Sistemas dinámicos

Notación:
~: Nota , •: Tema , >: Resultado , #: Definir,
*: Ejemplo, ||: Demostracion

I. INTRODUCCIÓN

Función de Lipschitz: Una función $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, entre dos espacios métricos con métricas $d_M d_N$ satisface la condición de Lipschitz(o es Lipschitz continua) si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

K es la constante Lipschitz de la función. Si M es $\mathbb{R}^m$ y N es $\mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

~ Toda función Lipschitz continua es uniformemente continua y por tanto continua.

~ Continuidad ⇒ ∃ soluciones (Teorema Peano, válido para EDO)

> **Teorema de Picard-Lindelöf**: Sea $f(t, x) : \Omega \subseteq R \times R^n \to R^n$ con Ω un abierto, una función continua y localmente Lipschitz respecto de x. Entonces, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ es posible hallar un intervalo cerrado $\mathrm{I}_\alpha = [\mathrm{t}_0 - \alpha, \mathrm{t}_0 + \alpha] \in \mathbb{R}, a > 0$ donde existe una solución de problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que cumple que los pares $(t, x(t)) \in \Omega$, para todo t en I_α y esa solución es única

Punto Fijo(equilibrio, estado estacionario, punto singular): Punto del espacio de fases que no evoluciona en el tiempo.

>> Encontrar puntos fijos(x^*):

- Caso continuo: Resolver, $f(x^*) = 0$.
- Caso discreto: Resolver, $x^* = f(x^*)$

Atractor: Conjunto hacia el cual un sistema dinámico evoluciona con el tiempo. Puede ser un punto, una curva o una estructura más complicada.

Punto fijo estable: para todos los valores iniciales x_0 cerca de x^* el sistema converge a x^* cuando $t \to \infty$.

Punto fijo marginalmente estable (neutral): para todos los valores iniciales x_0 cerca de x^*, el sistema permanece cerca de x^* pero no converge a x^*.

Punto fijo inestable: Para valores iniciales x_0 muy cerca de x^*, el sistema se aleja de x^*

Autonomía

$$\underbrace{\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, \lambda, t),}_{\textbf{No autónomo}} \quad \underbrace{\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda)}_{\textbf{Autónomo}}$$

Estabilidad de Lyapunov(Lineal)(Liapunov en algunos libros): Un punto de equilibrio del sistema $\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \mathrm{Ax}(\mathrm{t})$ es estable en el sentido de Lyapunov (ESL) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un valor $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

independiente de t. Si además δ no depende del tiempo inicial t_0 el punto es uniformemente estable

~ En criollo: "Si arranco *cerca* del equilibrio, la evolución temporal ocurre *cerca* del equilibrio", *cerca* hace referencia a una cantidad finita, como en topología en algunos casos, los epsilon y delta se pueden hacer arbitrariamente chicos.

~ Según el tamaño de $\delta(t_0, \varepsilon)$, tendré estabilidad local(δ chico) o global(δ grande).

~ Para sistemas lineales todos los puntos de equilibrio son globales, o son puntos aislados o son subespacios invariantes (Las trayectorias que empiezan en un dado subespacio evolucionan dentro de ese subespacio).

~ Sistemas no lineales: Hay estabilidad asintótica y de Lyapunov.

Estabilidad Asintótica: Es (ESL) y además se cumple $\|x(t) - x^*\| \to 0$ cuando $t \to \infty$ el punto es asintóticamente estable

• **Estabilidad orbital (2D en adelante)**

Órbita estable: $x(t)$ es una órbita estable si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier otra solución $y(t)$, tal que $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \delta$ para todo $t > t_0$

Órbita asintóticamente estable: $x(t)$ es una órbita asint. estable si es estable y además para cualquier otra solución $y(t)$, existe δ tal que $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$

> **Análisis lineal:** $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f(x^*) = 0 \end{cases}$

Para analizar estabilidad de x^*, introduzco una perturbación

$$x = x^* + \varepsilon, \quad \varepsilon << 1$$
$$\dot{x} = \dot{x}^* + \dot{\varepsilon} = 0 + \dot{\varepsilon} = f(x^* + \varepsilon) = f(x^*) + \varepsilon f_x(x^*) + O(\varepsilon^2)$$
$$\dot{\varepsilon} \approx \varepsilon f_x(x^*) = \lambda\varepsilon \quad \lambda \equiv f_x(x^*)$$

Es decir, tenemos ahora una ecuación diferencial lineal para el comportamiento de la perturbación y cuya solución es

$$\varepsilon(t) = Ae^{\lambda t}$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,r), \qquad f(x^*,r) = 0$$

$$\frac{df(x^*,r)}{dx} = \begin{cases} < 0 & \text{Estable} \\ > 0 & \text{Inestable} \end{cases}$$

Ya que la perturbación decrece o crece respectivamente. Si $\lambda = 0$ no podemos decir nada.

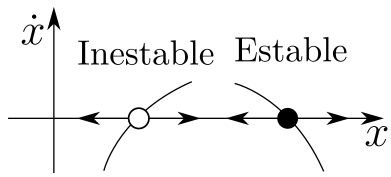

Figura 1: Criterio de estabilidad sistema 1D.

> **Análisis lineal caso bidimensional:** Flujos bidimensionales:
$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\text{Tr}\,\mathbf{A} \pm \sqrt{\text{Tr}\,\mathbf{A}^2 - 4\text{Det}\mathbf{A}}\right)$

- Det $A < 0 \to$ Saddle

  Dos autovalores reales de diferente signo $\to$ Saddle

- Det A $= 0$, Tr A $< 0 \to$ Acumulación de estables

  Un autovalor nulo, otro real negativo $\to$ Acumulación de estables

- Det A $= 0$, Tr A $> 0 \to$ Acumulación de inestables

  Un autovalor nulo, otro real positivo $\to$ Acumulación de inestables

- $0 <$ Det $A < (\text{ Tr } A)^2/4$, Tr $A < 0 \to$ Nodo estable

  Dos autovalores reales negativos $\to$ Nodo estable

- $0 <$ Det $A < (\text{Tr } A)^2/4$ Tr $A > 0 \to$ Nodo inestable

  Dos autovalores reales positivos $\to$ Nodo inestable

- $(\text{Tr A})^2/4 <$ Det A, Tr A $< 0 \to$ Espiral estable

  Dos autovalores complejos, parte real negativa $\to$ Espiral estable

- $(\text{Tr } A)^2/4 <$ Det A, Tr $A > 0 \to$ Espiral inestable

  Dos autovalores complejos, parte real posiiva $\to$ Espiral inestable

- Det $A > 0$, Tr $A = 0 \to$ Centro

  Dos autovalores imaginarios $\to$ Centro

- Det $A = (\text{Tr } A)^2/4$, TrA $< 0 \to$ Nodo degenarado estable

  Dos autovalores iguales $\to$ Nodo degenarado estable

- Det $A = (\text{Tr } A)^2/4$, TrA $> 0 \to$ Nodo degenarado inestable

  Dos autovalores iguales $\to$ Nodo degenarado inestable

II. BIFURCACIONES

A. Bifurcaciones 1D

La estructura cualitativa del flujo puede cambiar cuando cambian los parámetros. Los puntos fijos pueden crearse o destruirse, o su estabilidad puede cambiar.

Estos cambios cualitativos de la dinámica se llaman bifurcaciones, y los valores de los parámetros para los cuales se producen se llaman puntos de bifurcación.

En sistemas de 1D hay 3 bifurcaciones fundamentales que se asocian a la creación y destrucción de equilibrios o cambios de estabilidad.

III. MAPEOS 1D

Definición: $x_{k+1} = f(x_k, r)$

> **Análisis lineal:** $\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, r) \\ x^* = f(x^*, r) \end{cases}$

Para analizar estabilidad de x^*, introduzco una perturbación
$x_k = x^* + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k << 1$
$x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}$
$x_{k+1} = f(x^* + \varepsilon_k, r) = f(x^*, r) + \varepsilon_k f_x(x^*, r) + O\left(\varepsilon_k^2\right)$
$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k f_x(x^*, r) = \lambda^n \varepsilon_0, \quad \lambda := f_x(x^*, r)$
Modulo de perturbación crece si $|f_x(x^*, r)| = |\lambda| > 1$
Entonces:

$$|f_x(x^*, r)| = |\lambda| = \begin{cases} < 1 & \text{Estable} \\ > 1 & \text{Inestable} \\ = 1 & \text{Marginalmente estable} \\ = 0 & \text{Superestable} \end{cases}$$

Orbita periódica: De período p si es el mínimo numero tal que: $x_0 = f(x_{p-1}, r)$
> Orbita de periodo p $\Rightarrow$ p puntos fijos de f^p
$x_{k+p} = f^p(x_k, r) = x_k$
> Los λ de los p puntos fijos:
$|(f^p)'(x_k, r)| < 1, \forall 0 \leq k \leq p-1$
> Alcanza con analizar un solo punto fijo
$(f^p)'(x_0, r) = (f^p)'(x_1, r) = ... = (f^p)'(x_{p-1}, r)$
> La derivada :
$(f^p)'(x_k, r) = \prod_{k=0}^{p-1} |f'(x_k, r)|$

IV. MATEMÁTICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS

• **Modelo de Malthus(Crecimiento exponencial):**

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad r = \eta - \mu = \text{natalidad - mortalidad}$$

• **Catástrofe malthusiana:** La población crece mas rápido que la capacidad de producir alimento.

$$\frac{dh}{dt} = rh, \quad \frac{da}{dt} = k$$

$$c(t)=\frac{a(t)}{h(t)}=\frac{a_0kt}{h_0e^{rt}}=c_0kte^{-rt}\rightarrow c_{\text{crit}}\ \rightarrow t_{\text{crit}}$$

$$\frac{c_{\text{crit}}}{c_0}=kt_{\text{crit}}\,e^{-rt_{\text{cint}}}$$

$$t_{\text{crit}}\ =-W\left(-r\frac{c_{\text{crit}}}{c_0}e^{\frac{-r}{k}}\right)_{\text{Lambert}}^{\text{Función de}}$$

\# **Función de Lambert:** $X=Ye^Y\Leftrightarrow Y=W(X)$

$$\frac{dx}{dt}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$$
$$\frac{dx}{dt}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=K\end{cases}$$
$$\frac{df}{dx}=r\left(1-2\frac{x}{K}\right)$$

• **Mapeo Beverton Holt(Crecimiento limitado):** En 1957 Beverton y Holt propusieron un mapeo que reproducia el comportamiento de ecuación logística

Mapeo logístico:

$$x_{n+1}=\frac{rx_n}{1+\frac{r-1}{K}x_n}$$

Puntos fijos: $\begin{cases}x=0 & \text{Estable si } 0<r<1\\ x=K & \text{Estable si } r<1\end{cases}$

La solución es $x_n=\frac{Kx_0}{x_0+(K-x_0)r^{-n}}--\rightarrow K$

Para hallarla se hace el cambio de variable: $u_n=1/x_n$

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}\frac{Kr}{K+\frac{r-1}{u_n}}$$

$$\longrightarrow u_{n+1}=\frac{Ku_n+r-1}{Kr}=\frac{1}{r}\left(u_n+\frac{r-1}{K}\right)$$

• **Logística con delay**

$$\frac{dN}{dt}=f(N(t),N(t-T))\quad T>0$$
$$\frac{dN}{dt}=rN(t)\left[1-\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t}u(t-s)N(s)ds\right]$$
$$u(t-s)=\delta(t-T-s)\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}u(t-s)N(s)ds=N(t-T)$$
$$\frac{dN}{dt}=rN(t)\left[1-\frac{N(t-T)}{K}\right]$$

• **Poblaciones estables Lotka:**

$\nu(t)$ Natalidad

$\rho(\tau)$ Probabilidad de supervivencia hasta la edad τ

$\phi(\tau)$ Fertilidad a la edad τ

$\int_0^\infty\rho(\tau)d\tau$ Esperanza de vida

Por otro lado, podemos calcular la tasa de natalidad $v(t)$ en un tiempo dado a partir de la composición de la población, para eso debemos tener en cuenta la historia previa:

$$v(t)=\int_0 v(t-\tau)\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Es decir, debemos contar la cantidad de mujeres que nacieron en $t-\tau$ que sobrevivieron hasta t y considerar como contribuyen a la tasa de natalidad total dada su edad.

Propongo una solución exponencial para la ecuación anterior $v(t)=v(0)e^{rt}$ con r desconocido

Reemplazo y obtengo

$$v(t)=\int_0^\infty v(t)e^{-r\tau}\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau\Rightarrow 1=\int_0^\infty e^{-r\tau}\rho(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

La ecuación de la derecha se conoce como ecuación de Lotka. La integral es siempre positiva y decrece monotonamente con r. por eso hay un solo valor de r que satisface la ecuación, r_1

Obtenido el valor de r, puedo calcular la población total a un tiempo dado

$$N(t)=\int_0^\infty v(t-\tau)\rho(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{r_1(\tau-\tau)}\rho(\tau)d\tau$$

Si quiero saber que cantidad de mujeres de una dada edad han sobrevivido hasta tiempo t calculo

$$\frac{v(t-\eta)\rho(\eta)}{N(t)}=\frac{v_0e^{r_1(\tau-\eta)}\rho(\eta)}{\int_0^\infty v_0e^{r_1(\tau-\tau)}\rho(\tau)d\tau}-\overset{t\to\infty}{\rightarrow}\int_0^\infty e^{-r_1\tau}\rho(\tau)d\tau$$

EI límite es una constante y es la estructura etaria buscada por Lotka

• **Poblaciones estables - Matrices de Leslie:** Leslie al igual que Lotka, buscaba hallar la forma de un perfil estacionario, pero en modelo discreto. Introdujo un modelo para el crecimiento del número de hembras en una población no sujeta a procesos migratorios ni a limitaciones que pueda imponer el ambiente. La población está estratificada en edades y a lo largo del tiempo los individuos pueden permanecer en el mismo estrato etario durante un tiempo y finalmente moverse al nivel siguiente. Consideremos un caso con dos niveles etarios

$$N_1(t+1)=f_1N_1(t)+f_2N_2(t)$$

$N_2(t+1)=s_1N_1(t)$ Donde f, es la fecundidad de las hembras cada grupo etario y representa el valor media del número de descendientes per cápita de hembras de edad Por otro lado debemos evaluar la supervivencia de las hembras, que caracterizamos mediante una tasa media de supervivencia por edad s.

V. EJERCICIO 2

> **Análisis lineal 2D:**

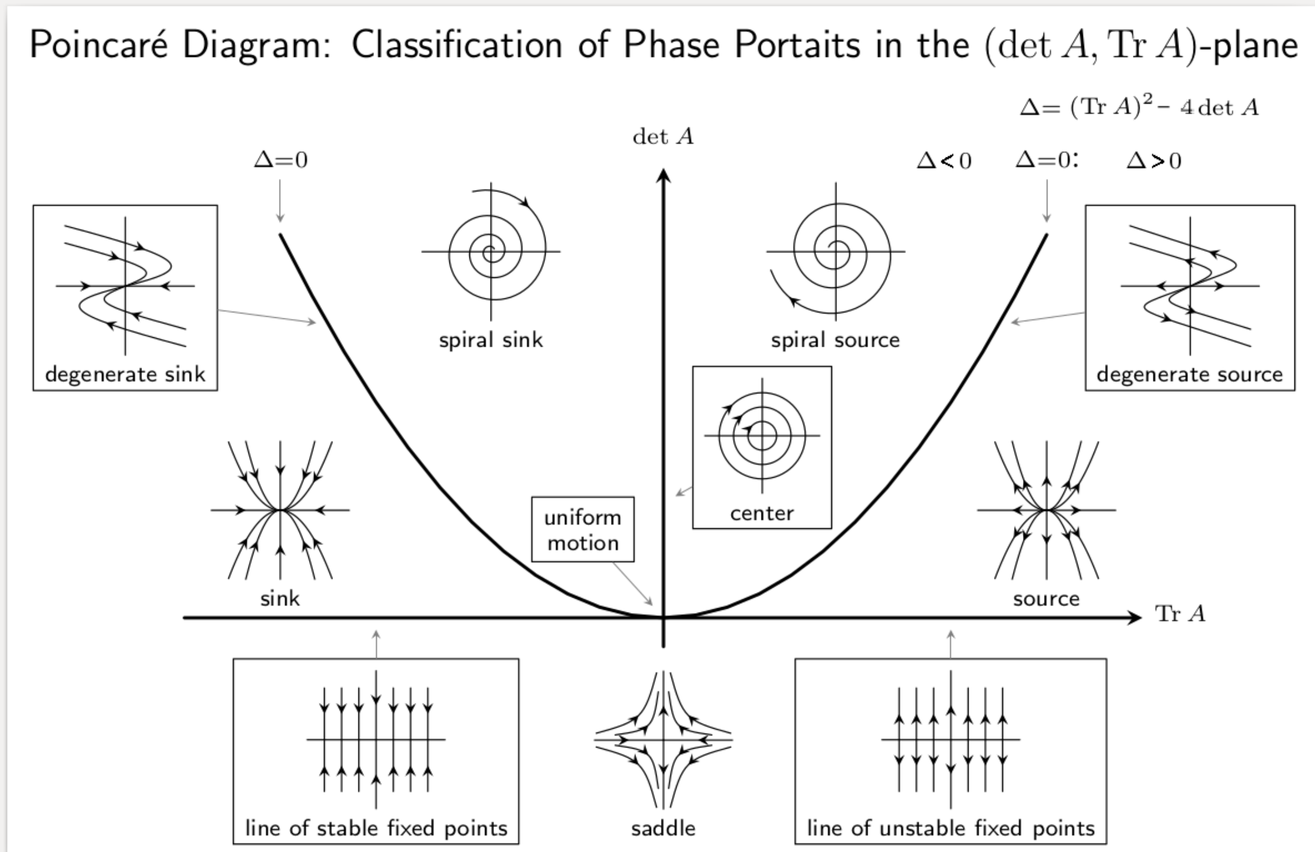

Figura 2: Criterio de estabilidad.

VI. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

• Proceso de nacimiento
Sistema:

- Individuos homogéneos
- Inmortales
- Natalidad b
- No hay limitaciones de recursos ni competencia.

En continuo:

$$N(t+dt) = N(t) + bdtN(t)$$
$$\Rightarrow \frac{N(t+dt)-N(t)}{dt} = bN(t) \overset{dt\to 0}{\longrightarrow} \frac{dN}{dt} = bN$$
$$\Rightarrow N(t) = N(0)e^{bt}$$

Ecuación maestra caso discreto:

$$\frac{dP(N,t)}{dt} = -bNP(N,t) + b(N-1)P(N-1,t).$$

Solución, distribución binomial:

$$P(N,t) = \begin{pmatrix} N-1 \\ N_0-1 \end{pmatrix} e^{-bN_0 t}\left(1-e^{-bt}\right)^{N-N_0}$$

donde $N_0 = N(0)$ es la condición inicial (es decir, la condición inicial es una delta de Dirac en N_0).

$$\langle N \rangle = N_0 e^{bt}, \text{ el valor medio,}$$

$$\sigma^2 = N_0 e^{bt}\left(e^{bt}-1\right), \text{ la varianza.}$$

Parece que la varianza también creciera exponencialmente, e inclusive que $\sigma^2 \sim \langle N \rangle^2$, lo cual parece decir que $N(t)$ se aleja de $\langle N \rangle$ con el paso del tiempo. Pero no es así, ya que la variación relativa es:

$$\frac{\sigma}{\langle N \rangle} = \frac{\sqrt{N_0 e^b\left(e^b-1\right)}}{N_0 e^{bt}} = \frac{\sqrt{1-e^{-bt}}}{\sqrt{N_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{N_0}}$$

> **Simulacion estocastica:**

$b = \ln\left(1+p_b\right), p_b = e^b - 1$ — b: Tasa de reproduccion; p_b: Probabilidad de reproduccion

> **Algoritmo de Gillespie:** Es posible sortear un valor numérico con distribución uniforme. Es posible transformar esos valores en otros, con la distribución de probabilidad que uno quiera. Para distribución exponencial si $w \in [0,1)$ con probabilidad uniforme, basta hacer:

$$\tau = -\frac{\ln w}{bN}$$

Y $P(\tau)$ tiene la distribución exponencial decreciente deseada. La simulación entonces procede de la siguiente manera:

1. Dar un valor inicial $N(0) = N_0$.
2. Sortear w uniforme.
3. Obtener τ.
4. Incrementar el tiempo: $t \to t + \tau$.
5. Incrementar la población: $N \to N + 1$
6. Repetir desde 2 .

VII. TEORÍA DE JUEGOS

\# **Juego:** (R, A) donde:

$R = \{R_1, R_2, \ldots, R_N\}$ Conjunto de estrategias llamadas estrategias puras.

$A = (a_{ij})$ Matriz de pagos

a_{ij} El pago que recibe R_i cuando juega con R_j

\# **Estrategia mixta:** Una estrategia que consiste en tomar estrategias puras R_i con una probabilidad p_i:

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)\,, \text{con}\, p_i \geq 0 \ y \sum p_i = 1$$

∼ La matriz de pagos está definida en términos de los payoff para estrategias puras.

> **Payoff de estrategia 1 Vs. estrategia 2 (mixtas o no):**

$$\mathbf{p}_1 A \mathbf{p}_2 = \sum_{i,j} p_{1,i} p_{2,j} a_{ij}$$

> **Payoff de estrategia pura Vs. mixta:**

$$\sum a_{ij} p_j = (Ap)_i$$

> **Mejor respuesta estrategia 1 Vs. estrategia 2:**

Maximiza $\mathbf{r}_2 A \mathbf{r}_1$.

\# **Equilibrio de Nash:** Si todos los jugadores tienen la misma elección de estrategias, un equilibrio de Nash es una estrategia $\vec{p^*}$ que es la mejor respuesta a si misma

$$\vec{p^*} \cdot U\vec{p^*} \geqslant \vec{q} \cdot U\vec{p^*}, \quad \forall \vec{q}$$

Y se llama estricto si es la única mejor respuesta, es decir

$$\vec{p^*} \cdot U\vec{p^*} > \vec{q} \cdot U\vec{p^*}, \quad \forall \vec{q}$$

\# **Dinamica del replicador:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left[(A\vec{x})_1 - \vec{x} \cdot A\vec{x} \right] \\ \dot{x}_2 = x_2 \left[(A\vec{x})_2 - \vec{x} \cdot A\vec{x} \right] \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_i = x_i \left[(A\vec{x})_i - \vec{x} \cdot A\vec{x} \right] \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = x_n \left[(A\vec{x})_n - \vec{x} \cdot A\vec{x} \right] \end{cases}$$

Suposiciones:

- Poblacion de n tipos E_i, correspondiendo a cada uno una frecuencia x_i en la población.
- Cada tipo tiene una fitness f_i, función de la composición $\vec{x}$.
- La población es grande, y las generaciones se mezclan, de modo que $\vec{x}(t)$ evoluciona de manera diferenciable. Para cada tipo E_i, la tasa de crecimiento relativa $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$

∼ El simplex S_n es invariante por la ecuación, así que podemos considerarla restringida a S_n

∼ La fitness del tipo E_i es:

$$f_i(\vec{x}) = \sum_j a_{ij} x_j = \{A\vec{x}\}_i$$

\# **Equilibrio de nash (frecuencia):**

$\vec{x^*} \in S_n$ es un equilibrio de Nash si $\vec{x} \cdot A\vec{x^*} \leqslant \vec{x^*} \cdot A\vec{x^*} \quad \forall \vec{x} \in S_n$

$\vec{x^*} \in S_n$ es un estado (no una estrategia) evolutivamente estable si $\vec{x}^3 \cdot A\vec{x} > \vec{x} \cdot A\vec{x} \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x^*}$ en un entorno de $\vec{x^*}$.

> **Teoremas**

> Si $\vec{x}^*$ es un equilibrio de Nash, entonces es un equilibrio de la ecuación del replicador.

> Si $\vec{x}^*$ es el ω -límite de una órbita $\vec{x}(t)$ en int S_n, entonces $\vec{x}^*$ es un equilibrio de Nash.

> Si $\vec{x}^*$ es estable de Lyapunov, entonces es un equilibrio de Nash.

> Si $\vec{x}^* \in S_n$ es un estado evolutivamente estable, entonces es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación del replicador.

O en palabras:

> Los equilibrios de Nash son equilibrios de E.R.

> Los limites de órbitas interiores son E.N.

> Los puntos estables son E.N.

> Los Equilibrios estrictos son atractores