MAP431 Projet - Écoulement Visqueux

Ge JIN

Jieyao DENG

L'énoncé:

$$(1)\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f \\ -div(u) = 0 \end{cases}$$

Dans les deux équations, on est dans $\Omega \subset R^d$ qui est supposé connexe et régulier (aussi borné).

Supposons que $\mu = 1$. Le bord de Ω est divisé par deux parties:

$$\Gamma_D : u = 0 \text{ et } \Gamma_N : \sigma n = 0$$

Ici, σ prend l'une des deux expressions:

$$\sigma_1 = \nabla u - pId$$

$$\sigma_2 = \nabla u + \nabla^T u - pId$$

Partie 1

1. On se place dans le cas où $\sigma = \sigma_1$. On définit d'abord un espace:

$$H = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d, v = 0 sur.\Gamma_D \right\}$$

Et aussi, $V = \{ v \in H, div(v) = 0 \, presque.partout.sur.\Omega \}$

On montre facilement que $v \in H$. Inspiré par exemple 7.3 à la page 85 du poly, l'espace H muni du produit scalaire $\langle u,v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) : \nabla v(x) dx$ est un espace Hilbert. V est un sous-espace fermé dans H donc il l'est aussi.

On écrit la formule de Green (Corollaire 2.5), pour $i \in \{1,2...d\}$, on a:

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x)dx = -\int_\Omega v_i(x)\Delta u_i(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n}(x)v_i(x)ds$$

De l'équation(1),

$$-\Delta u_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

On remplace $-\Delta u_i$ et on obtient:

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x)dx = \int_\Omega f_i(x)v_i(x)dx - \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)v_i(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n}(x)v_i(x)ds$$

En re-utilisant la formule de Green,

$$-\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)v_i(x)dx = +\int_\Omega p(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)dx - \int_{\Gamma_N} p(x)v_i(x)n_i(x)ds - \int_{\Gamma_D} p(x)v_i(x)n_i(x)ds$$
$$= \int_\Omega p(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)dx - \int_{\Gamma_N} p(x)v_i(x)n_i(x)ds$$

Finalement,

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla v_i(x)dx = \int_\Omega f_i(x)v_i(x)dx + \int_\Omega p(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)dx - \int_{\Gamma_N} p(x)v_i(x)n_i(x)ds + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n}(x)v_i(x)ds$$

Ou sous une autre forme,

$$\int_\Omega \nabla u(x):\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x).v(x)dx + \int_\Omega p(x)div(v)(x)dx + \int_{\partial\Omega=\Gamma_N+\Gamma_D} (\nabla u(x).n(x).v(x) - p(x)v(x).n(x))ds$$

Selon les hypothèses,

$$\sigma_1 n = \nabla u.n - pn = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$

$$u = v = 0 \text{ sur } \Gamma_D$$

$$div(u) = div(v) = 0 \text{ dans } \Omega$$

On obtient notre première version de la FV:

$$\int_\Omega \nabla u(x):\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x).v(x)dx$$
$$a(u,v) = l(v)$$

Pour tout $v \in V$, il nous faut trouver $u \in V$. Ici $a(u.v)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Pour montrer qu'elle est continue et coercive, on ré-écrit:

$a(u,v)=\sum_{i=1}^{d}\int_{\Omega}\nabla u_i(x).\nabla v_i(x)dx$,pour chaque composante on utilise le lemme 2.13(page 27 du poly)pour montrer la coercivité. La continuité de $a(u,v)$ et $l(v)$ s'est fait aisément. (le même process que celui sur la page 27 du poly). Donc finalement on peut utiliser le théorème Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution.

2. Nous sommes inspirés par la figure 1.8 de la page 13 du poly. Si ici $d=2$ et le domaine Ω est un carré, on pourra prendre un maillage triangulaire uniforme. La discrétisation par éléments finis P^1 pour la vitesse u, les fonctions de base sont alors toutes affines par rapport à x et y, autrement dit, $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}=cte1, \frac{\partial \phi_i}{\partial y}=cte2$. Aussi, d'après la proposition 1.12, $\phi_i(\hat{a}_j)=\delta_{ij}, 1\le i,j\le n_{dl}$ où n_{dl} le nombre de degrés de liberté. On doit aussi faire attention que cettes fonctions de baes sont scalaires au lieu d'être de dimension 2.(On verra dans les programmes FreeFem++)

3. Nous prenons une formulation dite “mixte”. Car comme on a vu la FV obtenue précédemment, il n'y a pas de terme p, donc il nous faut modifier. Pour faire apparaître le terme p, nous devons d'abord oublier que $div(u)=0$ en faisant un rappel que $u,v\in H:=\{v\in H^1(\Omega)^d, v=0 sur.\Gamma_D\}$. Nous définissons un espace pour la pression sachant que maintenant on sait rien d'elle: $S\equiv H^1(\Omega)$. Comme dans la question 1, on a:

$$\int_{\Omega}\nabla u(x):\nabla v(x)dx-\int_{\Omega}p(x)div(v)(x)dx=\int_{\Omega}f(x)v(x)dx$$

Aussi, la 2ème équation de (1) fois q,

$$\int_{\Omega}q(x)div(u)(x)dx=0$$

On fait la somme des 2 expressions. La FV devient:

$$A := (H \otimes S)^2 \rightarrow R$$
$$((u,p),(v,q)) \rightarrow \int_\Omega \nabla u(x) : \nabla v(x) - \int_\Omega p(x) div(v)(x) dx - \int_\Omega q(x) div(u)(x) dx$$
$$L((v,q)) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$$

Comparé avec la première FV, deux termes s'ajoutent car ici on ne suppose pas que la compressibilité est validée.

Évidemment $A((u,p),(v,q))$ est bilinéaire et symétrique. On l'appelle **FV1.**

4. D'après l'énoncé, $\sigma_2 = \nabla u + \nabla^T u - pId$, on fait la divergence de cette formule :

$$div(\sigma_2) = div(\nabla u) + div(\nabla^T u) - \underline{grad}(p) = \Delta u + \underline{grad}\big(div(u)\big) - \underline{grad}\ (p)$$

Comme div(u)=0, on obtient : $div(\sigma_2) = \Delta u - \underline{grad}(p)$.

C'est-à-dire, pour tout $i \in [1, d]$, on a :

$$-\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = -\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

5. Comme la question 1, on multiple l'équation $-\Delta u + \nabla p = f$ par $v \in H$ et on l'intègre, la formulation s'écrit :$\int_\Omega (-\Delta u(x) + \nabla p(x)).v(x) dx = \int_\Omega f(x).v(x) dx$.

De plus, d'après la formule de Green, on a la formule suivante :

$$\int_\Omega v(x) . div(\sigma)(x) dx = -\int_\Omega \nabla v(x) : \sigma(x) dx + \int_{\partial\Omega} v(x).\big(\sigma(x).n(x)\big) ds \qquad (1)$$

Comme ici, la condition au limite sur Γ_N est $\sigma_2.n = \nabla u.n + \nabla^T u.n - pn$. D'après la question 4, on sait que $div(\sigma_2) = \Delta u - grad(p)$. Donc la formule (1) peut s'écrire :

$$\int_\Omega v(x).(\Delta u(x) - \nabla p(x)) dx = -\int_\Omega \nabla v(x) : (\nabla u(x) + \nabla^T u(x) - pId) dx +$$
$$\int_{\Gamma_N} v(x).\big(\sigma(x).n(x)\big) ds + \int_{\Gamma_D} v(x).\big(\sigma(x).n(x)\big) ds \qquad (2)$$

Or $v(x) = 0$ sur Γ_D, $\sigma_2.n = 0$ sur Γ_N, on en déduit selon (1) et (2) :

$\int_{\Omega} v(x).(\Delta u(x) - \nabla p(x))dx = \int_{\Omega} f(x).v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla v(x):(\nabla u(x) + \nabla^T u(x) - pId)dx = \int_{\Omega} \nabla v(x):\big(\nabla u(x) + \nabla^T u(x)\big)dx - \int_{\Omega} p(x).div(v)(x)dx$ (3)

De même, on somme (3)avec l'équation :$-\int_{\Omega} q.div(u) = 0$.

Alors la formulation variationnel du problème est :

$$\int_{\Omega} \nabla v(x):\big(\nabla u(x) + \nabla^T u(x)\big)dx - \int_{\Omega} p(x).div(v)(x)dx - \int_{\Omega} q(x).div(u)(x)dx = \int_{\Omega} f(x).v(x)dx$$

Avec $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla v(x):(\nabla u(x) + \nabla^T u(x))dx - \int_{\Omega} p(x).div(v)(x)dx - \int_{\Omega} q(x).div(u)(x)dx$, et $l(v) = \int_{\Omega} f(x).v(x)dx$

La forme bilinéaire n'est pas symétrique, donc on ne peut pas obtenir une interpétation énergétique. Si la forme est coercive, on a $a(u,u) = 0 \rightarrow u = 0$. Mais on trouve que c'est pas vrai. Si on prend l'exemple que $u = (x_2, x_1, 0 \dots 0)$, on a bien que $a(u,u) = 0$. Alors par contraction, on obtient que la forme n'est pas coercive.

6. Comme A est de matrice symétrique et B antisymétrique, on a $A_{ij} = A_{ji}$ et $B_{ij} = -B_{ji}$. On en déduit que:

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}B_{ij} = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ji}B_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}B_{ji} = -\sum_{i,j=1}^{d} A_{ji}B_{ij}$$

Donc $\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}B_{ij} = 0$. C'est-à-dire qu'on a : $A:B = 0$.

Or $\nabla u(x) + \nabla^T u(x)$ est une matrice symétrique, $\nabla v(x) - \nabla^T u(x)$ est antisymétrique. On peut déduire que $\int_{\Omega} (\nabla v(x) - \nabla^T u(x)):\big(\nabla u(x) + \nabla^T u(x)\big) = 0$.

De cette façon, on peut réécrire la formulation précédente d'après la formule ci-dessus, or $\nabla v(x) = \frac{\nabla v(x)+\nabla^T v(x)}{2} + \frac{\nabla v(x)-\nabla^T v(x)}{2}$:

$\frac{1}{2}\int_{\Omega} (\nabla v(x) + \nabla^T u(x)) : \left(\nabla u(x) + \nabla^T u(x)\right) - \int_{\Omega} p(x).div(v)(x)dx -$

$\int_{\Omega} q(x).div(u)(x)dx = \int_{\Omega} f(x).v(x)dx$ (FV2)

La forme bilinénaire est bien symétrique, donc elle forme une interprétation énergétique. De même raisonnement, la forme n'est pas coercive.

7. Si $\Gamma_N = \varphi$, FV1 et FV2 ont les mêmes solutions. Sinon, ils n'admettent pas les mêmes solutions car ils n'ont pas les mêmes conditions aux limites.

Partie 2

8. On fixe la dimension $d = 2$. Veuillez trouver le programme dans les documentaires(.edp).

9. Dans cette partie, on fait un test avec une solution exacte. On suppose que p est constante dans le demaine:

$$p = cte \Leftrightarrow \nabla p = 0 \Rightarrow -\Delta u = f$$

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial y^2} = -f_{x,y}$$

Et avec l'incompressibilité,

$$div(u) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

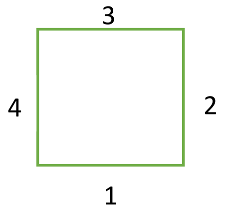
Si on prend la solution exacte:

$$u_x = \cos y; u_y = \sin x$$
$$p = cte$$

Alors les conditions initiales

$$f_x = \cos y;\ f_y = \sin x; \Gamma_N = \emptyset,$$

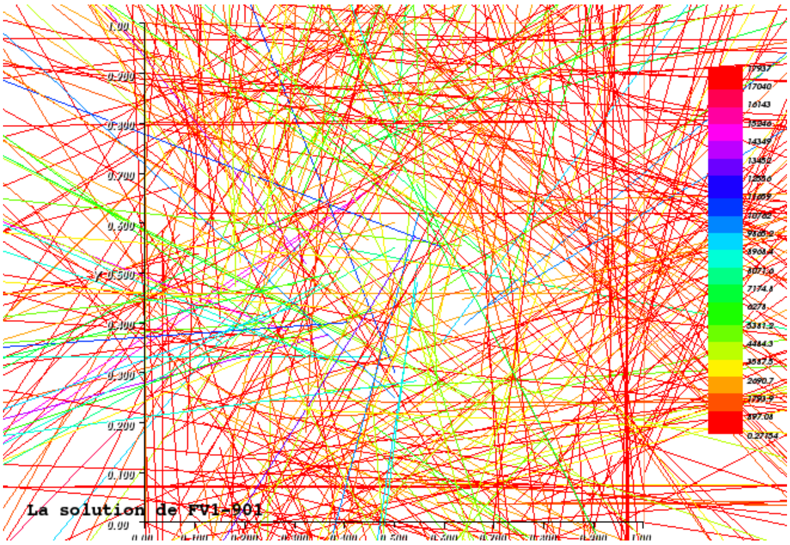
Avec Γ_D (non homogène) sur les 4 côtés de ce carré unitaire



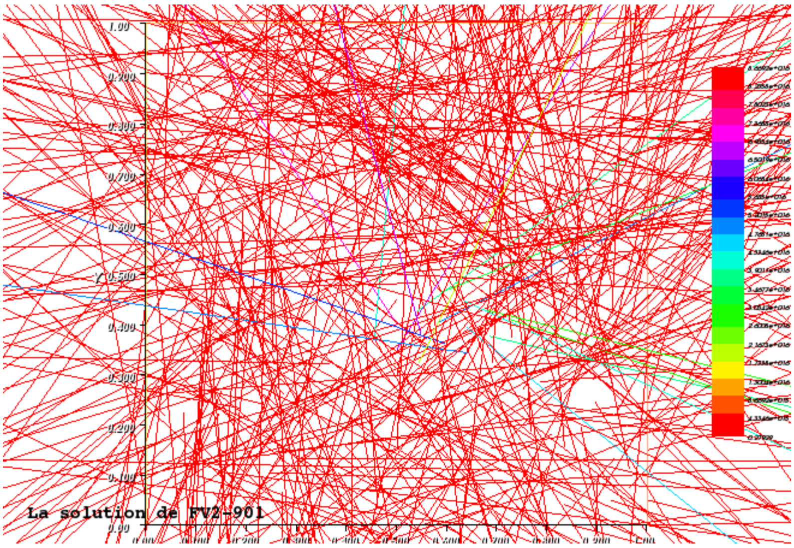
$$1: u_x = 1, u_y = \sin x$$
$$2: u_x = \cos y, u_y = \sin 1(rad)$$
$$3: u_x = \cos 1, u_y = \sin x$$
$$4: u_x = \cos y, u_y = 0$$

1. On prend des élément finis P^1 pour chacune des composante de u et P^0pour p

Pour la formulation FV1 , on obtient la solution:



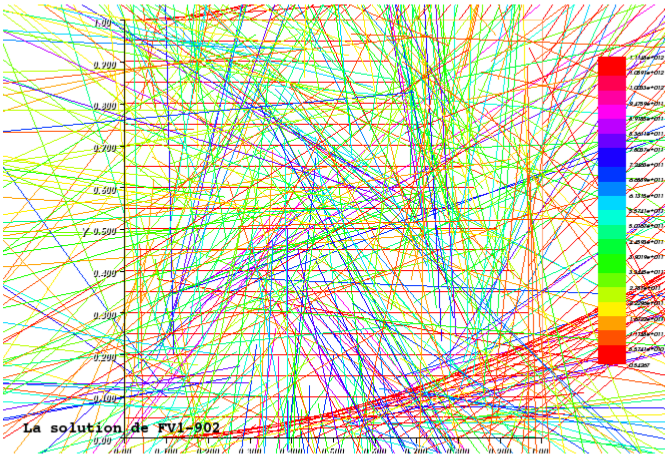
Pour la formulation FV2, on obtient:



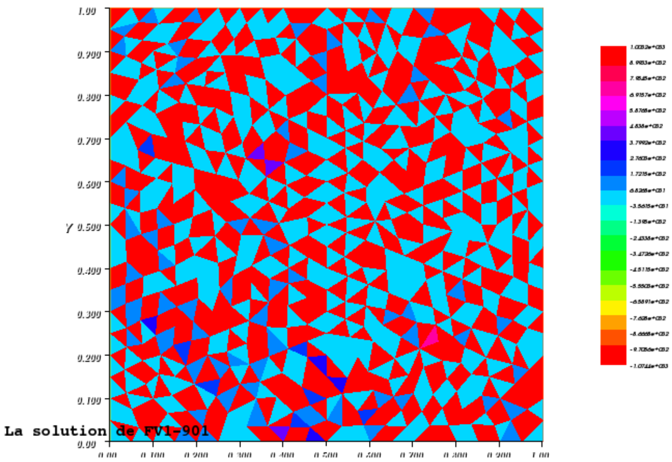
On voit que les deux solutions sont tous irrégulières.

2. On prend des élément finis P^1pour chacune des composants de u et P^1pour p

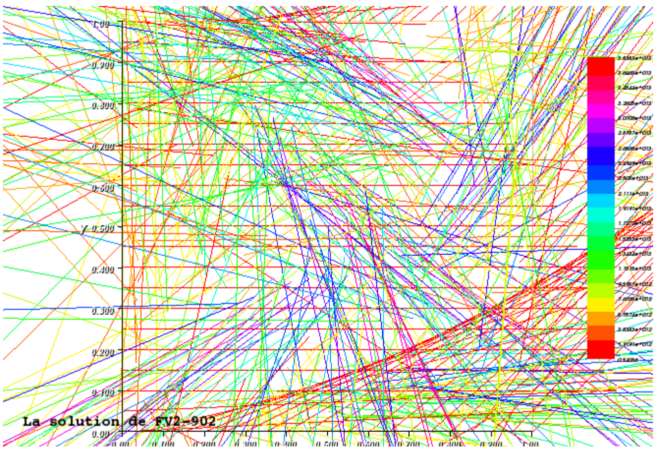
Pour la formulation FV1, la solution de la vitesse est:



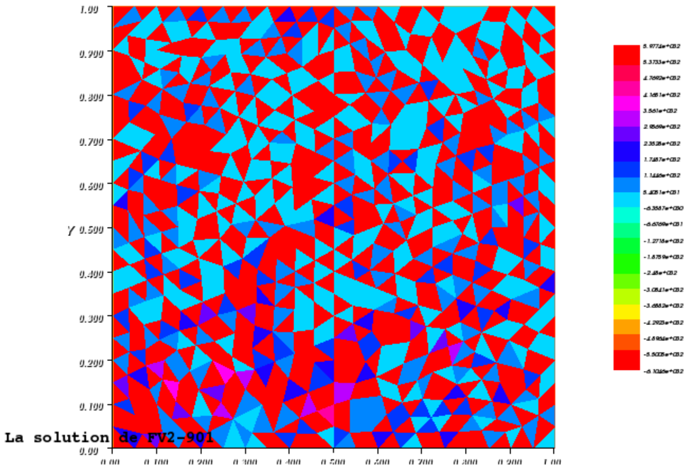
La solution de la pression :



Pour la formulation FV2, la vitesse est:



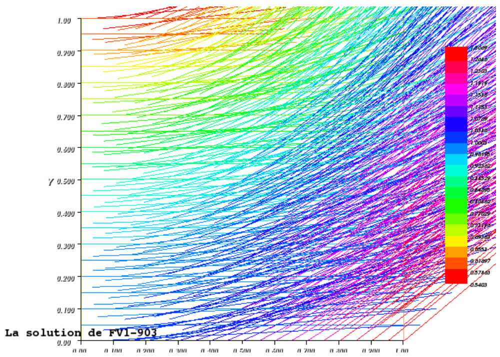
La pression est :



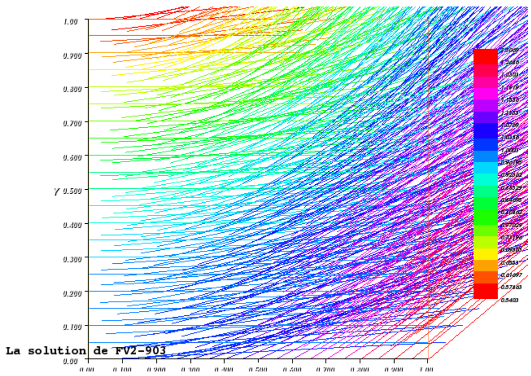
Aussi, les deux solutions sont très chaotiques.

3. On prend des éléments finis P^1-bulle pour chacune des composante de u et P^1 pour p

   Pour la formulation FV1

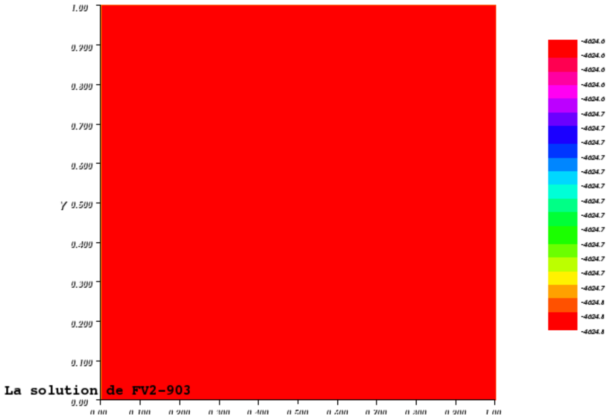


   Pour la formulation FV2 :



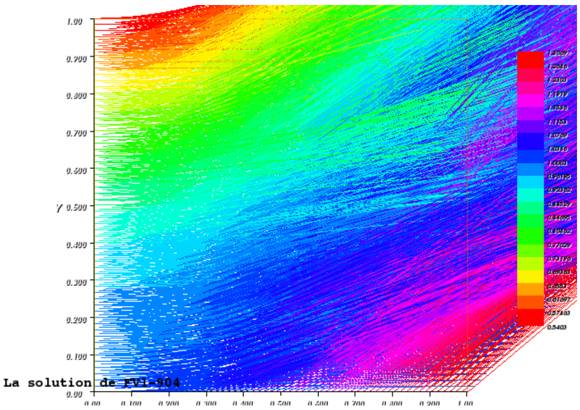
   On voit que les solutions sont régulières.

   Les pressions des deux formulatins sont tous homogène :

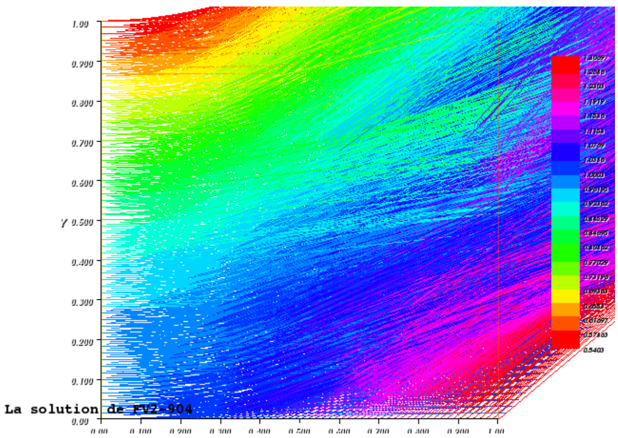


4. On prend des éléments finis P^2pour chacune des composante de u et P^1pour p

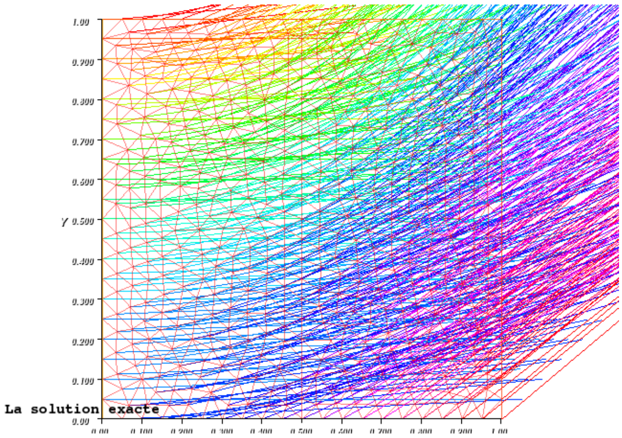
   Pour la formulation FV1 :



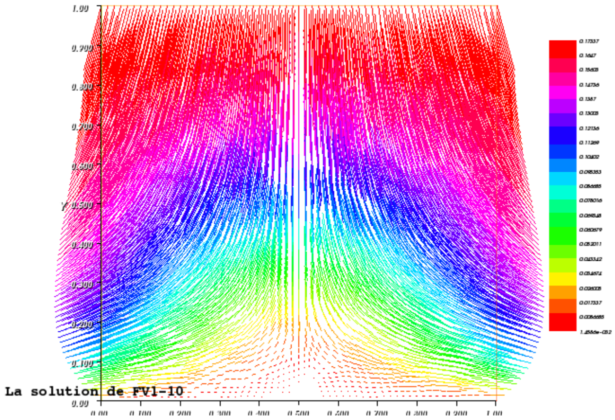
   Pour la formulation FV2:



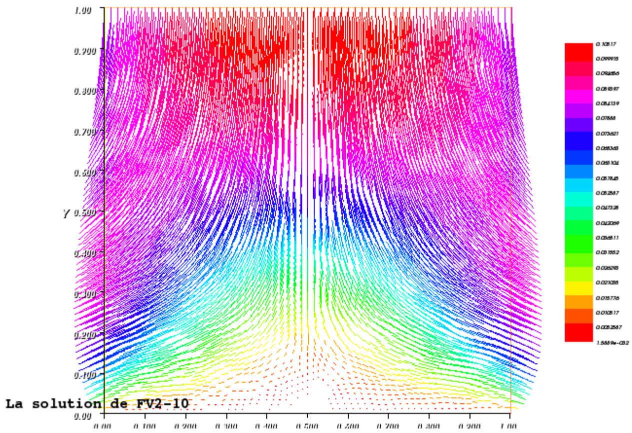
   On voit aussi les solutions semblent justes. Maintenant on dessine la solution exacte comme ci-dessous. Cela correspond aux solutions de 3 et 4.



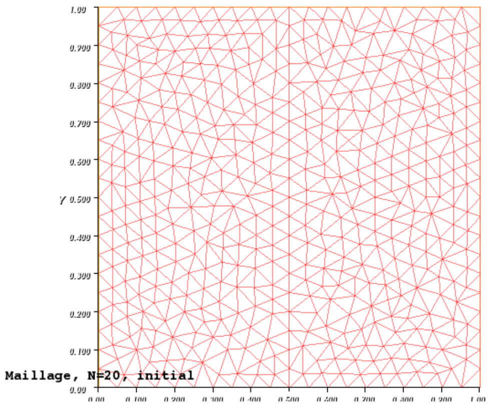
10. Pour FV1, la vitesse obrenue est :



Pour FV2, la vitesse obtenu est :

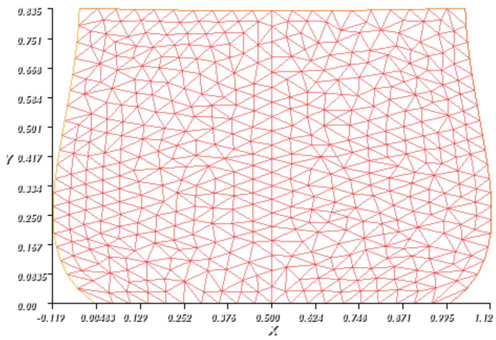


11. Pour la formulation FV1, l’image est d’abord comme ci-dessous :



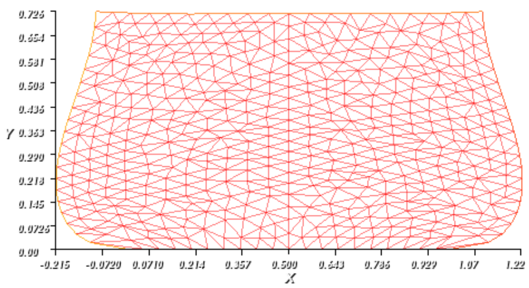
Maillage, N=20, initial

Après la première déformation, l'image divient :



Maillage, N=20, 1 iteration

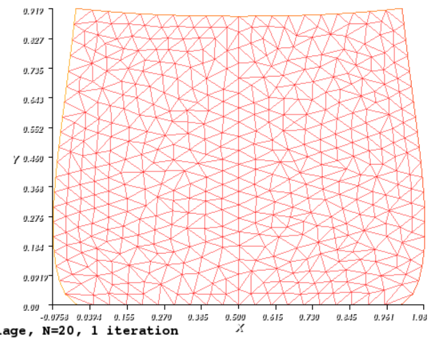
Après itération, on trouve :



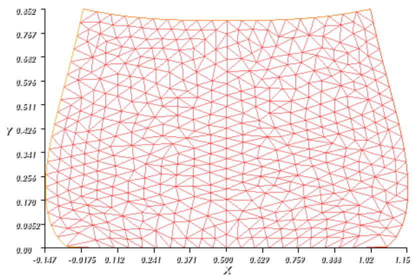
Maillage, N=20, 2 iteration

On voit que le fluide s'écoule et se déforme sur les cotés gauche et droite, pour le bord supérieur de ce volume matériel, il reste droit pendant le processus.

Par contre, pour le problème FV2 :



Maillage, N=20, 1 iteration

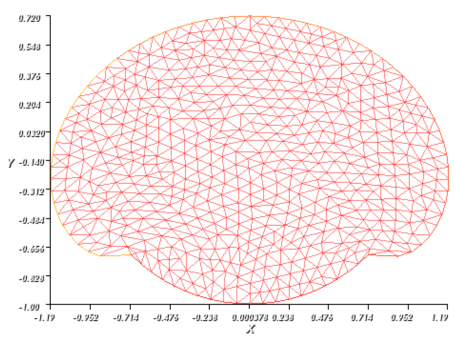


Maillage, N=20, 2 iteration

On voit bien que le bord supérieur change sa forme pour la formulation FV2.

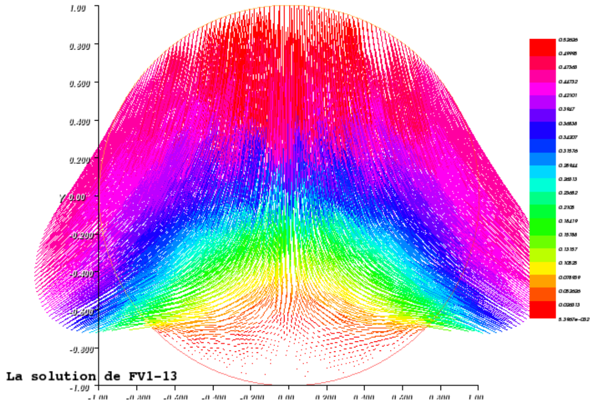
12. Parce qu'il y a déjà quelques triangles dans le maillage qui retournent et on ne peut plus remailler le domaine pour poursuivre les itérations.

13. Dans ce cas, toujours dans le cas où $d = 2$, on change la forme initiale du domaine Ω. après avoir fait la simulation, on trouve :

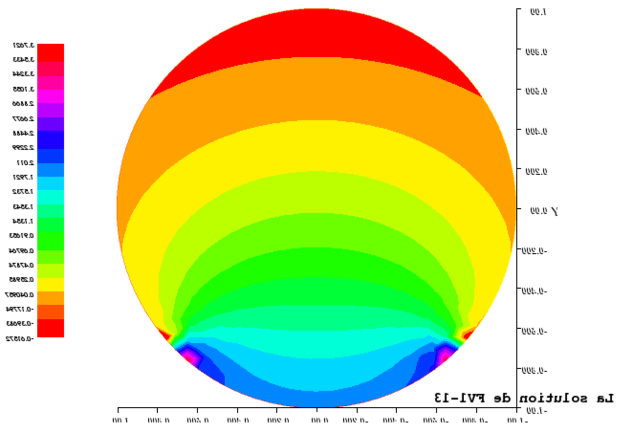


Maillage, N=20, 3 iteration

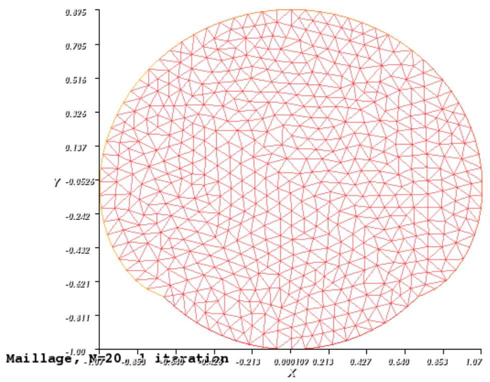
Pour la solution de la vitesse :

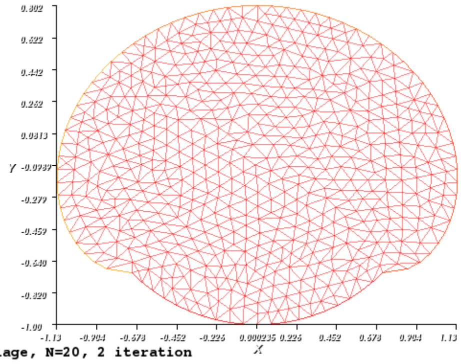


Pour la solution de pression :

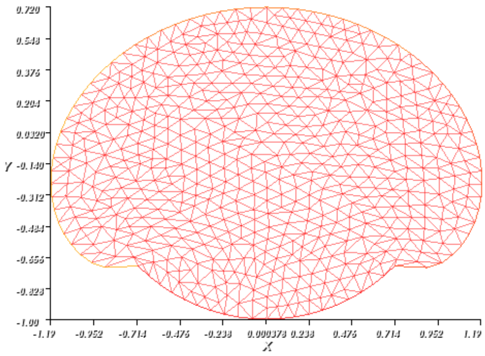


Pour la déformation :





Maillage, N=20, 2 iteration



Maillage, N=20, 3 iteration