Práctico 3

M. G. Aramayo
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

RESOLUCIÓN EJ 1

Se simula una población de individuos que no se reproducen y evolucionan en tiempo discreto. En cada paso de tiempo cada uno puede morir con probabilidad d. Si realizamos varias de estas simulaciones pueden obtenerse las distribuciones de probabilidad en la Fig. 1. La distribución final parece seguir la forma de una distribución binomial como puede verse en la Fig. 2 donde se gráfica el ajuste binomial con la distribución obtenida a partir de la simulación.

RESOLUCIÓN EJ 2:

Se tiene un modelo de poblacion continua de dinamica discreta dado por:

$$x_{n+1} = ax_n + z_n \tag{1}$$

donde z_n es una variable estocastica con distribución gaussiana con media cero y desviacion estandar σ. Esta expresion recursiva no es tan rapida en algunos lenguajes de programacion. Pero puede reescribirse de manera que sea solamente una funcion de n y de z_n.

Veamos como se comporta a distintos valores de n:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_0\\
&x_1 = a^1 x_0 + a^0 z_0\\
&x_2 = a^2 x_0 + a^1 z_0 + a^0 z_1\\
&x_3 = a^3 x_0 + a^2 z_0 + a^1 z_1 + a^0 z_2\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&x_n = a^n x_0 + a^{n-1} z_0 + \ldots + a^0 z_{n-1}
\end{aligned}$$

Proponemos que puede reescribirse como:

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(1+i)}\ z_i \tag{2}$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Un ejemplo de que se cumple:

$$x_1 = a^1 x_0 + \sum_{i=0}^{1-1} a^{1-(1+i)}\ z_i = a^1 x_0 + z_0$$

Asumo que se cumple para $n = k$:

$$x_k = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i$$

Probar que esto implica que se cumple para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= ax_k + z_k\\
x_{k+1} &= a(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i) + z_k\\
x_{k+1} &= a^{k+1} x_0 + a\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i + z_k\\
x_{k+1} &= a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a^{k+1-(1+i)} z_i}_{b_{k,i}} + z_k\\
x_{k+1} &= a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a^{k+1-(1+i)} z_i}_{b_{k,i}} + \underbrace{a^0 z_k}_{b_{k,k}}\\
x_{k+1} &= a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k+1-(1+i)} z_i
\end{aligned}$$

$\therefore$ se cumple para $n = k+1$

La expresión de la Ec. 2 se utilizo para realizar multiples simulaciones en la Fig. 5.

Por otro lado, un segundo modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = (a + z_n)x_n \tag{3}$$

donde z_n es una variable estocastica con distribución gaussiana con media cero y desviacion estandar σ. Nuevamente, puede reescribirse de forma no recursiva.

Veamos como se comporta a distintos valores de n:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_0\\
&x_1 = x_0(a + z_0)\\
&x_2 = x_0(a + z_0)(a + z_1)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&x_n = x_0(a + z_0)(a + z_1)...(a + z_{n-1})
\end{aligned}$$

Puede reescribirse como:

