

Práctico 3

M. G. Aramayo
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

RESOLUCIÓN EJ 1

Se simula una población de individuos que no se reproducen y evolucionan en tiempo discreto. En cada paso de tiempo cada uno puede morir con probabilidad d . Si realizamos varias de estas simulaciones pueden obtenerse las distribuciones de probabilidad en la Fig. 1. La distribución final parece seguir la forma de una distribución binomial como puede verse en la Fig. 2.

RESOLUCIÓN EJ 2

Se tiene un modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = ax_n + z_n \quad (1)$$

donde z_n es una variable estocástica con distribución gaussiana con media cero y desviación estándar σ . Esta expresión recursiva no es tan rápida en algunos lenguajes de programación. Pero puede reescribirse, veamos como se comporta a distintos valores de n :

$$x_0 = x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a^1 x_0 + a^0 z_0 \\ x_2 = a^2 x_0 + a^1 z_0 + a^0 z_1 \\ \vdots \\ x_n = a^n x_0 + a^{n-1} z_0 + \dots + a^0 z_{n-1} \end{cases}, \quad (2)$$

con esto proponemos que puede reescribirse como:

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(1+i)} z_i \quad (3)$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Caso base: $x_1 = a^1 x_0 + \sum_{i=0}^{1-1} a^{1-(1+i)} z_i = a^1 x_0 + z_0$

Asumo validez en $n = k$: $x_k = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i$

Probar que esto implica validez en $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = ax_k + z_k = a(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i) + z_k$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + a \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i + z_k$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^{k+1-(1+i)} z_i}_{b_{k,i}} + \underbrace{a^0 z_k}_{b_{k,k}}$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^k a^{k+1-(1+i)} z_i$$

\therefore se cumple para $n = k + 1$

La expresión de la Ec. 3 se utilizó para realizar múltiples simulaciones en la Fig. 3a. Para un número mayor de simulaciones puede obtenerse la distribución $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 3b.

Por otro lado, un segundo modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = (a + z_n)x_n \quad (4)$$

donde z_n es una variable estocástica con distribución gaussiana con media cero y desviación estándar σ . Nuevamente, puede reescribirse de forma no recursiva.

Veamos como se comporta a distintos valores de n :

$$x_0 = x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0(a + z_0) \\ x_2 = x_0(a + z_0)(a + z_1) \\ \vdots \\ x_n = x_0(a + z_0)(a + z_1)\dots(a + z_{n-1}) \end{cases} \quad (5)$$

Puede reescribirse como:

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} (a + z_i) \quad (6)$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Un ejemplo de que se cumple:

$$x_1 = x_0 \prod_{i=0}^{1-1} (a + z_i) = x_0(a + z_0)$$

Asumo que se cumple para $n = k$:

$$x_k = x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

Probar que esto implica que se cumple para $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_k = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = x_0 \prod_{i=0}^k (a + z_i)$$

\therefore se cumple para $n = k + 1$

(7)

La expresión de la Ec. 6 se utilizó para realizar múltiples simulaciones en la Fig. 4a. Para un número mayor de simulaciones puede obtenerse la distribución $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 4b.

Para una elección de b y d que permita un estado estacionario positivo (por ejemplo, $b = 0,1, d = 0,001$ da un valor medio estacionario $\langle x \rangle = 100$), use múltiples realizaciones para calcular la distribución estacionaria $P(x)$.

Para una elección de b y d que produzca extinciones por fluctuaciones ($b = 0,1, d = 0,02, n(0) = 10$), use múltiples realizaciones para calcular la distribución del tiempo de extinción.

