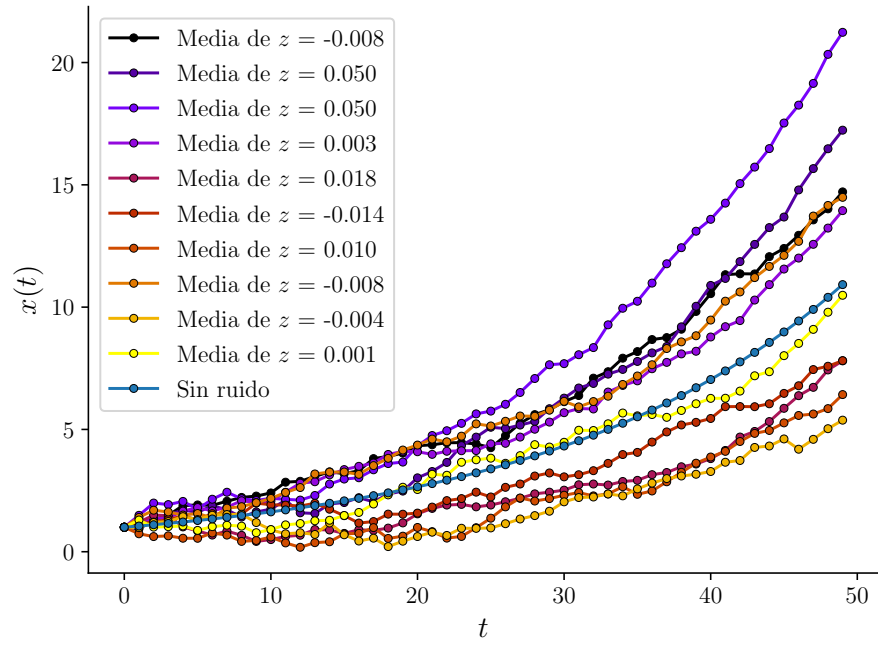
$$x_0 = x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a^1 x_0 + a^0 z_0 \\ x_2 = a^2 x_0 + a^1 z_0 + a^0 z_1 \\ \vdots \\ x_n = a^n x_0 + a^{n-1} z_0 + \dots + a^0 z_{n-1} \end{cases},$$

con esto proponemos que puede reescribirse como:

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(1+i)} z_i$$

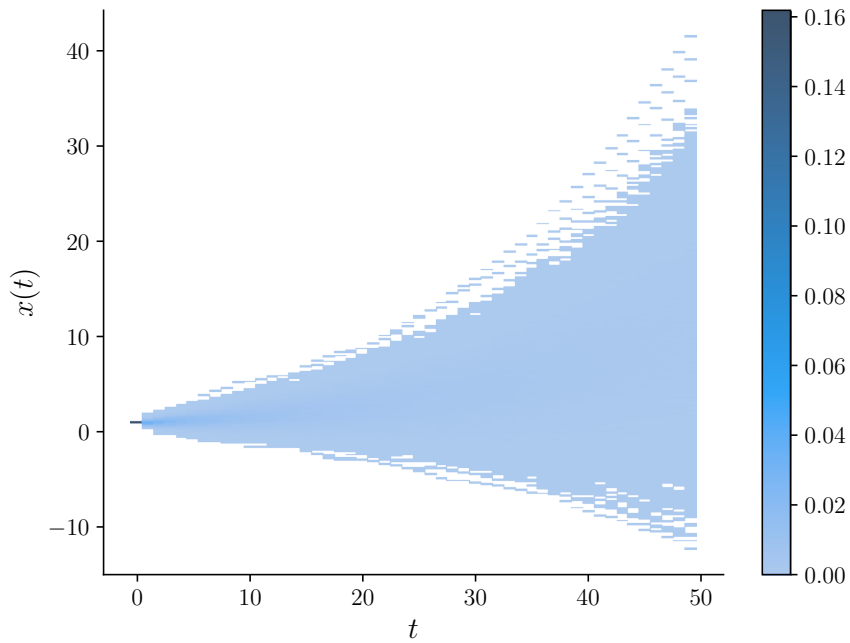
Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

