Le théorème de Steinbach et Wendland :

Theorem 1. *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces de Hilbert, et soient $\mathcal{V}_h$, $\mathcal{W}_h$, deux sous-espaces de dimension finie M et N de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}_h$ respectivement. Soit $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ et $B : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ deux opérateurs satisfaisant les conditions suivantes :*

- *A est auto-adjoint sur $\mathcal{V}$, tel que*

$$\langle Au, u\rangle \geq c_A \left\|u\right\|_{\mathcal{V}}^2$$

$$\langle Au, v\rangle \leq C_A \left\|u\right\|_{\mathcal{V}} \left\|v\right\|_{\mathcal{V}}$$

- *B est continu*

$$\langle Au, v\rangle \leq C_B \left\|u\right\|_{\mathcal{V}} \left\|v\right\|_{\mathcal{V}}$$

- *B satisfait à la condition de stabilité*

$$c_B \left\|w_h\right\|_{\mathcal{W}} \leq \sup_{v_h \neq 0, v_h \in \mathcal{V}} \frac{|\langle Bw_h, v_h\rangle|}{\left\|v_h\right\|_V},$$

  où la constante c_B ne dépend pas du choix de $\mathcal{W}_h$.

On pose $\mathcal{T} =:= \mathcal{B}'\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}^*$. Pour tous ces opérateurs, on note $[\cdot]$ leur matrice de Galerkine. Alors pour tout vecteur $w_h \in \mathbb{R}^N$,

$$\gamma_1 w_h^T \left[\mathcal{T}\right] w_h \leq [B]^T [A]^{-1} [B] w_h \leq w_h^T \left[\mathcal{T}\right] w_h$$

Soit Γ un arc ouvert C^∞ (C^1 suffirait ?), on note S_ω le simple couche défini sur $H_\omega^{-1/2}(\Gamma)$ (on définit $H_\omega^s([-1,1])$ en transportant l'espace de Sobolev H^s sur le cercle, puis $H_\omega^s(\Gamma)$ en utilisant un C^∞ difféomorphisme. Il faudrait prouver ce qui suit :

Conjecture 1. *$H_\omega^s(\Gamma)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v) \mapsto \int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{d(x, \partial\Gamma)}} u(x)v(x)dx,$$

et pour tout s et pour $s < t$, l'injection $H_\omega^s(\Gamma) \subset H_\omega^t(\Gamma)$ est compacte. $H_\omega^{1/2}(\Gamma)$ est le dual de $H_\omega^{-1/2}(\Gamma)$. L'opérateur $A : u \mapsto (\omega(x)\partial_x)^2 u + (u|1)_\omega$ est auto-adjoint continu et elliptique de $H_\omega^{1/2} \longrightarrow H_\omega^{-3/2}(\Gamma)$.

On pose Δ_ω l'opérateur défini

Theorem 2. *contenu...*