Práctico 3

M. G. Aramayo
Matemática de sistemas biológicos, Instituto Balseiro

RESOLUCIÓN EJ 1

Se simula una población de individuos que no se reproducen y evolucionan en tiempo discreto. En cada paso de tiempo cada uno puede morir con probabilidad d. Si realizamos varias de estas simulaciones pueden obtenerse las distribuciones de probabilidad en la Fig. 1. La distribución final parece seguir la forma de una distribución binomial como puede verse en la Fig. 2.

RESOLUCIÓN EJ 2

Se tiene un modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = ax_n + z_n \tag{1}$$

donde z_n es una variable estocástica con distribución gaussiana con media cero y desviación estándar σ. Esta expresión recursiva no es tan rápida en algunos lenguajes de programación. Pero puede reescribirse, veamos como se comporta a distintos valores de n:

$$x_0 = x_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = a^1 x_0 + a^0 z_0 \\ x_2 = a^2 x_0 + a^1 z_0 + a^0 z_1 \\ \vdots \\ x_n = a^n x_0 + a^{n-1} z_0 + \ldots + a^0 z_{n-1} \end{array} \right. , \tag{2}$$

con esto proponemos que puede reescribirse como:

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(1+i)} \; z_i \tag{3}$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Caso base: $x_1 = a^1 x_0 + \sum_{i=0}^{1-1} a^{1-(1+i)} \; z_i = a^1 x_0 + z_0$

Asumo validez en $n = k$: $x_k = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i$

Probar que esto implica validez en $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = ax_k + z_k = a(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i) + z_k$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + a \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(1+i)} z_i + z_k$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a^{k+1-(1+i)} z_i}_{b_{k,i}} + \underbrace{a^0 z_k}_{b_{k,k}}$$

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k+1-(1+i)} z_i$$

$\therefore$ se cumple para $n = k + 1$

La expresión de la Ec. 3 se utilizo para realizar multiples simulaciones en la Fig. 3a. Para un numero mayor de simulaciones puede obtenerse la distribucion $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 3b.

Por otro lado, un segundo modelo de población continua de dinámica discreta dado por:

$$x_{n+1} = (a + z_n)x_n \tag{4}$$

donde z_n es una variable estocastica con distribución gaussiana con media cero y desviacion estandar σ. Nuevamente, puede reescribirse de forma no recursiva.

Veamos como se comporta a distintos valores de n:

$$x_0 = x_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = x_0(a + z_0) \\ x_2 = x_0(a + z_0)(a + z_1) \\ \vdots \\ x_n = x_0(a + z_0)(a + z_1)...(a + z_{n-1}) \end{array} \right. \tag{5}$$

Puede reescribirse como:

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} (a + z_i) \tag{6}$$

Una rápida prueba inductiva de que esto es cierto:

Un ejemplo de que se cumple:

$$x_1 = x_0 \prod_{i=0}^{1-1} (a + z_i) = x_0(a + z_0)$$

Asumo que se cumple para $n = k$:

$$x_k = x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

Probar que esto implica que se cumple para $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_k = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = (a + z_k)x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (a + z_i)$$

$$x_{k+1} = x_0 \prod_{i=0}^{k} (a + z_i)$$

$\therefore$ se cumple para $n = k + 1$

(7)

La expresión de la Ec. 6 se utilizo para realizar múltiples simulaciones en la Fig. 4a. Para un numero mayor de simulaciones puede obtenerse la distribución $P(x, t)$ del sistema, el resultado se puede ver en la Fig. 4b.

RESOLUCIÓN EJ 3

Luego se utilizo el algoritmo de Gillespie para simular una población mediante un modelo de reproducción y competencia intraespecifica con tasas b y d de los procesos:

$$A \xrightarrow{b} A + A$$

$$A + A \xrightarrow{d} A$$

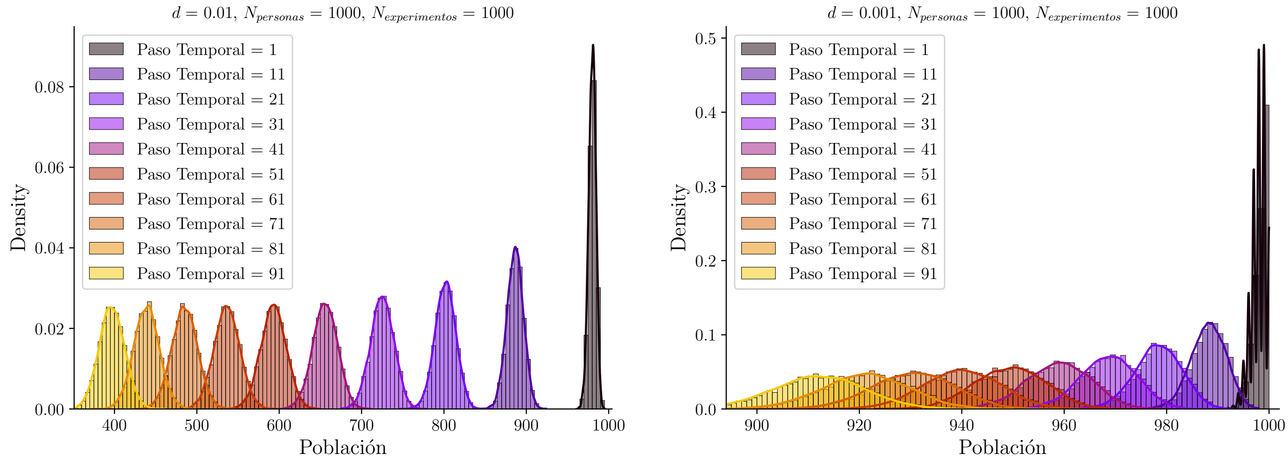


Figura 1: Evolución en pasos temporales de la distribución de numero de habitantes. Para $d = 0{,}01$ y $d = 0{,}001$.

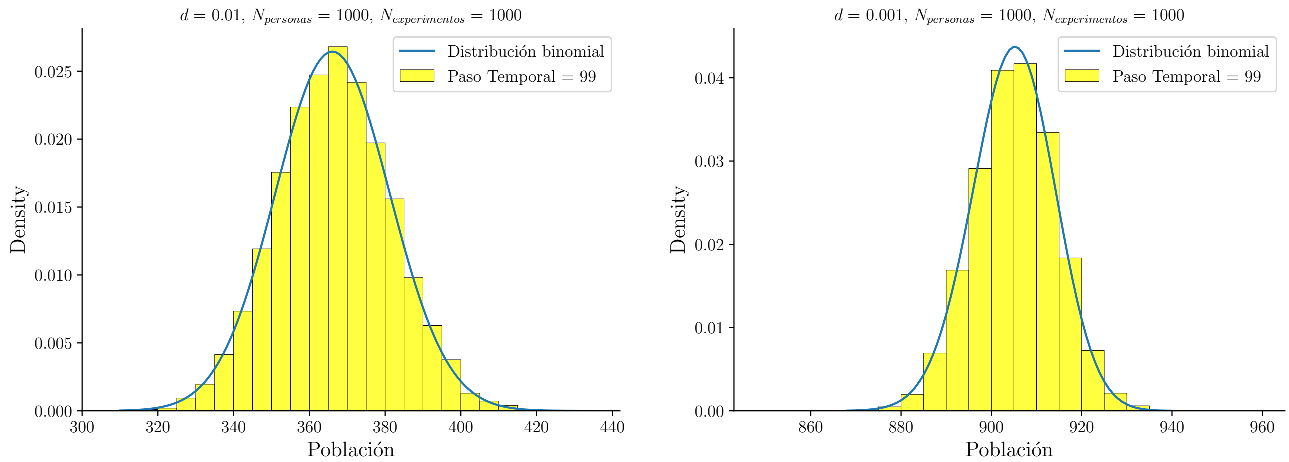
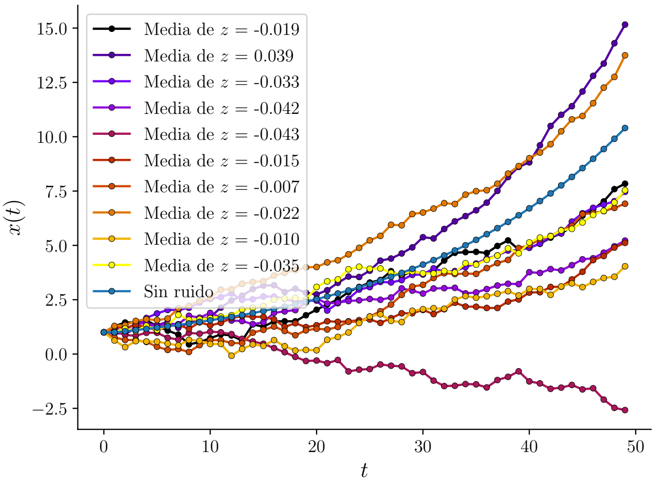
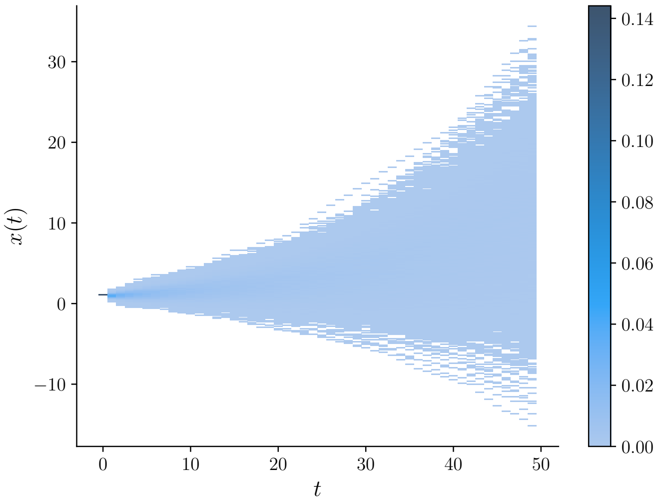


Figura 2: Comparación entre la densidad obtenida mediante la simulación y una distribución binomial. Para $d = 0{,}01$ y $d = 0{,}001$.



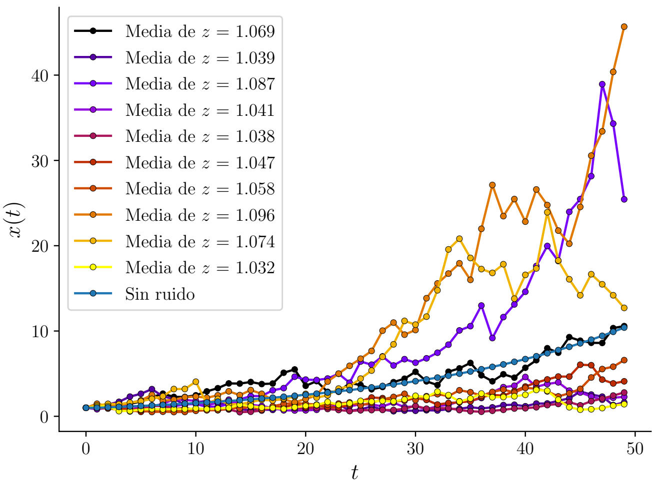
(a) Evolución del mapeo para distintos valores medios de la generación de números aleatorios, para 50 pasos en t.



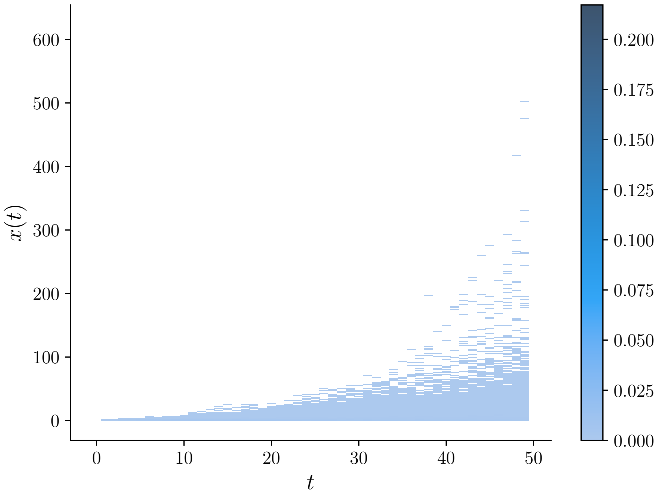
(b) $P(x, t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t.

Se encontraron parametros que permiten un valor medio de población estacionario no nulo que puede verse en la Fig. 5.

