Practica 3(2021)

Problema 1:

Enunciado: Los datos medidos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se generan muestreando n veces una distribución $q_1(x)$. Usted conoce los valores medidos $X_1, \ldots, X_n$, pero desconoce la distribución $q_1(x)$ que les dio origen. Por lo tanto, considera dos hipótesis (a priori equiprobables) H_1 : Los datos provienen de la distribución $q_1(x)$, H_2 : Los datos provienen de otra distribución $q_2(x)$. Para dirimir cual de las dos hipótesis es más probable, calcula el cociente

$$\lambda = \frac{P\left(\mathbf{H}_1 \mid X_1, \ldots X_n\right)}{P\left(\mathrm{H}_2 \mid X_1, \ldots X_n\right)}$$

Haciendo uso de la ley de los grandes numeros, encuentre el limite cuando $n \to \infty$ de $\log(\lambda)$.

Resolucion: un elemento $\vec{x}$ de $A_{\epsilon=0}^{N=N}$ tiene probabilidad $p(\vec{x})$:

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{2^{NH(x)}}$$

Para sistemas de este tipo:

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{2^{NH(x)}} = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = N$$

α_i es el numero de veces que aparece en la cadena x_i.

Ejemplo, inciso a, $N = 20, \epsilon = 0$:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = \frac{3}{2} \ \texttt{bit}$$

un elemento $\vec{x}$ de $A_{\epsilon=0}^{N=N}$ tiene probabilidad $p(\vec{x})$:

por lo que cualquier cadena que tenga 10 elementos de prob 1/2 y 10 de prob 1/4

Problema 5:

Enunciado: Dada una variable binaria $X \in \{0,1\}$ con $p(X=0) = p_0$, considere cadenas de N muestras $\vec{X}_N = (X_1, \ldots, X_N)$ independientes. Si es posible, especifique un valor de p_0 tal que a) para todo $N \geq 1$ y para todo $\epsilon \geq 0$, todas las cadenas $\vec{X}_N$ pertenezcan al conjunto tipico $\mathcal{A}_i^N$ b) la cadena $\vec{X}_{10} = (1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$ pertenezca al conjunto tipico $\mathcal{A}_\varepsilon^{10}$ para todo valor de $\epsilon \geq 0$, pero no asi la cadena $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,0)$; c) no exista ninguna cadena $\vec{X}_{10}$ que pertenezca al conjunto tipico A_c^{10} para $\epsilon = 0$.

Resolucion:

$$H(X) = -\sum p_i \log p_i = -p_0 \log p_0 - (1-p_0)\log(1-p_0)$$

Los $\vec{t} \in A_0^N$:

$$p(\vec{t}) = 2^{-NH(X)} = p_0^{Np_0}(1-p_0)^{N(1-p_0)}$$

Las cadenas $\vec{x}$ posibles de X tienen probabilidad:

$$p(\vec{x^N}) = p_0^k(1-p_0)^{(N-k)}$$

si tienen k ceros y $N-k$ unos en la cadena de N elementos.

inciso a:

Para que todas las cadenas pertenezcan a $A_{\epsilon=0}^{N=N}$ todas las cadenas deben ser equiprobables.

$$p_0 = 2^{-1}, \quad p(\vec{x^N}) = 2^{-N},$$

Veamos si tiene la misma probabilidad de un $\vec{t}$

$$p(\vec{t}) = 2^{-N}$$

Vemos que en este caso $\vec{x^N} \in A_{\epsilon=0}^{N=N}$

inciso b:

La cadena $\vec{x_1^{10}} = (1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$ cumple:

$$p(\vec{x_1^{10}}) = p_0^6(1-p_0)^4$$

si pertenece $A_{\epsilon=0}^{N=10}$ tiene la misma probabilidad $p(\vec{t})$:

$$p(\vec{x_1^{10}}) = p_0^6(1-p_0)^4 = p_0^{(10)p_0}(1-p_0)^{(10)(1-p_0)} = p(\vec{t})$$

De donde vemos que:

$10p_0 = 6 \Rightarrow p_0 = \frac{6}{10}$

Con esa probabilidad $\vec{x_1^{10}} \in A_{\epsilon=0}^{N=10}$. Tambien pertenece a $A_{\epsilon\geq 0}^{N=10}$

Verificamos que a esa probabilidad $\vec{x_2^{10}} = (1,0,1,0,1,0,1,0,1,0) \notin A_{\epsilon=0}^{N=10}$.

$$p(\vec{x_2^{10}}) = p_0^5(1-p_0)^5 \neq p_0^6(1-p_0)^4, \text{ con } p_0 = \frac{6}{10}$$

Por lo que $p_0 = \frac{6}{10}$ es la probabilidad que permite.

inciso c:

Dada una $\vec{x^{10}}$ buscamos que su probabilidad no le permita estar en el conjunto típico $A_{\epsilon=0}^{N=10}$.

$p(\vec{x^{10}}) = p_0^k(1-p_0)^{(N-k)} \neq p_0^{Np_0}(1-p_0)^{N(1-p_0)} = p(\vec{t})$

Asi $p_0 \neq \frac{k}{N}$ es una condición para que la cadena no este en el conjunto típico. Asique tomar una probabilidad irracional funciona bien.