Practico 1

M. G. Aramayo
Matematica de sistemas biologicos, Instituto Balseiro

RESOLUCION EJ 1:

El análisis en general no debería ser ahora difícil para ustedes. Supongamos que cada población tiene un comportamiento logístico en ausencia de la otra, y parámetros de interacción genéricos:

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left[1 - \frac{x}{K_1} - b_{12}\frac{y}{K_1}\right]$$
$$\frac{dy}{dt} = r_2 y\left[1 - \frac{y}{K_2} - b_{21}\frac{x}{K_2}\right]$$

donde b_{12} y b_{21} miden los efectos de la mutua competencia. Adimensionalizamos:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1\left(1 - u_1 + a_{12}u_2\right) = f_1\left(u_1, u_2\right)$$
$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2\left(1 - u_2 + a_{21}u_1\right) = f_2\left(u_1, u_2\right)$$

$$u_1(\tau) = \frac{x(t)}{K_1}, a_{12} = b_{12}\frac{K_2}{K_1}, \tau = r_1 t$$
$$u_2(\tau) = \frac{y(t)}{K_2}, a_{21} = b_{21}\frac{K_1}{K_2}, \rho = \frac{r_2}{r_1}$$

Los equilibrios vienen dados por: $\begin{cases} f_1(u_1,u_2) = 0 \\ f_2(u_1,u_2) = 0 \end{cases}$

Son 4 puntos de equilibrios $P_j = (u^*_{1,j}, u^*_{2,j}), j = 1, 2, ..., 4$.

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,1), P_3 = (1,0)$$
$$P_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}}(1 + a_{12}, 1 + a_{21})$$

La estabilidad puede analizarse mediante la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 1 + a_{12} & 0 \\ \rho a_{21} & -\rho \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & \rho\left(1 + a_{21}\right) \end{bmatrix}$$

- Para P_1: tengo dos autovalores reales por lo que se trata de un nodo inestable.
- Para P_2: Punto silla.
- Para P_3: Punto silla.

El cuarto punto de equilibrio tiene una expresion larga para sus autovalores, su matriz jacobiana es:

$$J_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & a_{21} - 1 \end{bmatrix}$$

Para este sistema es mas conveniente un analisis grafico como el que puede verse en la Fig. 2. El punto P_4 es la interseccion de las rectas roja y azul. Si $a_{12}a_{21} = 1$ las rectas son paralelas y no hay un punto de equilibrio. Si $a_{12}a_{21} > 1$ la interseccion de la recta y por tanto el punto de equilibrio queda fuera del rango del problema (u_1 y u_2 son poblaciones y por tanto positivas). Si $a_{12}a_{21} < 1$ El punto de equilibrio queda en el primer cuadrante del plano u_1, u_2. Como por arriba de la recta roja $f_2 > 0$ y por arriba de la recta azul $f_1 > 0$ la direccion de crecimiento es la que se indica en la figura. La flecha va de valores crecientes a decrecientes. Con este analisis es posible determinar que la interseccion de las rectas para $a_{12}a_{21} < 1$ es un nodo estable.

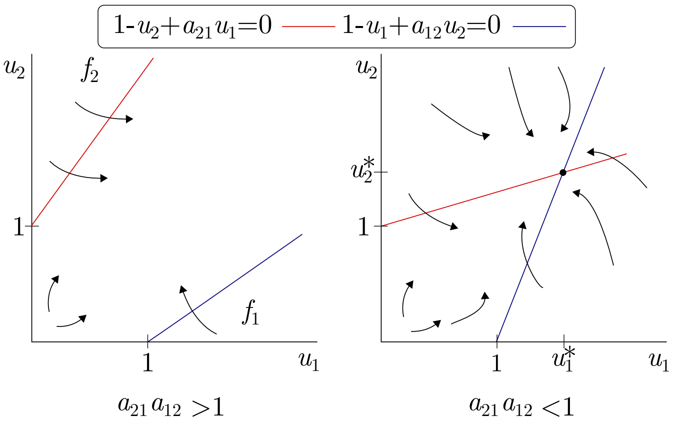

Figura 1: Evolucion de los mosquitos fertiles para distintos valores de los mosquitos esteriles.

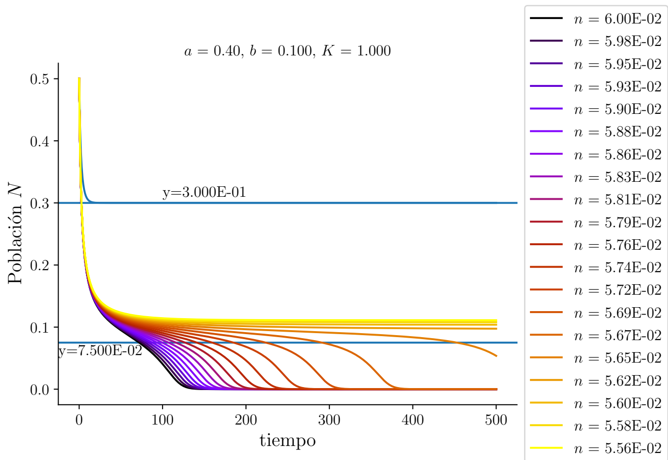

Figura 2: Evolucion de los mosquitos fertiles para distintos valores de los mosquitos esteriles.

