C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 617–622, 2000
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'acoustique

Snorre Harald CHRISTIANSEN *, Jean-Claude NÉDÉLEC

CMAPX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
Courriel : snorre@cmapx.polytechnique.fr, nedelec@cmapx.polytechnique.fr

(Reçu le 24 octobre 1999, accepté après révision le 15 février 2000)

Résumé. Nous étendons la méthode de préconditionnement introduite par O. Steinbach et W.L. Wendland dans [7] aux opérateurs satisfaisant des conditions Inf-Sup. Nous associons ainsi à la matrice de Galerkin $A(h)$ de l'opérateur $\mathcal{S}(k)$ ou $\mathcal{N}(k)$, une matrice implicite $Z(h)$ telle que la multiplication par $Z(h)$ soit de même complexité que la multiplication par $A(h)$, et $Z(h)A(h)$ modélise une perturbation compacte de l'identité. Nous démontrons que pour toute famille de maillages régulière le conditionnement spectral de $Z(h)A(h)$ est borné indépendamment du pas h. Des expériences numériques illustrent l'efficacité de la méthode. Enfin nous l'adaptons aux écrans. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Preconditioners for the numerical solution of boundary integral equations from acoustics

Abstract. *We extend the preconditioning technique developed by O. Steinbach and W.L. Wendland in* [7] *to operators satisfying Inf-Sup conditions. Thus to the Galerkin matrix $A(h)$ of $\mathcal{S}(k)$ or $\mathcal{N}(k)$ we associate an implicit preconditioning matrix $Z(h)$ such that multiplication by $Z(h)$ is of the same complexity as multiplication by $A(h)$, and $Z(h)A(h)$ models a compact perturbation of the identity operator. We prove that the spectral condition number of $Z(h)A(h)$ is uniformly bounded for any regular family of meshes, as $h \to 0$. Numerical evidence of the efficiency of the preconditioning technique is also provided. Finally we adapt the method to screen problems.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In [7] O. Steinbach and W.L. Wendland develop a preconditioning technique for boundary integral equations of the first kind based on the knowledge of an operator of opposite order. As a first example, they apply their theory of "preconditioning forms" to the problem of solving the single layer equation

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

S0764-4442(00)00225-1/FLA

$\mathcal{S}u = v$ on the boundary Γ of a bounded Lipshitz-smooth domain in $\mathbb{R}^n$, with:

$$\mathcal{S} \ : \ (\mathcal{S}u)(y) = \int_\Gamma G(x,y)u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Here G is the fundamental solution of the Laplace operator in $\mathbb{R}^n$. They notice that the hyper-singular operator:

$$\mathcal{N} \ : \ (\mathcal{N}u)(y) = -\partial_{n(y)} \int_\Gamma \partial_{n(x)} G(x,y)u(x)\,\mathrm{d}x$$

is indeed of opposite order. However, its kernel is non-trivial. They suggest several solutions to that problem. For these they obtain estimates on the condition number of the preconditioned system, spectral equivalence properties, under some general assumptions of coercivity of the operators and stability of the discretization. They also notice that the hyper-singular operator can be preconditioned using the single layer operator. They conclude with numerical experiments on the Dirichlet and the Neumann problem, as well as for a system of linear elasticity, in dimension $n = 2$.

Here we apply essentially the same technique to model problems from acoustics, involving the operators $\mathcal{S}(k)$ and $\mathcal{N}(k)$ defined by replacing G in the above formulas by the fundamental solution $G(k)$ of the Helmholtz operator $\Delta + k^2\mathcal{I}$. The induced bilinear forms are no longer coercive but satisfy Babuska's Inf-Sup conditions (*see* [1], p. 564). We therefore adapt the theory of O. Steinbach and W.L. Wendland to this case. In our presentation we stress the role played by the duality in order to clarify the relation between a "spectral equivalence property" of the continuous problem and a "spectral equivalence property" of the discrete problem. In particular, where [7] relies on the strong diagonal dominance of the mass matrix to ensure the stability condition on the discretization, we invoke a discrete estimate in Sobolev norms (Proposition 2). We restrain our attention to operators with zero kernel without loss of generality it seems.

The general theory is based on the knowledge of a non-degenerate bilinear form on a dual space. More explicitly, to solve the variational equation on some Hilbert space X: $u \in X$ and $\forall u' \in X,\ a(u,u') = \ell(u')$; we suppose we have a space Y which is dual to X relatively to some bilinear form $c(\cdot,\cdot)$ on $Y \times X$, and a non-degenerate bilinear form $b(\cdot,\cdot)$ on Y. If we are then given families (X_h) and (Y_h) of subspaces of X and Y, we precondition the Galerkin matrix $A(h)$ of $a(\cdot,\cdot)$ on X_h (given some choice of basis on X_h), by the matrix $Z(h) = C(h)^{\star-1}B(h)C(h)^{-1}$, where $C(h)$ and $B(h)$ are the Galerkin matrices of $c(\cdot,\cdot)$ and $b(\cdot,\cdot)$. In this setting the spectral condition number[1] of $Z(h)A(h)$ can be bounded independently of h as long as both the dual bilinear form $b(\cdot,\cdot)$ and the duality $c(\cdot,\cdot)$ satisfy uniform discrete Inf-Sup conditions (Proposition 1).

Next we show that these Inf-Sup conditions are satisfied for our model problem, where $a(\cdot,\cdot)$ and $b(\cdot,\cdot)$ are induced by $\mathcal{S}(k)$ and $\mathcal{N}(k)$, whereas $c(\cdot,\cdot)$ is the usual duality between $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$. We also notice that by virtue of the Calderon formula: $\mathcal{S}(k)\mathcal{N}(k) - \mathcal{I}/4 = \mathcal{D}(k)^2$, we have an inverse of $\mathcal{S}(k)$ or $\mathcal{N}(k)$ up to a compact operator. Based on the close link, at least in the real symmetric positive definite case, between the speed of convergence of conjugate-gradient like algorithms and the distribution of the spectrum of the preconditioned system, we can therefore expect to have a very efficient algorithm.

Then we apply the technique to the numerical solution of Helmholtz problem in an exterior domain in $\mathbb{R}^3$, and show numerical results for both Dirichlet and Neumann boundary conditions which confirm the applicability of the theory to these problems.

In the last section we extend the method to a Neumann screen problem and prove that the spectral condition number is $\mathrm{O}(|\log h|^3)$ (Proposition 3). The main tool is a discrete trace lemma in Sobolev norms $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^0(\partial\Gamma)$, which just fails to hold in the continuous setting.

1. Préconditionneurs variationnels

Soit X un Hilbert et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur X vérifiant les conditions Inf-Sup de Babuska. Soit ℓ une forme linéaire continue sur X. Nous considérons le problème variationnel :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall u' \in X, \quad a(u,u') = \ell(u').$$

Pour le résoudre de façon approchée nous introduisons une famille (X_h) de sous-espaces de dimension finie de X et nous supposons que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une condition Inf-Sup discrète uniforme en h. Nous résolvons : $u \in X_h$ et $\forall u' \in X_h,\ a(u,u') = \ell(u')$. À cette fin nous choisissons une base $e(h)_i$ de X_h. Nous définissons la matrice $A(h)$ et le uplet $L(h)$ par :

$$A(h)_{ij} = a\big(e(h)_j, e(h)_i\big) \quad \text{et} \quad L(h)_i = \ell\big(e(h)_i\big).$$

Alors il existe un unique uplet $U(h)$ tel que $A(h)U(h) = L(h)$, et $\sum_i U(h)_i e(h)_i$ est la solution du problème variationnel discret ci-dessus.

Nous considérons ici des stratégies de préconditionnement du système ci-dessus basés sur la remarque suivante : on suppose qu'on connaît un Hilbert Y, dual de X par une forme bilinéaire $c(\cdot,\cdot)$ sur $Y \times X$, ainsi qu'une forme bilinéaire continue non dégénérée $b(\cdot,\cdot)$ sur Y. Pour en déduire un préconditionneur nous supposons que nous disposons d'une famille de sous-espaces (Y_h) de Y tels que $b(\cdot,\cdot)$ et $c(\cdot,\cdot)$ vérifient des conditions Inf-Sup discrètes uniformes en h. Nous nous donnons une base $f(h)_i$ de Y_h et nous définissons deux matrices $B(h)$ et $C(h)$ par :

$$B(h)_{ij} = b\big(f(h)_j, f(h)_i\big) \quad \text{et} \quad C(h)_{ij} = c\big(f(h)_j, e(h)_i\big).$$

Notant Λ_h la bijection $U \mapsto \sum_i U_i e(h)_i$ de $\mathbb{K}^{N_h}$ vers X_h (où $\mathbb{K}$ est le corps de base et $N_h = \dim X_h$) nous avons :

PROPOSITION 1. – *Il existe α et β strictement positifs, tels que pour tout h et tout U dans $\mathbb{K}^{N_h}$:*

$$\alpha \|\Lambda_h U\|_X \leqslant \big\|\Lambda_h C(h)^{\star -1} B(h) C(h)^{-1} A(h) U\big\|_X \leqslant \beta \|\Lambda_h U\|_X.$$

Nous proposons donc de préconditionner $A(h)$ par la matrice : $Z(h) = C(h)^{\star-1} B(h) C(h)^{-1}$. La proposition ci-dessus entraîne que pour tout h le rayon spectral de $Z(h)A(h)$ est inférieur à β et le rayon spectral de $(Z(h)A(h))^{-1}$ est inférieur à α^{-1}. Le conditionnement spectral de $Z(h)A(h)$ est donc inférieur à β/α.

2. Applications à l'acoustique

Soit Ω_- un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, Γ sa frontière et Ω_+ le complémentaire de $\Omega_- \cup \Gamma$. La normale sortante sur Γ est notée n. Soit $k > 0$; étant donnée une onde incidente régulière p^i de nombre d'onde k, nous considérons le problème de diffraction dans Ω_+ avec conditions au bord de Neumann : trouver l'onde diffractée p^d solution de :

$$\partial_n p^d = -\partial_n p^i \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\Delta p^d + k^2 p^d = 0 \quad \text{dans } \Omega_+,$$

$$|p^d| = \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{r}\big), \quad |\nabla p^d| = \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{r}\big), \quad |\partial_r p^d - ikp^d| = \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{r^2}\big).$$

Alors si k^2 n'est pas valeur propre de $-\Delta$ pour le problème de Neumann intérieur, il existe un unique u dans $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ tel que :

$$\forall y \in \Omega_+, \quad p^d(y) = \int_\Gamma \partial_{n(x)} G_k(x,y) u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec } G_k(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{ik|x-y|}}{|x-y|}$$

et u est uniquement déterminé par l'équation variationnelle :

$$u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \forall u' \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma), \quad \langle \mathcal{N}(k)u, u' \rangle = \int_\Gamma \partial_n p^i u'.$$

Nous considérons donc les espaces $X = \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $Y = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, et les formes bilinéaires :

$$a(u,u') = \langle \mathcal{N}(k)u, u' \rangle, \qquad b(v,v') = \langle \mathcal{S}(k')v, v' \rangle, \qquad c(v,u) = \langle v, u \rangle.$$

Ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité usuelle entre espaces de Sobolev. Le paramètre k' est choisi de telle sorte que k'^2 ne soit pas valeur propre $-\Delta$ pour le problème de Dirichlet intérieur.

Pour le problème approché on se donne une famille de maillages $\mathcal{M}_h$ dont les éléments sont triangulaires, indexée par h le pas des maillages. Nous prenons pour X_h et Y_h le même espace, constitué des fonctions scalaires affines sur chaque élément de $\mathcal{M}_h$ et continues, transportées sur Γ par la projection orthogonale sur Γ. On le note S_h. D'autres choix sont évidemment possibles.

Alors il existe $\overline{h} > 0$ tel que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une condition Inf-Sup uniforme sur X_h pour $h < \overline{h}$ en vertu des théorèmes généraux sur les perturbations compactes des formes coercives. Il en est de même pour $b(\cdot,\cdot)$ sur Y_h. Pour ce qui est de la dualité induite par $c(\cdot,\cdot)$ nous avons recours à la proposition suivante. Elle repose essentiellement sur la continuité H^1 uniforme par rapport à h des projections L^2-orthogonales $P_h^0 : \mathrm{H}^1(\Gamma) \to S_h$ (qui a été démontrée sous des hypothèses relativement faibles dans [3] ; *voir* aussi [1], p. 801), et un argument d'interpolation.

PROPOSITION 2. – *Pour toute famille de maillages régulière, et pour tout $s \in [-1,1]$ il existe $C > 0$ tel que pour tout h :*

$$\inf_{u \in S_h} \sup_{u' \in S_h} \frac{|\int uu'|}{\|u\|_{\mathrm{H}^{-s}} \|u'\|_{\mathrm{H}^s}} \geqslant \frac{1}{C}.$$

Nous notons d'autre part qu'en vertu des formules de Calderon on a :

$$\mathcal{S}(k')\mathcal{N}(k) - \frac{1}{4}\mathcal{I} = \mathcal{D}(k)^2 + \big(\mathcal{S}(k') - \mathcal{S}(k)\big)\mathcal{N}(k).$$

Or le second membre est un endomorphisme compact de X, et il est bien connu que (du moins dans le cas hermitien) les algorithmes du type gradient conjugué convergent d'autant plus vite que le spectre de la matrice préconditionnée est concentré autour de certains points.

3. Résultats numériques

Nous montrons des résultats de calcul sur une cavité sphérique (figure 1). Son rayon intérieur est $7/8$, son rayon extérieur $9/8$. Elle comporte une ouverture de demi-angle $\pi/8$. Nous l'éclairons par une onde sphérique d'origine le centre de la cavité. Son nombre d'onde est $k = 3\pi$. Le maillage utilisé comporte 4002 sommets et 8000 triangles. Nous utilisons comme solveur itératif, l'algorithme du gradient conjugué préconditionné (PCG) adapté aux matrices complexes symétriques (*voir* [4]). Pour évaluer différents préconditionneurs, nous montrons l'évolution du logarithme (décimal) de la norme relative du résidu associé à l'itéré U^n, en fonction de n ; plus précisément nous montrons le graphe de la fonction :

$$\rho : n \longmapsto \log_{10} \frac{\|A(h)U^n - L(h)\|}{\|L(h)\|}.$$

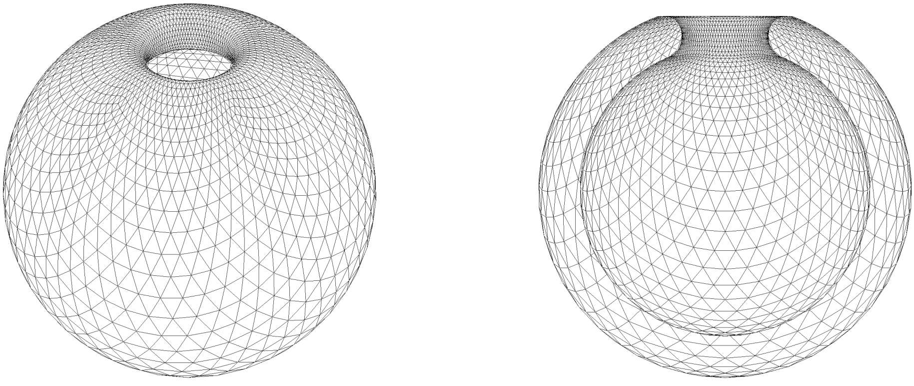

Figure 1. – Cavité sphérique : vue de l'extérieur et coupe verticale.

Figure 1. – Spherical cavity: seen from outside and vertical section.

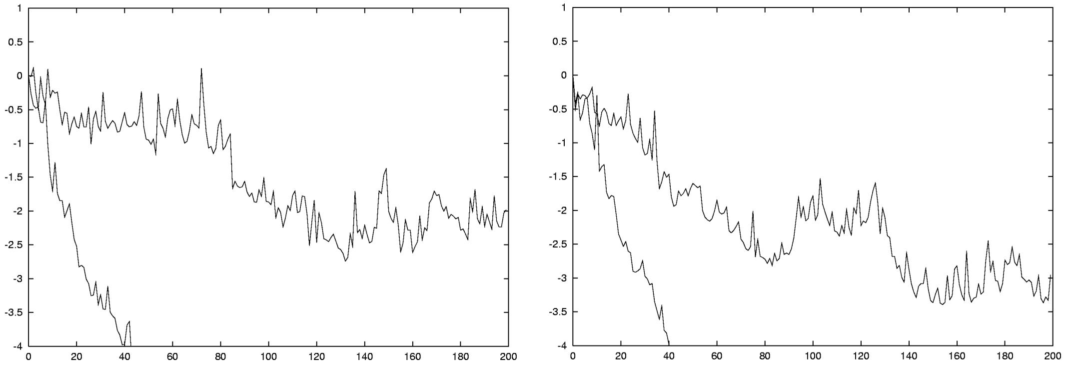

Figure 2. – Graphe de ρ, conditions de Neumann (gauche), et Dirichlet (droite).

Figure 2. – Graph of ρ, Neumann conditions (left), and Dirichlet conditions (right).

La norme utilisée sur les uplets est celle définie par $\|V\|^2 = \sum_i |V_i|^2$.

Pour le problème de Neumann nous comparons les performances de PCG préconditionné avec $\mathcal{S}(k)$ (courbe du bas), avec le même algorithme en l'absence de préconditionneur (courbe du haut). Pour le problème avec des conditions au bord de Dirichlet, dont la solution peut être exprimée avec un potentiel de simple couche, on peut préconditionner avec $\mathcal{N}(k)$, ce qui donne la courbe du bas. En l'absence de préconditionneur on obtient la courbe du haut (figure 2).

4. Extension aux surfaces à bord

On est parfois amené à résoudre des problèmes de diffraction dans le complémentaire d'une surface qui ne délimite pas un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on se donne une surface Γ qui peut être considérée comme un ouvert régulier de la frontière d'un ouvert régulier borné Ω de $\mathbb{R}^3$ (c'est le cadre de [8]). Le problème de Neumann peut alors être résolu à l'aide d'une représentation en double couche de la solution. L'inconnue est un élément de $X = \mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$, discrétisé sur S_h, l'espace des fonctions affines par triangle, continues et nulles au bord. La difficulté est que $\mathcal{S}(k)$ n'opère pas de façon naturelle sur le dual de X. Cependant si on préconditionne la matrice de Galerkin $A(h)$ de $\mathcal{N}(k)$ sur S_h, par $Z(h) = C(h)^{\star-1}B(h)C(h)^{-1}$, où $C(h)$ et $B(h)$ sont les matrices de Galerkin induites par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}(k)$ sur S_h, alors nous avons l'analogue suivant de la proposition 1 :

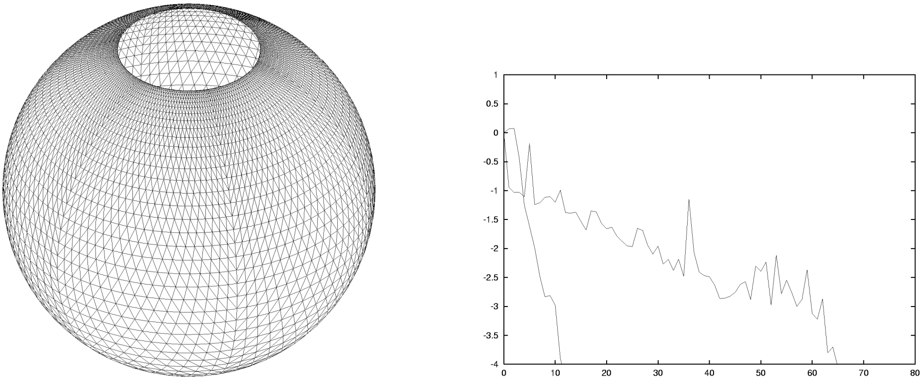

Figure 3. – Cavité vue de l'extérieur et résultats numériques.

Figure 3. – Cavity seen from outside and numerical results.

PROPOSITION 3. – *Il existe α et β strictement positifs, tels que pour tout h et tout U dans $\mathbb{K}^{N_h}$:*

$$\alpha\|\Lambda_h U\|_X \leqslant \left\|\Lambda_h C(h)^{\star-1}B(h)C(h)^{-1}A(h)U\right\|_X \leqslant \beta|\log h|^3\|\Lambda_h U\|_X.$$

Le principal outil de la démonstration consiste à montrer que la norme de l'application trace sur $\overline{S}_h$ (l'analogue de S_h où des valeurs non-nulles au bord sont autorisées), par rapport aux normes $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^0(\partial\Gamma)$ est un $\mathrm{O}(|\log h|^{1/2})$.

Nous montrons pour conclure des résultats numériques sur la cavité obtenue en remplaçant les doubles parois précédentes par une paroi simple (figure 3). À ceci près que cette fois le nombre d'onde est $k = 4\pi$, l'onde incidente est la même. Nous montrons comme avant le graphe de la norme relative du reste en fonction de l'itération, en l'absence de préconditionneur (courbe du haut), et en présence du préconditionneur ci-dessus (courbe du bas).

Remerciements. Nous remercions F. Béreux pour l'ensemble de ses suggestions. Nous remercions aussi le rapporteur anonyme d'avoir porté à notre connaissance l'article [5].

* Ce travail a reçu le soutien financier de Thomson-CSF Detexis.

[1] The spectral condition number of a matrix M is the product of the spectral radius of M by the spectral radius of M^{-1}.

Références bibliographiques

[1] Ciarlet P.G., Lions J.-L.(Eds.), Handbook Of Numerical Analysis, Vol. II, Part 1, North-Holland, 1991.
[2] Colton D.L., Kress R., Integral Equation Methods in Scattering Theory, John Wiley & Sons, New York, 1983.
[3] Crouzeix M., Thomée V., The stability in L_p and W_p^1 of the L_2 projection onto finite element function spaces, Math. of Comput. 48 (178) (1987) 521–532.
[4] Freund R.W., Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices, SIAM J. Sci. Statis. Comput. 13 (1) (1992) 425–448.
[5] McLean W., Steinbach O., Boundary element preconditioners for a hypersingular integral equation on an interval, Adv. in Comput. Math. 11 (4) (1999) 271–286.
[6] Nédélec J.-C., Ondes acoustiques et électromagnétiques, Équations intégrales, cours de DEA des Universités Paris-VI et Paris-XI, 1998.
[7] Steinbach O., Wendland W.L., The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method, Adv. in Comput. Math. 9 (1–2) (1998) 191–216.
[8] Stephan E.P., Boundary integral equations for screen problems in $\mathbb{R}^3$, Integral Equations and Operator Theory, Vol. 10, 1987, pp. 236–257.