Practico 1

M. G. Aramayo
Matematica de sistemas biologicos, Instituto Balseiro

RESOLUCION EJ 1:

El análisis en general no debería ser ahora difícil para ustedes. Supongamos que cada población tiene un comportamiento logístico en ausencia de la otra, y parámetros de interacción genéricos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x \left[1 - \dfrac{x}{K_1} - b_{12}\dfrac{y}{K_1}\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y \left[1 - \dfrac{y}{K_2} - b_{21}\dfrac{x}{K_2}\right] \end{cases}$$

donde b_{12} y b_{21} miden los efectos de la mutua competencia. Adimensionalizamos:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2) = u_1(1 - u_1 + a_{12}u_2) \\ \dfrac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2) = \rho u_2 (1 - u_2 + a_{21}u_1) \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{lll} u_1(\tau) = \dfrac{x(t)}{K_1}, & a_{12} = b_{12}\dfrac{K_2}{K_1}, & \tau = r_1 t \\ u_2(\tau) = \dfrac{y(t)}{K_2}, & a_{21} = b_{21}\dfrac{K_1}{K_2}, & \rho = \dfrac{r_2}{r_1} \end{array}\right.$$

Los 4 puntos de equilibrios $P_j = (u^*_{1,j}, u^*_{2,j})$ donde $j = 1, 2, ..., 4$ estan dados por: $\begin{cases} f_1(u_1, u_2) = 0 \\ f_2(u_1, u_2) = 0 \end{cases}$

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = (1, 0)$$
$$P_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}}(1 + a_{12}, 1 + a_{21})$$

La estabilidad puede analizarse mediante la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 1 + a_{12} & 0 \\ \rho a_{21} & -\rho \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & \rho(1 + a_{21}) \end{bmatrix}$$

- Para P_1: tengo dos autovalores positivos por lo que se trata de un nodo inestable.
- Para P_2: Punto silla.
- Para P_3: Punto silla.

El cuarto punto de equilibrio tiene una expresion larga para sus autovalores, su matriz jacobiana es:

$$J_4 = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & a_{21} - 1 \end{bmatrix}$$

Para este punto es mas conveniente un análisis gráfico como el que puede verse en la Fig. 1. El punto P_4 es la interseccion de las rectas roja y azul. Si $a_{12}a_{21} = 1$

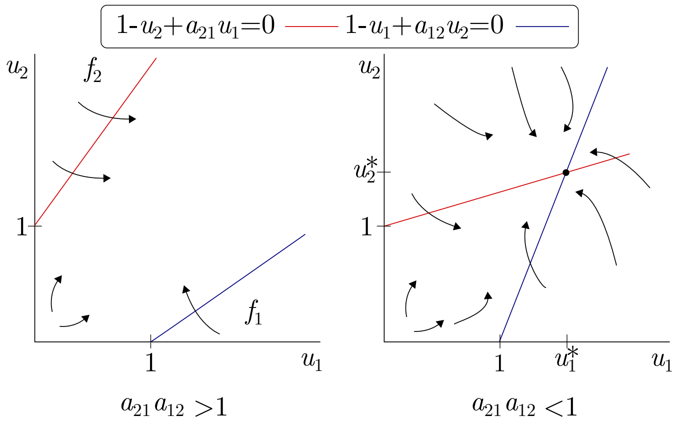

Figura 1: Análisis gráfico del equilibrio del punto P_4. La flecha indica la dirección en la que crece la función.

las rectas son paralelas y no hay un punto de equilibrio. Si $a_{12}a_{21} > 1$ la interseccion de la recta y por tanto el punto de equilibrio queda fuera del rango del problema (u_1 y u_2 son poblaciones y por tanto positivas). Si $a_{12}a_{21} < 1$ El punto de equilibrio queda en el primer cuadrante del plano u_1, u_2. Como por arriba de la recta roja $f_2 > 0$ y por arriba de la recta azul $f_1 > 0$ la direccion de crecimiento es la que se indica en la figura. La flecha va de valores crecientes a decrecientes. Con este analisis es posible determinar que la interseccion de las rectas para $a_{12}a_{21} < 1$ es un nodo estable.

RESOLUCION EJ 2:

Para el sistema:

$$\frac{dN}{dt} = f(N, a, b, k, n) = \left[\frac{aN}{N + n} - b\right] N - kN(N + n) \tag{1}$$

donde a es la natalidad, b es la mortalidad y k un coeficiente de capacidad. Y n es la poblacion de mosquitos esteriles que se mantiene constante.

Este modelo cuenta con las siguientes suposiciones:

a) Las poblaciones existen como continuos y se reproducen de forma continua en el tiempo.

b) La población crece similar a una curva logística.

c) La capacidad de carga de un ambiente es constante.

d) Los machos estériles y no estériles compiten en pie de igualdad.

e) El apareamiento es al azar, la proporción de apareamientos fértiles es directamente proporcional al número de individuos fértiles presentes en la población.

f) Los géneros están en una razón 1 a 1 constantemente.

g) La liberación de individuos estériles es continua y a un ritmo constante por unidad de tiempo y hábitat.

h) La liberación lleva a la completa e instantánea mezcla de individuos.

Para obtener la capacidad del sistema analizamos el caso en el que $n = 0$.

$$\frac{dN}{dt} = f(N, a, b, k, 0) = rN(1 - \frac{k}{r}N), \text{con } r = a - b \quad (2)$$

Esta es una ecuacion logistica modificada, la natalidad esta controlada por la porcion de mosquitos que son esteriles. Ademas que los mosquitos esteriles influyen en la capacidad del sistema. Como sabemos los puntos fijos de un sistema logistico son, 0 y la capacidad del sistema, de esto puede verse de que $\frac{a-b}{k}$ es la capacidad del sistema.

Volviendo a Ec. 1 los puntos fijos dados por: $f(N, a, b, k, n) = 0$

$$N_1^* = 0, N_{2,3}^* = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{k}\right)^2 - an} + \frac{a-b}{2k} - n$$

Para anlizar la estabilidad de los puntos fijos, analizamos $\frac{df}{dN}$:

$$\frac{df}{dN} = -b + \frac{aN^2 + 2anN}{(N+n)^2} - k(2N + n)$$

La estabilidad de N_1^*:

$$\frac{df}{dN} = -b - kn \Rightarrow N_1^* \text{ Es estable}$$

La estabilidad de los puntos $N_{2,3}^*$ es un tanto mas complicada, pero podemos analizar bajo que condiciones estos puntos fijos desaparecen (se vuelven valores complejos).

$$n_c = \frac{1}{4}\frac{k}{a}\left(\frac{a-b}{k}\right)^2 = n$$

Donde, reordenando, vemos que n_c es menor que $\frac{1}{4}$ de la capacidad:

$$n_c = \underbrace{\frac{a-b}{a}}_{<1}\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{a-b}{k}\right)}_{Capacidad}$$

Con Ec. 1 en cuenta puede plantearse un sistema en el que se suelte una unica vez a los mosquitos esteriles.

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -bn - k(N+n)n \\ \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right]N - kN(N+n) \end{cases}, \quad (3)$$

Para la Ec. 1 a es la natalidad, b es la mortalidad y k un coeficiente de capacidad. Con esto en cuenta puede plantearse un sistema en el que se suelte una unica vez a los mosquitos esteriles.

Son 3 puntos de equilibrios $P_j = (n_j^*, N_j^*), j = 1, 2, 3.$

El origen es un punto estable, la derivada se anula en ese punto y no hay dinamica.

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = \left(0, \frac{a-b}{k}\right)$$

$$P_3 = \left(-\frac{b}{k}, 0\right)\binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}, \quad P_4 = \left(-\frac{b}{k}, \frac{b+a}{k}\right)\binom{\text{Población}}{\text{Negativa}}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ k\frac{b-2a}{a-b} & -k \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 \text{ Estable}$$

El punto P_3 no forma parte de la dinamica (No hay poblaciones negativas)

Donde puede verse que no se puede llegar a la extinción mediante este método de liberación.

Si se propone que una fraccion γ de los mosquitos nace esteriles se tiene que:

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \gamma N - bn \\ \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right]N - kN(N+n) \end{cases}, \quad (4)$$

$$P_1 = (0,0),$$
$$P_2 = \left(\frac{\gamma}{b}\left(\frac{a-b-\gamma}{k(1+\frac{\gamma}{b})^2}\right), \left(\frac{a-b-\gamma}{k(1+\frac{\gamma}{b})^2}\right)\right),$$

Para que con este modelo la extincion sea inevitable, es decir, tengamos un unico nodo estable en el origen. Se requiere que $\gamma = a - b$. En este caso se pierde el segundo punto fijo.

RESOLUCION EJ 3:

Para el siguiente sistema de competencia ciclica:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = n_1(1 - n_1 - \alpha n_2 - \beta n_3) = f_1(n_1, n_2, n_3) \\ \dfrac{dn_2}{dt} = n_2(1 - \beta n_1 - n_2 - \alpha n_3) = f_2(n_1, n_2, n_3) \\ \dfrac{dn_3}{dt} = n_3(1 - \alpha n_1 - \beta n_2 - n_3) = f_3(n_1, n_2, n_3) \end{cases}$$

con $0 < \beta < 1 < \alpha$ y $\alpha + \beta > 2$. Pueden obtenerse los equilibrios viendo todos los puntos que cumplan simultaneamente:

$$\begin{cases} f_1(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_2(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \\ f_3(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = 0 \end{cases}$$

Son 8 puntos de equilibrios $P_j = (n_{1,j}^*, n_{2,j}^*, n_{3,j}^*), j = 1, 3, ..., 8$.

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0,0) \\ P_2 &= (1,0,0), P_3 = (0,1,0), P_4 = (0,0,1) \\ P_5 &= \frac{1}{\alpha\beta-1}(\alpha-1, \beta-1, 0) \left(\substack{\text{Población} \\ \text{Negativa}}\right) \\ P_6 &= \frac{1}{\alpha\beta-1}(0, \alpha-1, \beta-1) \left(\substack{\text{Población} \\ \text{Negativa}}\right) \\ P_7 &= \frac{1}{\alpha\beta-1}(\beta-1, 0, \alpha-1) \left(\substack{\text{Población} \\ \text{Negativa}}\right) \\ P_8 &= \frac{1}{\alpha+\beta+1}(1,1,1) \end{aligned}$$

Analizamos el la matriz jacobiana de este sistema:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(estable)} \quad \mathbf{J}_8 = \frac{1}{1+\alpha+\beta} \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix} \text{(Punto silla)}$$

P_5, P_6, P_7 no es accesible en el modelo porque son valores negativos y se estan tratando poblaciones.

El origen es equilibrio (una fuente) y los versores $(1,0,0)$ etc. son puntos de ensilladura. Hay otros 3 equilibrios con dos poblaciones finitas y una nula. Finalmente, existe un equilibrio interior al octante $\mathbb{R}_+^3$, dado por:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{1}{1+\alpha+\beta}.$$

Este equilibrio de coexistencia es una ensilladura, lo cual se demuestra fácilmente porque los autovalores son muy sencillos. La matriz del sistema linealizado es çirculante":

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta} \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que sus autovalores son combinaciones de las raíces cúbicas de la unidad:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

con c_j los elementos de la matriz y γ_j las raíces de la unidad, $\gamma_j = \exp(2\pi i/n)$, en general. Así que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -1, \text{ con autovector } (1,1,1) \\ \lambda_1 = \lambda_2^* &= \tfrac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 - \alpha e^{2xi/3} - \beta e^{4\pi i/3}\right), \end{aligned}$$

que satisfacen:

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = \frac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1 + \overbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{>2}\right) > 0$$

RESOLUCION EJ 4:

Supongamos que se produce una fragmentación del hábitat y que hay parches que son inhabitables.

Seguimos considerando competencia entre s e i.

Pero ahora hay una fracción de zonas habitables $h < 1$

h Fracción de zonas habitables

$v = h - p_s - p_i$ Fracción de zonas vacías

$$\begin{cases} \dfrac{dp_s}{dt} = f_s(p) = c_s p_s (h - p_s) - e_s p_s \\ \dfrac{dp_i}{dt} = f_i(p) = c_i p_i (h - p_i - p_s) - e_i p_i - c_s p_i p_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_s}{dt} = f_s(p) = c_s p_s (v + p_i) + -e_s p_s \\ \dfrac{dp_i}{dt} = f_i(p) = c_i p_i v - e_i p_i - c_s p_i p_s = f_i(p) \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = e_i p_i + e_s p_s - v(c_s p_s + c_i p_i)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= c_s p_s (h - p_s) - e_s p_s \\ \frac{dp_i}{dt} &= c_i p_i (h - p_i - p_s) - e_i p_i - c_s p_i p_s \\ \frac{dv}{dt} &= e_i p_i + e_s p_s - v(c_s p_s + c_i p_i) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_s p_s (h - p_s) - e_s p_s = 0 \\ c_s (h - p_s) - e_s = 0 \end{cases} \Rightarrow p_s^* = h - \frac{e_s}{c_s}$$

$$\begin{cases} c_i p_i (h - p_i - p_s) - e_i p_i - c_s p_i p_s = 0 \\ c_i \left(h - p_i - h + \frac{e_s}{c_s}\right) - e_i - c_s \left(h - \frac{e_s}{c_s}\right) = 0 \\ -c_i p_i - \frac{c_i e_s}{c_s} - e_i - c_s h + e_s = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} p_s^* = h - \frac{e_s}{c_s} \\ p_i^* = \frac{e_s(c_s + c_i)}{c_s c_i} - \frac{e_i}{c_i} - \frac{h c_s}{c_i} \\ v^* = \frac{h c_s - e_s + e_i}{c_i} \end{cases} \tag{6}$$

Vemos que cuando el valor de h está por debajo de $\mathrm{e_s/c_s}$ la población de s se extingue. En ese caso, en ausencia de s, la población de i puede persistir si

$$\frac{c_i}{e_i} > \frac{c_s}{e_s}$$

ya que en ese caso la ecuación para i es

$$\frac{dp_i}{dt} = c_i p_i (h - p_i) - e_i p_i$$

Los valores estacionarios muestran que cuando h disminuye aumenta la población de i y disminuye la de s. Las ventajas de i surgen de una menor mortalidad o una mejor estrategia de colonización

RESOLUCION EJ 5:

Metapoblaciones - Modelo de Levins

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-p) - ep = f(p)$$

- c : Tasa de colonización local de un parche (o probabilidad de que un parche vacío sea colonizado por individuos que migran al mismo parche desde parches ocupados).
- p : Fracción de parches ocupados
- $1-p$: Fracción de parches vacíos
- e : Tasa de extinción de cualquier subpoblación (población local en un parche) o probabilidad de que un parche ocupado quede vacío (extinción local).

Lo que parece un término logístico tiene un origen muy diferente. La posibilidad de que aumente la fracción de parches ocupados depende de cuantos parches hay ocupados y de la posibilidad de ocupar uno nuevo, que para eso, debe estar vacio. De ahí el producto de ambas cantidades

$$f(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 - \frac{e}{c} \end{cases}$$

Metapoblaciones - Competencia Tenemos dos especies compitiendo, pero una de las dos (s) es mejor colonizadora y

$$\begin{cases} \dfrac{dp_s}{dt} = f_s(p) = c_s p_s (1 - p_s) - e_s p_s \\ \dfrac{dp_i}{dt} = f_i(p) = c_i p_i (1 - p_i - p_s) - e_i p_i - c_s p_i p_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_i = 0 \\ f_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_i = p_s = 0 \\ p_i = 0, p_s = 1 - e_s/c_s \\ p_i = 1 - e_i/c_i, p_s = 0 \\ p_i = p_i^*, p_s = p_s^* \end{cases}$$

$$p_s^* = 1 - \frac{e_s}{c_c}, p_i^* = 1 - p_s^* - \frac{e_i + c_s p_s^*}{c_i}$$

$$1 - \frac{e_s}{c_s} > 0$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -c_s + e_s & 0 \\ \frac{df_i}{dp_i} & c_i (1 - p_s^* - 2p_i^*) - e_i - c_s p_s^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

Para que la coexistencia sea estable necesito dos autovalores negativos, es decir

$$c_i (1 - p_s^* - 2p_i^*) - e_i - c_s p_s^* < 0$$

$$c_i > c_s \left(\frac{e_i}{e_s} + \frac{p_s^*}{1 - p_s^*} \right) \quad c_i > c_s \left(\frac{c_s + e_i - e_s}{e_s} \right)$$

Supongamos que los coeficientes de extinción son iguales. Si ${p_s}^* < 1$ vemos que

$$c_i > c_s$$

La coexistencia ocurre porque s deja huecos ya sea porque coloniza peor o tiene una mayor tasa de extinción.