Práctico 2

M. G. Aramayo
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

RESOLUCIÓN EJ 1:

Analizando la dinámica del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,z) = x\left[(A\vec{x})_x - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \\ \dot{y} = f_2(x,y,z) = y\left[(A\vec{x})_y - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \\ \dot{z} = f_3(x,y,z) = z\left[(A\vec{x})_z - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \end{cases}$$

Reduciendo a dos variables mediante la condición. $z = 1 - x - y$

Para el primer sistema y su correspondiente matriz de payoff

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{g-c}{2} & g & \frac{g-c}{2} \\ 0 & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} \\ \frac{g-c}{2} & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{gy+g-c+cy}{2} \\ \frac{g-gx}{2} \\ \frac{g-cx}{2} \end{pmatrix}$$

$$(Ax)_x = \frac{gy+g-c+cy}{2}, \quad (Ax)_y = \frac{g-gx}{2}$$

$$x^T Ax = \frac{cx^2 - 2cx + 2cxy + g}{2}$$

$$f_1(x,y) = -x\frac{cx^2 + 2cyx - 2cx - gy - cy + c}{2}$$

$$f_2(x,y) = -xy\frac{cx + 2cy + g - 2c}{2}$$

Puntos de equilibrio:

$P_1^* = (0, \frac{G-2C}{2C}, 1 - \frac{G-2C}{2C})$

$P_2^* = (0,0,1)$

$P_3^* = (0, \frac{C}{G+C}, 1 - \frac{C}{G+C})$

$P_4^* = (1,0,0)$

$P_5^* = (\frac{G}{C}, 1 - \frac{G}{C}, 0)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{-g^2+cg+4c^2}{4c} & 0 \\ -\frac{(g-2c)^2}{2c} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación de estables}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{c\left(g^2-cg\right)}{2(g+c)^2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Saddle??????$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{-g+c}{2} \\ 0 & -\frac{g-c}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación de } {}^{\text{Estables si } g>c}_{\text{Inestables si } g<c}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g(g-c)}{2c} \\ -\frac{g(-g+c)}{2c} & -\frac{g(-g+c)}{c} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{g}{c}\frac{g-c}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Equilibrio } {}^{\text{Estables si } g<c}_{\text{Inestables si } g>c}$$

Para el segundo sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{g-c}{2} & g & g \\ 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & g & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-gx+2g-cx}{2} \\ \frac{gy}{2} \\ \frac{-gx+gy+g}{2} \end{pmatrix}$$

$$(Ax)_x = \frac{-gx+2g-cx}{2}, \quad (Ax)_y = \frac{gy}{2}, \quad x^T Ax = \frac{g-cx^2}{2}$$

$$f_1(x,y) = \frac{x}{2}(cx^2 - x(g+c) + g)$$

$$f_2(x,y) = \frac{y}{2}(cx^2 + gy - g)$$

Puntos de equilibrio:

$P_1^* = (0,0,1)$

$P_2^* = (0,1,0)$

$P_3^* = (1,0,0)$

$P_4^* = (\frac{G}{C}, 0, 1 - \frac{G}{C})$

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Saddle$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Inestable}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{c-g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c-g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Equilibrio } {}^{\text{Estables si } g>c}_{\text{Inestables si } g<c}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{g}{c}\frac{g-c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{c}\frac{g-c}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Equilibrio } {}^{\text{Estables si } g<c}_{\text{Inestables si } g>c}$$

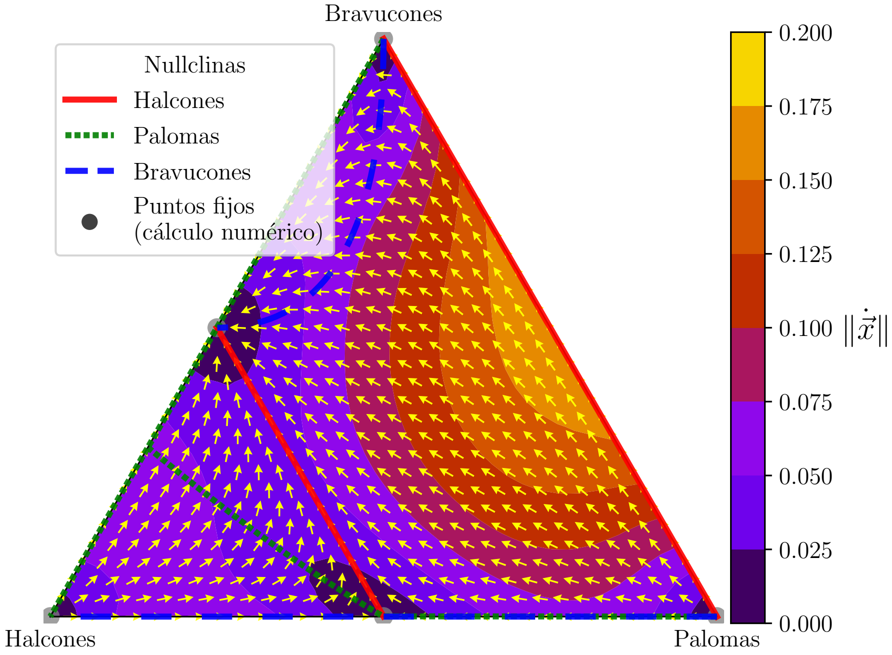

Figura 1: Órbitas en el simplex para el sistema de Halcones, Palomas y Bravucones