$$\begin{array}{l} \text{Caso base: } x_1 = a^1 x_0 + \sum_{i=0}^{1-1} a^{1-(1+i)} z_i = a^1 x_0 + z_0 \\ \text{Asumo validez en } n = k: x_k = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i \\ \text{Probar que esto implica validez en } n = k + 1: \\ x_{k+1} = ax_k + z_k = a(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i) + z_k \\ x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + a \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i + z_k \\ x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a^{k+1-(1+i)} z_i}_{b_{k,i}} + \underbrace{a^0 z_k}_{b_{k,k}} \\ x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^k a^{k+1-(1+i)} z_i \\ \therefore \text{ se cumple para } n = k + 1 \end{array}$$



mapeo width="99.9%"}

{#fig:tp03/figuras/ex02-



{#fig:tp03/figuras/ex02-

histograma width="99.9%"}

La expresión de la Ec. [ec:map01-r] se utilizó para realizar múltiples simulaciones en la Fig. 5. Para un número mayor de simulaciones puede obtenerse la distribución $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 6.

Por otro lado, un segundo modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = (a + z_n)x_n$$

donde z_n es una variable estocástica con distribución gaussiana con media cero y desviación estándar σ . Nuevamente, puede reescribirse de forma no recursiva.

Veamos como se comporta a distintos valores de n :

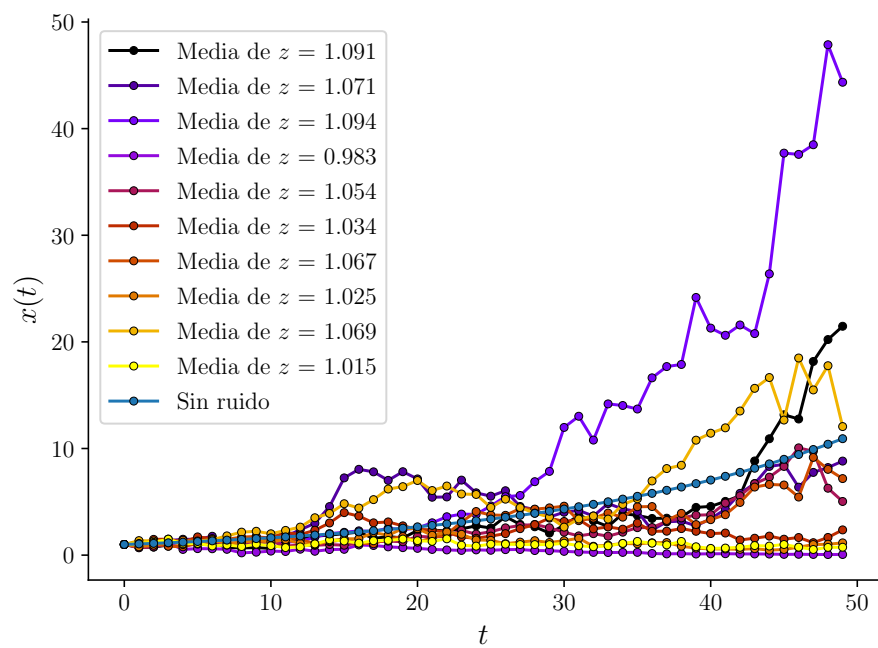
$$x_0 = x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0(a + z_0) \\ x_2 = x_0(a + z_0)(a + z_1) \\ \vdots \\ x_n = x_0(a + z_0)(a + z_1) \dots (a + z_{n-1}) \end{cases}$$

Puede reescribirse como:

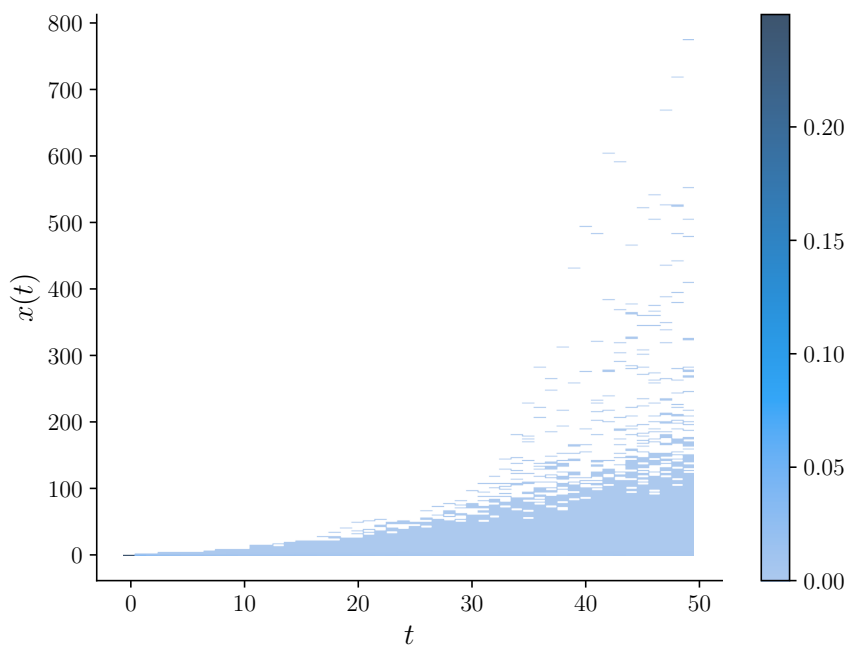
$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} (a + z_i)$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

<p>Un ejemplo de que se cumple:</p> $x_1 = x_0 \prod_{i=0}^{1-1} (a + z_i) = x_0(a + z_0)$ <p>Asumo que se cumple para $n = k$:</p> $x_k = x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$ <p>Probar que esto implica que se cumple para $n = k + 1$:</p> $x_{k+1} = (a + z_k)x_k = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$ $x_{k+1} = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$ $x_{k+1} = x_0 \prod_{i=0}^k (a + z_i)$ <p>\therefore se cumple para $n = k + 1$</p>
--