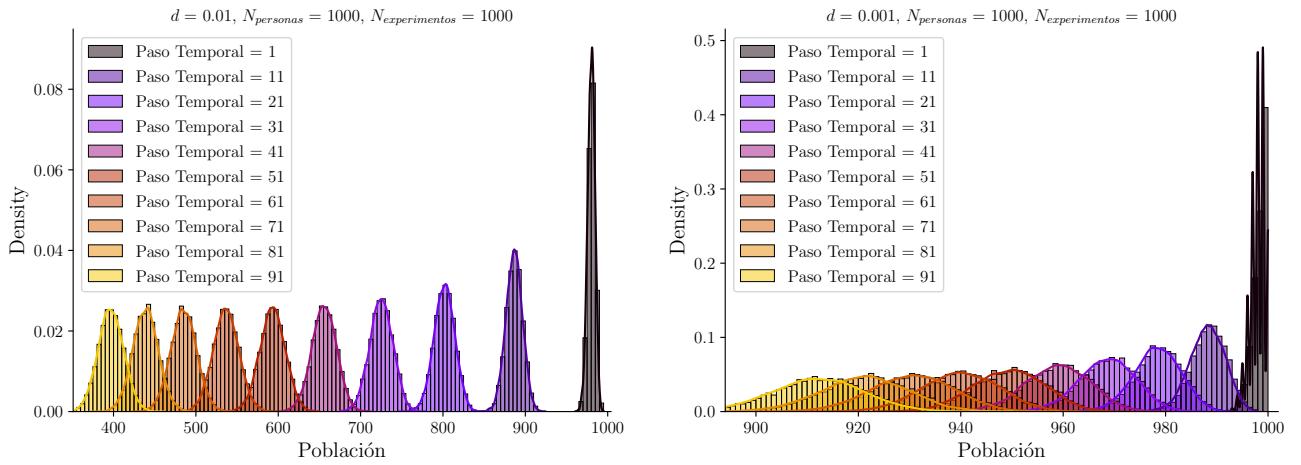


Figura 1: Evolución en pasos temporales de la distribución de numero de habitantes. Para $d = 0,01$ y $d = 0,001$.

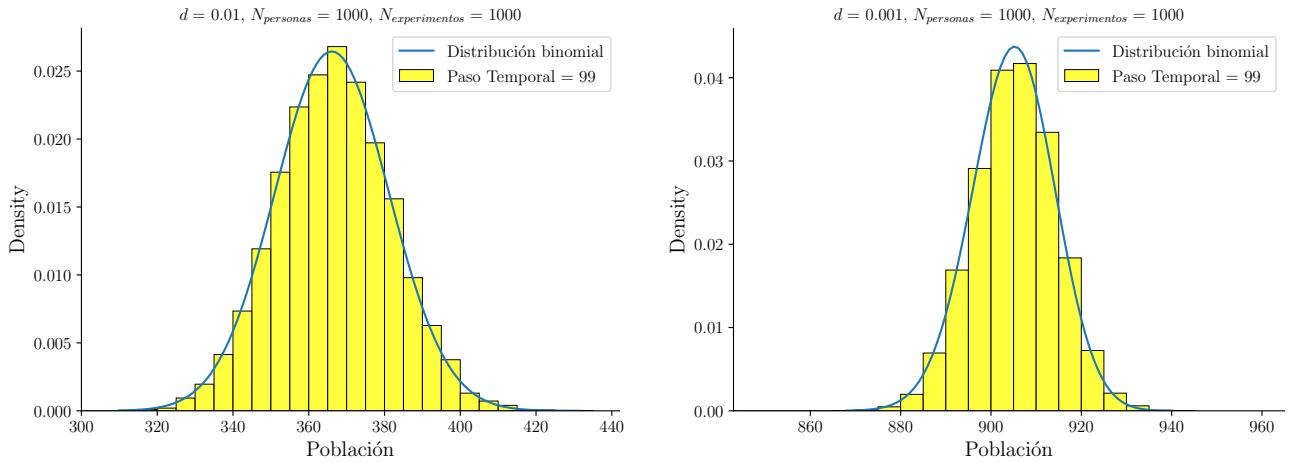
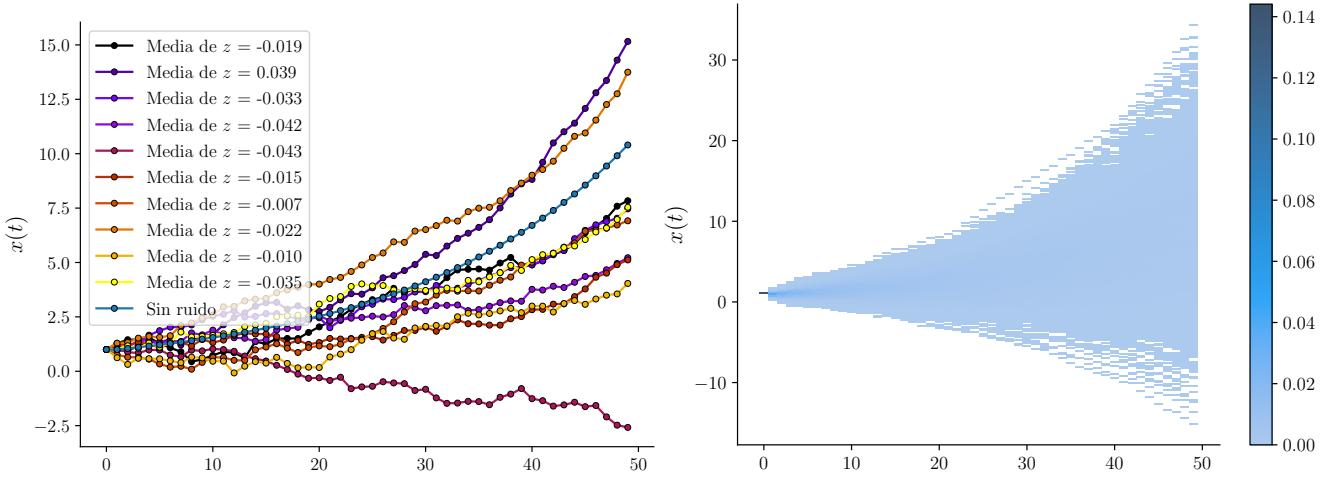


