Practico 1

M. G. Aramayo
Matematica de sistemas biologicos, Instituto Balseiro

RESOLUCION EJ 1:

RESOLUCION EJ 2:

RESOLUCION EJ 3:

Para el siguiente sistema de competencia ciclica:

$$\frac{dn_1}{dt} = n_1\left(1 - n_1 - \alpha n_2 - \beta n_3\right)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = n_2\left(1 - \beta n_1 - n_2 - \alpha n_3\right)$$
$$\frac{dn_3}{dt} = n_3\left(1 - \alpha n_1 - \beta n_2 - n_3\right)$$

con $0 < \beta < 1 < \alpha$ y $\alpha + \beta > 2$. Pueden obtenerse los equilibrios viendo todos los puntos que cumplan simultaneamente:

$$f_1(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0$$
$$f_2(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0$$
$$f_3(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0$$

Son 8 puntos de equilibrios $P_j = (n_{1,j}^*, n_{2,j}^*, n_{3,j}^*), j = 1, 3, ..., 8$.

$$P_1 = (0,0,0)$$
$$P_2 = (1,0,0)$$
$$P_3 = (0,1,0)$$
$$P_4 = (0,0,1)$$
$$P_5 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1, \beta - 1, 0)$$
$$P_6 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(0, \alpha - 1, \beta - 1)$$
$$P_7 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\beta - 1, 0, \alpha - 1)$$
$$P_8 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}(1,1,1)$$

Analizamos el la matriz jacobiana de este sistema:

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) \\ -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \\ 0 & 0 & 1-\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) - \beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} 1-\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) - \beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & 0 & 0 \\ -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) \\ -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \\ 0 & 1-\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) - \alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & 0 \\ -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_8 = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix}, \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

El origen es equilibrio (una fuente) y los versores $(1,0,0)$ etc. son puntos de ensilladura. Hay otros 3 equilibrios con dos poblaciones finitas y una nula. Finalmente, existe un equilibrio interior al octante $\mathbb{R}_+^3$, dado por:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{1}{1+\alpha+\beta}.$$

Este equilibrio de coexistencia es una ensilladura, lo cual se demuestra fácilmente porque los autovalores son muy sencillos. La matriz del sistema linealizado es çirculante":

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que sus autovalores son combinaciones de las raíces cúbicas de la unidad:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

con c_j los elementos de la matriz y γ_j las raíces de la unidad, $\gamma_j = \exp(2\pi i/n)$, en general. Así que:

$$\lambda_0 = -1, \text{ con autovector } (1,1,1)$$
$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \tfrac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 - \alpha e^{2xi/3} - \beta e^{4\pi i/3}\right),$$

que satisfacen:

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_1\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda_2\right) = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 + \frac{\overbrace{\alpha+\beta}^{>2}}{2}\right) > 0$$

RESOLUCION EJ 4:

RESOLUCION EJ 5:

RESOLUCION EJ 6: