

# Sistemas dinámicos

## I. INTRODUCCIÓN

# **Función de Lipschitz:** Una función  $f : M \rightarrow N$ , entre dos espacios métricos con métricas  $d_M, d_N$  satisface la condición de Lipschitz (o es Lipschitz continua) si existe una constante  $K > 0$  tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

$K$  es la constante Lipschitz de la función. Si  $M$  es  $\mathbb{R}^m$  y  $N$  es  $\mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

~ Toda función Lipschitz continua es uniformemente continua y por tanto continua.

~ Continuidad  $\Rightarrow \exists$  soluciones (Teorema Peano, valido para EDO)

> **Teorema de Picard-Lindelöf:** Sea  $f(t, x) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Omega$  un abierto, una función continua y localmente Lipschitz respecto de  $x$ . Entonces, dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$  es posible hallar un intervalo cerrado  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  donde existe una solución de problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que cumple que los pares  $(t, x(t)) \in \Omega$ , para todo  $t$  en  $I_\alpha$  y esa solución es única

# **Punto Fijo**(equilibrio, estado estacionario, punto singular): Punto del espacio de fases que no evoluciona en el tiempo.

>> Encontrar puntos fijos( $x^*$ ):

■ Caso continuo: Por ser  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  resolver,  $f(x^*) = 0$ .

■ Caso discreto: Resolver,  $x^* = f(x^*)$

# **Atractor:** Conjunto hacia el cual un sistema dinámico evoluciona con el tiempo. Puede ser un punto, una curva o una estructura más complicada.

# **Punto fijo estable:** para todos los valores iniciales  $x_0$  cerca de  $x^*$  el sistema converge a  $x^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

# **Punto fijo marginalmente estable (neutral):** para todos los valores iniciales  $x_0$  cerca de  $x^*$ , el sistema permanece cerca de  $x^*$  pero no converge a  $x^*$ .

# **punto fijo inestable:** para valores iniciales  $x_0$  muy cerca de  $x^*$ , el sistema se aleja de  $x^*$

# **Autonomía**

$$\underbrace{\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, \lambda, t)}_{\text{No autónomo}}, \quad \underbrace{\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda)}_{\text{Autónomo}}$$

# **Estabilidad de Lyapunov (Lineal) (Liapunov en algunos libros):** Un punto de equilibrio del sistema  $x'(t) = Ax(t)$  es estable en el sentido de Lyapunov (ESL) si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un valor  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

independiente de  $t$ . Si además  $\delta$  no depende del tiempo inicial  $t_0$  el punto es uniformemente estable

~ En criollo: "Si arranco *cerca* del equilibrio, la evolución temporal ocurre *cerca* del equilibrio", *cerca* hace referencia a una cantidad finita, como en topología en algunos casos, los epsilon y delta se pueden hacer arbitrariamente chicos.

~ Segun el tamaño de  $\delta(t_0, \varepsilon)$ , tendre estabilidad local( $\delta$  chico) o global( $\delta$  grande).

~ Para sistemas lineales todos los puntos de equilibrio son globales, o son puntos aislados o son subespacios invariantes (Las trayectorias que empiezan en un dado subespacio evolucionan dentro de ese subespacio).

~ Sistemas no lineales: Hay estabilidad asintótica y de lyapunov.

# **Estabilidad Asintótica:** Es (ESL) y además se cumple  $\|x(t) - x^*\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  el punto es asintóticamente estable

• **Estabilidad orbital (2D en adelante)**

# **Órbita estable**  $x(t)$  es una órbita estable si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier otra solución  $y(t)$ , tal que  $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t > t_0$

# **Órbita asintóticamente estable**  $x(t)$  es una órbita asint. estable si es estable y además para cualquier otra solución  $y(t)$ , existe  $\delta$  tal que  $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$

> **Análisis lineal:**  $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f(x^*) = 0 \end{cases}$

Para analizar estabilidad de  $x^*$ , introduzco una perturbación

$$\begin{aligned} x &= x^* + \varepsilon, & \varepsilon << 1 \\ \dot{x} &= \dot{x}^* + \dot{\varepsilon} = 0 + \dot{\varepsilon} = f(x^* + \varepsilon) = f(x^*) + \varepsilon f_x(x^*) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\varepsilon} &\approx \varepsilon f_x(x^*) = \lambda \varepsilon & \lambda \equiv f_x(x^*) \end{aligned}$$

Es decir, tenemos ahora una ecuación diferencial lineal para el comportamiento de la perturbación y cuya solución es

$$\varepsilon(t) = Ae^{\lambda t}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, r), & f(x^*, r) &= 0 \\ \frac{df(x^*, r)}{dr} &= \begin{cases} < 0 & \text{Estable} \\ > 0 & \text{Inestable} \end{cases} \end{aligned}$$

Ya que la perturbación decrece o crece respectivamente. Si  $\lambda = 0$  no podemos decir nada.

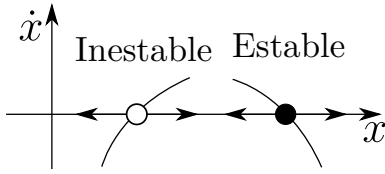


Figura 1. Criterio de estabilidad.

## II. BIFURCACIONES

### A. Bifurcaciones 1D

La estructura cualitativa del flujo puede cambiar cuando cambian los parámetros. Los puntos fijos pueden crearse o destruirse, o su estabilidad puede cambiar.

Estos cambios cualitativos de la dinámica se llaman bifurcaciones, y los valores de los parámetros para los cuales se producen se llaman puntos de bifurcación.

En sistemas de 1D hay 3 bifurcaciones fundamentales que se asocian a la creación y destrucción de equilibrios o cambios de estabilidad.

### III. MAPEOS 1D

# **Definición:**  $x_{k+1} = f(x_k, r)$

> **Análisis lineal:**  $\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, r) \\ x^* = f(x^*, r) \end{cases}$

Para analizar estabilidad de  $x^*$ , introduzco una perturbación

$$x_k = x^* + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \ll 1$$

$$x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}$$

$$x_{k+1} = f(x^* + \varepsilon_k, r) = f(x^*, r) + \varepsilon_k f_x(x^*, r) + O(\varepsilon_k^2)$$

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k f_x(x^*, r) = \lambda^n \varepsilon_0, \quad \lambda := f_x(x^*, r)$$

Modulo de perturbación crece si  $|f_x(x^*, r)| = |\lambda| > 1$

Entonces:

$$|f_x(x^*, r)| = |\lambda| = \begin{cases} < 1 & \text{Estable} \\ > 1 & \text{Inestable} \\ = 1 & \text{Marginalmente estable} \\ = 0 & \text{Superestable} \end{cases}$$

# **Orbita periódica:** De período  $p$  si es el mínimo número tal que:  $x_0 = f(x_{p-1}, r)$

> Orbita de período  $p \Rightarrow p$  puntos fijos de  $f^p$

$$x_{k+p} = f^p(x_k, r) = x_k$$

> Los  $\lambda$  de los  $p$  puntos fijos:

$$|(f^p)'(x_k, r)| < 1, \forall 0 \leq k \leq p-1$$

> Alcanza con analizar un solo punto fijo

$$(f^p)'(x_0, r) = (f^p)'(x_1, r) = \dots = (f^p)'(x_{p-1}, r)$$

> La derivada:

$$(f^p)'(x_k, r) = \prod_{k=0}^{p-1} |f'(x_k, r)|$$

## IV. MATEMÁTICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS

> **Modelo de Malthus (Crecimiento exponencial):**

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad r = \eta - \mu = \text{natalidad} - \text{mortalidad}$$

· **Catastrofe malthusiana:** La población crece más rápido que la capacidad de producir alimento.

$$\frac{dh}{dt} = rh, \quad \frac{da}{dt} = k$$

$$c(t) = \frac{a(t)}{h(t)} = \frac{a_0 kt}{h_0 e^{rt}} = c_0 k t e^{-rt} \rightarrow c_{\text{crit}} \rightarrow t_{\text{crit}}$$

$$\frac{c_{\text{crit}}}{c_0} = k t_{\text{crit}} e^{-r t_{\text{crit}}} \rightarrow t_{\text{crit}} = -W \left( -r \frac{c_{\text{crit}}}{c_0} e^{-r/k} \right) \quad \begin{matrix} \text{Función de} \\ \text{Lambert} \end{matrix}$$

Función de Lambert:

$$W = f^{-1}(z),$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \\ \frac{dx}{dt} &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = K \end{cases} \\ \frac{df}{dx} &= r \left( 1 - 2 \frac{x}{K} \right) \end{aligned}$$

· **Mapeo Beverton Holt (Crecimiento limitado):**

En 1957 Beverton y Holt propusieron un mapeo que reproducía el comportamiento de ecuación logística

Mapeo logístico:

$$x_{n+1} = \frac{r x_n}{1 + \frac{r-1}{K} x_n}$$

Puntos fijos:  $\begin{cases} x = 0 & \text{Estable si } 0 < r < 1 \\ x = K & \text{Estable si } r < 1 \end{cases}$

La solución es  $x_n = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-n}} \rightarrow K$

Para hallarla se hace el cambio de variable:  $u_n = 1/x_n$

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \frac{K r}{K + \frac{r-1}{u_n}} \rightarrow u_{n+1} = \frac{K u_n + r - 1}{K r} = \frac{1}{r} \left( u_n + \frac{r-1}{K} \right)$$

· **Logística con delay**

$$\frac{dN}{dt} = f(N(t), N(t-T)) \quad T > 0$$

$$\frac{dN}{dt} = r N(t) \left[ 1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t u(t-s) N(s) ds \right]$$

$$u(t-s) = \delta(t-T-s) \Rightarrow \int_{-\infty}^t u(t-s) N(s) ds = N(t-T)$$

$$\frac{dN}{dt} = r N(t) \left[ 1 - \frac{N(t-T)}{K} \right]$$

· **Poblaciones estables Lotka:**

$\nu(t)$  Natalidad

$\rho(\tau)$  Probabilidad de supervivencia hasta la edad T

$\phi(\tau)$  Fertilidad a la edad T

$\int_0^\infty \rho(\tau) d\tau$  Esperanza de vida

Por otro lado, podemos calcular la tasa de natalidad  $v(t)$  en un tiempo dado a partir de la composición de la población, para eso debemos tener en cuenta la historia previa:  $v(t) = \int_0^\infty v(t-\tau)\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau$  Es decir, debemos contar la cantidad de mujeres que nacieron en  $t-T$  que sobrevivieron hasta  $t$  y considerar como contribuyen a la tasa de natalidad total dada su edad.

$v(t) = \int_0^\infty v(t-\tau)\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau$  Natalidad Propongo una solución exponencial para la ecuación anterior  $v(t) = v(0)e^{rt}$  con  $r$  desconocido Reemplazo y obtengo  $v(t) = \int_0^\infty v(t)e^{-r\tau}\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau \Rightarrow 1 = \int_0^\infty e^{-r\tau}\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau$  La ecuación de la derecha se conoce como ecuación de Lotka. La integral es siempre positiva y decrece monotonamente con  $r$ , por eso hay un solo valor de  $r$  que satisface la ecuación,  $r_1$

Poblaciones estables - Lotka Obtenido el valor de  $r$ , puedo calcular la población total a un tiempo dado  $N(t) = \int_0^\infty v(t-\tau)\rho(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{r_1(t-\tau)}\rho(\tau)d\tau$  Si quiero saber que cantidad de mujeres de una dada edad han sobrevivido hasta tiempo  $t$  calculo

$$\frac{v(t-\eta)\rho(\eta)}{N(t)} = \frac{v_0 e^{r_1(\tau-\eta)}\rho(\eta)}{\int_0^\infty v_0 e^{r_1(\tau-\tau)}\rho(\tau)d\tau} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-r_1\tau}\rho(\tau)d\tau$$

El límite es una constante y es la estructura etaria buscada por Lotka

#### • Poblaciones estables - Matrices de Leslie:

Leslie al igual que Lotka, buscaba hallar la forma de un perfil estacionario, pero en modelo discreto. Introdujo un modelo para el crecimiento del número de hembras en una población no sujeta a procesos migratorios ni a limitaciones que pueda imponer el ambiente. La población está estratificada en edades y a lo largo del tiempo los individuos pueden permanecer en el mismo estrato etario durante un tiempo y finalmente moverse al nivel siguiente. Consideremos un caso con dos niveles etarios

$$N_1(t+1) = f_1 N_1(t) + f_2 N_2(t)$$

$N_2(t+1) = s_1 N_1(t)$  Donde  $f$ , es la fecundidad de las hembras cada grupo etario y representa el valor medio del número de descendientes per cápita de hembras de edad Por otro lado debemos evaluar la supervivencia de las hembras, que caracterizamos mediante una tasa media de supervivencia por edad  $s$ .

## V. EJERCICIO 2

### > Analisis lineal 2D:

## VI. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

### \* Proceso de nacimiento

Sistema:

- Individuos homogéneos
- Inmortales
- Natalidad  $b$
- No hay limitaciones de recursos ni competencia.

En continuo:

$$\begin{aligned} N(t+dt) &= N(t) + bdtN(t) \\ \Rightarrow \frac{N(t+dt) - N(t)}{dt} &= bN(t) \xrightarrow{dt \rightarrow 0} \frac{dN}{dt} = bN \\ &\Rightarrow N(t) = N(0)e^{bt} \end{aligned}$$

Ecuación maestra caso discreto:

$$\frac{dP(N,t)}{dt} = -bNP(N,t) + b(N-1)P(N-1,t).$$

Solución, distribución binomial:

$$P(N,t) = \binom{N-1}{N_0-1} e^{-bN_0t} (1 - e^{-bt})^{N-N_0}$$

donde  $N_0 = N(0)$  es la condición inicial (es decir, la condición inicial es una delta de Dirac en  $N_0$ ).

$$\langle N \rangle = N_0 e^{bt}, \text{ el valor medio,}$$

$$\sigma^2 = N_0 e^{bt} (e^{bt} - 1), \text{ la varianza.}$$

Parece que la varianza también creciera exponencialmente, e inclusive que  $\sigma^2 \sim \langle N \rangle^2$ , lo cual parece decir que  $N(t)$  se aleja de  $\langle N \rangle$  con el paso del tiempo. Pero no es así, ya que la variación relativa es:

$$\frac{\sigma}{\langle N \rangle} = \frac{\sqrt{N_0 e^{bt} (e^{bt} - 1)}}{N_0 e^{bt}} = \frac{\sqrt{1 - e^{-bt}}}{\sqrt{N_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{N_0}}$$

### > Simulacion estocastica:

$$b = \ln(1 + p_b), p_b = e^b - 1 \quad \begin{array}{l} b: \text{Tasa de reproduccion} \\ p_b: \text{Probabilidad de reproduccion} \end{array}$$

### > Algoritmo de Gillespie:

Es posible sortear un valor numérico con distribución uniforme. Es posible transformar esos valores en otros, con la distribución de probabilidad que uno quiera. Para distribución exponencial si  $w \in [0,1)$  con probabilidad uniforme, basta hacer:

$$\tau = -\frac{\ln w}{bN}$$

Y  $P(\tau)$  tiene la distribución exponencial decreciente deseada. La simulación entonces procede de la siguiente manera:

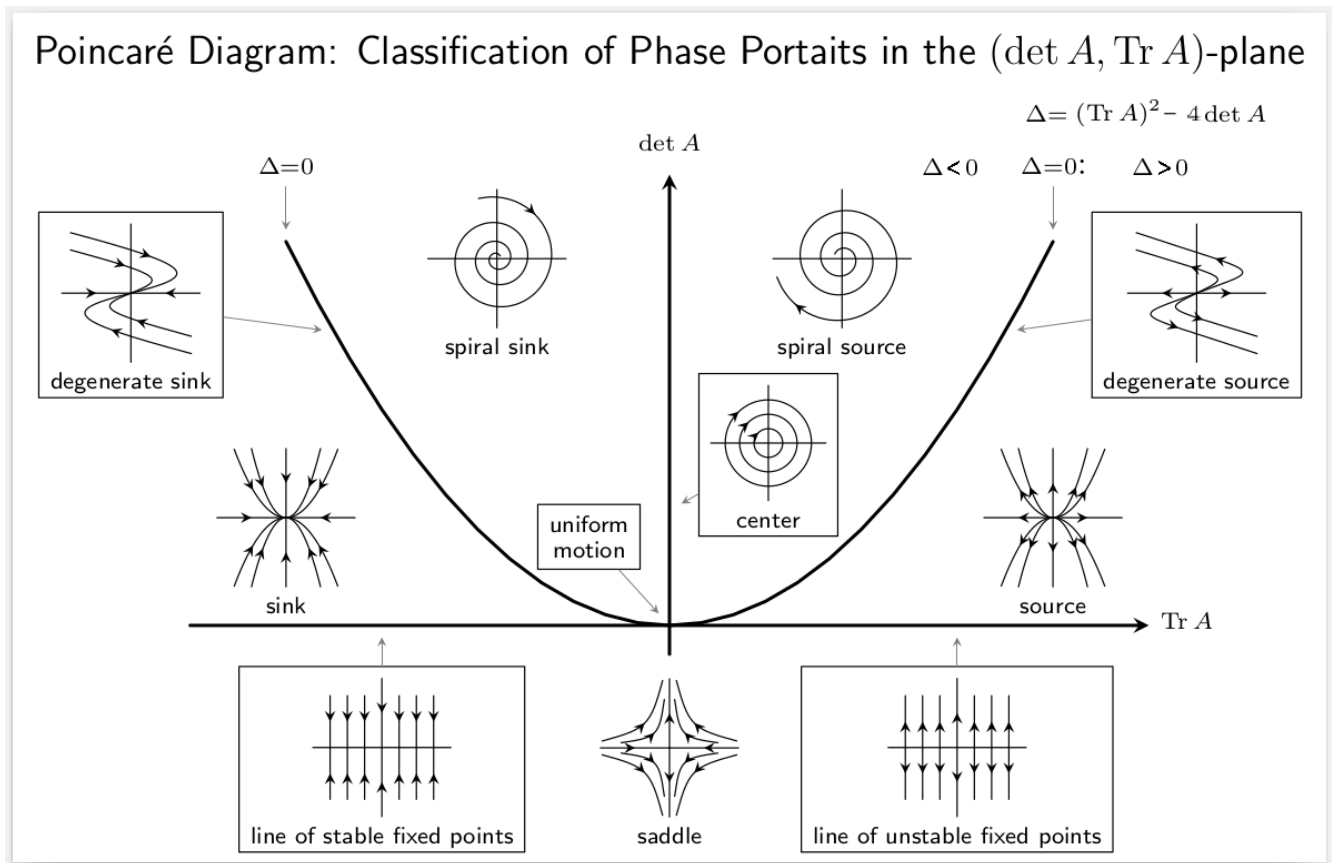


Figura 2. Criterio de estabilidad.

1. Dar un valor inicial  $N(0) = N_0$ .
2. Sortear  $w$  uniforme.
3. Obtener  $\tau$ .
4. Incrementar el tiempo:  $t \rightarrow t + \tau$ .
5. Incrementar la población:  $N \rightarrow N + 1$
6. Repetir desde 2 .