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} (a + z_i) \tag{4}$$

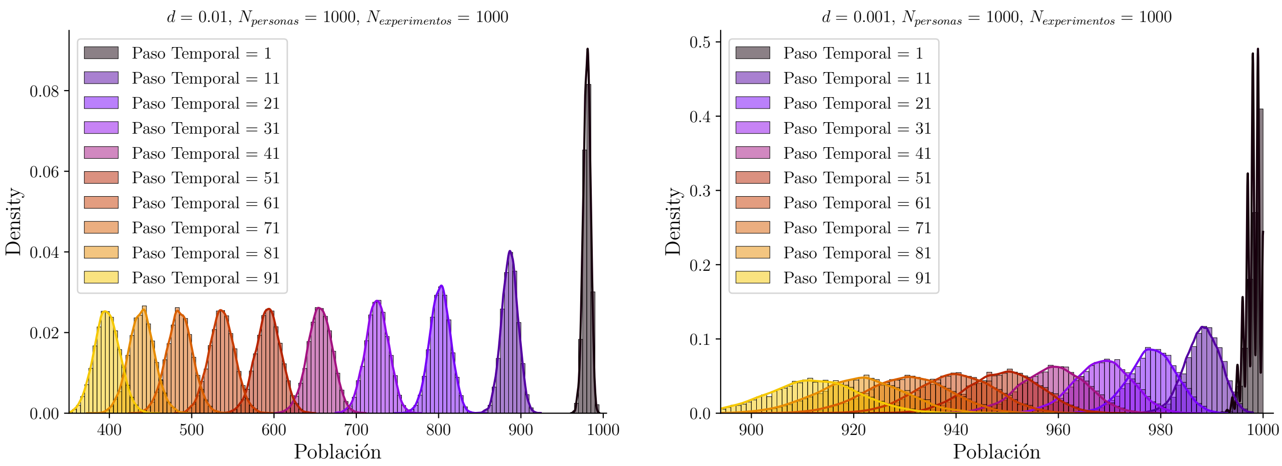

Figura 1: Evolución en pasos temporales de la distribución de numero de habitantes. Para $d = 0{,}01$ y $d = 0{,}001$.

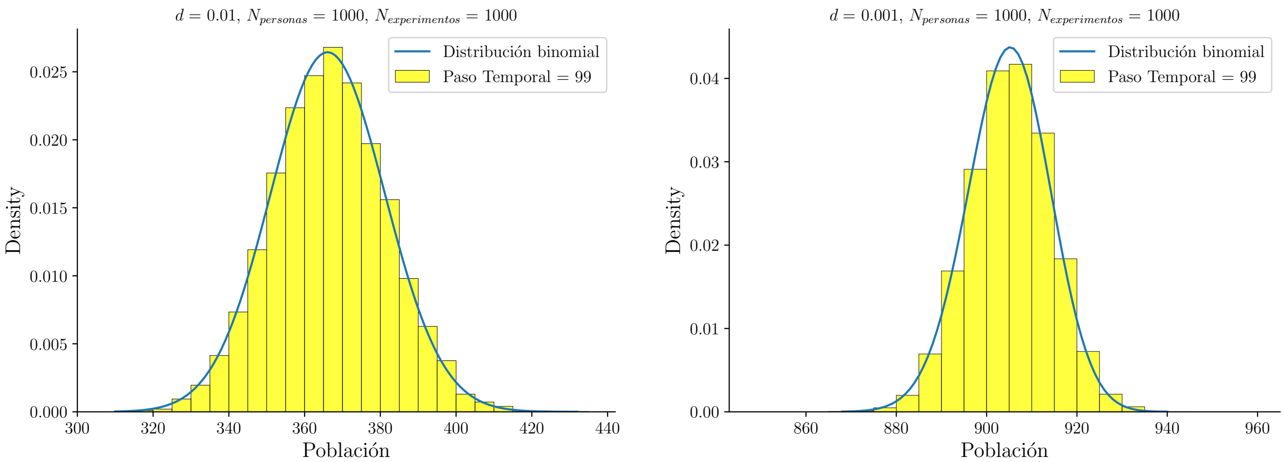

Figura 2: Comparación entre la densidad obtenida mediante la simulación y una distribución binomial. Para $d = 0{,}01$ y $d = 0{,}001$.

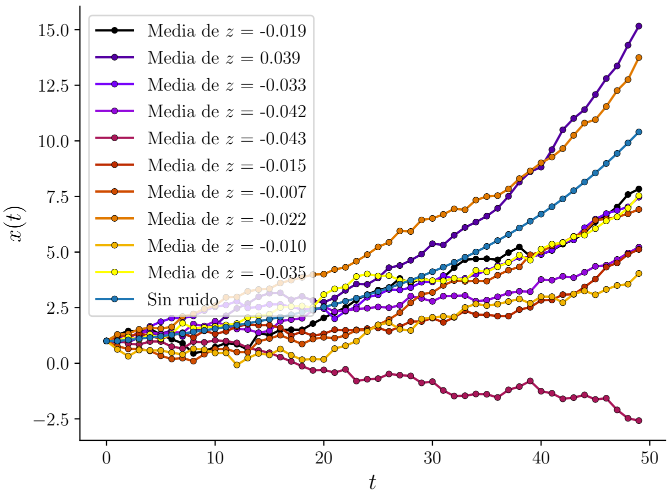

Figura 3: Evolución del mapeo para distintos valores medios de la generación de números aleatorios, para 50 pasos en t.

