Practica 9(2021)

Problema 1:

Enunciado: Considere la variable aleatoria $X \in \mathcal{A}_X = \{0, 1\}, \text{con}\, p_0 = 2/3, p_1 = 1/3$.

a) Codifique la secuencia que se inicia con los dígitos 001100 utilizando un código aritmético temario.

b) Codifique la secuencia que se inicia con los dígitos 0101 utilizando un código aritmético binario.

Enunciado: b) Theorem 9.6.4:

$$h(aX) = h(X) + \log |a|$$

Proof: Let $Y = aX$. Then $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$, and

$$\begin{aligned} h(\alpha X) &= -\int f_Y(y) \log f_Y(y) dy \\ &= -\int \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right) \log\left(\frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)\right) dy \\ &= -\int f_X(x) \log f_X(x) + \log |a| \\ &= h(X) + \log |a| \end{aligned}$$

after a change of variables in the integral.

Resolución: Dadas estas condiciones, si $x_i = a_N$ (i y N pueden no ser iguales):

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{j=1}^{k} p\left(x_j \mid x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\right) \\ u &= (v-u) Q_N + u \\ v &= (v-u) Q_{N+1} + u \end{aligned}$$

Problema 4:

Enunciado: Para el caso del problema 3, encuentre una secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_i$ cuya representación binaria en código aritmético pueda escribirse inmediatamente cada vez que llega un símbolo a 0 b, sin tener que esperar a ver qué otros símbolos se muestrean a continuación.

Resolución: Theorem 9.4.1 (Entropy of a multivariate normal distribution): Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ have a multivariate normal distribution with mean μ and covariance matrix K. (We use $\mathcal{N}_n(\mu, K)$ or $\mathcal{N}(\mu, K)$ to denote this distribution.) Then

$$h\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = h\left(\mathcal{N}_n(\mu, K)\right) = \frac{1}{2} \log (2\pi e)^n |K| \text{ bits}$$

where $|K|$ denotes the determinant of K. Proof: The probability density function of $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

Then

$$\begin{aligned} h(f) &= -\int f(\mathbf{x}) \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mu) - \ln(\sqrt{2\pi})^n |K|^{1/2}\right] d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} E\left[\sum_{i,j}\left(x_i-\mu_i\right)\left(K^{-1}\right)_{ij}\left(x_j-\mu_j\right)\right] + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} E\left[\sum_{i,j}\left(x_i-\mu_i\right)\left(x_j-\mu_j\right)\left(K^{-1}\right)_{ij}\right] + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} E\left[\left(x_j-\mu_j\right)\left(x_i-\mu_i\right)\right]\left(K^{-1}\right)_{ij} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_i K_{ji}\left(K^{-1}\right)_{ij} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left(K K^{-1}\right)_{ij} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} \sum_j I_{jj} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)^n |K| \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^n |K| \text{ nats} \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)^n |K| \text{ bits.} \end{aligned}$$

Problema 5:

Enunciado: Dados los números naturales $N y K, \text{con}\, N \geq K$, suponga que se muestrean cadenas $(x_1, \ldots, x_N)$ de tal forma que en cada cadena de N números hay siempre K de ellos que valen a, y $N-K$ que valen b. Las posiciones de las a

-s y las b -s son aleatorias, de forma que todas las permutaciones de los elementos de la cadena tienen igual probabilidad. Encuentre las probabilidades $p\left(x_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}\right), \forall i \in [1, N]$, que le permitirían aplicar el algoritmo del punto 1.

Resolución:

$$\begin{aligned}
I(x_1, x_2) &= h(x_1) + h(x_2) - h(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2\pi e) + \frac{1}{2}\ln(2\pi e) - \frac{1}{2}\ln(\det(2\pi e\Sigma)) \\
&= \ln(2\pi e) - \frac{1}{2}\ln(\det((2\pi e)^2\Sigma)) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(\det(\Sigma)) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-\rho^2)
\end{aligned}$$