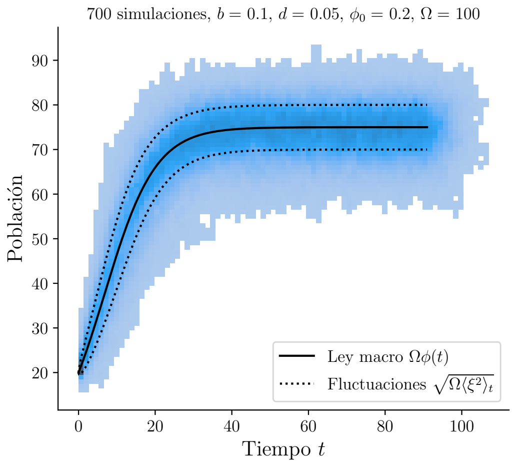
Se obtuvo un conjunto de parámetros que producen una extinción, resultados asociados a esta simulación pueden verse en la Fig. 6.



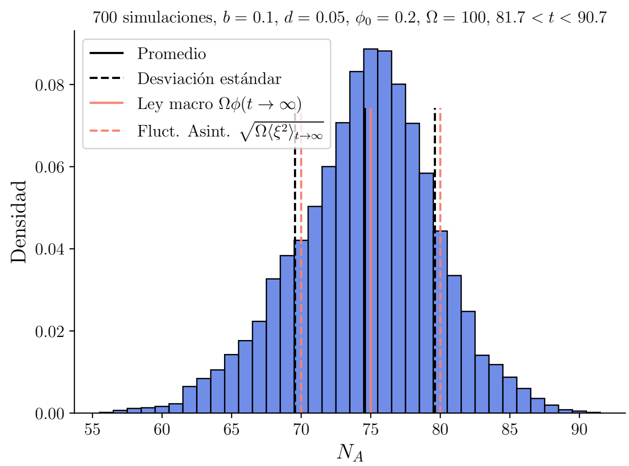
(a) Evolución del mapeo para distintos valores medios de la generación de números aleatorios, para 50 pasos en t.



(b) $P(x,t)$ densidad de probabilidad (color) de x y t calculada a partir de 5000 evaluaciones de 50 pasos en t.

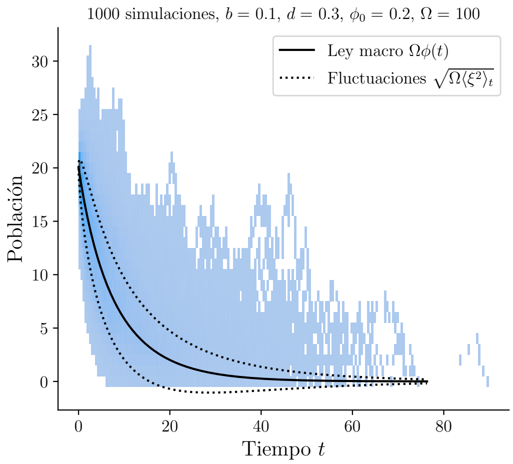


(a) Distribución $P(N_A, t)$ (en color) calculada numéricamente.

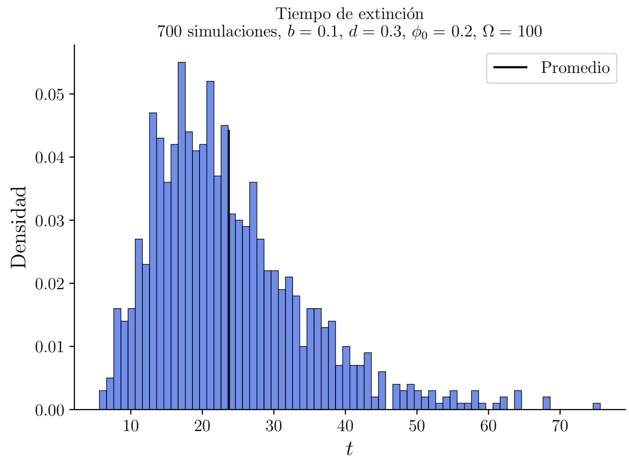


(b) Distribución de poblaciones en el estado estacionario. Las barras indican las predicciones teóricas y predichas mediante múltiples simulaciones.

Figura 5: Simulación con población media estacionaria no nula.



(a) Distribución $P(N_A, t)$ (en color) calculada numéricamente.



(b) Distribución de tiempos de extinción.

Figura 6: Simulación con extinción.