Practico 1

M. G. Aramayo
Matematica de sistemas biologicos, Instituto Balseiro

RESOLUCION EJ 1:

El análisis en general no debería ser ahora difícil para ustedes. Supongamos que cada población tiene un comportamiento logístico en ausencia de la otra, y parámetros de interacción genéricos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x \left[1 - \dfrac{x}{K_1} - b_{12}\dfrac{y}{K_1}\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y \left[1 - \dfrac{y}{K_2} - b_{21}\dfrac{x}{K_2}\right] \end{cases}$$

donde b_{12} y b_{21} miden los efectos de la mutua competencia. Adimensionalizamos:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2) = u_1(1 - u_1 + a_{12}u_2) \\ \dfrac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2) = \rho u_2(1 - u_2 + a_{21}u_1) \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1(\tau) = \dfrac{x(t)}{K_1}, a_{12} = b_{12}\dfrac{K_2}{K_1}, \tau = r_1 t \\ u_2(\tau) = \dfrac{y(t)}{K_2}, a_{21} = b_{21}\dfrac{K_1}{K_2}, \rho = \dfrac{r_2}{r_1} \end{array} \right.$$

Los equilibrios vienen dados por: $\begin{cases} f_1(u_1, u_2) = 0 \\ f_2(u_1, u_2) = 0 \end{cases}$

Son 4 puntos de equilibrios $P_j = (u^*_{1,j}, u^*_{2,j}), j = 1, 2, ..., 4$.

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,1), P_3 = (1,0)$$
$$P_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}}(1 + a_{12}, 1 + a_{21})$$

La estabilidad puede analizarse mediante la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 1 + a_{12} & 0 \\ \rho a_{21} & -\rho \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & \rho(1 + a_{21}) \end{bmatrix}$$

- Para P_1: tengo dos autovalores reales por lo que se trata de un nodo inestable.
- Para P_2: Punto silla.
- Para P_3: Punto silla.

El cuarto punto de equilibrio tiene una expresion larga para sus autovalores, su matriz jacobiana es:

$$J_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & a_{21} - 1 \end{bmatrix}$$

Para este sistema es mas conveniente un analisis grafico como el que puede verse en la Fig. 1. El punto P_4

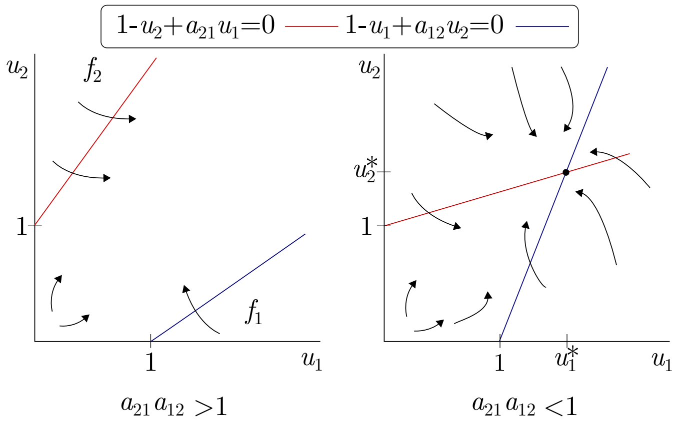

Figura 1: Evolucion de los mosquitos fertiles para distintos valores de los mosquitos esteriles.

es la interseccion de las rectas roja y azul. Si $a_{12}a_{21} = 1$ las rectas son paralelas y no hay un punto de equilibrio. Si $a_{12}a_{21} > 1$ la interseccion de la recta y por tanto el punto de equilibrio queda fuera del rango del problema (u_1 y u_2 son poblaciones y por tanto positivas). Si $a_{12}a_{21} < 1$ El punto de equilibrio queda en el primer cuadrante del plano u_1, u_2. Como por arriba de la recta roja $f_2 > 0$ y por arriba de la recta azul $f_1 > 0$ la direccion de crecimiento es la que se indica en la figura. La flecha va de valores crecientes a decrecientes. Con este analisis es posible determinar que la interseccion de las rectas para $a_{12}a_{21} < 1$ es un nodo estable.

RESOLUCION EJ 2:

Para el sistema:

$$\frac{dN}{dt} = f(N, a, b, k, n) = \left[\frac{aN}{N + n} - b\right] N - kN(N + n) \tag{1}$$

Punto fijo dado por: $f(N, a, b, k, n) = 0$

$$N_1^* = 0, N_{2,3}^* = \frac{1}{2k}\left(\pm\sqrt{(b - a)^2 - 4akn} + a - 2kn - b\right)$$

$$\frac{df}{dN} = -b + \frac{aN^2 + 2anN}{(N + n)^2} - k(2N + n)$$

La estabilidad de N_1^*:

$$\frac{df}{dN} = -b - kn \Rightarrow N_1^* \text{Es estable}$$

donde a es la natalidad, b es la mortalidad y k un coeficiente de capacidad. Con esto en cuenta puede plantearse un sistema en el que se suelte una unica vez a los mosquitos esteriles.