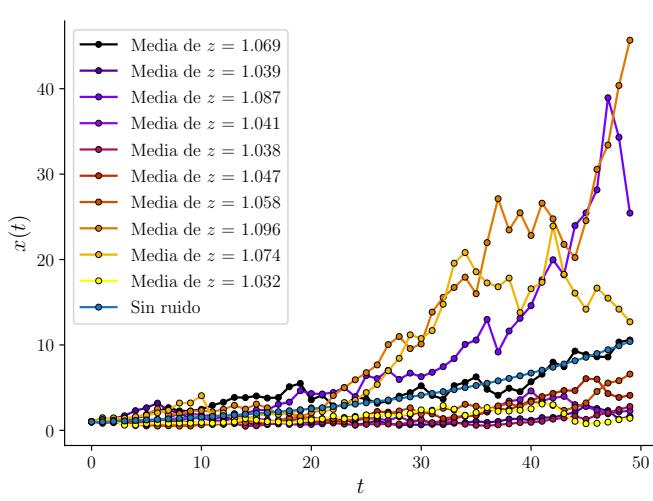
Figura 2: Comparación entre la densidad obtenida mediante la simulación y una distribución binomial. Para $d = 0,01$ y $d = 0,001$.



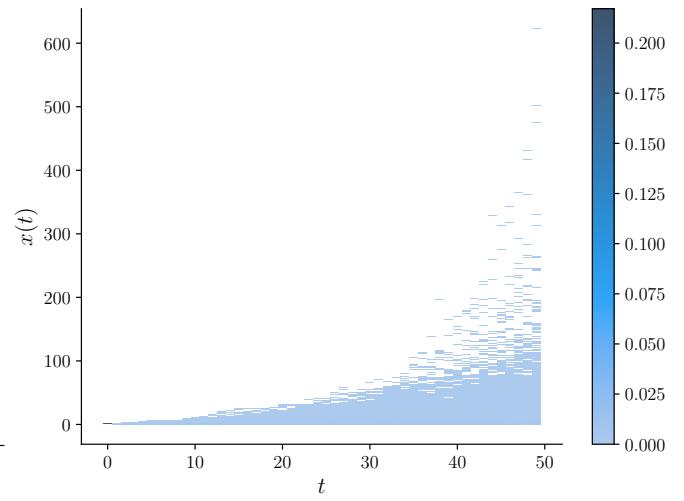
(a) Evolución del mapeo para distintos valores medios de la generación de números aleatorios, para 50 pasos en t .

(b) $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t .

RESOLUCIÓN EJ 3



(a) Evolución del mapeo para distintos valores medios de la generación de números aleatorios, para 50 pasos en t .



(b) $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t .