

## Práctico 5

M. G. Aramayo  
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

### RESOLUCIÓN EJ 1

Se analiza el modelo epidemiológico SIR, dado por el sistema dinámico:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = f_1(s, i, r) = -\beta si + \frac{1}{\tau_R} r \\ \frac{di}{dt} = f_2(s, i, r) = \beta si - \frac{1}{\tau_I} i \\ \frac{dr}{dt} = f_3(s, i, r) = \frac{1}{\tau_I} i - \frac{1}{\tau_R} r \end{cases}$$

a población constante, por lo que:  $s + i + r = 1$ , se tiene una solución a este sistema en la Fig. 1.

Los equilibrios del sistema  $(s^*, i^*, r^*)$  se obtienen mediante:

$$\begin{cases} f_1(s^*, i^*, r^*) = 0 \\ f_2(s^*, i^*, r^*) = 0 \\ f_3(s^*, i^*, r^*) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta s^* i^* = \frac{1}{\tau_R} r^* \\ \beta s^* i^* = \frac{1}{\tau_I} i^* \\ \frac{1}{\tau_I} i^* = \frac{1}{\tau_R} r^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i^* = \frac{\tau_I}{\tau_R} r^* \\ s^* = \frac{1}{\tau_I \beta} \\ i^* = \frac{\tau_I}{\tau_R} r^* \end{cases}$$

, con  $i \neq 0$

El sistema anterior y la población constante implica que:

$$i^* = \frac{\beta \tau_I - 1}{\beta (\tau_I + \tau_R)}$$

El equilibrio queda:

$$P_2 = \left( \frac{1}{\tau_I \beta}, \frac{\beta \tau_I - 1}{\beta (\tau_I + \tau_R)}, \frac{\tau_R}{\tau_I} \frac{\beta \tau_I - 1}{\beta (\tau_I + \tau_R)} \right)$$

Mediante un análisis lineal es posible demostrar que el sistema presenta oscilaciones amortiguadas.

Con la condición de población constante es posible reducir el sistema a uno bidimensional:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = f_1(s, i) = \beta si - \frac{1}{\tau_R} (s + i) + \frac{1}{\tau_R} \\ \frac{di}{dt} = f_2(s, i) = \beta si - \frac{1}{\tau_I} i \end{cases}$$

Con su correspondiente matriz Jacobiana:

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} -\beta i - \frac{1}{\tau_R} & -\beta s - \frac{1}{\tau_R} \\ \beta i & \beta s - \frac{1}{\tau_I} \end{pmatrix}$$

el análisis lineal requiere obtener los autovalores  $\lambda_{1,2}$  de la matriz Jacobiana del sistema, la ecuación característica resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 \\ &+ \lambda \left( \beta i^* + \frac{1}{\tau_R} - \beta s^* + \frac{1}{\tau_I} \right) \\ &+ \left( \frac{\beta i^*}{\tau_I} - \frac{\beta s^*}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_I \tau_R} + \frac{\beta i^*}{\tau_R} \right) \end{aligned}$$

Para el punto  $P_2$ , la ecuación característica es

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I + \tau_R} + \frac{1}{\tau_R} \right) + \left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I \tau_R} \right) = 0,$$

y las soluciones,  $\lambda_{1,2}$  son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I + \tau_R} + \frac{1}{\tau_R} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I + \tau_R} + \frac{1}{\tau_R} \right)^2 - 4 \left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I \tau_R} \right)} \right]$$

y corresponden a los dos autovalores que buscamos. El término fuera de la raíz es negativo, dado que:

$$\left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I + \tau_R} + \frac{1}{\tau_R} \right) \geq 0$$

Reordenando se obtiene:

$$\beta \tau_R \geq -1$$

Como ambos son valores positivos

$$\beta \tau_R > -1$$

Si propagamos la desigualdad

$$\left( \frac{\beta \tau_I - 1}{\tau_I + \tau_R} + \frac{1}{\tau_R} \right) > 0$$

lo cual implica que los autovalores complejos tienen siempre parte real negativa, la raíz, en caso de tener radicando negativo es un número complejo. Esto implica que cuando se tienen oscilaciones siempre se amortiguan.

