Practica 8(2021)

Problema 1:

Enunciado: Demuestre que la distancia de Hamming, definida como "Dist $(\vec{x}, \vec{y})$ = nro. de dígitos donde $\mathrm{x_i} \neq \mathrm{y_i}''$ cumple con las condiciones que definen una distancia:

a) Dist $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \geq 0, \forall \overrightarrow{x_1}, \forall \overrightarrow{x_2}, y$ la igualdad se cumple si y solo si $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$.

b) Dist $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) =$ Dist $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_1})$, $\forall \overrightarrow{x_1}, \forall \overrightarrow{x_2}$

c) Dist $(\vec{x}_1, \overrightarrow{x_2}) \leq$ Dist $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_3}) +$ Dist $(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_2})$, $\forall x_1, x_2, x_3$

Resolución: Represento la distancia Hamming como:

$$d(z^1, z^2) = \sum_{n=1}^{N} \left| z_n^1 - z_n^2 \right|$$

a) La cantidad N de dígitos es un número natural y la cantidad de discrepancias entre dos códigos de N dígitos está entre 0 y N

b) Como $\neq$ es simétrica, el cambio de orden genera el mismo número de salida para la $d(.,.)$

c) Como $d(x_1, y_2) = |x_1 - x_2|$ ya cumple la desigualdad triangular por ser una distancia. Puedo demostrar que $d(z^1, z^2) = \sum_{n=1}^{N} \left| z_n^1 - z_n^2 \right|$ también la cumple partiendo de la desigualdad triangular y sumando ambos miembros en n hasta N.

Problema 2:

Enunciado: Ubique el máximo número de palabras código de 3 dígitos que pueden acomodarse en un cubo de lado 1 , de forma que

a) puedan detectarse todos los errores simples,

b) puedan corregirse todos los errores simples.

¿Son únicas las respuestas?

Resolución:

a) Un máximo de 4 palabras código.

```
El cuadradito de adentro es una cosa del cubo y la otra
x_________
|\ _____ /|
| |    x| |
| |x____| |
|/_______\|
          x

 _________x
|\ _____ /|
| |x    | |
| |____x| |
|/_______\|
x
La respuesta es única
```

b)

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}} = 2$$

Problema 3:

Enunciado: Queremos construir un código capaz de codificar 4 palabras. ¿Cuál es la mínima longitud de las palabras (es decir, la mínima dimensión que debe tener el espacio) para que, ubicando las palabras convenientemente, podamos corregir hasta errores dobles?

Resolución:

$$4 \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i}} \approx 4.41 (n = 7)$$

Problema 4:

Enunciado: Considere el código de Hamming $(7, 4)$. Decodifique las siguientes secuencias:

a) $\mathbf{r}^T = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$

b) $\mathbf{r}^T = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$

c) $\mathbf{r}^T = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$

d) $\mathbf{r}^T = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Problema 5:

Enunciado: Encuentre ejemplos de vectores error que dan lugar al síndrome z = $(0, 0, 0)$ para el código de Hamming $(7,4) ¿Cuántos tales ejemplos existen?

Resolución: Por ej. la cadena de todos ceros y todos unos (por tanteo).

Pero más en general, se busca cuantos $\vec{e}$ hay que cumplen $A\vec{e} = \vec{0}$, se puede resolver el sistema de ecuaciones y contar las soluciones, encontrándose que se tienen 4 variables libres que toman dos valores $\therefore$ hay 2^4 soluciones a la ecuación matricial para un código Hamming$(7, 4)$. En general, hay 2^b soluciones a la ecuación matricial para un código Hamming(a, b).

Problema 6:

Enunciado: Se define un código de Hamming como aquel en que la matriz de chequeo de paridad tiene en su columna j la expresión en binario del número j. Si un código de Hamming tiene m dígitos de paridad ¿Cuál es la máxima dimensión del espacio n?

Resolución: La dimension del espacio es el numero de dígitos, el numero de dígitos es el numero de dígitos en el mensaje A mas los de paridad m

$$n = A + m$$

Para un m fijo, maximizar n es maximizar A:

Miremos la cond. suficiente y la necesaria de los dígitos para el código Hamming, suponiendo errores simples:

$$2^m > \sum_{i=0}^{1} \binom{n-1}{i} = \binom{m+A-1}{0} + \binom{m+A-1}{1} = 1+m+A-1 = m+A$$

$$2^m - m > A$$

$$M = 2^A \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}} = \frac{2^{A+m}}{1+m+A}$$

$$2^A \leq \frac{2^{A+m}}{1+m+A}$$

$$1 + m + A \leq 2^m$$

$$m + A \leq 2^m - 1$$

$$n \leq 2^m - 1$$

Donde vemos que el máximo numero de dígitos para m fijo es $2^m - 1$