Práctico 6

M. G. Aramayo
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

RESOLUCIÓN EJ 1

Analizando la dinámica del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,z) = x\left[(A\vec{x})_x - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \\ \dot{y} = f_2(x,y,z) = y\left[(A\vec{x})_y - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \\ \dot{z} = f_3(x,y,z) = z\left[(A\vec{x})_z - \vec{x}\cdot A\vec{x}\right] \end{cases}$$

Reduciendo a dos variables mediante la condición. $z = 1 - x - y$

Para el primer sistema y su correspondiente matriz de payoff

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{g-c}{2} & g & \frac{g-c}{2} \\ 0 & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} \\ \frac{g-c}{2} & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{gy+g-c+cy}{2} \\ \frac{g-gx}{2} \\ \frac{g-cx}{2} \end{pmatrix}$$

$$(Ax)_x = \frac{gy+g-c+cy}{2}, \quad (Ax)_y = \frac{g-gx}{2}$$

$$x^T Ax = \frac{cx^2 - 2cx + 2cxy + g}{2}$$

$$f_1(x,y) = -x\frac{cx^2 + 2cyx - 2cx - gy - cy + c}{2}$$

$$f_2(x,y) = -xy\frac{cx + 2cy + g - 2c}{2}$$

Puntos de equilibrio:

$P_1^* = (0, \frac{G-2C}{2C}, 1 - \frac{G-2C}{2C})$

$P_2^* = (0,0,1)$

$P_3^* = (0, \frac{C}{G+C}, 1 - \frac{C}{G+C})$

$P_4^* = (1,0,0)$

$P_5^* = (\frac{G}{C}, 1 - \frac{G}{C}, 0)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{-g^2+cg+4c^2}{4c} & 0 \\ -\frac{(g-2c)^2}{2c} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación de estables}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{c\left(g^2-cg\right)}{2(g+c)^2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Inconcluso}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{-g+c}{2} \\ 0 & -\frac{g-c}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Acumulación de } {\scriptstyle \begin{matrix}\text{Estables si } g>c \\ \text{Inestables si } g<c\end{matrix}}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g(g-c)}{2c} \\ -\frac{g(-g+c)}{2c} & -\frac{g(-g+c)}{c} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{g}{c}\frac{g-c}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Equilibrio } {\scriptstyle \begin{matrix}\text{Estables si } g<c \\ \text{Inestables si } g>c\end{matrix}}$$

En la Fig. 1 se tiene una resolución numérica con $G = 1, C = 2$.

Para el segundo sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{g-c}{2} & g & g \\ 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & g & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-gx+2g-cx}{2} \\ \frac{gy}{2} \\ \frac{-gx+gy+g}{2} \end{pmatrix}$$

$$(Ax)_x = \frac{-gx+2g-cx}{2}, \quad (Ax)_y = \frac{gy}{2}, \quad x^T Ax = \frac{g-cx^2}{2}$$

$$f_1(x,y) = \frac{x}{2}(cx^2 - x(g+c) + g)$$

$$f_2(x,y) = \frac{y}{2}(cx^2 + gy - g)$$

Puntos de equilibrio:

$P_1^* = (0,0,1)$

$P_2^* = (0,1,0)$

$P_3^* = (1,0,0)$

$P_4^* = (\frac{G}{C}, 0, 1 - \frac{G}{C})$

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{Saddle}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Inestable}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{c-g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c-g}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Equilibrio } {\scriptstyle \begin{matrix}\text{Estables si } g>c \\ \text{Inestables si } g<c\end{matrix}}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{g}{c}\frac{g-c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{c}\frac{g-c}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Equilibrio } {\scriptstyle \begin{matrix}\text{Estables si } g<c \\ \text{Inestables si } g>c\end{matrix}}$$

En la Fig. 2 se tiene una resolución numérica con $G = 1, C = 2$.

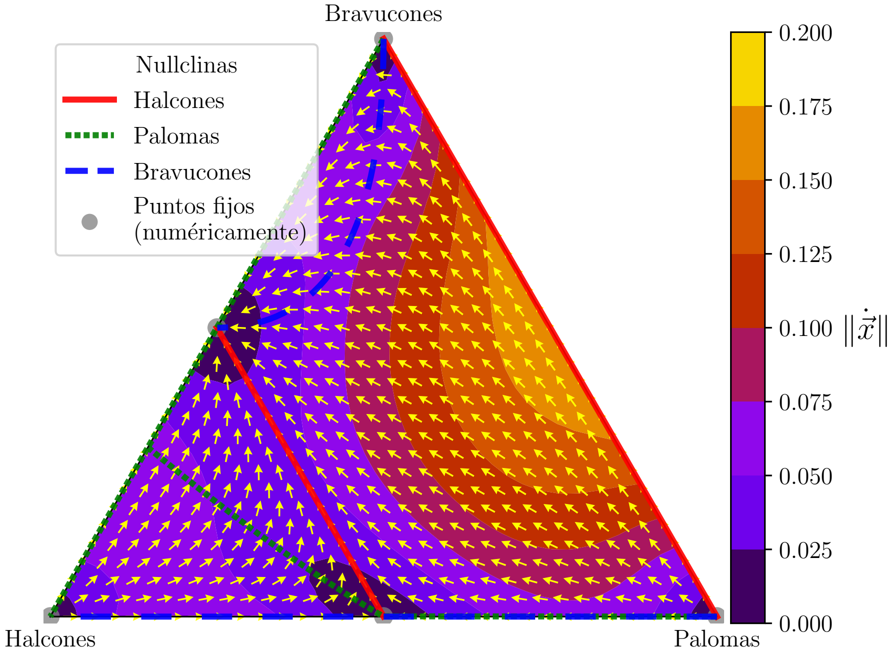

Figura 1: Órbitas en el simplex para el sistema de Halcones, Palomas y Bravucones

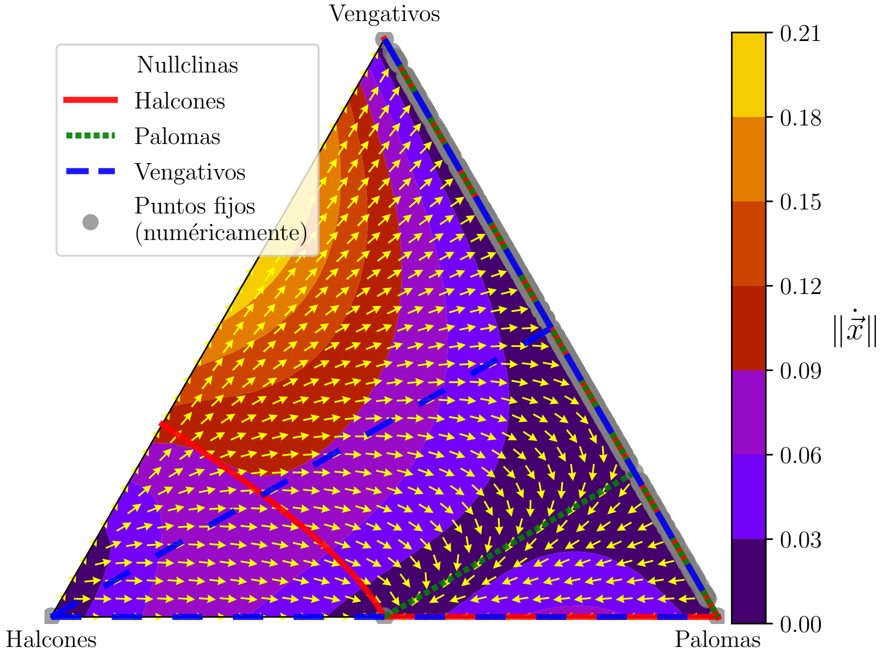

Figura 2: Órbitas en el simplex para el sistema de Halcones, Palomas y vengativos

(a)

Jugadores	0	1
C	C_0	C_1
D	D_0	D_1

(b)

Jugadores	0	1
C	S	R
D	P	T

Tabla I: Payoff de las estrategias C y D cuando compiten dos jugadores.

RESOLUCIÓN EJ 2

Dilema del prisionero un jugador:

El dilema de dos jugadores viene dado por:

$$\begin{aligned} T &= \text{ Tentación para defraudar} \\ R &= \text{ Recompensa por cooperar} \\ P &= \text{ Penalidad por defraudar mutuamente} \\ S &= \text{ Sucker's payoff,} \end{aligned}$$

resultando

$$T > R > P > S$$

Para 2 jugadores:

- Defraudar cuando uno coopera ofrece el mayor payoff T.
- Cooperar cuando uno coopera ofrece el segundo mejor payoff R.
- Defraudar cuando nadie coopera ofrece el segundo peor payoff P.
- Cooperar cuando nadie coopera ofrece el peor payoff S.

Dilema del prisionero multijugador:
Para el caso multijugador se considera:

- C_i: Payoff si cooperan i jugadores y coopero.
- D_i: Payoff si cooperan i jugadores y defraudo.

Con esto en cuenta para $n = 2$ jugadores se tiene:

$$D_1 > C_1 > D_0 > C_0$$

Extendiendo esto para mas jugadores:

- Defraudar cuando todos cooperan ofrece el mayor payoff T.
- Cooperar cuando uno coopera ofrece el segundo mejor payoff R.
- Defraudar cuando nadie coopera ofrece el segundo peor payoff P.
- Cooperar cuando nadie cooperan ofrece el peor payoff S.

$$\underbrace{D_{n-1}}_{T} > \underbrace{C_{n-1}}_{R} > \underbrace{\dots}_{\text{El resto de payoffs}} > \underbrace{D_0}_{P} > \underbrace{C_0}_{S}$$

Uno podría detenerse en este punto, con el resto de payoffs en un orden arbitrario. Pero, si deseo que cada subconjunto de jugadores tengan un dilema del prisionero con reglas similares uno podría tomar caso de n jugadores como una extensión del caso $n-1$ jugadores, arrancando desde dos jugadores. Algo como:

$$\begin{aligned} D_1 > C_1 > D_0 > C_0 \\ D_2 > C_2 > D_1 > C_1 > D_0 > C_0 \\ D_3 > C_3 > D_2 > C_2 > D_1 > C_1 > D_0 > C_0 \\ D_{n-1} > C_{n-1} > D_{n-2} > C_{n-2} > \ldots > D_1 > C_1 > D_0 > C_0 \end{aligned}$$

Es decir $D_i > C_i, \forall i = 1, 2, ..., n-1$.