### RESOLUCIÓN EJ 2

En la Fig. 2 se tiene un gráfico que resume, número de infectados, de fallecidos, de testeados y de UTI (Unidad de terapia intensiva).

Se observa con cierta frecuencia una caída en infectados. Esto se debe a que los fines de semanas se realizan menos tests. Para el resto del análisis se omiten estos días junto con los días feriados de los años 2020 y 2021. En las Fig. 3 a 5

Es posible realizar un ajuste a los picos de infectados mediante:

$$a \operatorname{sech}^2(bt + c). \quad (1)$$

El pico que figura en los datos sin feriados y fines de semana, ocurre el **2020-10-21**. Tomando datos desde el **2020-03-05**, se predice que la fecha del pico es **2020-10-08** luego de 168 días (24 semanas) de datos. Por esto, se predice la fecha del primer pico con 62 días de antelación y con un error de 13 días. En la Fig. 2, se tienen las predicciones que se obtienen para distintos números de semanas de datos sobre los cuales se realiza el ajuste.

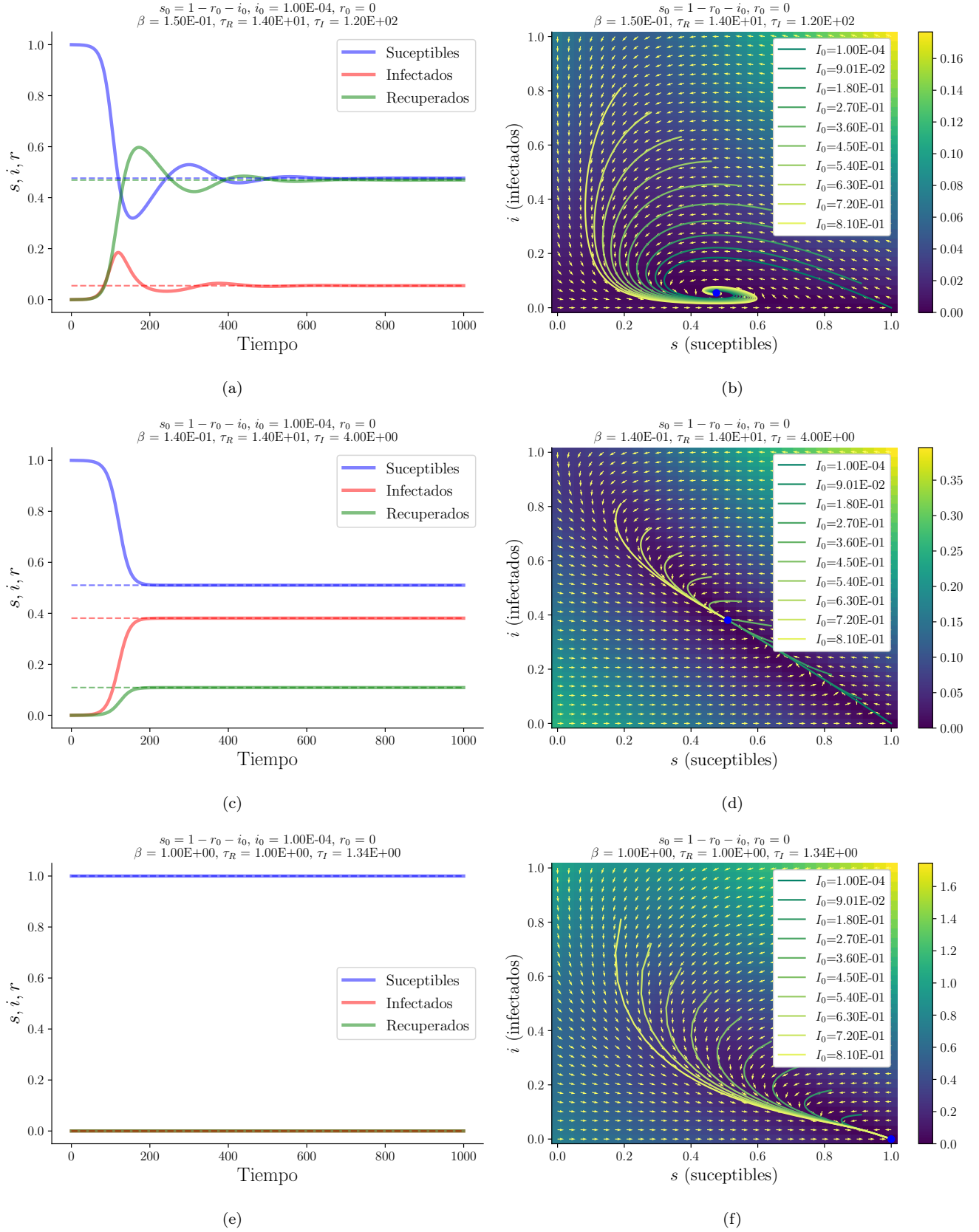


Figura 1: Solución de las ecuaciones sir para distintas condiciones iniciales y parametros.

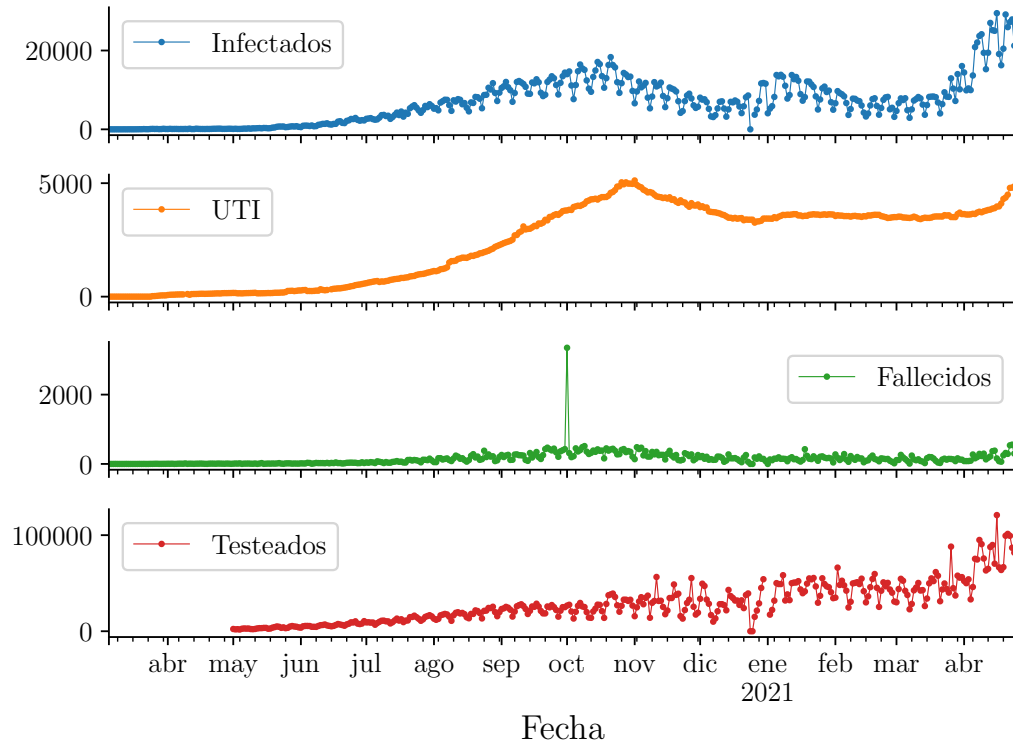


Figura 2: Gráfico de los datos crudos.

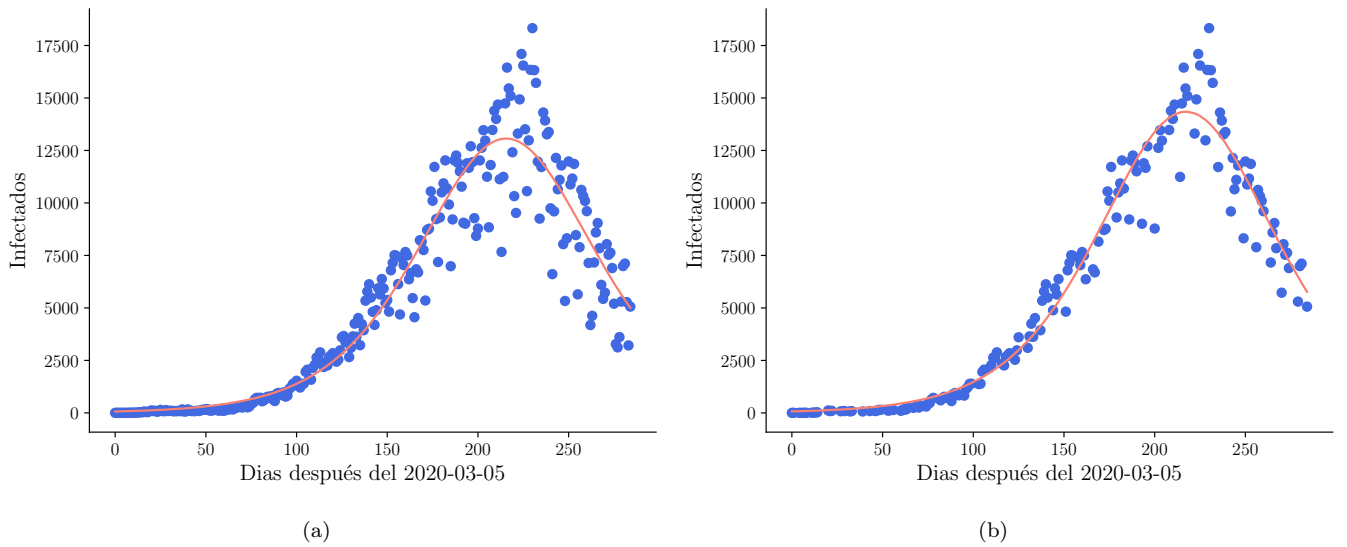


Figura 3: De izquierda a derecha, datos originales y datos sin feriados ni fines de semana respectivamente con sus respectivos ajustes de la Ec. 1.

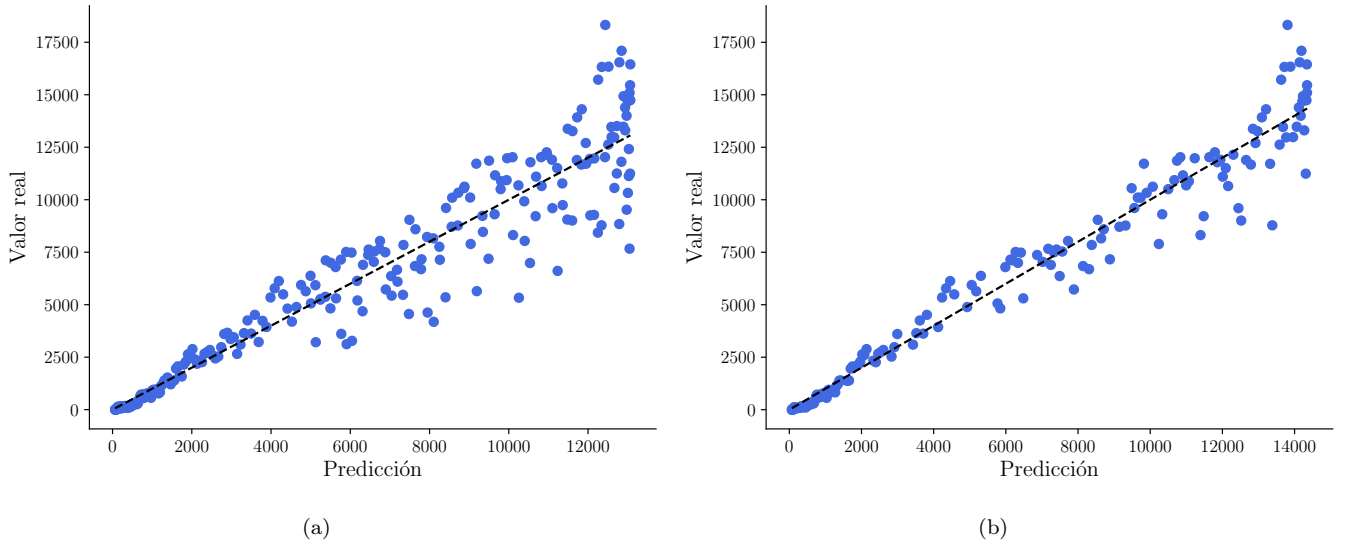


Figura 4: De izquierda a derecha, curvas Q-Q a partir de los datos originales y a partir de los datos excluyendo feriados y fines de semanas.

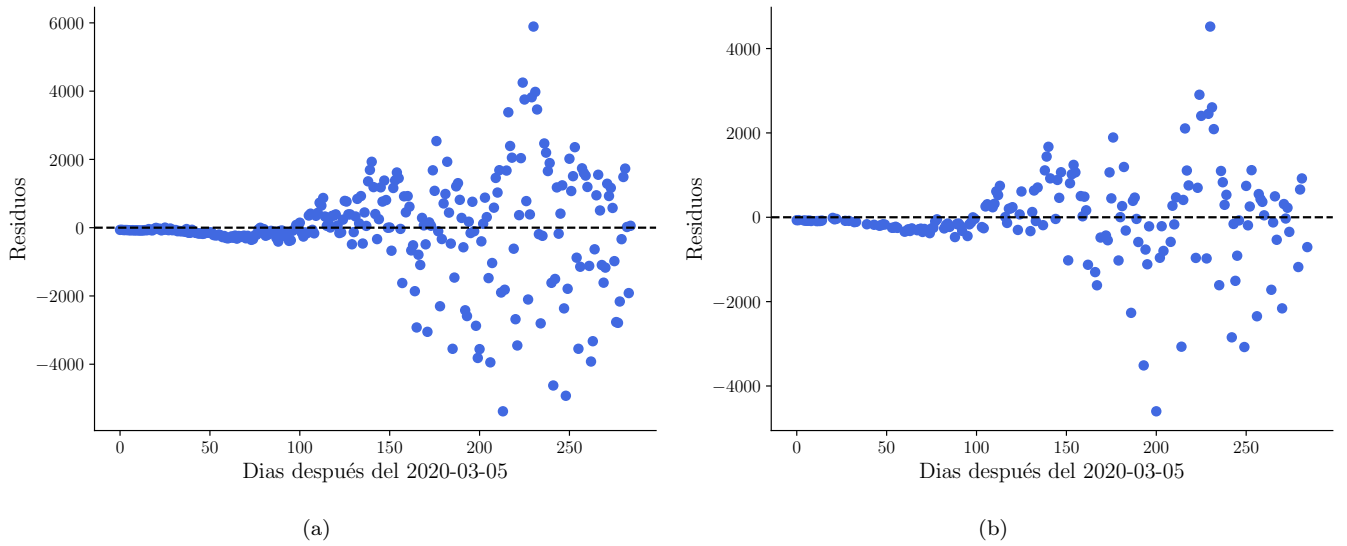


Figura 5: De izquierda a derecha, residuos del ajuste de la Ec. 1 a partir de los datos originales y a partir de los datos excluyendo feriados y fines de semanas.

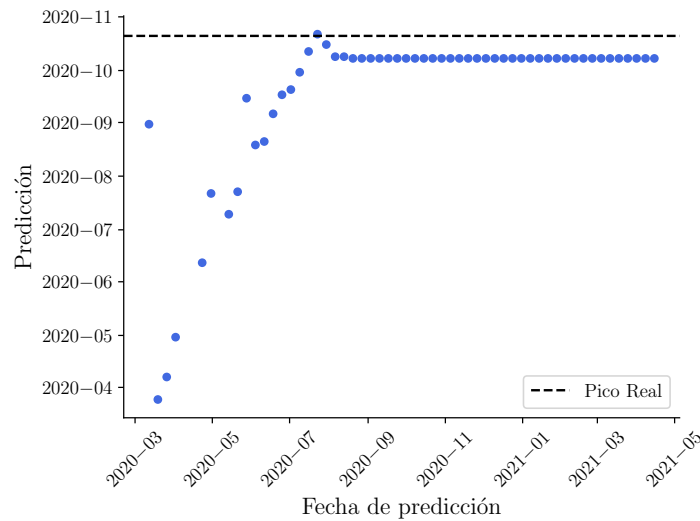


Figura 6: Predicción de la fecha del pico vs. fecha en la que se realiza la predicción (tomando muestras hasta esa fecha) mediante un ajuste de la Ec. 1.