Practica 8(2021)

Problema 1:

Enunciado: Demuestre que la distancia de Hamming, definida como "Dist $(\vec{x}, \vec{y})$ = nro. de digitos donde $\mathrm{x_i} \neq \mathrm{y_i}''$ cumple con las condiciones que definen una distancia:

a) $\operatorname{Dist}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \geq 0, \forall \overrightarrow{x_1}, \forall \overrightarrow{x_2}, y$ la igualdad se cumple si y sólo si $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$.

b) $\operatorname{Dist}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \operatorname{Dist}(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_1}), \forall \overrightarrow{x_1}, \forall \overrightarrow{x_2}$

c) $\operatorname{Dist}(\vec{x}_1, \overrightarrow{x_2}) \leq \operatorname{Dist}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_3}) + \operatorname{Dist}(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_2}), \forall x_1, \forall x_2, \forall x_3$

Resolucion: Represento la distancia hamming como:

$$d(z^1, z^2) = \sum_{n=1}^{N} \left| z_n^1 - z_n^2 \right|$$

a) La cantidad N de digitos es un numero natural y la cantidad de discrepancias entre dos codigos de N digitos esta entre 0 y N

b) Como $\neq$ es simetrica, el cambio de orden genera el mismo numero de salida para la $d(.,.)$

c) Como $d(x_1, y_2) = |x_1 - x_2|$ ya cumple la desigualdad triangular por ser una distancia. Puedo demostrar que $d(z^1, z^2) = \sum_{n=1}^{N} \left| z_n^1 - z_n^2 \right|$ tambien la cumple partiendo de la desigualdad triangular y sumando ambos miembros en n hasta N.

Problema 2:

Enunciado: Ubique el máximo número de palabras código de 3 dígitos que pueden acomodarse en un cubo de lado 1 , de forma que

a) puedan detectarse todos los errores simples,

b) puedan corregirse todos los errores simples.

¿Son únicas las respuestas?

Resolucion: a) Un maximo de 4 palabras codigo.

```
El cuadradito de adentro es una cosa del cubo y la otra
x_________
|\ _____ /|
| |    x| |
| |x____| |
|/_______\|
         x

 _________x
|\ _____ /|
| |x    | |
| |____x| |
|/_______\|
x
La respuesta es unica
```

b)

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}} = 2$$

Problema 3:

Enunciado: Queremos construir un código capaz de codificar 4 palabras. ¿ Cuál es la mínima longitud de las palabras (es decir, la mínima dimensión que debe tener el espacio) para que, ubicando las palabras convenientemente, podamos corregir hasta errores dobles?

Resolucion:

$$4 \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i}} \approx 4.41 (n = 7)$$

Problema 4:

Enunciado: Considere el código de Hamming $(7, 4)$. Decodifique las siguientes secuencias:

a) $\mathbf{r}^T = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$

b) $\mathbf{r}^T = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$

c) $\mathbf{r}^T = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$

d) $\mathbf{r}^T = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Problema 5:

Enunciado: Encuentre ejemplos de vectores error que dan lugar al síndrome z = $(0, 0, 0)$ para el código de Hamming $(7, 4) \cdot$ ¿ Cuántos tales ejemplos existen?

Resolucion: Por ej. la cadena de todos ceros y todos unos (por tanteo).

Pero mas en general, se busca cuantos $\vec{e}$ hay que cumplen $A\vec{e} = \vec{0}$, se puede resolver el sistema de ecuaciones y contar las soluciones, encontrandose que se tienen 4 variables libres que toman dos valores $\therefore$ hay 2^4 soluciones a la ecuacion matricial para un codigo Hamming$(7, 4)$. En general, hay 2^b soluciones a la ecuacion matricial para un codigo Hamming(a, b).

Problema 6:

Enunciado: Se define un código de Hamming como aquel en que la matriz de chequeo de paridad tiene en su columna j la expresión en binario del número j. Si un código de Hamming tiene m dígitos de paridad, cuál es la máxima dimensión del espacio n ?

Resolucion: La dimension del espacio es el numero de digitos, el numero de digitos es el numero de digitos en el mensaje A mas los de paridad m

$$n = A + m$$

Para un m fijo, maximizar n es maximizar A:

Miremos la cond. suficiente y la necesaria de los digitos para el codigo Hamming, suponiendo erroes simples:

$$2^m > \sum_{i=0}^{1} \binom{n-1}{i} = \binom{m+A-1}{0} + \binom{m+A-1}{1} = 1+m+A-1 = m+A$$

$$\begin{aligned} 2^m - m &> A \\ M = 2^A \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}} &= \frac{2^{A+m}}{1+m+A} \\ 2^A &\leq \frac{2^{A+m}}{1+m+A} \\ 1+m+A &\leq 2^m \\ m+A &\leq 2^m - 1 \\ n &\leq 2^m - 1 \end{aligned}$$

Donde vemos que el maximo numero de digitos para m fijo es $2^m - 1$