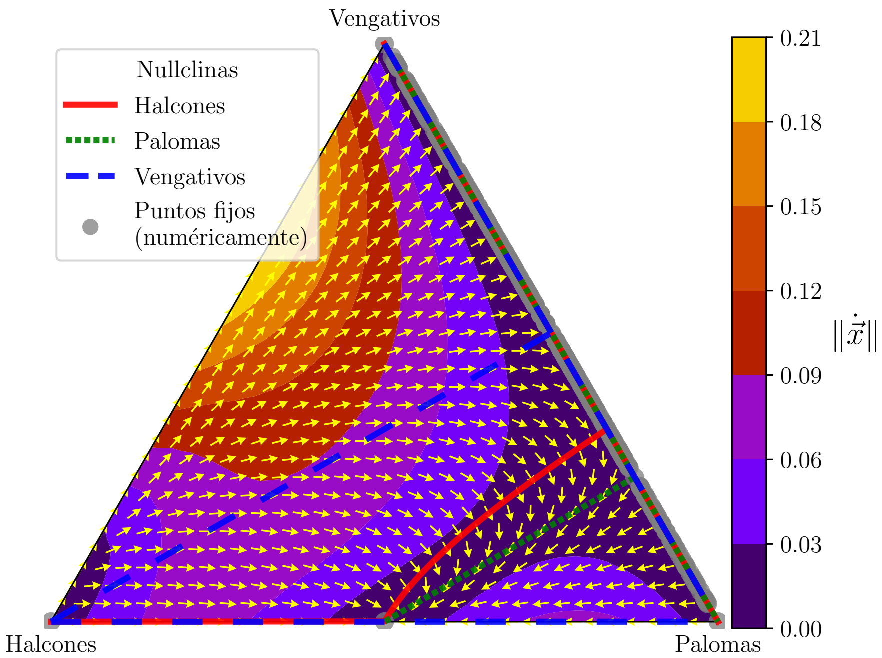

Figura 2: Órbitas en el simplex para el sistema de Halcones, Palomas y vengativos

Jugadores	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
C	C_0	C_1	C_2	$\cdots$	C_{n-1}
D	D_0	D_1	D_2	$\cdots$	D_{n-1}

Tabla I: Payoff de las estrategias C y D cuando compiten con m cooperadores y $n-m$ defectores, para un total de n jugadores.

RESOLUCIÓN EJ 2:

Interpretación:

- C_i: cooperan i jugadores
- D_i: defraudan i jugadores

Entonces, C_0 significa que no coopera nadie o que todos defraudan y D_0 significa el recíproco.

Esto significa que podríamos escribir

$$C_0 = C_n$$
$$D_0 = D_n$$

Dilema del prisionero multijugador

Para que ocurra el dilema con 2 jugadores, debe satisfacerse que

$$C_1 > D_0 > C_0 > D_1.$$

En clase llamamos

$T = C_1$ Tentación para defraudar
$R = D_0$ Recompensa por cooperar
$P = C_0$ Penalidad por defraudar mutuamente
$S = D_1$ Sucker's payoff,

resultando

$$T > R > P > S$$

En el caso de n jugadores, queremos que la tentación por defraudar siga siendo el mayor de todos los payoffs. Y esta tentación debería ser mayor cuanto menor sea el número de jugadores cooperando. Es decir

$$C_1 > C_2 > \cdots > C_{n-1}.$$

Por su parte, seguiremos teniendo una recompensa cuando todos los jugadores cooperan (D_0), que será menor que las tentaciones, pero mayor que la penalidad cuando nadie coopera (C_0). Esto es

$$C_1 > C_2 > \cdots > C_{n-1} > D_0 > C_0.$$

Finalmente, los sucker's payoff deben ser menores que la penalidad por no cooperar. Además, el sucker's payoff es menor cuanto menor sea el número de jugadores que defraudan, resultando

$$\underbrace{C_1 > C_2 > \cdots > C_{n-1}}_{\text{tentaciones } T} > \underbrace{D_0}_{R} > \underbrace{C_0}_{P} > \underbrace{D_{n-1} > \cdots > D_2 > D_1}_{\text{sucker's payoff } S}.$$