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Un ejemplo de que se cumple:

$$x_1 = x_0 \prod_{i=0}^{1-1} (a + z_i) = x_0(a + z_0)$$

Asumo que se cumple para $n = k$:

$$x_k = x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

Probar que esto implica que se cumple para $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_k$$

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = x_0 \prod_{i=0}^{k} (a + z_i)$$

$\therefore$ se cumple para $n = k + 1$

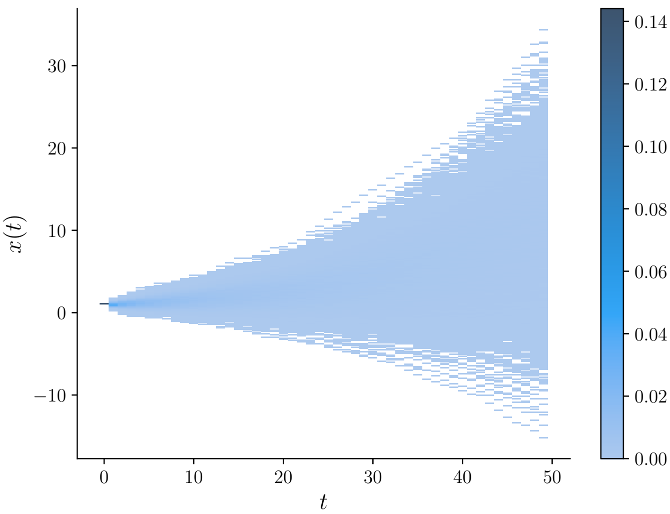

Figura 4: $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t.

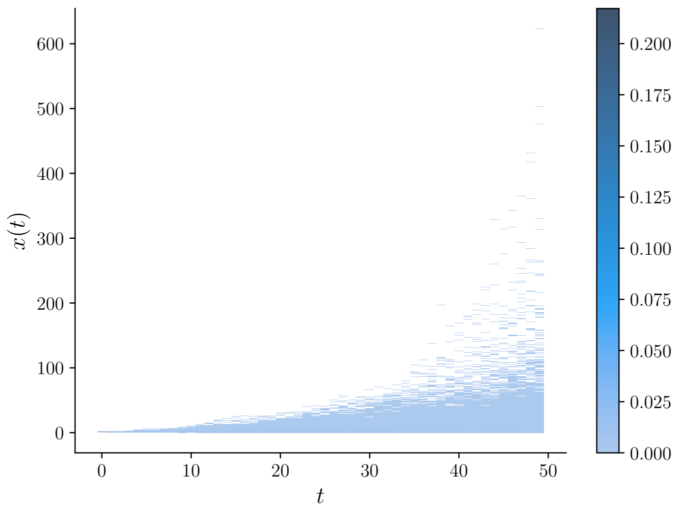

Figura 6: $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t.

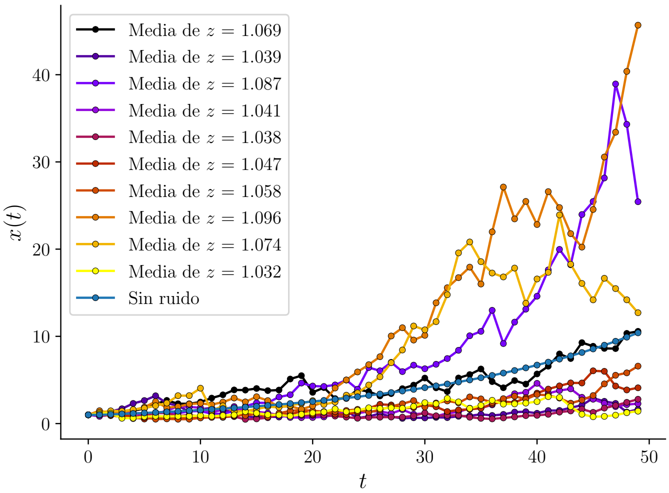

Figura 5: $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t.