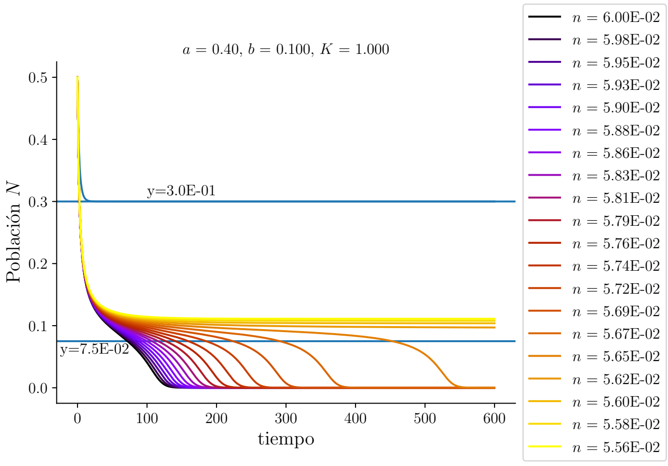

Figura 2: Evolucion de los mosquitos fertiles para distintos valores de los mosquitos esteriles.

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -bn - k(N+n)n \\ \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n) \end{cases}, \qquad (2)$$

donde b es la mortalidad, y k el coeficiente de capacidad.

Son 3 puntos de equilibrios $P_j = (n_j^*, N_j^*), j = 1, 2, 3.$

El origen es un punto estable, la derivada se anula en ese punto y no hay dinamica.

$$P_1 = (0,0) \qquad , P_2 = \left(0, \frac{a-b}{k}\right),$$

$$P_3 = \left(-\frac{b}{k}, 0\right) \binom{\text{Población}}{\text{Negativa}} \quad , P_4 = \left(-\frac{b}{k}, \frac{b+a}{k}\right) \binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ k\frac{b-2a}{a-b} & -k \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 \text{ Estable}$$

El punto P_3 no forma parte de la dinamica (No hay poblaciones negativas)

Si se propone que una fraccion γ de los mosquitos nace esteriles se tiene que:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n) \\ \dfrac{dn}{dt} = \gamma N - k(N+n)n \end{cases}, \qquad (3)$$

En la Fig. 2 pueden verse graficos de la resolucion numerica del sistema para distintos valores de el parametro n.

We incorporated into our model(s) the following explicit assumptions that would seem to apply to a rather wide range of biological situations:

a) Las poblaciones existen como continuos y se reproducen de forma continua en el tiempo.

b) La población crece similar a una curva logística.

c) La capacidad de carga de un ambiente es constante.

d) Los machos estériles y no estériles compiten en pie de igualdad.

e) El apareamiento es al azar, la proporción de apareamientos fértiles es directamente proporcional al número de individuos fértiles presentes en la población.

f) Los géneros están en una razón 1 a 1 constantemente.

g) La liberación de individuos estériles es continua y a un ritmo constante por unidad de tiempo y hábitat.

h) La liberación lleva a la completa e instantánea mezcla de individuos.

RESOLUCION EJ 3:

Para el siguiente sistema de competencia ciclica:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = n_1 (1 - n_1 - \alpha n_2 - \beta n_3) = f_1(n_1, n_2, n_3) \\ \dfrac{dn_2}{dt} = n_2 (1 - \beta n_1 - n_2 - \alpha n_3) = f_2(n_1, n_2, n_3) \\ \dfrac{dn_3}{dt} = n_3 (1 - \alpha n_1 - \beta n_2 - n_3) = f_3(n_1, n_2, n_3) \end{cases}$$

con $0 < \beta < 1 < \alpha$ y $\alpha + \beta > 2$. Pueden obtenerse los equilibrios viendo todos los puntos que cumplan simultaneamente:

$$\begin{cases} f_1(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_2(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_3(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \end{cases}$$

Son 8 puntos de equilibrios $P_j = (n_{1,j}^*, n_{2,j}^*, n_{3,j}^*), j = 1, 3, ..., 8.$

$$P_1 = (0,0,0)$$
$$P_2 = (1,0,0), P_3 = (0,1,0), P_4 = (0,0,1)$$
$$P_5 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1, \beta - 1, 0) \binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}$$
$$P_6 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(0, \alpha - 1, \beta - 1) \binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}$$
$$P_7 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\beta - 1, 0, \alpha - 1) \binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}$$
$$P_8 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}(1,1,1)$$

Analizamos el la matriz jacobiana de este sistema:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\text{estable}) \quad \mathbf{J}_8 = \frac{1}{1+\alpha+\beta} \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

P_5, P_6, P_7 no es accesible en el modelo porque son valores negativos y se estan tratando poblaciones.

El origen es equilibrio (una fuente) y los versores $(1, 0, 0)$ etc. son puntos de ensilladura. Hay otros 3 equilibrios con dos poblaciones finitas y una nula. Finalmente, existe un equilibrio interior al octante $\mathbb{R}^3_+$, dado por:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{1}{1+\alpha+\beta}.$$

Este equilibrio de coexistencia es una ensilladura, lo cual se demuestra fácilmente porque los autovalores son muy sencillos. La matriz del sistema linealizado es çirculante":

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que sus autovalores son combinaciones de las raíces cúbicas de la unidad:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

con c_j los elementos de la matriz y γ_j las raíces de la unidad, $\gamma_j = \exp(2\pi i/n)$, en general. Así que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -1, \text{ con autovector } (1,1,1) \\ \lambda_1 = \lambda_2^* &= \tfrac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 - \alpha e^{2xi/3} - \beta e^{4\pi i/3}\right), \end{aligned}$$

que satisfacen:

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 + \frac{\overbrace{\alpha+\beta}^{>2}}{2}\right) > 0$$

RESOLUCION EJ 4:

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y,z) = -c_a xy + e_a y - c_b xz + e_b z \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y,z) = c_a xy - e_a y + c_a zy \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(x,y,z) = c_b xz - e_b z - c_a zy \end{cases}$$

Los equilibrios vienen dados por

$$\begin{cases} f_1(x^*, y^*, z^*) = 0 \\ f_2(x^*, y^*, z^*) = 0 \\ f_3(x^*, y^*, z^*) = 0 \end{cases}$$

Por esto los puntos fijos son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0,0) \\ P_2 &= (\frac{e_b}{c_b}, 0, z) \\ P_3 &= (\frac{e_a}{c_a}, y, 0) \\ P_4 &= (\frac{e_a}{c_a} - c_a z, z, \frac{c_b}{c_a}(\frac{e_a}{c_a} - c_a z) - \frac{e_b}{c_a}) \end{aligned}$$

$$J = \begin{bmatrix} -yc_a - zc_b & -xc_a + e_a & -xc_b + e_b \\ yc_a & xc_a - e_a + zc_a & yc_a \\ zc_b & -zc_a & xc_b - e_b - yc_a \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & e_a & e_b \\ 0 & -e_a & 0 \\ 0 & 0 & -e_b \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -zc_b & -(\frac{e_b}{c_b})c_a + e_a & -(\frac{e_b}{c_b})c_b + e_b \\ 0 & (\frac{e_b}{c_b})c_a - e_a + zc_a & 0 \\ zc_b & -zc_a & (\frac{e_b}{c_b})c_b - e_b \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -yc_a & -(\frac{e_a}{c_a})c_a + e_a & -(\frac{e_a}{c_a})c_b + e_b \\ yc_a & (\frac{e_a}{c_a})c_a - e_a & yc_a \\ 0 & 0 & (\frac{e_a}{c_a})c_b - e_b - yc_a \end{bmatrix}$$

RESOLUCION EJ 5:

Metapoblaciones - Modelo de Levins

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-p) - ep = f(p)$$

- c : Tasa de colonización local de un parche (o probabilidad de que un parche vacío sea colonizado por individuos que migran al mismo parche desde parches ocupados).
- p : Fracción de parches ocupados
- $1-p$: Fracción de parches vacíos
- e : Tasa de extinción de cualquier subpoblación (población local en un parche) o probabilidad de que un parche ocupado quede vacío (extinción local).

Lo que parece un término logístico tiene un origen muy diferente. La posibilidad de que aumente la fracción de parches ocupados depende de cuantos parches hay ocupados y de la posibilidad de ocupar uno nuevo, que para eso, debe estar vacio. De ahí el producto de ambas cantidades

$$f(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 - \frac{e}{c} \end{cases}$$

Metapoblaciones - Competencia Tenemos dos especies compitiendo, pero una de las dos (s) es mejor colonizadora y

$$\begin{cases} \dfrac{dp_s}{dt} = f_s(p) = c_s p_s (1 - p_s) - e_s p_s \\ \dfrac{dp_i}{dt} = f_i(p) = c_i p_i (1 - p_i - p_s) - e_i p_i - c_s p_i p_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_i = 0 \\ f_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i = p_s = 0 \\ p_i = 0, p_s = 1 - e_s/c_s \\ p_i = 1 - e_i/c_i, p_s = 0 \\ p_i = p_i^*, p_s = p_s^* \end{cases}$$

$$p_s^* = 1 - \frac{e_s}{c_c}, p_i^* = 1 - p_s^* - \frac{e_i + c_s p_s^*}{c_i}$$

$$1 - \frac{e_s}{c_s} > 0$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -c_s + e_s & 0 \\ \frac{df_i}{dp_i} & c_i (1 - p_s^* - 2p_i^*) - e_i - c_s p_s^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

Para que la coexistencia sea estable necesito dos autovalores negativos, es decir

$$c_i (1 - p_s^* - 2p_i^*) - e_i - c_s p_s^* < 0$$

$$c_i > c_s \left(\frac{e_i}{e_s} + \frac{p_s^*}{1 - p_s^*} \right) \quad c_i > c_s \left(\frac{c_s + e_i - e_s}{e_s} \right)$$

Supongamos que los coeficientes de extinción son iguales. Si ${p_s}^* < 1$ vemos que

$$c_i > c_s$$

La coexistencia ocurre porque s deja huecos ya sea porque coloniza peor o tiene una mayor tasa de extinción.