**Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431**

Ecoulements visqueux

*sujet proposé par Martin Averseng*
`martin.averseng@polytechnique.edu`

Ce mini-projet concerne l'étude de l'évolution d'un domaine fluide lorsque la viscosité du fluide domine les effets inertiels. Dans ce cas, l'écoulement du fluide est modélisé par l'équation dite de Stokes

$$(1) \qquad \begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \\ -\mathrm{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans l'équation précédente, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est le domaine dans lequel le fluide est plongé, $u$ est la vitesse du fluide, c'est un champ de vecteurs à $d$ composantes, et $p$ sa pression qui est un scalaire. Ce sont les deux inconnues du systèmes qui gouvernent le mouvement lorsque l'on applique la densité de force $f$. La viscosité du fluide $\mu$ est une constante et on prendra $\mu = 1$ dans tout le problème pour simplifier. On supposera que le domaine $\Omega$ est connexe et régulier et que son bord $\partial\Omega$ se décompose en deux parties, $\Gamma_D$ sur laquelle on posera la condition de Dirichlet $u = 0$ (condition souvent appelée de "non-glissement") et $\Gamma_N$ sur laquelle on mettra une condition de Neumann homogène $\sigma n = 0$. Cette condition de Neumann modélise une surface libre, c'est-à-dire une surface sur laquelle aucune force ne s'applique. Le but du problème est de comparer numériquement ce qui se passe lorsque l'on prend pour $\sigma$ l'une des deux expressions suivantes

- $\sigma_1 = \nabla u - p\,\mathrm{Id}$ ou en composantes $\sigma_{1,ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - p\delta_{ij}$
- $\sigma_2 = \nabla u + \nabla^T u - p\,\mathrm{Id}$ ou encore $\sigma_{2,ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - p\delta_{ij}$

On notera que $\sigma$ est une matrice de sorte que $\sigma n$ sera le vecteur défini par ses composantes

$$(\sigma n)_i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} n_j \,,$$

et on a bien évidemment noté $\delta_{ij}$ le symbole de Kronecker.

---

## Partie 1 - Formulations variationnelles

L'équation (1) est un système de deux équations qui possède deux inconnues $u$ qui est vectorielle et $p$ qui est scalaire.

**1.** On se place dans le cas où $\sigma = \sigma_1$. Rappeler la formulation variationnelle classique vue en cours et qui permet de résoudre le problème en utilisant le théorème de Lax-Milgram. On rappellera également les principales étapes de la preuve.

**2.** Proposer une discrétisation par éléments finis $\mathbb{P}^1$ pour la vitesse $u$, par exemple lorsque l'on est en dimension $d = 2$. Pouvez-vous décrire des fonctions de base de l'espace discret?

Pour contourner la difficulté précédente, on décrit ci-dessous une formulation dite "mixte" dans laquelle on va calculer la vitesse et la pression simultanément. On considère deux fonctions test $v$ et $q$ respectivement vectorielle et scalaire, on multiplie (scalairement) la première par $v$ et la seconde par $q$ et l'on somme. Sur $\Gamma_N$ on doit faire attention à prendre en compte la condition au bord de Neumann.

**3.** Ecrire la formulation variationnelle dans le cas où $\sigma = \sigma_1$. On proposera un espace de Hilbert dans lequel chercher le couple $(u, p)$ (et contenant $(v, q)$). Noter la différence par rapport au cours où l'on ne suppose pas que $u$ est à divergence nulle. Montrer que la forme bilinéaire sous-jacente est symétrique. On ne demande pas d'essayer de résoudre ce problème avec la théorie de Lax-Milgram. On appellera cette dernière formulation variationnelle (FV1).

**4.** Soit $u$ un champ de vecteurs tel que $\mathrm{div}(u) = 0$ et $p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que

$$-\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = -\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}\,.$$

**5.** En déduire une formulation du problème dans le cas où $\sigma = \sigma_2$. La forme bilinéaire sous-jacente à ce nouveau problème est-elle symétrique? Coercive? Y a-t-il une interprétation énergétique?

**6.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées $d \times d$. Montrer que si $A$ est symétrique et $B$ antisymétrique, alors

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} B_{ij} = 0\,.$$

En déduire que la formulation variationnelle trouvée à la question précédente peut être mise sous une forme symétrique (on rappelle que toute matrice peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une autre antisymétrique). On appellera cette dernière formulation variationnelle (FV2). De même que précédemment, la forme bilinéaire est-elle coercive? Y a-t-il une interprétation énergétique du problème?

**7.** Les solutions de (FV1) et (FV2) ont-elles les mêmes solutions? Que se passe-t-il dans le cas où $\Gamma_N = \emptyset$?

---

### Partie 2 - Implémentation numérique

**8.** On se place dorénavant en dimension $d = 2$. Ecrire un programme en FreeFem++ qui résout les deux formulations variationnelles (FV1) et (FV2). Fournir le code de calcul conçu lors du rendu.

**9. Validation.** Concevoir un cas-test comportant une solution exacte (on pourra prendre un cas Dirichlet pur pour lequel $\Gamma_N = \emptyset$ et une condition de Dirichlet non-homogène et un champ de force $f$ convenablement choisi). Calculer pour les deux formulations la solution numérique et vérifier la convergence vers la solution exacte. On prendra les différents couples d'éléments finis

1 Des éléments finis $P^1$ pour chacune des composante de $u$ et $P^0$ pour $p$.
2 Des éléments finis $P^1$ pour chacune des composante de $u$ et $P^1$ pour $p$.
3 Des éléments finis $P^1$-bulle pour chacune des composante de $u$ et $P^1$ pour $p$.
4 Des éléments finis $P^2$ pour chacune des composante de $u$ et $P^1$ pour $p$.

(On expliquera ce que sont les éléments $P^1$-bulle et leur 4 fonctions de base par élément). Que se passe-t-il dans chacun des cas? Vérifier que seuls les deux derniers choix semblent pertinents. On comparera la différence entre la solution exacte et approchée pour la vitesse et la pression séparément. Par la suite, on prendra le choix 4.

**10.** Résoudre les deux problèmes dans le cas où $\Omega$ est le carré unité $\Omega = ]0,1[^2$, $\Gamma_D = ]0,1[ \times \{0\}$ et $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_D$. On prendra pour $f$ la force de gravité

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Comparer les deux vitesses obtenues. On visualisera les champs de vitesse avec des flèches.

**11.** Faire évoluer le domaine fluide. On bougera chaque point du maillage $x_k$ selon le vecteur $u(x_k)$ par

$$x_k \to x_k + \delta\, u(x_k)$$

où $\delta$ est un petit paramètre (commande FreeFem++ `movemesh`). Physiquement, le domaine s'écoule sous l'action de la force de gravité. Posé sur un support, il peut s'écouler sur les côtés. Itérer l'opération de sorte que le fluide s'écoule de chaque côté du support. Commenter la différence de comportement du fluide suivant les deux formulations variationnelles choisies.

**12.** Au bout d'un certain nombre d'itérations, FreeFem++ ne peut plus résoudre et "plante". Expliquer pourquoi. Peut-on remailler le domaine et poursuivre les itérations?

**13.** Etudier d'autres cas. Par exemple lorsque le bord de Dirichlet correspond à tous les bords du carré sauf le bord droit, ou que la forme initiale est différente.