RESOLUCION EJ 2:

En la Fig. 2 pueden verse graficos de la resolucion numerica del sistema para distintos valores de el parametro n.

RESOLUCION EJ 3:

Para el siguiente sistema de competencia ciclica:

$$\frac{dn_1}{dt} = n_1(1 - n_1 - \alpha n_2 - \beta n_3) = f_1(n_1, n_2, n_3)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = n_2(1 - \beta n_1 - n_2 - \alpha n_3) = f_2(n_1, n_2, n_3)$$
$$\frac{dn_3}{dt} = n_3(1 - \alpha n_1 - \beta n_2 - n_3) = f_3(n_1, n_2, n_3)$$

con $0 < \beta < 1 < \alpha$ y $\alpha + \beta > 2$. Pueden obtenerse los equilibrios viendo todos los puntos que cumplan simultaneamente:

$$\begin{cases} f_1(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_2(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_3(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \end{cases}$$

Son 8 puntos de equilibrios $P_j = (n_{1,j}^*, n_{2,j}^*, n_{3,j}^*), j = 1, 3, ..., 8$.

$$P_1 = (0,0,0)$$
$$P_2 = (1,0,0), P_3 = (0,1,0), P_4 = (0,0,1)$$
$$P_5 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1, \beta - 1, 0)$$
$$P_6 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(0, \alpha - 1, \beta - 1)$$
$$P_7 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\beta - 1, 0, \alpha - 1)$$
$$P_8 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}(1,1,1)$$

Analizamos el la matriz jacobiana de este sistema:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_8 = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix}, \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) \\ -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \\ 0 & 0 & 1-\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) - \beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} 1-\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) - \beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & 0 & 0 \\ -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) \\ -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1} & -\alpha(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) \\ 0 & 1-\beta(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}) - \alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & 0 \\ -\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & -\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}) & \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} \end{bmatrix}$$

El origen es equilibrio (una fuente) y los versores $(1,0,0)$ etc. son puntos de ensilladura. Hay otros 3 equilibrios con dos poblaciones finitas y una nula. Finalmente, existe un equilibrio interior al octante $\mathbb{R}^3_+$, dado por:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{1}{1+\alpha+\beta}.$$

Este equilibrio de coexistencia es una ensilladura, lo cual se demuestra fácilmente porque los autovalores son muy sencillos. La matriz del sistema linealizado es çirculante":

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que sus autovalores son combinaciones de las raíces cúbicas de la unidad:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

con c_j los elementos de la matriz y γ_j las raíces de la unidad, $\gamma_j = \exp(2\pi i/n)$, en general. Así que:

$$\lambda_0 = -1, \text{ con autovector } (1,1,1)$$
$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \tfrac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 - \alpha e^{2xi/3} - \beta e^{4\pi i/3}\right),$$

que satisfacen:

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 + \overbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{>2}\right) > 0$$

RESOLUCION EJ 4:

El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y,z) = -c_a xy + e_a y - c_b xz + e_b z$$
$$\frac{dy}{dt} = f_2(x,y,z) = c_a xy - e_a y + c_a zy$$
$$\frac{dz}{dt} = f_3(x,y,z) = c_b xz - e_b z - c_a zy$$

Los equilibrios vienen dados por

$$f_1(x^*, y^*, z^*) = 0$$
$$f_2(x^*, y^*, z^*) = 0$$
$$f_3(x^*, y^*, z^*) = 0$$

Por esto los puntos fijos son:

$$P_1 = (0,0,0)$$
$$P_2 = (\frac{e_b}{c_b}, 0, z)$$
$$P_3 = (\frac{e_a}{c_a}, y, 0)$$
$$P_4 = (\frac{e_a}{c_a} - c_a z, z, \frac{c_b}{c_a}(\frac{e_a}{c_a} - c_a z) - \frac{e_b}{c_a})$$

$$J = \begin{bmatrix} -yc_a - zc_b & -xc_a + e_a & -xc_b + e_b \\ yc_a & xc_a - e_a + zc_a & yc_a \\ zc_b & -zc_a & xc_b - e_b - yc_a \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & e_a & e_b \\ 0 & -e_a & 0 \\ 0 & 0 & -e_b \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -zc_b & -(\frac{e_b}{c_b})c_a + e_a & -(\frac{e_b}{c_b})c_b + e_b \\ 0 & (\frac{e_b}{c_b})c_a - e_a + zc_a & 0 \\ zc_b & -zc_a & (\frac{e_b}{c_b})c_b - e_b \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -yc_a & -(\frac{e_a}{c_a})c_a + e_a & -(\frac{e_a}{c_a})c_b + e_b \\ yc_a & (\frac{e_a}{c_a})c_a - e_a & yc_a \\ 0 & 0 & (\frac{e_a}{c_a})c_b - e_b - yc_a \end{bmatrix}$$

RESOLUCION EJ 5: