Inversion de l'opérateur de simple couche sur un hyperplan

Martin Averseng

January 23, 2017

1 Notations

On considère le noyau de Green G de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^3$,

$$-(\Delta + k^2)G = \delta_0 \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

associée à la fréquence k, $k > 0$ et vérifiant la condition de radiation à l'infini.

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\partial G}{\partial r} - ikG = 0,$$

où r désigne $|x|$, $\dfrac{\partial}{\partial r}$ désigne l'opérateur $x \cdot \nabla$, et δ_0 représente la fonction dirac centrée à l'origine. On rappelle qu'alors l'expression de G est donnée par

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

On définit un opérateur

$$\begin{array}{rccl} K & : & \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ & & u & \longmapsto & x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{G}(x-y)u(y)dy \end{array}$$

Où $\tilde{G}$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\tilde{G}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2, 0)$$

On souhaite montrer le théorème suivant

Theorem 1.1. *L'opérateur K est inversible, et son inverse est donné par l'opérateur L défini par*

$$\begin{array}{rccl} L & : & \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ & & u & \longmapsto & x \in \mathbb{R}^d \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta\tilde{G} + k^2\tilde{G})(x-y)u(y)dy \end{array}$$

2 Démonstration

L'opérateur précédent étant exprimé comme une convolution par le noyau $\tilde{G}$, nous allons étudier la transformée de Fourier de ce dernier :

Lemma 2.1.

$$\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi) = \frac{1}{4\pi|\xi|}\mathcal{F}(HJ_0)\left(-\frac{k}{|\xi|}\right),$$

Où H est la fonction d'Heaviside.

Proof. Soit φ une fonction test. Par définition :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}(\tilde{G}), \varphi \right\rangle &= \left\langle \tilde{G}, \mathcal{F}(\varphi) \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} G(x) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi\end{aligned}$$

On effectue un changement de variable polaire dans la première intégrale :

$$\left\langle \mathcal{F}(\tilde{G}), \varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} rG(r)dr \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma(u) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ir\xi\cdot u} \varphi(\xi) d\xi$$

En utilisant le théorème de Fubini, on permute les deux dernières intégrales, puisque l'intégrande est majorée sur un domaine compact.

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}(\tilde{G}), \varphi \right\rangle &= \int_0^{+\infty} e^{ikr} dr \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \left(\int_{\mathbb{S}^2} e^{-ir\xi\cdot u} d\sigma(u) \right) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ikr} dr \int_{\mathbb{R}^2} J_0(r|\xi|) \varphi(\xi) d\xi\end{aligned}$$

On effectue enfin le changement de variable $r' = r|\xi|$:

$$\left\langle \mathcal{F}(\tilde{G}), \varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ik\frac{r'}{|\xi|}}}{|\xi|} J_0(r') \varphi(\xi) d\xi dr'$$

Ok je vois que le calcul n'aboutit pas comme ça... Il faut que j'approche G par $G\phi_n$ pour tronquer G et rendre tout intégrable. Ensuite j'utilise que si $G_n \to G$ alors $\mathcal{F}(G_n) \to \mathcal{F}(G)$

□

Definition 2.1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^{d-1}$. On définit la distribution de mesure uniforme sur E μ_E par

$$\langle \mu_E, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \right) d\lambda_1 ... d\lambda_p$$

Où $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormée de E.

Notons que cette définition est correcte, et notamment qu'elle ne dépend pas du choix de la base en vertu du théorème de changement de variables.

Lemma 2.2. *La distribution μ_E a pour transformée de Fourier la distribution $\mu_{E^\perp}$*

Proof. Nous notons $(e_1, e_2, ..., e_d)$ une base orthonormée adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^d = E \bigoplus E^\perp$ et f une fonction test. Par définition de la transformée de Fourier, on a

$$\langle \hat{\mu}_E, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \right) d\lambda_1 ... d\lambda_n$$

Et l'on peut expliciter $\hat{f}$ dans l'égalité précédente, soit

$$\langle \hat{\mu}_E, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{d} \nu_i e_i \right) \right) f\left(\sum_{i=1}^{d} \nu_i e_i \right) d\nu_1 ... d\nu_d d\lambda_1 ... d\lambda_p$$

$$\langle \hat{\mu}_E, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nu_i \right) f\left(\sum_{i=1}^{d} \nu_i e_i \right) d\nu_1 ... d\nu_d d\lambda_1 ... d\lambda_p$$

Décomposons la seconde intégrale en intégrant d'abord sur $E^\perp$:

$$\langle \hat{\mu}_E, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(i\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nu_i\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{d-p}} f\left(\sum_{i=1}^{d}\nu_i e_i\right)d\nu_{p+1}...d\nu_d\right)d\nu_1...d\nu_p d\lambda_1...d\lambda_p$$

Pour éclaircir les notations et voir le résultat, il reste à poser

$$F(\nu_1,\nu_2,...,\nu_p) = \int_{\mathbb{R}^{d-p}} f\left(\sum_{i=1}^{d}\nu_i e_i\right)d\nu_{p+1}...d\nu_d$$

Avec cette définition, on peut réécrire

$$\langle \hat{\mu}_E, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(i\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nu_i\right)F(\nu_1,...,\nu_p)d\nu_1...d\nu_p d\lambda_1...d\lambda_p$$

Le théorème d'inversion de la transformée de Fourier assure alors

$$\langle \hat{\mu}_E, f\rangle = F(0,0,...,0)$$

C'est-à-dire

$$\langle \hat{\mu}_E, f\rangle = \langle \mu_{E^\perp}, f\rangle$$

□

Nous n'aurons pas besoin de ce lemme. À la place, nous sommes obligés de passer par un calcul assez technique. D'abord, il est classique que

Lemma 2.3. *La transformée de Fourier de la fonction de Bessel J_0 est donnée par :*

$$\mathcal{F}(J_0)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega r}J_0(r)dr = 2\frac{\mathbb{1}_{]-1,1[}(\omega)}{\sqrt{1-w^2}}$$

Cela permet d'obtenir, si H est la fonction d'Heaviside :

Lemma 2.4. *On a la formule suivante :*

$$\mathcal{F}(HJ_0) = \int_0^{+\infty} e^{i\omega r}J_0(r) = \mathbb{1}_{-1<\omega<1}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} + i\mathbb{1}_{\omega\notin]-1,1[}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-1}}$$

Proof. Notez que l'intégrale écrite ci-dessus est impropre puisque J_0 n'est pas intégrable en l'infini. On doit donc travailler avec les distributions. Étant donné que la transformée de Fourier de J_0 est à support compact, les transformes de Fourier des distributions H et J_0 sont convolables et avec les conventions choisies pour la transformée de Fourier, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(HJ_0) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(H) * \mathcal{F}(J_0)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\delta - i\text{v.p.}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) * \mathcal{F}(J_0)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}(J_0) - \frac{i}{2\pi}\text{v.p.}\left(\frac{1}{\omega}\right) * \mathcal{F}(J_0)
\end{aligned}$$

Seul le dernier terme reste à calculer, étant donné le résultat du lemme précédent. Soit φ une fonction test, par définition du produit de convolution dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \text{v.p.}\left(\frac{1}{\omega}\right) * \mathcal{F}(J_0), \varphi\right\rangle &= \left\langle \text{v.p.}\left(\frac{1}{\omega}\right), \mathcal{F}(J_0) * \varphi\right\rangle\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\omega|>\varepsilon}\frac{\varphi * \mathcal{F}(J_0)(\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

En tenant compte de la parité de la transformée de Fourier de J_0. Pour un ε fixé, on peut réécrire l'intégrale précédente en permutant l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}\int_{|\omega|>\varepsilon} \frac{\varphi * \mathcal{F}(J_0)(\omega)}{\omega} &= 2\int_{|\omega|>\varepsilon} \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\frac{\mathbb{1}_{]-1,1[}(\omega-u)}{\sqrt{1-(\omega-u)^2}} \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\int_{|\omega|>\varepsilon} \frac{\mathbb{1}_{]-1,1[}(\omega-u)}{\omega\sqrt{1-(\omega-u)^2}}\end{aligned}$$

Nous allons calculer la deuxième intégrale :

$$I_\varepsilon(u) = \int_{u-1}^{u+1} \frac{\mathbb{1}_{|\omega|>\varepsilon}}{\omega\sqrt{1-(\omega-u)^2}}d\omega$$

Il faut montrer qu'elle converge dans $L^1(\mathbb{R})$ vers la fonction

$$I(u) = \mathbb{1}_{u\notin[-1,1]}\frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}$$

Il est aisé de voir que $I_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(-u)$. Nous ne le calculerons donc que pour u positif. Soit ε un réel positif suffisamment petit pour rendre possibles tous les prochains calculs, Lorsque $u > 1+\varepsilon$, un calcul élémentaire permet de montrer que

$$I_\varepsilon(u) = \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}.$$

Lorsque $u \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, on a alors l'expression

$$I_\varepsilon(u) = \int_{\varepsilon}^{u+1} \frac{1}{\omega\sqrt{1-(\omega-u)^2}}d\omega,$$

dont il est facile de montrer qu'elle vérifie

$$|I_\varepsilon(u)| \leq C + D\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

ce qui assure que l'intégrale de I_ε sur $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ tend vers 0 comme $\varepsilon\ln(\varepsilon)$.

Lorsque $\varepsilon < u < 1-\varepsilon$, le calcul est ramené à

$$I_\varepsilon(u) = \int_{]u-1,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,u+1[} \frac{1}{\omega\sqrt{1-(\omega-u)^2}} = \int_{]-1,-u-\varepsilon[\cup]-u+\varepsilon,1[} \frac{1}{(\omega+u)\sqrt{1-\omega^2}}.$$

Les changements de variables $\omega = \sin(\theta)$ et $t = \tan(\theta/2)$ mènent à l'expression suivante :

$$I_\varepsilon(u) = \int_{]-1,h(u-\varepsilon)[\cup]h(u+\varepsilon),1[} \frac{1}{u(t-u-)(t-u^+)}.$$

Où u^- et u^+ sont les deux racines distinctes du polynôme

$$P(u) = t^2 - \frac{2}{u}t + 1.$$

de discriminant $\Delta = \dfrac{4}{u^2}(1-u^2) > 0$, et où $h(x)$ est la fonction définie pour $x \in]0,1[$ par

$$h(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

On note que $h(u) = u^-$, h tend vers 0 en 0, vaut 1 en $x = 1$ et est strictement croissante. Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, l'intégration "évite" le pôle non intégrable u^-. On peut noter que

u^+ est en dehors du domaine d'intégration (en effet, $u^+ > 1$ puisque $u^+u^- = 1$). En décomposant en éléments simples

$$\frac{1}{u(t-u^-)(t-u^+)} = \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{1}{t-u^+} - \frac{1}{t-u^-}\right)$$

et en intégrant cette expression, on trouve

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\left(\left[\ln\left(\frac{u^+-t}{u^--t}\right)\right]_{-1}^{h(u-\varepsilon)} + \left[\ln\left(\frac{u^+-t}{t-u^-}\right)\right]_{h(u+\varepsilon)}^{1}\right)$$

Ce qui conduit à

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\ln\left(\frac{(u^+-h(u-\varepsilon))(h(u+\varepsilon)-u^-)}{(u^+-h(u+\varepsilon))(u^--h(u-\varepsilon))}\right)$$

Un développement limité en ε permet de constater que la limite ponctuelle de I_ε est bien nulle sur l'intervalle $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. D'autre part des majorations grossières de $I_\varepsilon(u)$ montrent qu'elle est dominée indépendamment de ε par une fonction intégrable sur $]-1,1[$. Le théorème de convergence dominée assure donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |I_\varepsilon(u)|du = 0$$

De même que précédemment, il est évident que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon} |I_\varepsilon(u)| = 0$$

en majorant encore grossièrement I_ε sur l'intervalle d'intégration. □

On déduit des résultats précédents la formule suivante :

Lemma 2.5. *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$*

$$\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbb{1}_{k<|\xi|}\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2-k^2}} + i\mathbb{1}_{k>|\xi|}\frac{1}{\sqrt{k^2-|\xi|^2}}\right)$$

En particulier, on peut constater que

$$(|\xi|^2-k^2)(\mathcal{F}(\tilde{G}))^2 = \frac{1}{16\pi^2}$$

Prouvons maintenant le théorème. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et soit $v = Ku$. En changeant la convolution en produit dans le domaine de Fourier, cela s'écrit :

$$v(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)$$

Appliquons l'opérateur $-\Delta - k^2 Id$ à cette expression et nommons w le résultat :

$$\begin{aligned} w(x) &= -\Delta(v)(x) - k^2 v(x) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}(|\xi|^2-k^2)e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi) \end{aligned}$$

Appliquons l'opérateur K à w :

$$Kw(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi)\frac{\mathcal{F}(u)(\xi)}{\mathcal{F}(\tilde{G})(\xi)} = u(x)$$

Par transformée de Fourier inverse. En permuttant la convolution et les dérivations, on en déduit que

$$u(x) = (-\Delta\tilde{G} - k^2\tilde{G}) * Ku(x)$$

Ce qui conclut la démonstration.