

Practica 2(2021)

Problema 1:

Enunciado: Demuestre que la divergencia de Kullback-Leibler puede no ser simétrica y no cumplir con la desigualdad triangular. ¿En qué casos la divergencia de Kullback-Leibler se va a infinito?

Resolucion: Contraejemplo: Sistema de monedas cargadas:

$$x_1 \in A_{X_1} = \{H, T\}, \text{Prob de } H = p_H = 1/10$$

$$x_2 \in A_{X_2} = \{H, T\}, \text{Prob de } H = q_H = 2/10$$

$$x_3 \in A_{X_3} = \{H, T\}, \text{Prob de } H = r_H = 3/10$$

La divergencia para dos monedas cargadas con distinto peso p y q de H :

$$D_{KL}(p \parallel q) = p \log \frac{p}{q} + (1-p) \log \frac{(1-p)}{(1-q)}$$

Para la desigualdad triangular:

$$D_{KL}(p \parallel q) + D_{KL}(q \parallel r) \approx 0,0271$$

$$D_{KL}(p \parallel r) \approx 0.0370$$

NO satisface la desigualdad triangular

$$D_{KL}(p \parallel q) + D_{KL}(q \parallel r) \approx 0,0271 \leq D_{KL}(p \parallel r)$$

Para simetría:

$$D_{KL}(p \parallel q) \approx 0.037, \quad D_{KL}(q \parallel p) \approx 0.019$$

son distintas, D_{KL} es simétrica.

Problema 2:

Enunciado: Utilizando la desigualdad de Jensen, demuestre que una variable aleatoria es determinista si y sólo si su varianza se anula.

Resolucion: Una variable aleatoria es determinista \Leftrightarrow Su varianza es nula

Demo:

como $f(x) = x^2$ es estrictamente convexa:

$$X \text{ es det} \Leftrightarrow f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle \Leftrightarrow Var = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 0$$

Problema 3

Enunciado: Demuestre que el promedio aritmético de un conjunto de números reales positivos es mayor o igual que su promedio geométrico. **Resolucion:** Demuestre que el promedio aritmético de un conjunto de números reales positivos es mayor o igual que su promedio geométrico.

Demo:

$$\begin{aligned} \langle \log x_i \rangle &\leq \log \langle x_i \rangle \\ \frac{1}{N} \sum \log x_i &\leq \log \langle x_i \rangle \\ \frac{1}{N} \log \prod x_i &\leq \log \langle x_i \rangle \\ \log \sqrt[N]{\prod x_i} &\leq \log \langle x_i \rangle \\ \sqrt[N]{\prod x_i} &\leq \langle x_i \rangle \\ \sqrt[N]{\prod x_i} &\leq \frac{1}{N} \sum x_i \end{aligned}$$

que es lo que se buscaba

Problema 4

Enunciado: Demuestre que la entropía es una función cóncava de p . Es decir, si se consideran dos distribuciones p_1 y p_2 , entonces se cumple que para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$H[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2] \geq \lambda H(p_1) + (1-\lambda)H(p_2).$$

Resolucion: Theorem: The cross-entropy is convex in the probability distribution q , i.e.

$$H[p, \lambda q_1 + (1-\lambda)q_2] \leq \lambda H[p, q_1] + (1-\lambda)H[p, q_2]$$

where p is a fixed and q_1 and q_2 are any two probability distributions and $0 \leq \lambda \leq 1$. Proof: The relationship

between Kullback-Leibler divergence, entropy and cross-entropy is:

$$\text{KL}[P\|Q] = H(P, Q) - H(P)$$

Note that the KL divergence is convex in the pair of probability distributions (p, q) :

$$\text{KL}[\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2\|\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] \leq \lambda \text{KL}[p_1\|q_1] + (1 - \lambda)\text{KL}[p_2\|q_2]$$

A special case of this is given by

$$\begin{aligned} \text{KL}[\lambda p + (1 - \lambda)p\|\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] &\leq \lambda \text{KL}[p\|q_1] + (1 - \lambda)\text{KL}[p\|q_2] \\ \text{KL}[p\|\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] &\leq \lambda \text{KL}[p\|q_1] + (1 - \lambda)\text{KL}[p\|q_2] \end{aligned}$$

and applying equation (2), we have

$$\begin{aligned} H[p, \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] - H[p] &\leq \lambda (H[p, q_1] - H[p]) + (1 - \lambda) (H[p, q_2] - H[p]) \\ H[p, \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] - H[p] &\leq \lambda H[p, q_1] + (1 - \lambda)H[p, q_2] - H[p] \\ H[p, \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2] &\leq \lambda H[p, q_1] + (1 - \lambda)H[p, q_2] \end{aligned}$$

which is equivalent to (1).

Problema 5

Enunciado: Cota de la independencia: Demuestre que

$$H(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq \sum_i H(X_i)$$

Resolucion: Usando

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1)$$

Sabemos que:

$$H(X | Y) \leq H(X)$$

Cuando X e Y son independientes: generalizando: