Matrice de rigidité du simple couche sur le segment $(-1, 1)$ avec les points de Tchebitchev

Martin AVERSENG

October 2, 2017

On se propose dans cette note de donner une valeur approchée calculable numériquement de l'intégrale double

$$I_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\ln(|x - x'|)}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x'^2}} dx dx'$$

Où les points $x_0, ..., x_{N-1}$ sont les points de Tchebitchev, définit par $x_i = \cos\left(i\frac{\pi}{N-1}\right)$ Dans la suite, on pose $\Delta = \pi/(N-1)$, $\theta_i = i\Delta$, $i = 0..N-1$ $\phi_i = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}$.

On commence par le changement de variable $x = \cos\theta$, $x' = \cos\theta'$, d'où la transformation

$$I_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln(|\cos\theta - \cos\theta'|) d\theta d\theta'$$

On pose $f(\theta) = \int_{\theta_j}^{\theta j+1} \ln(|\cos\theta - \cos\theta'|) d\theta'$, et on fait l'approximation suivante :

$$I_{ij} \approx \Delta f(\phi_i).$$

Nous sommes donc ramenés à calculer $I_i = f(\phi_i)$. En utilisant l'identité $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$, on obtient

$$I_i = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(2\sin\frac{|\phi_i - \theta'|}{2}\right) + \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(\sin\frac{\phi_i + \theta'}{2}\right) d\theta'$$

On fait l'approximation $\sin u \approx u$ pour les petits arguments, en l'occurrence $|\phi_i - \theta|$ ici. On trouve donc :

$$I_i \approx \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(|\theta' - \phi_i|\right) + \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(\sin\frac{\phi_i + \theta'}{2}\right) d\theta'$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise une formule d'intégration à un point :

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(\sin\frac{\phi_i + \theta'}{2}\right) d\theta' \approx \Delta \ln(\sin\phi_i)$$

La première intégrale se calcule exactement :

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \ln\left(|\theta' - \phi_i|\right) = 2\int_0^{\Delta/2} \ln(u) du = \Delta \ln\left(\frac{\Delta}{2}\right) - \Delta$$

On obtient donc in fine

$$I_{ii} \approx \Delta^2 \left(\ln\left(\frac{\Delta}{2}\sin\phi_i\right) - 1\right)$$

Ce calcul est faux quand i ou j s'approchent de 0 ou π.

1 Meilleure approche

On décompose l'intégrale en quatre parties distinctes :

$$I_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij},$$

Où on pose

$$A_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln|\theta - \theta'| d\theta d\theta'$$

$$B_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln \frac{\theta + \theta'}{2} d\theta d\theta'$$

$$C_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln \left(\pi - \frac{\theta + \theta'}{2}\right) d\theta d\theta'$$

$$D_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln \left(\frac{\sin \frac{\theta+\theta'}{2}}{\frac{\theta+\theta'}{2}\left(\pi - \frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \operatorname{sinc} \frac{\theta - \theta'}{2} \right) d\theta d\theta'$$

Les trois premiers termes de la décomposition isolent les différentes singularités de l'intégrande et le quatrième est très régulier.

Valeur de A

Si $i = j$

Dans ce cas, on obtient $A_{ii} = \Delta^2(\ln \Delta - \frac{3}{2})$

Si $|i - j| = 1$

Dans ce cas, on obtient $A_{ij} = \Delta^2(\ln \Delta + 2\ln 2 - \frac{3}{2})$

Sinon ($|i - j| > 1$)

Dans ce cas, on obtient $A_{ij} = \Delta^2(\ln \Delta + \ln|i - j|) + O(\Delta^4)$

Valeur de B

Si $i = j = 0$

Dans ce cas on obtient $B_{00} = \Delta^2(\ln(\Delta) + \ln(2) - \frac{3}{2})$

Sinon

On obtient $B_{ij} = \Delta^2(\ln \Delta + \ln \frac{i+j+1}{2}) + O(\Delta^4)$

Valeur de C

Elle se déduit de celle de B par changement de variable dans l'intégrale.

Si $i = j = N - 1$

Dans ce cas on obtient $C_{N-1,N-1} = B_{0,0} = \Delta^2(\ln(\Delta) + \ln(2) - \frac{3}{2})$

Sinon

On obtient $C_{i,j} = B_{N-1-i,N-1-j} = \Delta^2 \left(\ln(\Delta) + \ln\left(N - \frac{i+j+1}{2}\right)\right) + O(\Delta^4)$

Valeur de D

On peut montrer que l'intégrande dans D est infiniment régulier, donc l'intégrale est facilement approchée par n'importe quelle méthode de quadrature numérique.

Remark 1.1. Ces résultats peuvent être vérifiés à l'aide de Maple.

2 Le cas $\mathbb{P}_1$

Le but est de calculer des intégrales de la forme

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \ln|\cos\theta - \cos\theta'|(a\theta + b)(b\theta' + c)$$