Annals of Mathematics, 116 (1982), 361–387

L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes

PAR R. R. COIFMAN, A. MCINTOSH, Y. MEYER*

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THEOREME I. *Soit* φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction lipschitzienne; c'est-à-dire qu'il existe une constante* $M \geq 0$ *telle que* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x - y|$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *et tout* $y \in \mathbf{R}$. *Désignons par* $C_\varphi(x, y)$ *le noyau défini, si* $x \neq y$, *par*

$$C_\varphi(x, y) = \frac{1 + i\varphi'(y)}{x - y + i(\varphi(x) - \varphi(y))}. \tag{1}$$

Alors, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$, *l'intégrale singulière*

$$g(x) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\varphi(x, y)f(y)\,dy \tag{2}$$

existe presque-partout et l'on a

$$\|g\|_2 \leq C(1 + M)^9\|f\|_2 \tag{3}$$

où C *est une constante absolue et où* $\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

L'existence de la valeur principale (2) dans le cas général (M quelconque) et l'inégalité (3) dans le cas particulier où M est suffisamment petit sont dues à A. Calderón [3].

La méthode de perturbation utilisée par A. Calderón ne permet pas d'obtenir (3) dans le cas général que nous allons traiter. Par ailleurs notre démonstration de (3) n'utilise plus la variable complexe ni la représentation conforme.

Désignons par ψ: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne, à valeurs complexes, telle que $\|\psi'\|_\infty \leq 1$ et appelons $K_n(x, y)$ le noyau singulier $(\psi(x) - \psi(y))^n/(x - y)^{n+1}$. Alors on a le résultat précis suivant.

*Les auteurs ont bénéficié d'une aide de la N.S.F. (contrat no. MC S78-02945) et de l'Ecole Polytechnique (Année spéciale E.D.P.).

003–486X/82/0116-2/0361/027$2.70/1

THEOREME II. *Pour toute fonction* $f \in L^2(\mathbf{R})$, *l'intégrale singulière* v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x, y)f(y)\,dy$ *existe presque-partout et définit une fonction* $g_n(x)$ *telle que* $\|g_n\|_2 \leq C(1+n)^4\|f\|_2$; *C désignant une constante absolue.*

Le théorème I découle immédiatement du théorème II par renormalisation.

Supposons en effet $\|\psi'\|_\infty \leq \delta < 1$. Alors il vient, avec les notations du théorème II, $\|g_n\|_2 \leq C(1+n)^4\delta^n\|f\|_2$ et donc $\|\Sigma_0^\infty(-1)^n g_n\|_2 \leq C'/(1-\delta)^5$. En d'autres termes, le noyau singulier $L(x, y) = 1/(x - y + \psi(x) - \psi(y))$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbf{R})$ dont la norme ne dépasse pas $C'/(1-\delta)^5$. Pour conclure, on pose, si φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifie $\|\varphi'\|_\infty \leq M$, $\psi(x) = -M^2/(M^2 + 1)x + i\varphi(x)/((M^2+1)$ de sorte que $x + \psi(x) = (x + i\varphi(x))/(M^2+1)$ et $C_\varphi(x, y) = L(x, y)(1 + i\varphi'(y))/M^2 + 1)$. Le choix de ψ assure $\|\psi'\|_\infty^2 \leq (M^2 + M^4)/(1 + 2M^2 + M^4) = 1 - 1/(1+M^2) < 1$ et l'opérateur de multiplication par $(1 + i\varphi'(y))/(M^2+1)$ est borné avec une norme ne dépassant pas $1/\sqrt{M^2+1}$ Ceci termine la démonstration du théorème I.

Le cas $n = 1$ du théorème II est dû à A. Calderón [2]. Il a ensuite fallu attendre 1974 pour que deux des auteurs de cet article obtiennent le cas $n = 2$. En 1976, ces deux auteurs montraient que $\|g_n\|_2 \leq C_n\|f\|_2$ si $\|\psi'\|_\infty \leq 1$ sans pouvoir préciser la croissance en n de la suite des constantes C_n. Le premier résultat dans cette direction est, de nouveau, dû à A. Calderón qui montre en 1977 que l'on a $C_n \leq C^n$ sans pouvoir déterminer $C > 1$ [3]. A ce moment le théorème II se présentait comme un corollaire du cas particulier du théorème I où $M \leq \delta$ ($\delta > 0$ suffisamment petit).

En fait, le théorème II se généralise encore.

THEOREM III. *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *n fonctions lipschitziennes et* $K_n(x, y)$ *le noyau singulier*

$$K_n(x, y) = \frac{(A_1(x) - A_1(y))(A_2(x) - A_2(y)) \cdots (A_n(x) - A_n(y))}{(x-y)^{n+1}}. \tag{4}$$

Alors l'opérateur T_n *défini par*

$$T_n[f](x) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x, y)f(y)\,dy \tag{5}$$

est borné sur $L^2(\mathbf{R})$ *et l'on a*

$$\|T_n[f]\|_2 \leq C(1+n)^4\|A_1'\|_\infty\|A_2'\|_\infty \cdots \|A_n'\|_\infty\|f\|_2 \tag{6}$$

où C est une constante absolue.

Nous allons provisoirement limiter la liste des résultats et donner successivement le plan de la démonstration du théorème III, puis la démonstration elle-même.

Ensuite nous établirons d'autres théorèmes (corollaires ou généralisations du théorème III et solution d'un problème de Kato).

1. Plan de la démonstration du théorème III

Il est bien connu que dans la preuve de l'inégalité (6), il suffit de se restreindre au cas où $A_1' = a_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \ldots, A_n' = a_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ car le passage à la limite qui permet d'obtenir le cas général se fait par le biais des noyaux tronqués $K_{n,\varepsilon}(x, y) = K_n(x, y)\mathbf{1}_{\{|x-y|\geq\varepsilon\}}$.* En effet, un théorème célèbre de A. Calderón, M. Cotlar et A. Zygmund (rappelé dans l'appendice) permet de majorer la norme de l'opérateur $T_{n,\varepsilon}$: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$, défini par le noyau tronqué $K_{n,\varepsilon}$, uniformément en $\varepsilon > 0$, par la norme de T_n: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ et par les trois nombres

$$\sup_{x\neq y} |x - y|\,|K_n(x, y)|\,, \qquad \sup_{x\neq y} |x - y|^2\left|\frac{\partial}{\partial x}K_n(x, y)\right|,$$

$$\sup_{x\neq y} |x - y|^2\left|\frac{\partial}{\partial y}K_n(x, y)\right|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, la passage à la limite est immédiat pour le noyau tronqué $K_{n,\varepsilon}(x, y)$. En effet, $a_j \in L^\infty(\mathbf{R})$ est la limite presque partout d'une suite $a_{j,\nu} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant en outre $\|a_{j,\nu}\|_\infty \leq \|a_j\|_\infty$; à l'aide des primitives $A_{j,\nu}$ des $a_{j,\nu}$ on définit les noyaux tronqués $K_{n,\varepsilon,\nu}$ et l'on a, uniformément en $\nu \in \mathbf{N}$,

$$|K_{n,\varepsilon,\nu}(x, y)| \leq \|a_1\|_\infty \cdots \|a_n\|_\infty |x - y|^{-1}\mathbf{1}_{\{x-y\geq\varepsilon\}}.$$

Il en résulte que, si $f \in L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{n,\varepsilon}(x, y)f(y)\,dy = \lim_{\nu\to+\infty} g_{\nu,\varepsilon}(x) \\ &= \lim_{\nu\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{n,\varepsilon,\nu}(x, y)f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Si l'on a pu établir l'inégalité (6), avec $C = 10^6$, dans le cas particulier où $A_j' \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on aura donc $\|g_{\nu,\varepsilon}\|_2 \leq C_1(1 + n)^4\|a_1\|_\infty \cdots \|a_n\|_\infty\|f\|_2$, par le théorème de Calderón, Cotlar et Zygmund puis, successivement, la même majoration pour $\|g_\varepsilon\|_2$ et pour $\|g\|_2$ en appliquant deux fois le lemme de Fatou. L'existence presque-partout de $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x)$ se démontre par récurrence

*$\mathbf{1}_E$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

sur n: le cas $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ résulte de l'hypothèse de récurrence, par intégration par parties, et le cas général $f \in L^2(\mathbf{R})$ s'obtient alors par les méthodes introduites par A. Calderón et A. Zygmund (chapitre IV de [5]).

Nous supposerons donc, dans tout ce qui suit, $A_j' = a_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

La première identité (proposition 1) permettra d'exprimer l'opérateur T_n à l'aide d'opérateurs de base que nous allons maintenant définir.

On part de $D = -i(d/dx)$: $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}(\mathbf{R})$ qui permet, pour tout $t \in \mathbf{R}$, de définir les trois opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R})$,

$$P_t = \frac{I}{I + t^2D^2}, \qquad Q_t = \frac{tD}{I + t^2D^2} \quad \text{et} \quad P_t - iQ_t = \frac{I}{I + itD}.^*$$

D'autre part M_{a_j}: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est l'opérateur de multiplication ponctuelle par la fonction a_j.

On définit, si $b_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, l'opérateur $L_n(b_1,\ldots,b_n)$: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ par

$$\begin{aligned} \text{(7)} \qquad L_n(b_1,\ldots,b_n) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} &(P_t - iQ_t)M_{b_1}(P_t - iQ_t)M_{b_2} \\ &\cdots (P_t - iQ_t)M_{b_n}(P_t - iQ_t)\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Cette valeur principale d'intégrale d'opérateurs est définie comme la limite des intégrales tronquées $\int_{\varepsilon \le |t| \le 1/\varepsilon} \cdots dt/t$, $\varepsilon > 0$.

Alors on a la formule remarquable suivante

$$\text{(8)} \qquad T_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} L_n\big(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)},\ldots,a_{\sigma(n)}\big)$$

où la somme est étendue à toutes les permutations σ de $\{1,2,\ldots,n\}$. De sorte que la démonstration de (6) se ramène à la preuve de l'inégalité correspondante concernant L_n.

C'est alors qu'entrent en jeu les méthodes de "variables réelles". On montre que l'étude de L_n résulte de celle d'une fonction de Littlewood-Paley-Stein associée au problème; à savoir

$$\text{(9)} \qquad G_k[f](x) = \left(\int_0^\infty \left|Q_tM_{a_1}P_tM_{a_2}P_t \cdots M_{a_k}P_t[f](x)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Les deux membres de (9) sont des fonctions de x et ici, comme dans tout ce qui suit, $U_tV_tW_t$ signifie que l'on compose les opérateurs correspondants.

L'estimation fondamentale est

$$\text{(10)} \qquad \|G_k[f]\|_2 \le C(1 + k)\|f\|_2$$

*Les multiplicateurs associés à P_t et Q_t sont, respectivement, $1/(1 + t^2\xi^2)$ et $t\xi/(1 + t^2\xi^2)$.

où $C > 0$ est une constante absolue. Cette estimation (10) permet assez aisément de montrer (6). L'estimation (10) s'obtient grâce à une description très précise des règles de commutations entre les opérateurs M_a, P_t et Q_t, $a \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, et par l'introduction de la mesure de Carleson $|Q_t a|^2(dx\,dt/t)$ sur $\mathbf{R}_+^2 = \mathbf{R} \times]0, +\infty[$.

2. Preuve de la formule de représentation intégrale

Soient $\varepsilon \in]0,1[$ et H_ε l'opérateur défini par

$$i\pi H_\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1/\varepsilon} (D - iy)^{-1}\,dy = 2\int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1/\varepsilon} D(D^2 + y^2)^{-1}\,dy.$$

Alors $i(\pi/2)H_\varepsilon$ est l'opérateur associé au multiplicateur $m_\varepsilon(\xi) = \operatorname{Arc\,tg}(\xi/\varepsilon) - \operatorname{Arc\,tg}(\varepsilon\xi)$. Le noyau de H_ε est $k_\varepsilon(x-y)$ où $k_\varepsilon(x) = (1/\pi x)(e^{-\varepsilon|x|} - e^{-|x|/\varepsilon})$. L'opérateur H_ε est donc une variante de la transformation de Hilbert tronquée à l'origine et à l'infini.

En particulier, au sens des distributions, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} k_\varepsilon(x) = \text{v.p.}(1/\pi x)$. Il en résulte qu'avec $D = -i(d/dx)$, on a, au sens des distributions,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} D^n k_\varepsilon(x) = i^n n!\,\pi^{-1}\,\text{v.p.}\frac{1}{x^{n+1}} \tag{11}$$

où l'on définit la distribution v.p. $(1/x^{n+1})$ par

$$\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x^{n+1}}, g\right\rangle = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[g(x) - g(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0)\right]\frac{dx}{x^{n+1}}$$

(cette dernière valeur principale ayant le sens usuel si $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$).

Fixons $a \in \mathbf{R}$ et appliquons les considérations qui précèdent à $k_\varepsilon(a-x)$ au lieu de $k_\varepsilon(x)$ et à $g_n(x) = (A_1(a) - A_1(x)) \cdots (A_n(a) - A_n(x))f(x)$. On a alors $g_n(a) = g_n'(a) = \cdots = g_n^{(n-1)}(a) = 0$ et donc

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A_1(a) - A_1(x)) \cdots (A_n(a) - A_n(x))}{(a-x)^{n+1}} f(x)\,dx = (-i)^n \frac{\pi}{n!} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (D^n H_\varepsilon)[g_n](a), \tag{12}$$

uniformément par rapport à $a \in \mathbf{R}$.

Désignons par $M_{A_j}\colon \mathbb{S}(\mathbf{R}) \to \mathbb{S}(\mathbf{R})$ l'opérateur de multiplication par A_j et par δ_j la dérivation de l'algèbre $\mathcal{Q} = \mathcal{L}(\mathbb{S}(\mathbf{R}), \mathbb{S}(\mathbf{R}))$ définie par $\delta_j(T) = M_{A_j}T - TM_{A_j}$.

Alors, si $g_1(x) = (A_1(a) - A_1(x))f(x)$, on a $(Tg_1)(a) = (\delta_1 T)[f](a)$ et, de proche en proche, il vient

$$(\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n T)[f](a) = T[g_n](a) \tag{13}$$

et, en particulier,

$$(D^n H_\varepsilon)[g_n](a) = (\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n D^n H_\varepsilon)[f](a). \tag{14}$$

Il reste à calculer $\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n(D^n H_\varepsilon)$. C'est en se servant des propriétés formelles d'une dérivation d'une algèbre que nous obtiendrons, sans peine, la réponse.

On a, si $S, T, T_1, \ldots, T_n$ appartiennent à $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbf{R}), \mathcal{S}(\mathbf{R}))$,

$$\delta_j(ST) = \delta_j(S)T + S\delta_j(T) \tag{15}$$

et donc

(16)

$$\delta_j(T_1 \cdots T_n) = \delta_j(T_1)T_2 \cdots T_n + T_1\delta_j(T_2)T_3 \cdots T_n + \cdots + T_1T_2 \cdots T_{n-1}\delta_j(T_n).$$

Si S est inversible et si S^{-1} est son inverse, il vient

$$\delta_j(S^{-1}) = -S^{-1}\delta_j(S)S^{-1} \tag{17}$$

et enfin, puisque $D = -i(d/dx)$, on a $\delta_j(D) = iM_{a_j}$.

Puisque les opérateurs de multiplication commutent,

(18) $\delta_{j_2} \circ \delta_{j_1}(D) = 0$ et, plus généralement, si $0 \leq k \leq n-1$,

$$\delta_{j_n} \circ \delta_{j_{n-1}} \circ \cdots \circ \delta_{j_1}(D^k) = 0. \tag{19}$$

Si $y \in \mathbf{R}$ et $y \neq 0$, alors $I/(D - iyI) \in \mathcal{A}$ et il vient

$$\delta_1\left(\frac{I}{D - iyI}\right) = -\frac{I}{D - iyI}\delta_1(D)\frac{I}{D - iyI}. \tag{20}$$

En appliquant δ_2 à (20), on obtient, grâce à (18) et (17),

$$\delta_2 \circ \delta_1\left(\frac{I}{D - iyI}\right) = \frac{I}{D - iyI}\delta_2(D)\frac{I}{D - iyI}\delta_1(D)\frac{I}{D - iyI} + \frac{I}{D - iyI}\delta_1(D)\frac{I}{D - iyI}\delta_2(D)\frac{I}{D - iyI}.$$

De proche en proche, il vient

(21)

$$\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n\left(\frac{I}{D - iyI}\right) = (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} \frac{I}{D - iyI}\delta_{\sigma(1)}(D)\frac{I}{D - iyI}\delta_{\sigma(2)}(D) \cdots \frac{I}{D - iyI}\delta_{\sigma(n)}(D)\frac{I}{D - iyI}.$$

Par ailleurs, on a le lemme suivant.

LEMME 1. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $y \neq 0$, on a*

$$\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n\left(\frac{D^n}{D - iyI}\right) = \delta_1 \circ \cdots \circ \delta_n\left(\frac{(iy)^n I}{D - iyI}\right). \tag{22}$$

La preuve de cette identité est immédiate. On a, en effet,

$$\frac{D^n - (iy)^n I}{D - iyI} = \sum_0^{n-1} (iy)^k D^{n-k-1}$$

et il suffit d'appliquer (19). Nous sommes maintenant en mesure de prouver (8). On a, grâce à (21) et (22)

$$\delta_1 \circ \delta_2 \circ \cdots \circ \delta_n D^n H_\varepsilon = -\frac{i}{\pi} \sum_{\sigma \in S_n} L_{n,\varepsilon}\left(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\right) \tag{23}$$

où

$$L_{n,\varepsilon}(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1/\varepsilon} (D - iyI)^{-1} M_{a_1} (D - iyI)^{-1} \cdots M_{a_n} (D - iyI)^{-1} y^n \, dy.$$

Il suffit, pour terminer, de faire le changement de variable $y = \dfrac{1}{t}$ dans cette dernière intégrale et d'utiliser (12) et (14). On obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Posons, si $A_j' = a_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,*

$$L_{n,\varepsilon}(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\varepsilon \leq |t| \leq 1/\varepsilon} (I + itD)^{-1} M_{a_1} (I + itD)^{-1} M_{a_2} \cdots M_{a_n} (I + itD)^{-1} \frac{dt}{t}.$$

Alors, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a, uniformément en $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A_1(x) - A_1(y)) \cdots (A_n(x) - A_n(y))}{(x - y)^{n+1}} f(y) \, dy = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} L_{n,\varepsilon}(a_1, \ldots, a_n)[f](x).$$

3. Identités remarquables verifiées par les opérateurs P_t et Q_t

Soit $m\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne et bornée et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, soit M_t l'opérateur dont le symbole est $m(t\xi)$: $M_t(e^{ix\xi}) = m(t\xi)e^{ix\xi}$. Supposons $\xi m'(\xi) \in L^\infty(\mathbf{R})$.

Alors l'opérateur $t(\partial/\partial t)M_t$ a pour symbole $m_1(t\xi)$ où $m_1(\xi) = \xi m'(\xi)$.

Appliquons cette remarque au cas où $m(\xi) = 1/(1+\xi^2)$ correspondant à $M_t = P_t$. Alors $\xi m'(\xi) = -2\xi^2/(1+\xi^2)^2$ c'est-à-dire que $t(\partial/\partial t)P_t = -2Q_t^2$.

Calculons de même $t(\partial/\partial t)Q_t$. On part de $m(\xi) = \xi/(1+\xi^2)$ et il vient $\xi m'(\xi) = -\xi/(1+\xi^2) + 2\xi/(1+\xi^2)^2 = m_1(\xi)$. De même $\xi m_1'(\xi) = \xi/(1+\xi^2) - 8\xi^3/(1+\xi^2)^3$. On peut donc conclure.

PROPOSITION 2. *On a* $t(\partial/\partial t)P_t = -2Q_t^2$ *tandis que* $t(\partial/\partial t)Q_t = -Q_t + 2P_tQ_t = A_t$ *et* $t(\partial/\partial t)A_t = Q_t - 8Q_t^3$.

4. Réduction du problème à la fonction de Littlewood-Paley-Stein

Si $a_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ pour $0 \le j \le n$, on pose

$$G_{k,n}[f](x) = \left(\int_0^\infty \left|Q_t M_{a_{k+1}} P_t M_{a_{k+2}} \cdots P_t M_{a_n} P_t[f](x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \tag{24}$$

si

$$0 \le k \le n-1 \quad \text{et} \quad G_{n,n}[f](x) = \left(\int_0^\infty |Q_t[f](x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

tandis que, si $1 \le j \le n$, on pose

$$G_j^*[f](x) = \left(\int_0^\infty \left|Q_t M_{\bar a_j} P_t M_{\bar a_{j-1}} P_t \cdots P_t M_{\bar a_1} P_t[f](x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \tag{25}$$

avec

$$G_0^*[f](x) = \left(\int_0^\infty |Q_t[f](x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Naturellement ces deux fonctions de Littlewood-Paley-Stein sont du même type. Les estimations L^2 correspondantes seront prouvées ultérieurement.

PROPOSITION 3. *Pour f et g dans $C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a, si $\|a_j\|_\infty \le 1$, $1 \le j \le n$,*

(26)

$$\left|\int_{\mathbf{R}} [L_{n,\varepsilon}(a_1,\ldots,a_n)f]\bar g\,dx\right| \le 8 \sum\sum_{0\le j\le k\le n} \|G_{k,n}(f)\|_2 \|G_j^*(g)\|_2 + 2\|f\|_2\|g\|_2.$$

Rappelons que

$$L_{n,\varepsilon} = \int_{\varepsilon\le|t|\le 1/\varepsilon} (P_t - iQ_t)M_{a_1}(P_t - iQ_t)M_{a_2} \cdots (P_t - iQ_t)M_{a_n}(P_t - iQ_t)\frac{dt}{t}.$$

Pour étudier cet opérateur, on développe le produit $(P_t - iQ_t)M_{a_1}(P_t - iQ_t)M_{a_2} \cdots (P_t - iQ_t)M_{a_n}(P_t - iQ_t)$ en 2^{n+1} "mots" de la forme $T_0 M_{a_1} T_1 \cdots T_{n-1} M_{a_n} T_n$ où $T_j \in \{P_t, -iQ_t\}$.

Parmi ces mots, un seul est de la forme $P_t M_{a_1} P_t \cdots P_t M_{a_n} P_t$ et il disparaît après intégration puisque $P_{-t} = P_t$. Ensuite on trouve $n + 1$ mots où Q_t apparaît une seule fois. Posons

$$\mathfrak{L}_j = \int_{\varepsilon \le t \le 1/\varepsilon} T_0 M_{a_1} T_1 M_{a_2} \cdots T_{n-1} M_{a_n} T_n \frac{dt}{t} \tag{27}$$

où $T_0 = P_t, \ldots, T_{j-1} = P_t$, $T_j = Q_t$, $T_{j+1} = \cdots = T_n = P_t$.

Puisque $Q_{-t} = -Q_t$, l'intégrale du mot où Q_t apparaît seulement à l'indice j vaut $-2i\mathfrak{L}_j$.

Enfin on trouve les mots où Q_t figure au moins deux fois. Ces mots sont en trop grand nombre pour pouvoir être traités un à un et seront donc regroupés en "paquets". Pour cela on réforme la somme de tous les mots tels que

$$T_0 = P_t, \ldots, T_{j-1} = P_t,\ T_j = Q_t,\ T_{j+1} \in \{P_t, -iQ_t\}, \ldots, T_{k-1} \in \{P_t, -iQ_t\},\ T_k = Q_t,\ T_{k+1} = \cdots = T_n = P_t.$$

C'est-à-dire que l'on recombine tous les mots dans lesquels le premier Q_t que l'on lit se trouve à l'indice j et le dernier se trouve à l'indice k. On obtient ainsi, si $0 \le j < k \le n$,

$$\mathfrak{L}_{j,k} = -\int_{\varepsilon \le |t| \le 1/\varepsilon} P_t M_{a_1} P_t \cdots P_t M_{a_j} Q_t M_{a_{j+1}} (P_t - iQ_t) M_{a_{j+2}} (P_t - iQ_t) \cdots M_{a_{k-1}} (P_t - iQ_t) M_{a_k} Q_t M_{a_{k+1}} P_t \cdots M_{a_n} P_t \frac{dt}{t}.$$

Pour alléger, on posera alors

$$U_t = P_t M_{a_1} \cdots P_t M_{a_j} Q_t, \quad V_t = M_{a_{j+1}} (P_t - iQ_t) M_{a_{j+2}} (P_t - iQ_t) \cdots M_{a_{k-1}} (P_t - iQ_t) M_{a_k} \quad \text{et} \quad W_t = Q_t M_{a_{k+1}} P_t \cdots M_{a_n} P_t$$

et l'on a

$$\mathfrak{L}_{j,k} = -\int_{\varepsilon \le |t| \le 1/\varepsilon} U_t V_t W_t \frac{dt}{t} = -\mathfrak{L}^+_{j,k} - \mathfrak{L}^-_{j,k} \quad \text{où} \quad \mathfrak{L}^+_{j,k} = -\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} U_t V_t W_t \frac{dt}{t}.$$

Enfin $L_{n,\varepsilon} = \sum_0^n \mathfrak{L}_j + \sum\sum_{0 \le j < k \le n} \mathfrak{L}_{j,k}$.

Remarquons que si $\|a_j\|_\infty \le 1$, on a $\|V_t\|_{\text{op}} \le 1$ où la norme d'opérateur est celle de V_t: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$.

Egalement pour alléger, nous poserons $\langle u \mid v \rangle = \int_{\mathbf{R}} u(x) \bar{v}(x)\, dx$ pour $u \in L^2(\mathbf{R})$, $v \in L^2(\mathbf{R})$ et nous noterons T^*: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ l'adjoint de T.

Alors

$$|\langle \mathfrak{L}^{+}_{j,k}(f)\,|\,g\rangle| = \left|\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \langle U_t V_t W_t f\,|\,g\rangle \frac{dt}{t}\right|$$
$$= \left|\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \langle V_t W_t f\,|\,U_t^* g\rangle \frac{dt}{t}\right| \le \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \|V_t W_t f\|_2 \|U_t^* g\|_2 \frac{dt}{t}$$
$$\le \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \|W_t f\|_2 \|U_t^* g\|_2 \frac{dt}{t} \le \left(\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \|W_t f\|_2^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \left(\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \|U_t^* g\|_2^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$
$$\le \|G_{k,n} f\|_2 \|G_j^* g\|_2.$$

La même inégalité s'applique à $|\langle \mathfrak{L}^{-}_{j,k} f\,|\,g\rangle|$ et l'on a donc

$$(28) \qquad \left|\sum\sum_{0\le j<k\le n} \langle \mathfrak{L}_{j,k}(f)\,|\,g\rangle\right| \le 2 \sum\sum_{0\le j<k\le n} \|G_{k,n} f\|_2 \|G_j^* g\|_2.$$

Le traitement des opérateurs $\mathfrak{L}_j$ est plus subtil.

On écrit $Q_t = 8Q_t^3 + t(\partial/\partial t)A_t$ où $A_t = 2P_tQ_t - Q_t = V_tQ_t = Q_tV_t$ avec $\|V_t\|_{\mathrm{op}} = 1$. Il vient alors $\mathfrak{L}_j = \mathfrak{L}_j^1 + \mathfrak{L}_j^2$ et l'étude de

$$\mathfrak{L}_j^1 = 8\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} P_t M_{a_1} P_t \cdots M_{a_{j-1}} P_t M_{a_j} Q_t^3 M_{a_{j+1}} P_t \cdots P_t \frac{dt}{t}$$

est immédiate par la méthode ci-dessus. Puisque $\|Q_t\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{2}$, il vient $|\langle \mathfrak{L}_j^1 f\,|\,g\rangle| \le 4\|G_{j,n} f\|_2 \|G_j^* g\|_2$.

Venons en à

$$\mathfrak{L}_j^2 = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} P_t M_{a_1} P_t \cdots M_{a_{j-1}} P_t M_{a_j} \left(t\frac{\partial}{\partial t} A_t\right) M_{a_{j+1}} P_t \cdots P_t \frac{dt}{t}.$$

Une intégration par parties donne deux termes dont les normes d'opérateurs sont évidemment majorées par $\frac{1}{2}$ et n termes où $(\partial/\partial t)A_t$ est remplacé par A_t tandis que l'un des P_t est remplacé par $-2Q_t^2$. Chacun de ces termes se traite par la méthode ci-dessus et il vient

$$|\langle \mathfrak{L}_j^2 f\,|\,g\rangle| \le \|f\|_2 \|g\|_2 + \sum\sum_{0\le j<k\le n} \|G_{k,n} f\|_2 \|G_j^* g\|_2.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.

5. Estimation L^2 pour la fonction de Littlewood-Paley-Stein

Les deux définitions que nous avons introduites ne diffèrent qu'en apparence et il suffit d'étudier, si $a_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \ldots, a_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,

$$(29) \qquad G_n f = \left(\int_0^\infty |Q_t M_{a_1} P_t M_{a_2} P_t \cdots M_{a_n} P_t f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

On a alors

PROPOSITION 4. *Il existe une constante absolue* $C > 0$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on ait, si* $\|a_j\|_\infty \leq 1$, $1 \leq j \leq n$,

$$\|G_n f\|_2 \leq C(1+n)\|f\|_2. \tag{30}$$

Le cas $n = 0$ est trivial et l'on a immédiatement par la formule de Plancherel

$$\left\|\left(\int_0^\infty |Q_t f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}\right\|_2 = \left(\iint_{\mathbf{R}_+^2} |Q_t f|^2\, dx \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2.$$

La proposition 4 se démontre par récurrence sur n. On part de l'idée très simple que si, dans la définition de G_n, on pouvait remplacer $Q_t M_{a_1} P_t M_{a_2} \ldots$ par $P_t M_{a_1} Q_t M_{a_2} \ldots$ alors il viendrait, puisque $\|P_t\|_{\mathrm{op}} = 1$ et $\|M_{a_1}\|_{\mathrm{op}} \leq 1$, $\|G_n(f)\|_2 \leq \|G_{n-1}(f)\|_2$. En fait c'est presque cela qui se passe car les termes d'erreur peuvent être analysés à l'aide de mesures de Carleson.

La preuve de la proposition 4 occupe les sections 6 à 10.

6. Identités de commutation

PROPOSITION 5. *Si* $b \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, *désignons respectivement par* M_b, M_{b_t} *et* M_{β_t} *les opérateurs de multiplication ponctuelle par* b, $b_t = P_t(b)$ *et* $\beta_t = Q_t(b)$. *Alors on a*

$$Q_t M_b P_t = P_t M_{b_t} Q_t + R_t \tag{31}$$

où $R_t = M_{\beta_t} P_t - Q_t M_{\beta_t} Q_t$.

Compte-tenu de l'importance de cette identité, nous en donnons deux démonstrations.

Pour vérifier (31), il suffit de prouver que les deux membres de (31) donnent le même résultat lorsqu'ils sont appliqués à un même caractère $e^{i\xi x}$, $\xi \in \mathbf{R}$.

Par linéarité, on peut aussi supposer que $b(x) = e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors tout revient à vérifier que l'on a

$$\begin{aligned}\frac{t(\alpha+\xi)}{1+t^2(\alpha+\xi)^2}\,\frac{1}{1+t^2\xi^2} &= \frac{1}{1+t^2(\alpha+\xi)^2}\,\frac{1}{1+t^2\alpha^2}\,\frac{t\xi}{1+t^2\xi^2} \\ &\quad + \frac{t\alpha}{1+t^2\alpha^2}\,\frac{1}{1+t^2\xi^2} - \frac{t(\alpha+\xi)}{1+t^2(\alpha+\xi)^2}\,\frac{t\alpha}{1+t^2\alpha^2}\,\frac{t\xi}{1+t^2\xi^2}\end{aligned}$$

ce qui ne présente aucune difficulté.

La seconde démonstration est moins superficielle car elle permet de démontrer (31) pour toute dérivation D d'une algèbre commutative A (ici

$A = \mathcal{S}(\mathbf{R})$, par exemple) telle que, pour tout t réel, $I + itD$: $A \to A$ soit inversible.

En effet, il vient alors, si $u \in A$ et $v \in A$,

$$(I + itD)(uv) = [(I + itD)u]v + uitDv$$

grâce à la définition d'une dérivation.

Puisque $I + itD$: $A \to A$ est inversible, on a

$$uv = (I + itD)^{-1}\{[(I + itD)u]v\} + (I + itD)^{-1}[uitDv]$$

et enfin, en posant $f = (I + itD)u$, $g = v$,

$$\left[(I + itD)^{-1}f\right]g = (I + itD)^{-1}(fg) + (I + itD)^{-1}\left\{\left[(I + itD)^{-1}f\right](itDg)\right\}$$

ce qui s'écrit

$$(I + itD)^{-1}(fg) = \left[(I + itD)^{-1}f\right]g + r_t \tag{32}$$

où le terme d'erreur $r_t = -(I + itD)^{-1}\{[(I + itD)^{-1}f](itDg)\}$. Finalement (31) s'obtient en prenant formellement la partie imaginaire de (32). En fait, on a, grâce à (32),

$$(P_t - iQ_t)(fg) = [(P_t - iQ_t)f]g - it(P_t - iQ_t)\{[(P_t - iQ_t)f]Dg\}$$

et, en changeant t en $-t$, on a également

$$(P_t + iQ_t)(fg) = [(P_t + iQ_t)f]g + it(P_t + iQ_t)\{[(P_t + iQ_t)f]Dg\}.$$

En soustrayant membre à membre ces deux dernières identités, on obtient (31) sous sa forme équivalente

$$Q_t(fg) = (Q_tf)g + P_t\{(P_tf)(tDg)\} - Q_t\{(Q_tf)(tDg)\}.$$

7. Rappels sur les mesures de Carleson

Soit $d\mu(x, t)$ une mesure de Radon ≥ 0 sur $\mathbf{R}^2_+ = \mathbf{R} \times [0, +\infty[$. Pour tout intervalle ouvert fini $I =]a, b[$, désignons par $T(I)$ le triangle $\{(x, t);\ 0 \leq t \leq d(x, I^c)\}$ de $\mathbf{R}^2_+$ où $d(x, I^c)$ est la distance de x au complémentaire de I.

On dit que μ est une mesure de Carleson s'il existe une constante C telle que, pour tout intervalle ouvert fini, on ait $\mu(T(I)) \leq C|I| = C(b - a)$ et la borne inférieure de ces constantes C sera notée C_μ.

Soit g: $\mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{C}$ une fonction continue, nulle à l'infini. On pose, si $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$\mathfrak{M}g(x_0) = \sup_{|x - x_0| \leq t} |g(x, t)| \tag{33}$$

et l'on a alors le résultat suivant [8].

PROPOSITION 6. *Soient μ une mesure de Carleson de constante C_μ et g: $\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{C}$ une fonction continue et nulle à l'infini. Alors on a, pour tout $p > 0$,*

$$\iint_{\mathbf{R}_+^2} |g(x,t)|^p \, d\mu(x,t) \leq C_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{M}g)^p(x)\, dx. \tag{34}$$

Ce résultat est complété par le lemme classique suivant ([5] page 148).

LEMME 2. *Si $b \in L^\infty(\mathbf{R})$, alors $|Q_t b|^2(dx\, dt/t) = d\mu(x,t)$ est une mesure de Carleson de constante $C_\mu \leq 10\|b\|_\infty^2$.*

8. L'Inégalité fondamentale

Soit $f(x,t)$: $\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{C}$ une fonction continue et nulle à l'infini. Nous écrirons $f(x,t) = f_t(x)$ lorsque t est regardé comme un paramètre et, en particulier, $P_t f_t$ ou $Q_t f_t$ signifie que t est gelé et que les opérateurs P_t ou Q_t agissent sur la fonction f_t de x.

Enfin nous posons $F(x) = \sup_{t>0} |f_t(x)|$.

Avec ces notations on a

PROPOSITION 7. *Soient $f(x,t)$: $\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{C}$ une fonction continue, nulle à l'infini et $b \in L^\infty(\mathbf{R})$ une fonction complexe telle que $\|b\|_\infty \leq 1$. Désignons par M_b l'opérateur de multiplication ponctuelle par $b(x)$ et par $L^2(\mathbf{R}_+^2)$ l'espace $L^2(\mathbf{R}_+^2, (dx\, dt/t))$. Alors on a*

$$\|Q_t M_b P_t f_t\|_{L^2(\mathbf{R}_+^2)} \leq \|Q_t f_t\|_{L^2(\mathbf{R}_+^2)} + C\|F\|_{L^2(\mathbf{R})} \tag{35}$$

où C est une constante absolue.

Désignons par $k(x)$ la fonction $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ et par $h(x)$ la fonction $Dk(x) = i(\operatorname{sign} x)k(x)$. Pour tout $t > 0$, posons

$$k_t(x) = \frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{et} \quad h_t(x) = \frac{1}{t}h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Alors $P_t(f) = k_t * f$ et $Q_t(f) = h_t * f$ ce qui entraîne $\|P_t(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et de même pour Q_t. Par ailleurs $\|P_t(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ et $\|Q_t f\|_2 \leq \frac{1}{2}\|f\|_2$.

Revenons à la proposition 7. On commence par appliquer la proposition 5. Il vient

$$Q_t M_b P_t f_t = P_t M_{b_t} Q_t f_t + g_t$$

où

$$g_t = (Q_t b)(P_t f_t) - Q_t[(Q_t b)(Q_t f_t)].$$

On en déduit, si $L^2(\mathbf{R}^2_+) = L^2(\mathbf{R}^2_+, (dx\,dt/t))$,

$$\|Q_t M_b P_t f_t\|_{L^2(\mathbf{R}^2_+)} \leq \|P_t M_{b_t} Q_t f_t\|_{L^2(\mathbf{R}^2_+)} + \|(Q_t b)(P_t f_t)\|_{L^2(\mathbf{R}^2_+)}$$
$$+ \|Q_t[(Q_t b)(Q_t f_t)]\|_{L^2(\mathbf{R}^2_+)}$$
$$= A + B + C.$$

Pour majorer

$$A^2 = \iint_{\mathbf{R}^2_+} |P_t M_{b_t} Q_t f_t|^2 \frac{dx\,dt}{t},$$

on intègre d'abord en x, t étant fixé. La norme de P_t: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est égale à 1. D'autre part $\|b\|_\infty \leq 1$ entraîne $\|b_t\|_\infty = \|P_t(b)\|_\infty \leq 1$. Il vient donc

$$A^2 \leq \iint_{\mathbf{R}^2_+} |Q_t f_t|^2 \frac{dx\,dt}{t} = \|Q_t f_t\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2_+)}.$$

Les termes B et C sont des termes d'erreur. On a $|f_t(x)| \leq F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $P_t f_t = k_t * f_t$ où $k_t > 0$.

Nous nous proposons de majorer $P_t f_t(x)$ si $|x - x_0| \leq t$. On remarque que si $|x - x_0| \leq t$, $k_t(x-y) \leq e k_t(x_0 - y)$ ce qui entraîne $|P_t f_t(x)| \leq e P_t F(x_0)$. Désignons par F^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de F. On a évidemment $P_t F(x_0) \leq F^*(x_0)$ et finalement

(36) $$\mathfrak{M} P_t f_t(x_0) \leq e F^*(x_0).$$

Cette inégalité, jointe au lemme 2 et à la proposition 6, donne

$$B^2 = \iint_{\mathbf{R}^2_+} |Q_t b|^2 |P_t f_t|^2 \frac{dx\,dt}{t} \leq C \int_{\mathbf{R}} |F^*|^2\,dx \leq C' \int_{\mathbf{R}} F^2\,dx.$$

Le traitement de C^2 se fait de façon analogue. On se débarrasse d'abord de l'opérateur Q_t en raisonnant comme pour la majoration de A^2 et l'on remarque ensuite que $|Q_t f_t| = |h_t * f_t| \leq k_t * F = P_t F$ ce qui ramène au cas précédent.

9. Fonctions Maximales iterées

On désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble convexe de toutes les fonctions K: $\mathbf{R} \to [0, +\infty]$ qui sont paires, décroissantes sur $[0, +\infty[$ et vérifient $\int_{\mathbf{R}} K(x)\,dx = 1$. Alors, comme on le vérifie sans peine, $K_1 \in \mathcal{K}$ et $K_2 \in \mathcal{K}$ impliquent $K_1 * K_2 \in \mathcal{K}$.

D'autre part, si $K \in \mathcal{K}$ et si $f \in L^1(\mathbf{R})$, alors $|K * f| \leq f^*$ en désignant toujours par f^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de f.

Désignons par $b_1, \ldots, b_n$ n fonctions dans $L^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant $\|b_j\|_\infty \leq 1$ et appelons $M_{b_1}, \ldots, M_{b_n}$ les opérateurs de multiplication correspondants.

Alors on a

LEMME 3. *Pour tout* $t > 0$, $|M_{b_1}P_tM_{b_2}P_t \cdots M_{b_n}P_tf| \leq f^*$.

En effet, $P_tg = k_t * g$ où $k_t \in \mathcal{K}$ et l'on a donc $k_{t,n} = k_t * \cdots * k_t \in \mathcal{K}$ ce qui implique

$$|M_{b_1}P_tM_{b_2} \cdots M_{b_n}P_tf| \leq k_{t,n} * |f| \leq f^*.$$

10. Fin de la demonstration de la proposition 4

Nous avons déjà remarqué que le cas $n = 0$ est trivial.

Supposons la proposition 4 établie pour $0 \leq n \leq m$. Pour passer à $n = m + 1$, on pose

$$f_{m,t} = M_{b_1}P_tM_{b_2}P_t \cdots M_{b_m}P_tf$$

et l'on a donc, si $b \in L^\infty(\mathbf{R})$ et $\|b\|_\infty \leq 1$,

$$G_{m+1}(f) = \left(\int_0^\infty |Q_tM_bP_tf_{m,t}|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

et donc

$$\|G_{m+1}(f)\|_2 = \left(\iint_{\mathbf{R}_+^2} |Q_tM_bP_tf_{m,t}|^2 \frac{dx\,dt}{t}\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\iint_{\mathbf{R}_+^2} |Q_tf_{m,t}|^2 \frac{dx\,dt}{t}\right)^{1/2} + C\|f^*\|_2$$

par la proposition 7 et le lemme 3. On a donc

$$\|G_{m+1}(f)\|_2 \leq \|G_m(f)\|_2 + C'\|f\|_2$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 4 et du théorème III.

11. Généralisations du théorème III

Soit $m \in L^\infty(\mathbf{R})$ une fonction paire: $m(-t) = m(t)$ pour tout t réel. A l'aide d'une telle fonction m, on définit une variante de la transformation de Hilbert

$$H_m = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{I + itD} m(t) \frac{dt}{t}$$

et H_m: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est continue.

Le noyau de H_m est alors $K_m(x - y)$ où $K_m(x)$ est la fonction impaire dont la restriction à $]0, +\infty[$ est

$$K_m(x) = \int_0^\infty e^{-xu} m\left(\frac{1}{u}\right) du.$$

Nous désignons par $n \in \mathbf{N}$ un entier; $A_1, \ldots, A_n$: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sont n fonctions lipschitziennes et $K_{m,n}(x, y)$ est le noyau singulier défini par

$$(37) \quad n!K_{m,n}(x, y) = (A_1(x) - A_1(y)) \cdots (A_n(x) - A_n(y))D^n K_m(x - y).$$

Avec ces notations, nous pouvons généraliser le théorème III de la façon suivante.

THEOREME IV. *Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que, pour toute fonction paire $m \in L^\infty(\mathbf{R})$ et toute suite A_j: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $1 \le j \le n$, de n fonctions lipschitziennes, la norme de l'opérateur $L_{m,n}$: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ défini par le noyau singulier $K_{m,n}$ ne dépasse pas $C(1 + n)^4 \| A_1' \|_\infty \cdots \| A_n' \|_\infty \| m \|_\infty$.*

Nous nous limiterons dans la démonstration au cas particulier où, en outre, m est continue et $m(t) = O(|t|^\varepsilon)$ au voisinage de l'origine et $m(t) = O(|t|^{-\varepsilon})$ au voisinage de l'infini pour un certain $\varepsilon > 0$. Le cas général s'obtient par les passages à la limite usuels. Pour alléger les notations, soit $q(x) = m\left(\frac{1}{x}\right)$ de sorte que

$$H_m = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(y)}{D - iy} dy \quad \text{avec} \quad \| H_m \|_{\mathrm{op}} \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{q(y)}{D - iy} \right\|_{\mathrm{op}} dy < +\infty.$$

On se limite au cas où $A_j' \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et l'on désigne par $\delta_{A_1}, \ldots, \delta_{A_n}$ les dérivations de l'algèbre $\mathfrak{L}(L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R}))$ définies par $\delta_{A_j}(T) = M_{A_j}T - TM_{A_j}$; M_{A_j}: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est l'opérateur de multiplication ponctuelle par A_j.

Partant de

$$H_m = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(y)}{D - iy} dy,$$

il vient si q est nulle hors de $\eta \le |y| \le 1/\eta$, $\eta > 0$,

$$D^n H_m = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{D - iy} q(y)\, dy + \alpha_0 I + \cdots + \alpha_{n-1} D^{n-1}$$

et donc

$$(38) \qquad \delta_{A_1} \circ \cdots \circ \delta_{A_n} D^n H_m = (-i)^{n+1} \sum_{\sigma \in S_n} \int_{-\infty}^{+\infty} T_\sigma(y) y^n q(y)\, dy$$

avec

$$T_\sigma(y) = \frac{I}{D - iyI} M_{a_{\sigma(1)}} \frac{I}{D - iyI} M_{a_{\sigma(2)}} \cdots \frac{I}{D - iyI} M_{a_{\sigma(n)}} \frac{I}{D - iyI}.$$

Si q n'est pas nulle au voisinage de 0 et de l'infini mais vérifie $q(y) = o(|y|^\varepsilon)$ au voisinage de 0 et $q(y) = o(|y|^{-\varepsilon})$ au voisinage de l'infini, on obtient (38) par simple passage à la limite.

Finalement, on pose encore $y = 1/t$ et l'on obtient

$$L_{m,n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \int_{-\infty}^{+\infty} R_\sigma(t) m(t) \frac{dt}{t}$$

où

$$R_\sigma(t) = \frac{I}{I+itD} M_{a_{\sigma(1)}} \frac{I}{I+itD} M_{a_{\sigma(2)}} \cdots \frac{I}{I+itD} M_{a_{\sigma(n)}} \frac{I}{I+itD}.$$

On écrit $(I+itD)^{-1} = P_t - iQ_t$ ce qui permet de reprendre la méthode du section 4. Les seuls termes difficiles sont

$$L_j = \int_0^\infty P_t M_{a_1} P_t \cdots M_{a_j} Q_t M_{a_{j+1}} P_t \cdots M_{a_n} P_t \frac{m(t)}{t} dt.$$

On remarque encore que $(1/t)Q_t = (\partial/\partial t)(2P_tQ_t - Q_t) + (1/t)Q_t^3$. Le terme où figure Q_t^3 se ramène à la fonction de Littlewood-Paley-Stein. Après intégration par parties, on a deux types de termes. Ceux où l'on a dérivé P_t contiennent Q_t^2 et se traitent par la méthode du section 4. Le terme récalcitrant est, en supposant que $tm'(t)$ soit continue sur $[0, +\infty[$,

$$L'_j = \int_0^\infty P_t M_{a_1} P_t \cdots M_{a_j}(Q_t - 2P_tQ_t) M_{a_{j+1}} P_t \cdots M_{a_n} P(t) \frac{tm'(t)}{t} dt.$$

On observe alors que $(\partial/\partial t)Q_t = -Q_t + 2P_tQ_t$ et que l'on peut donc intégrer L'_j par parties. Supposons que $tm'(t) = m_1(t)$ ait les propriétés suivantes: $m_1(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, $m_1(t) = o(|t|^\varepsilon)$ au voisinage de 0, $m_1(t) = o(|t|^{-\varepsilon})$ au voisinage de l'infini et $m_2(t) = tm'_1(t)$ possède également ces deux propriétés.

Alors, modulo des termes (au nombre de n) que l'on peut traiter par les méthodes du section 4, il vient

$$L'_j \equiv \int_0^\infty P_t M_{a_1} P_t \cdots M_{a_j} Q_t M_{a_{j+1}} P_t \cdots M_{a_n} P_t \frac{m_2(t)}{t} dt = L''_j.$$

Cela signifie que nous pouvons contrôler $L_j - L''_j$ par la fonction de Littlewood-Paley-Stein.

Mais $L_j - L''_j$ a la même structure que L_j, à cette différence près que m y est remplacé par $m - m_2 = r$.

La solution est donc très simple. Partons de $r \in L^\infty(\mathbf{R})$ avec $r(-t) = r(t)$, $\|r\|_\infty \le 1$ et les hypothèses de régularité supplémentaires: $r(t) = o(|t|^\varepsilon)$ au voisinage de 0, $r(t) = o(|t|^{-\varepsilon})$ au voisinage de l'infini et r est continue sur $\mathbf{R}$.

A l'aide de r, définissons la fonction paire m: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ par

$$m(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \inf\left(\frac{x}{t}, \frac{t}{x}\right) r(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2x} \int_0^x r(t)\, dt + \frac{x}{2} \int_x^\infty r(t) \frac{dt}{t^2} \qquad (x > 0).$$

On a alors

$$m_1(x) = xm'(x) = -\frac{1}{2x}\int_0^x r(t)\,dt + \frac{x}{2}\int_x^\infty r(t)\frac{dt}{t^2}$$

pour $x > 0$ de sorte que $\|m_1\|_\infty \leq \|r\|_\infty$ et $\|m\|_\infty \leq \|r\|_\infty$.

Par ailleurs $m_2(x) = xm_1'(x) = -r(x) + m(x)$ comme le montre un calcul immédiat. Le théorème IV est démontré.

Une variante du théorème IV est l'énoncé suivant.

PROPOSITION 8. *Soient $m \in L^\infty(]0, +\infty[)$ et soit $k\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$ la fonction impaire dont la restriction à $]0, +\infty[$ est $k(x) = \int_0^\infty e^{-xt}m(t)\,dt$. Désignons par $A_1,\ldots,A_n$ n fonctions lipschitziennes telles que $\|A_j'\|_\infty \leq 1$ et par $K_n(x, y)$ le noyau*

$$\frac{A_1(x) - A_1(y)}{x - y}\cdots\frac{A_n(x) - A_n(y)}{x - y}k(x - y).$$

Alors l'intégrale singulière $g_n(x) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x, y)f(y)\,dy$ exist preque-partout lorsque $f \in L^2(\mathbf{R})$ et l'on a $\|g_n\|_2 \leq C(1 + n)^4\|m\|_\infty\|f\|_2$ où C est une constante absolue.

Cette proposition est un corollaire du théorème IV. Définissons en effet la distribution $S_n = \text{v.p.}\,x^{-n}k(x)$ par

$$(39)\quad \langle S_n, f\rangle = \text{v.p.}\int\left[f(x) - f(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right]\frac{k(x)}{x^n}\,dx$$

si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$; la valeur principale de l'intégrale ayant le sens usuel. Alors c'est un exercice simple de théorie des distributions que de vérifier l'identité $n!S_n = D^n k_n$ où $k_n\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$ est la fonction impaire définie par $k_n(x) = \int_0^\infty e^{-xu}m_n(u)\,du$ lorsque $x > 0$ avec $m_n(u) = n!u^{-n}\int_0^u (u - t)^{n-1}m(t)\,dt$. On est donc ramené au théorème IV.

THEOREME V. *Soient $K \subset \mathbf{C}$ un ensemble compact et convexe, $F\colon U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de K et $A\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne telle que, pour tout couple (x, y) de deux réels distincts, on ait*

$$\frac{A(x) - A(y)}{x - y} \in K.$$

Alors pour tout noyau impair $k\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$ défini dans les hypothèses de la *proposition 8, le noyau singulier*

$$F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)k(x-y)$$

définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbf{R})$.

Soit, en effet $\Gamma \subset U$ une courbe fermée, simple, rectifiable, orientée et contenant dans son intérieur le compact K.

On écrit

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

ce qui ramène la preuve du théorème V au cas particulier où $F(z)=1/(\zeta-z)$ et où la distance de ζ à K dépasse $\varepsilon>0$. On souhaite alors obtenir une estimation uniforme en ζ pour la norme de l'opérateur défini par le noyau $K_\zeta(x,y)=1/(\zeta x-A(x)-(\zeta y-A(y)))$. On peut, puisque l'ensemble compact K est convexe, trouver $\alpha\in\mathbf{C}$ tel que $|\alpha-z|\leq R$ pour tout $z\in K$ tandis que $|\alpha-\zeta|\geq R+\varepsilon/2$; R ne dépendant pas de ζ puisque $d(\zeta,K)\geq\varepsilon$.*

On pose alors $A(x)=\alpha x+B(x)$ et l'on a donc $\left|\dfrac{B(x)-B(y)}{x-y}\right|\leq R$ et

$$K_\zeta(x,y)=\frac{1}{(\zeta-\alpha)(x-y)-(B(x)-B(y))}=\sum_{j=0}^{\infty}(\zeta-\alpha)^{-j-1}K_j(x,y)$$

où $K_j(x,y)=\dfrac{(B(x)-B(y))^j}{(x-y)^{j+1}}$.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 8.

12. Les espaces de Hardy généralisés de C. Kenig

On désigne par $\varphi\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction lipschitzienne et par $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ y=\varphi(x)\}$ le graphe de φ.

Soient Ω_1 et Ω_2 les ouverts limités par Γ et définis respectivement par $y>\varphi(x)$ et $y<\varphi(x)$.

Suivant C. Kenig [10], on leur associe deux espaces de Hardy généralisés $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ définis comme suit: $F\in H^2(\Omega_1)$ signifie que $F\colon\Omega_1\to\mathbf{C}$ est holomorphe et que

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbf{R}}|F(x+i\varphi(x)+i\varepsilon)|^2\,dx<+\infty.$$

*Remarquer qu'un ensemble convexe compact est une intersection de disques compacts.

On définit de même $H^2(\Omega_2)$ et, si $\varphi = 0$, on retrouve les espaces de Hardy usuels.

On pose $L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma, ds)$ où ds est la longueur d'arc sur Γ et l'on peut [10] définir un opérateur de trace θ_1: $H^2(\Omega_1) \to L^2(\Gamma)$ possédant les propriétés suivantes.

Si $F(z) = 1/(z - z_2)$ et $z_2 \in \Omega_2$, alors $\theta_1(F)$ est la restriction de F à Γ. De plus θ_1 est linéaire, continu et l'image $\theta_1(H^2(\Omega_1))$ est fermée dans $L^2(\Gamma)$. En fait $f \in \theta_1(H^2(\Omega_1))$ si et seulement si

$$f \in L^2(\Gamma) \quad \text{et} \quad \int_\Gamma f(z) \frac{dz}{z - z_2} = 0$$

pour tout $z_2 \in \Omega_2$.

Pour alléger les notations, on écrira $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ au lieu de $\theta_1(H^2(\Omega_1))$. On définit de même le sous-espace fermé $H^2(\Omega_2)|_\Gamma$ de $L^2(\Gamma)$. Avec ces notations on a

THEOREME VI. *Si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne, alors $L^2(\Gamma)$ est la somme directe des sous-espaces fermés $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ et $H^2(\Omega_2)|_\Gamma$.*

La somme directe n'est orthogonale que si $\varphi(x) = ax + b$.

Supposons encore que Γ soit le graphe de la fonction lipschitzienne φ et que $\|\varphi'\|_\infty \leq M$. Soit $\alpha > M$ et S_α le secteur fermé $y \geq \alpha|x|$ du plan complexe.

Désignons par Ω l'ouvert de $\mathbf{C}^2$ défini par $\Omega = \{(z, w), z - w \notin S_\alpha\}$ et par K: $\Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans Ω et telle que $|K(z, w)| \leq C|z - w|^{-1}$ pour une certaine constante C et tout $(z, w) \in \Omega$.

A l'aide de $K(z, w)$ et de Γ on définit pour toute fonction $f \in L^2(\Gamma)$ une fonction holomorphe F_1: $\Omega_1 \to \mathbf{C}$ par

$$F_1(w) = \int_\Gamma K(z, w) f(z)\, dz. \tag{40}$$

On a alors [6].

THEOREME VII. *Pour tout graphe Γ de fonction lipschitzienne et tout noyau holomorphe K du type ci-dessus, F_1, définie par* (40), *appartient à $H^2(\Omega_1)$ chaque fois que $f \in L^2(\Gamma)$ et l'opérateur T: $L^2(\Gamma) \to H^2(\Omega_1)$ ainsi défini et borné.*

Naturellement le théorème VI n'est qu'une paraphrase du théorème I tandis que le théorème VII se déduit du théorème VI par le technique de [6].

13. Généralisation du théorème *V* par transférence

Soient $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace muni d'une tribu et d'une mesure σ-finie $\mu \geq 0$ sur $\mathcal{C}$. Désignons par U_t un groupe d'automorphismes de $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, indexé par

$\mathbf{R}$, préservant la mesure μ et tel que si $E \in \mathcal{C}$ et $\mu(E) < +\infty$, la mesure de la différence symétrique entre $U_t(E)$ et E tende vers 0 avec t.

Nous dirons qu'une fonction A: $\Omega \to \mathbf{C}$ est lipschitzienne relativement à U_t s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|A(U_t(x)) - A(x)| \leq C|t|$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in \mathbf{R}$.

THEOREME VIII. *Soient K une partie compacte et convexe du plan complexe, U un ouvert contenant K et F: $U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans U.*

Soit A: $\Omega \to \mathbf{C}$ une fonction telle que l'on ait, pour tout t réel, non nul, et tout $x \in \Omega$, $(A(U_t(x)) - A(x))/t \in K$. Il existe alors une constante C_1 telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N > 0$, la norme $\|T_{\varepsilon,N}\|_{\mathrm{op}}$ de l'opérateur $T_{\varepsilon,N}$: $L^2(\Omega, \mathcal{C}, d\mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{C}, d\mu)$ défini par

$$T_{\varepsilon,N}f(x) = \int_{\varepsilon \leq |t| \leq N} F\left(\frac{A(U_t(x)) - A(x)}{t}\right) f(U_t(x)) \frac{dt}{t}$$

ne dépasse pas C_1.

Pour le voir, on pose $g(x) = T_{\varepsilon,N}f(x)$ et l'on a alors, pour tout $M > 0$,

$$\|g\|_{L^p(\Omega)}^p = \|g(U_s(x))\|_{L^p(\Omega)}^p = I = \frac{1}{2M}\int_\Omega\int_{-M}^{M} |g(U_s(x))|^p \, ds \, d\mu(x)$$

$$= \int_\Omega\int_{-M}^{M}\left|\int_{\varepsilon \leq |t| \leq N} F\left(\frac{A(U_{t+s}(x) - A(U_s(x))}{t}\right) f(U_{t+s}(x)) \frac{dt}{t}\right|^p \frac{ds}{2M}\; d\mu(x).$$

Désignons par θ_x: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\theta_x(t) = f(U_t(x))\mathbf{1}_{\{|t| \leq M+N\}}$; la multiplication par cette dernière fonction indicatrice n'a pas d'effet sur l'intégrale I que l'on peut donc majorer par

$$J = \int_\Omega\int_{\mathbf{R}}\left|\int_{\varepsilon \leq |t| \leq N} F\left(\frac{a_x(t+s) - a_x(s)}{t}\right) \theta_x(t) \frac{dt}{t}\right|^p \frac{ds}{2M}\; d\mu(x).$$

On a posé $a_x(t) = A(U_t(x))$ et l'on a $(a_x(t) - a_x(s))/(t-s) \in K$ pour tout couple (s, t) de deux réels distincts.

En appliquant le théorème de Fubini pour calculer J, on est amené à fixer x et à appliquer le théorème V. Il vient donc

$$J \leq C_1^p \int_\Omega \|\theta_x\|_{L^p(ds)}^p \frac{d\mu(x)}{2M} = C_1^p \int_\Omega\int_{-M-N}^{M+N} |f(U_s(x))|^p \frac{d\mu(x)\, ds}{2M}$$

$$\leq C_1^p \frac{M+N}{M} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \to C_1^p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \qquad (M \to +\infty).$$

14. Généralisations à $\mathbf{R}^n$

Nous dirons que $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ est lipschitzienne s'il existe une constante C telle que $|A(x) - A(y)| \leq C|x - y|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $y \in \mathbf{R}^n$.

THEOREM IX. *Supposons que* $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *et* $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *soient deux fonctions lipschitziennes. Alors le noyau*

$$K(x, y) = \frac{A(x) - A(y)}{\left[|x - y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\right]^{(n+1)/2}}$$

définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Pour le voir, on applique le lemme suivant.

LEMME 4. *Soient K une partie compacte et convexe du plan complexe, U un ouvert contenant K, $F: U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans U et $A: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne telle que pour tout couple (x, y) de deux nombres réels distincts, on ait $(A(x) - A(y))/(x - y) \in K$. Désignons enfin par $B: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une seconde fonction lipschitzienne et formons le noyau singulier*

$$N(x, y) = \frac{B(x) - B(y)}{(x - y)^2} F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y}\right).$$

Alors, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ l'intégrale singulière

$$g(x) = \text{v.p.} \int N(x, y) f(y)\, dy$$

existe presque-partout et l'on a $\|g\|_2 \leq C(K, U, F)\|B'\|_\infty \|f\|_2$.

La preuve de ce lemme est semblable à celle du théorème V et laissée au lecteur.

Le théorème IX s'obtient alors, à partir du lemme par la méthode des rotations de A. Calderón [1] que l'on peut appliquer puisque, grâce au théorème XI de l'appendice, la continuité L^2 de l'opérateur T défini par le noyau $N(x, y)$ entraîne, uniformément en $\varepsilon > 0$, la continuité L^2 des opérateurs T_ε définis à l'aide des noyaux tronqués $N_\varepsilon(x, y) = N(x, y)\mathbf{1}_{\{|x-y| \geq \varepsilon\}}$.

15. Domaines des Racines carrées de certains opérateurs accrétifs

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$, $V \subset H$ un sous-espace dense et $T: V \to H$ un opérateur linéaire. On dit, suivant Kato [9], que T est accrétif-maximal si les deux propriétés suivantes sont satisfaites:

(41) $$\operatorname{Re}\langle Tf | f\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in V;$$

(42) $$I + T: V \to H \text{ est une application surjective.}$$

On démontre alors les propriétés suivantes:

(43) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\lambda I + T$: $V \to H$ est une application surjective, $(\lambda I + T)^{-1}$: $H \to V$ est continue et la norme de cet opérateur ne dépasse pas $(\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$.

(44) Il existe un opérateur et un seul S qui soit accrétif-maximal et qui vérifie $S^2 = T$.

On écrit alors $S = T^{1/2}$ et l'on a, pour tout $f \in V$,

$$T^{1/2} f = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (T + \lambda I)^{-1} T f \, d\lambda. \tag{45}$$

La convergence à l'infini de cette intégrale ne pose aucun problème grâce à (43) et l'on remarque que si $f \in V$, on a $(T + \lambda I)^{-1} T f = f - (T + \lambda I)^{-1} \lambda f$ ce qui entraîne, si $\lambda > 0$, $\|(T + \lambda I)^{-1} T f\| \leq 2\|f\|$; la convergence à l'origine de (45) est donc assurée.

Le problème qui se pose est de déterminer le domaine de $T^{1/2}$. Nous allons résoudre ce problème dans un cas particulier.

Soient $D = -i(d/dx)$: $H^1 \to L^2$ (H^1 est l'espace de Sobolev usuel) et $a(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$ une fonction telle que, pour un certain $\delta > 0$, on ait $\operatorname{Re} a(x) \geq \delta$ presque-partout.

Dans tout ce qui suit l'espace de Hilbert H de référence est $L^2(\mathbf{R})$. On a alors, si M_a: $H \to H$ est l'opérateur de multiplication par $a(x)$, le lemme suivant.

Lemme 5. *L'opérateur DM_aD est défini sur un sous-espace dense $V \subset H$ et est accrétif-maximal.*

Commençons par préciser le domaine de DM_aD. Nous partons des opérateurs bornés $L_0 = D(I + D^2)^{-1/2}$ et $L_1 = (I + D^2)^{-1/2}$ et remarquons que, grâce à la formule de Plancherel, on a, pour tout $f \in H$, $\|L_0(f)\|^2 + \|L_1(f)\|^2 = \|f\|^2$.

Posons alors $S = L_1^2 + L_0 M_a L_0$. La condition $\operatorname{Re} a(x) \geq \delta$ donne immédiatement $\operatorname{Re}\langle Sf | f\rangle \geq \varepsilon \|f\|^2$ où $\varepsilon = \inf(1, \delta)$. Il s'ensuit que S: $H \to H$ est un isomorphisme.

Posons alors $V_0 = S^{-1}(H^1)$; V_0 est un sous-espace dense dans $L^2(\mathbf{R})$ et $V = (I + D^2)^{-1/2} V_0$ est dense dans H^1 (donc aussi dans $L^2(\mathbf{R})$).

On écrit enfin $I + DM_aD = (I + D^2)^{1/2} S (I + D^2)^{1/2}$ ce qui permet de vérifier immédiatement que

(46) $I + DM_aD$: $V \to H$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Il en résulte que, si $f \in V \subset H^1$, $M_a D f \in H^1$ et on a évidemment $\operatorname{Re}\langle DM_aDf | f\rangle \geq \delta \|Df\|^2$.

Un point de vue équivalent est celui de Kato [9]. On part de la forme sesquilinéaire J: $H^1 \times H^1 \to \mathbf{C}$ définie par $J(f, g) = \langle f | g \rangle + \langle M_a Df | Dg \rangle$ et l'on applique le théorème VI.2.1 de [9].

THEOREME X. *Soient* $a \in L^\infty(\mathbf{R})$ *telle que* $\operatorname{Re} a(x) \geq \delta > 0$ *et* $D = -i(d/dx)$: $H^1 \to L^2(\mathbf{R})$. *Alors le domaine de l'opérateur accrétif-maximal* $(DM_aD)^{1/2}$ *est* H^1 (*l'espace de Sobolev usuel*) *et, plus précisément*

$$(DM_aD)^{1/2} + I: H^1 \to L^2$$

est un isomorphisme entre ces deux espaces de Hilbert.

Pour démontrer ce théorème, on reprend les notations du section 1. On peut évidemment, en renormalisant la fonction a, supposer que $\operatorname{Re} a(x) \geq 1$ presque-partout. On pose alors $b = 1 - (1/a)$ et l'on a $\|b\|_\infty \leq \sqrt{1 - (1/M^2)} < 1$ (avec $M = \|a\|_\infty$). On a également l'identité suivante.

LEMME 6. *Pour tout* $t \geq 0$,

$$\left(t^2 DM_aD + I\right)^{-1} tDM_a = Q_t(I - M_bP_t)^{-1}.$$

La vérification se fait en observant que

$$\left(t^2 DM_aD + I\right)Q_t = tDM_a(I - M_bP_t)$$

ce qui est immédiat puisque $M_b = I - M_a^{-1}$.

Revenons à la preuve du théorème X. On fait le changement de variable $\lambda = 1/t^2$ dans (45) et il vient

$$T^{1/2}f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (t^2T + I)^{-1} tTf \frac{dt}{t}$$

ou, de façon plus explicite, on a $(DM_aD)^{1/2} = JD$ où

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(t^2 DM_aD + I\right)^{-1} tDM_a \frac{dt}{t} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_t(I - M_bP_t)^{-1} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \int_0^\infty Q_t(M_bP_t)^k \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Or $\int_0^\infty Q_t(M_bP_t)^k(dt/t) = T_k$ est l'un des opérateurs étudiés dans la démonstration de la proposition 3 (et noté $\mathfrak{L}_0$ dans cette preuve). On a $\|T_k\|_{\mathrm{op}} \leq C(1+k)^3\|b\|_\infty^k$ ce qui entraîne la convergence désirée dès que $\|b\|_\infty < 1$.

Vérifions enfin que $(DM_aD)^{1/2} + I$: $H^1 \to L^2$ est un isomorphisme entre ces deux espaces de Hilbert. Puisque $(DM_aD)^{1/2}$ est accrétif, il vient immédiatement

$$\left\|\left((DM_aD)^{1/2} + I\right)f\right\| \geq \|f\|$$

pour tout $f \in H^1$ (en posant $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbf{R})}$).

Il reste à vérifier que $\|(DM_aD)^{1/2}f + f\| \geq \varepsilon\|Df\|$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

A cet effet, on pose $S = (DM_aD)^{1/2}$ et l'on a $S^* = (DM_{\bar{a}}D)^{1/2}$. Puisque $\operatorname{Re} \bar{a} = \operatorname{Re} a \geq \delta$, il vient $\|S^*f\| \leq C\|Df\|$.

Alors le nombre complexe $\zeta = \langle (DM_aD)^{1/2}f + f \,|\, (DM_{\bar{a}}D)^{1/2}f\rangle$ vérifie $|\zeta| \leq C\|(DM_aD)^{1/2}f + f\|\|Df\|$.

D'autre part, si $\zeta_1 = \langle DM_aDf \,|\, f\rangle$ et $\zeta_2 = \langle (DM_aD)^{1/2}f \,|\, f\rangle$ on a $\operatorname{Re}\zeta_1 \geq \delta\|Df\|^2$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$.

Enfin $(DM_aD)^{1/2}$ est accrétif et $\operatorname{Re}\zeta_2 \geq 0$. Finalement $\operatorname{Re}\zeta \geq \delta\|Df\|^2$ ce qui entraîne l'inégalité désirée avec $\varepsilon = \delta/C$.

16. Appendice (noyaux singuliers généraux de Calderón-Zygmund)

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ l'ensemble ouvert des couples (x, y), $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$, tels que $x \neq y$.

Désignons par K: $\Omega \to \mathbf{C}$ une fonction possédant les deux propriétés suivantes:

(47) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que $|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n}$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

(48) K est localement lipschitzienne sur Ω et, en notant ∇_x et ∇_y les gradients correspondants, on a $|\nabla_x K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n-1}$ et $|\nabla_y K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n-1}$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

A l'aide d'un tel noyau $K(x, y)$ on définit l'opérateur tronqué T_ε, pour $\varepsilon > 0$, par

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x, y) f(y)\, dy \tag{49}$$

et cette intégrale est absolument convergente si $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Le problème fondamental de la théorie est alors de décider si T_ε envoie $L^2(\mathbf{R}^n)$ continûment dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et s'il existe une constante C_1 telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on ait

$$\|T_\varepsilon f\|_2 \leq C_1\|f\|_2. \tag{50}$$

Lorsque (47), (48) et (50) sont vérifiés nous dirons que $K(x, y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund.

Remarquons que cette propriété de K ne dépend pas de la norme euclidienne $|\cdot|$ choisie sur $\mathbf{R}^n$.

A l'aide de la famille T_ε, $\varepsilon > 0$, on définit l'opérateur maximal T_* par $T_*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} | T_\varepsilon f(x) |$.

Avec ces notations, on a le théorème suivant (A. Calderón, M. Cotlar et A. Zygmund).

THEOREME XI. *Pour tout noyau de Calderón-Zygmund* (*au sens que nous venons de définir*), *l'opérateur maximal associé* T_* *se prolonge, pour* $1 < p < +\infty$, *à tout* $L^p(\mathbf{R}^n)$ *et l'on a* $\|T_*f\|_p \leq C_p \|f\|_p$ *où* C_p *ne dépend que de* p, n, C *et* C_1 (*constantes définies par* (47), (48) *et* (50)).

De plus soit $K\colon \Omega \to \mathbf{C}$ *un noyau vérifiant* (47) *et* (48) *et soit* $T\colon L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *un opérateur continu tel que pour toute fonction* $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *et tout* x *n'appartenant pas au support de* f *on ait* $Tf(x) = \int K(x, y) f(y)\, dy$. *Alors* K *est un noyau de Calderón-Zygmund.*

Une démonstration peut être trouvée dans [5], Chapitre IV. Ce théorème a le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soit* $T_j\colon L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *une suite bornée d'opérateurs continus. Supposons que* $T_jf(x) = \int K_j(x, y) f(y)\, dy$ *au sens du théorème précédent et que les* $K_j(x, y)$ *vérifient, uniformément en* $j \in \mathbf{N}$, (47) *et* (48).

Si, au sens de la convergence simple sur Ω, $K_j(x, y) \to K(x, y)$ *alors* $K(x, y)$ *est un noyau de Calderón-Zygmund.*

Naturellement tous les noyaux étudiés dans ce travail sont des noyaux de Calderón-Zygmund.

YALE UNIV., NEW HAVEN, CONNECTICUT
MACQUARIE UNIV., NORTH RYDE, NEW SOUTH WALES, AUSTRALIA
ECOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. CALDERÓN, *Algebra of Singular Integral Operators*, Proc. Symp. Pure Mathematics, X, A.M.S. (1967).

[2] ———, Commutators of singular integrals operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **53** (1965), 1092–1099.

[3] ———, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **74** (1977), 1324–1327.

[4] ———, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, Proc. I.C.M. Helsinki 1978, Vol. I, 84–96.

[5] R. COIFMAN et Y. MEYER, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque **57**, Société Mathématique de France (1978).

[6] R. Coifman et Y. Meyer, Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderón's theorem and analysis on Lipschitz curves, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. **779**, 104–122.
[7] E. B. Fabes, M. Jodeit, and N. M. Rivière, Potential techniques for boundary value problems on C^1-domains, Acta Math. **141** (1978), 165–186.
[8] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p-spaces of several variables, Acta Math. **129** (1972), 137–193.
[9] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, New York, (1966).
[10] C. Kenig, Weighted H^p-spaces on Lipschitz domains. Amer. J. Math. **102** (1980), 129–163.

(Received August 3, 1981)