mapeo-02 width="99.9%"}
 {#fig:tp03/figuras/ex02-

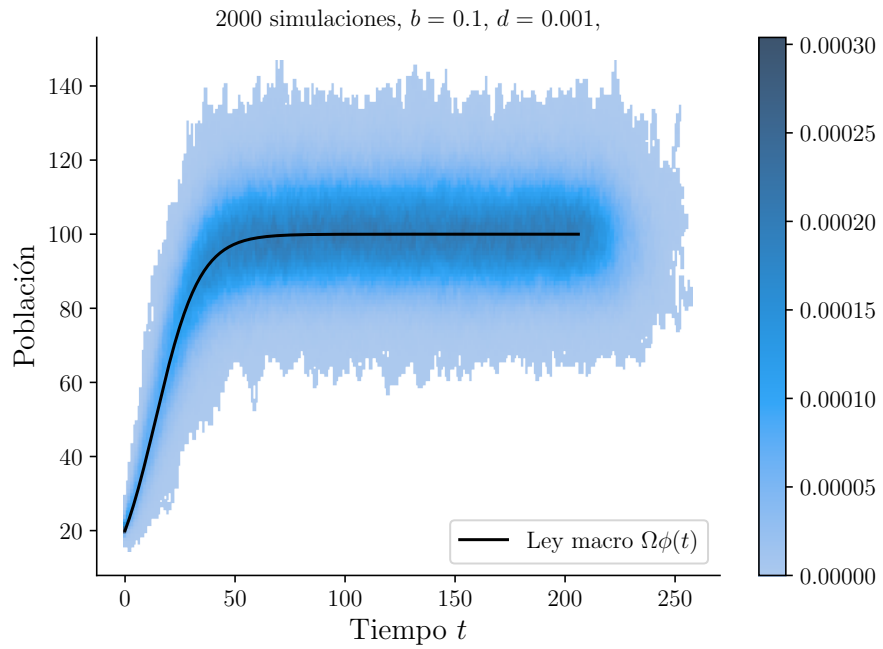


{#fig:tp03/figuras/ex02-

histograma-02 width="99.9%"}

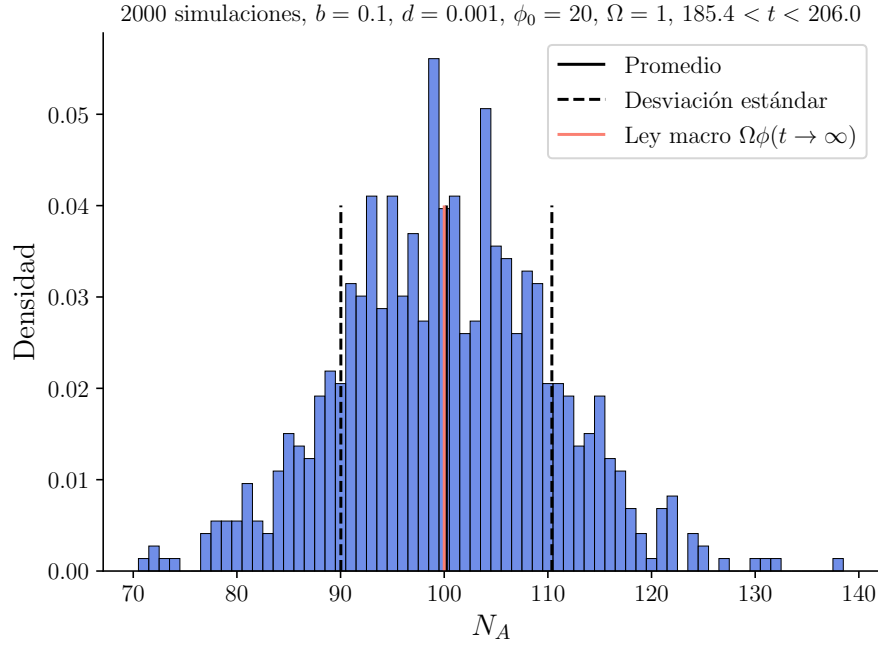
La expresión de la Ec. [ec:map02-r] se utilizó para realizar múltiples simulaciones en la Fig. 7. Para un número mayor de simulaciones puede obtenerse la distribución $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 8.

Resolución Ej 3



{#fig:tp03/figuras/ex03-

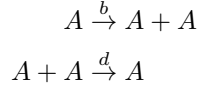
a-SinCota width="99.9%"}



{#fig:tp03/figuras/ex03-

b-SinCota width="99.9%"}

Se utilizó el algoritmo de Gillespie para simular una población mediante un modelo de reproducción y competencia intraespecífica con tasas b y d de los procesos:



Es posible obtener una ecuación diferencial que modele este sistema a partir de las tasas de transición son:

$$T(A - 1 | A) = d \frac{A}{N} \frac{A}{N} = d \frac{A^2}{N^2}$$

$$T(A + 1 | A) = b \frac{A}{N}$$

Si se tiene $A = \phi N$ con $0 < \phi < 1$:

$$T(A - 1 | A) = d\phi^2$$

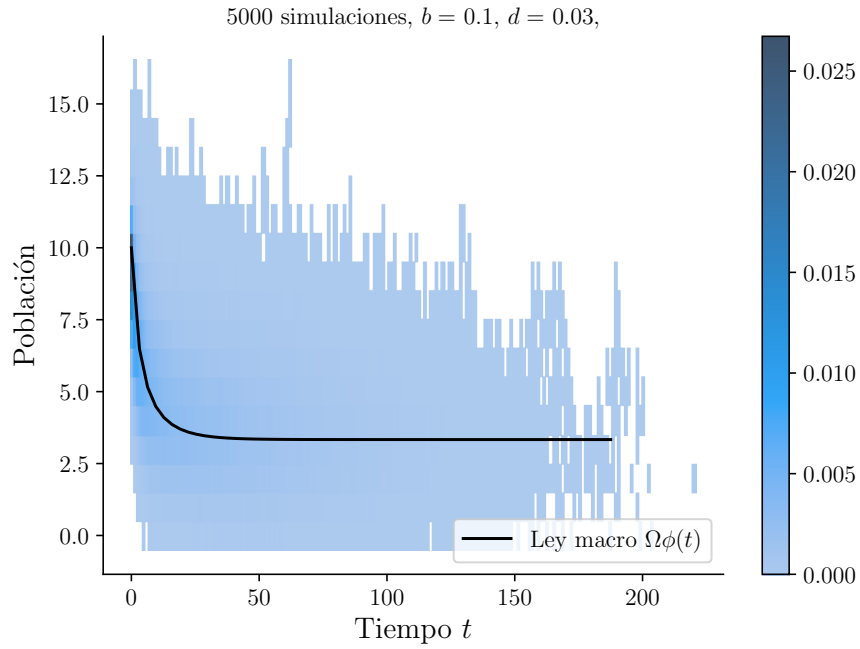
$$T(A + 1 | A) = b\phi$$

Con esto en cuenta la propuesta de ecuación es: $\dot{\phi} = b\phi - d\phi^2$ con lo que $r = b, s = d$ son parámetro de la función logística:

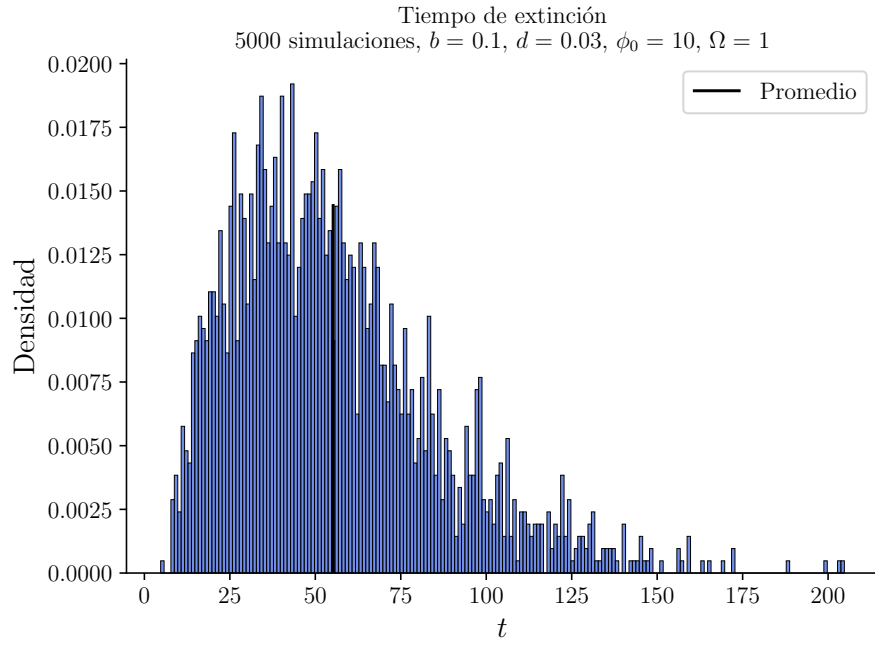
$$\phi(t) = \frac{r}{s - ce^{-rt}}, c = s - \frac{r}{\phi_0}$$

Esta ecuación, escalada al tamaño macroscópico, permite modelar el tamaño de A luego de sus transiciones.

Con esto en cuenta, se encontraron parámetros que permiten un valor medio de población estacionario no nulo que puede verse en la Fig. [fig:tp03/figuras/ex03-stat]. Se grafica junto con su modelo macroscópico.



c-SinCota width="99.9%"} {#fig:tp03/figuras/ex03-



e-SinCota width="99.9%"} {#fig:tp03/figuras/ex03-

Se obtuvo un conjunto de parámetros que producen una extinción, resultados asociados a esta simulación pueden verse en la Fig. [fig:tp03/figuras/ex03-kill].