Final 2 2021:

Problema 1:

Enunciado: Si es posible, encuentre ejemplos de variables X e Y tales que

(a) $H(X) = 1$ bit, $H(Y) = 1$ bit, $I(X;Y) = 0$.

(b) $H(X) = 2$ bit, $H(Y) = 1$ bit, $I(X;Y) = 1$ bit.

(c) $H(X) = 2$ bit, $H(Y) = 2$ bit, $I(X;Y) = 1$ bit.

(d) $H(X) = 1$ bit, $H(Y) = 2$ bit, $I(X;Y) = 2$ bit.

(e) $H(X) = 2$ bit, $H(Y) = 3$ bit, $I(X;Y) = 1$ bit.

Encontrar un ejemplo significa dar los conjuntos $\mathcal{A}_x$y$\mathcal{A}_Y$ donde X e Y toman valores, y también dar explícitamente las distribuciones de probabilidad $p(x), p(y)$ y $p(x,y), \forall x \in \mathcal{A}_Xy\forall y \in \mathcal{A}_Y$. Si no existe ningún par de variables aleatorias X e Y que cumpla con lo requerido por el enunciado, demuestre tal no existencia.

Resolución:

Preámbulo

Podemos verificar que las probabilidades condicionales están bien definidas usando:

$$\sum_x p(x \mid y) = 1$$

Inciso a

Como $I(X;Y) = 0 \Leftrightarrow XeY$ son indep. $\Rightarrow P(x,y) = P(x)P(y)$

Se puede tener $H(X) = 1$ `bit` si $p(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in A_X$, con $|A_X| = 2$.

Lo mismo es cierto para Y.

Inciso b

Dados:

$$H(X) = 2 \texttt{ bit}, \quad H(Y) = 1 \texttt{ bit}, \quad I(X;Y) = 1 \texttt{ bit}$$

Por simplicidad se propone:

$$|A_Y| = 2, |A_X| = 4$$

$$x = \Big\{0, 1, \text{con probabilidad } \frac{1}{2}$$

$$y = \Big\{0, 1, 2, 3, \text{con probabilidad } \frac{1}{4}$$

Es sabido que:

$$0 \le I(X;Y) \le \min(H(X), H(Y))$$

I es máxima, lo cual sugiere que se ahorra el máximo # de preguntas posible. Esto descarta que ambas variables sean independientes. Si uno propone X e Y relacionados por f:

En forma matricial:

$p(x \mid y)$	$y=0$	$y=1$
$x=0$	$1/2$	0
$x=1$	$1/2$	0
$x=2$	0	$1/2$
$x=3$	0	$1/2$

La conjunta: $p(x,y) = p(x \mid y)p(y)$

$p(x,y)$	$y=0$	$y=1$
$x=0$	$1/8$	0
$x=1$	$1/8$	0
$x=2$	0	$1/8$
$x=3$	0	$1/8$

Calculando $H(X \mid Y)$:

$$\begin{aligned} H(X \mid Y) &= -\sum_y p(y) \sum_x p(x \mid y) \log_2 p(x \mid y) \\ &= -\sum_y p(y) \sum_x a_{xy} = -\sum_y \frac{1}{2} \sum_x a_{xy} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_y \sum_x a_{xy} = 1\texttt{bit} \end{aligned}$$

Usando que a_{xy}

a_{xy}	$y=0$	$y=1$
$x=0$	$-1/2$	0
$x=1$	$-1/2$	0
$x=2$	0	$-1/2$
$x=3$	0	$-1/2$

$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = 2\texttt{bit} - 1\texttt{bit} = 1\texttt{bit}$

Las variables X, Y definidas anteriormente cumplen todas las condiciones que se piden.

Inciso c

Dados:

$H(X) = 2\ \texttt{bit}, \quad H(Y) = 2\ \texttt{bit}, \quad I(X;Y) = 1\ \texttt{bit}$

Que pueden obtenerse con variables uniformemente distribuidas:

$$|A_Y| = 4, |A_X| = 4$$

Es sabido que:

$$0 \leq I(X;Y) \leq \min(H(X), H(Y))$$

Lo cual no contradice que $I(X;Y) = 1\ \texttt{bit}$.

Se ahorra un número de preguntas. Por lo que las variables no son totalmente independientes, suponiendo una dependencia tipo:

$$y = \Big\{ 0, 1, 2, 3, \text{con probabilidad } \frac{1}{4}$$

$$x = \Big\{ 0, 1, 2, 3, \text{con probabilidad } \frac{1}{4}$$

$p(x \mid y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$1/2$	$1/2$	0	0
$x=1$	$1/2$	$1/2$	0	0
$x=2$	0	0	$1/2$	$1/2$
$x=3$	0	0	$1/2$	$1/2$

$p(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$1/8$	$1/8$	0	0
$x=1$	$1/8$	$1/8$	0	0
$x=8$	0	0	$1/8$	$1/8$
$x=3$	0	0	$1/8$	$1/8$

$$\begin{aligned} H(X \mid Y) &= -\sum_y p(y) \sum_x p(x \mid y) \log_2 p(x \mid y) \\ &= -\sum_y p(y) \sum_x a_{xy} = -\sum_y p(y) \sum_x a_{xy} \\ &= -\sum_y \frac{1}{4} \sum_x a_{xy} = -\frac{1}{4} \sum_y \sum_x a_{xy} \\ &= 1\texttt{bit} \end{aligned}$$

Usando que:

a_{xy}	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$-1/2$	$-1/2$	0	0
$x=1$	$-1/2$	$-1/2$	0	0
$x=2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$
$x=3$	0	0	$-1/2$	$-1/2$

$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = 2\texttt{bit} - 1\texttt{bit} = 1\texttt{bit}$

Inciso d

Dados:

$H(X) = 1\ \texttt{bit}, \quad H(Y) = 2\ \texttt{bit}, \quad I(X;Y) = 2\ \texttt{bit}$

Que pueden obtenerse con variables uniformemente distribuidas:

$$|A_Y| = 2, |A_X| = 4$$

Es sabido que:

$$0 \leq I(X;Y) \leq \min(H(X), H(Y))$$

Lo cual contradice que $I(X;Y) = 2\ \texttt{bit}$, por lo que no es posible tener variables X, Y que cumplan estos requisitos.

Inciso e

Dados:

$H(X) = 2\ \texttt{bit}, \quad H(Y) = 3\ \texttt{bit}, \quad I(X;Y) = 1\ \texttt{bit}$

Que pueden obtenerse con variables uniformemente distribuidas:

$$|A_Y| = 2, |A_X| = 8$$

Es sabido que:

$$0 \leq I(X;Y) \leq \min(H(X), H(Y))$$

Lo cual no contradice que $I(X;Y) = 1\ \texttt{bit}$.

$$y = \Big\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{ con probabilidad } \frac{1}{8}$$

$$x = \Big\{0, 1, 2, 3, \text{con probabilidad } \frac{1}{4}$$

$p(x \mid y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$1/2$	0	0	0
$x=1$	$1/2$	0	0	0
$x=2$	0	$1/2$	0	0
$x=3$	0	$1/2$	0	0
$x=4$	0	0	$1/2$	0
$x=5$	0	0	$1/2$	0
$x=6$	0	0	0	$1/2$
$x=7$	0	0	0	$1/2$

La probabilidad conjunta:

$p(x, y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$1/16$	0	0	0
$x=1$	$1/16$	0	0	0
$x=2$	0	$1/16$	0	0
$x=3$	0	$1/16$	0	0
$x=4$	0	0	$1/16$	0
$x=5$	0	0	$1/16$	0
$x=6$	0	0	0	$1/16$
$x=7$	0	0	0	$1/16$

Calculando $H(X \mid Y)$:

$$\begin{aligned}
H(X \mid Y) &= -\sum_y p(y) \sum_x p(x \mid y) \log_2 p(x \mid y) \\
&= -\sum_y p(y) \sum_x a_{xy} = -\sum_y p(y) \sum_x a_{xy} \\
&= -\sum_y \frac{1}{4} \sum_x a_{xy} = -\frac{1}{4} \sum_y \sum_x a_{xy} \\
&= 1\texttt{bit}
\end{aligned}$$

usando que:

a_{xy}	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	$-1/2$	0	0	0
$x=1$	$-1/2$	0	0	0
$x=2$	0	$-1/2$	0	0
$x=3$	0	$-1/2$	0	0
$x=4$	0	0	$-1/2$	0
$x=5$	0	0	$-1/2$	0
$x=6$	0	0	0	$-1/2$
$x=7$	0	0	0	$-1/2$

Por lo que se puede garantizar que:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = 2\texttt{bit} - 1\texttt{bit} = 1\texttt{bit}$$

Problema 2:

Enunciado: Una fuente genera símbolos $X \in \mathcal{A}_X = \{0, 1, 2\}$, con probabilidades $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4,$ yse los codifica con un código aritmético binario con símbolos $Y \in \mathcal{A}_Y = \{0, 1\}$. Decodifique la secuencia que comienza con 11001000111011010111001011100111111... hasta donde le sea posible. Justifique.

Resolucion:

11001000111011010111001011100111111

Propongo hacer Huffman:

```
1/2 1/4 1/4
 |   |   |
 |   \0 1/
 |     |
1/2   1/2
 |     |
\0    1/
  \   /
   \ /
    1
```

Con esta propuesta:

$$\begin{aligned}
X = 0,\ C(0) &= 0 \\
X = 1,\ C(1) &= 10 \\
X = 2,\ C(2) &= 11
\end{aligned}$$

11 0 0 10 0 0 11 10 11 0 10 11 10 0 10 11 10 0 11 11 11

11	0	0	10	0	0	11	10	11	0	10	11	10	...
2	0	0	1	0	0	2	1	2	0	1	2	1	

0	10	11	10	0	11	11	11
0	1	2	1	0	2	2	2

Problema 3:

Enunciado: Considere las 10 urnas $(a, b, \ldots, j)$ de la figura. Se elige una urna al azar. La variable X es la urna elegida. De esa urna, se extrae una pelota. La variable Y es el color de la pelota extraída. Considere el canal $X \to Y$ que mapea la urna elegida con la pelota extraída. Calcule la capacidad del canal.

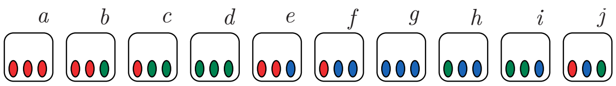

Figure 1: Urnas y pelotas

Resolución:

Propongo:

$$p(x) = \begin{cases} a \text{ prob. } \dfrac{1}{3} \\ d \text{ prob. } \dfrac{1}{3} \\ g \text{ prob. } \dfrac{1}{3} \\ c.o.c \text{ prob. } 0 \end{cases}$$

esto me elimina filas en $P(X \mid Y)$ resultando

$p(x \mid y)$	$y = r$	$y = g$	$y = b$
$x = a$	1	0	0
$x = d$	0	1	0
$x = g$	0	0	1

Uso otra notación para los x e y, que son $A_x = \{x_1, x_2, x_3\}, A_y = \{y_1, y_2, y_3\}$

para que la probabilidad condicional quede:

$p(x \mid y)$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 1$	1	0	0
$x = 2$	0	1	0
$x = 3$	0	0	1

$= \delta_{xy}$

Calculo I(X;Y):

$$I(X;Y) = \sum_{xy} p(x)p(x \mid y) \log \frac{p(x \mid y)}{\sum_{x'} p(x')p(y \mid x')}$$

es uniforme en el alfabeto reducido A'_x, los otros valores no ocurren

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{x,y} \frac{1}{3}\delta_{x,y} \log \delta_{x,y} - \sum_{x,y} \frac{1}{3}\delta_{x,y} \log \frac{1}{3}\delta_{y,y} \\ &= -\sum_{x,y} \frac{1}{3}\delta_{x,y} \log \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \sum_{x,y} \delta_{x,y} \\ &= -\log \frac{1}{3} = \log_2 3 \end{aligned}$$

Esta Información mutua es igual a $log|A_X|$, por esto:

$$C = log_2 3$$

Problema 4:

Enunciado: En un canal binario simétrico $X \to Y$ con probabilidad de error de bit $p(y = 1 \mid x = 0) = p(y = 0 \mid x = 1) = q$ se transmite un código conformado por palabras clave de longitud n. Sea Z una variable aleatoria binaria que representa si la cadena de n dígitos fue transmitida con o sin error. Se define un estimador $\hat{q}(z)$ que suponemos no sesgado, que estima la probabilidad de error de bit q con que opera el canal a partir de una medición de z. Encuentre el mínimo error cuadrático medio que puede tener el estimador $\hat{q}(z)$." Como se modifica la respuesta si consideramos un estimador no sesgado $\hat{q}\left(z_1, \ldots, z_k\right)$ que opera sobre k muestras independientes de la variable binaria Z?

Resolución:

EL error cuadrático mínimo (por la cota de Cramér-Rao) es:

$$E^2(q) = \frac{1}{J(q)}$$

$$error = \begin{cases} \text{no hay error } , 1 - q \\ \text{hay error } , q \end{cases}$$

Para un código de longitud n la variable Z, con una probabilidad de tener error q, tenemos una distribución binomial:

$$z \in \{1, ..., n\}, P(z \mid q) = \frac{n!}{z!(n-z)!} q^z (1-q)^{n-z}$$

con una información de Fisher:

$$J(q) = \frac{n}{q(1-q)}$$

Con lo que:

$$E^2_{\min}(q) = \frac{q(1-q)}{n}$$

Como la información de Fisher es aditiva y tengo k muestras:

$$J_k(q) = kJ_1(q) = \frac{nk}{q(1-q)}$$

Con lo que:

$$E^2_{\min}(q) = \frac{q(1-q)}{nk}$$

Las propiedades de la información de Fisher me permiten tener una idea de cuál es el error cuadrático medio de un “buen” estimador sin tener que realizar propuestas de estimadores y compararlas.