Simple couche et Hyper-singulier sur un segment

Martin AVERSENG

October 2, 2017

1 Potentiel de simple couche sur un segment

Soit S l'opérateur de simple couche sur le segment $(-1, 1)$ définit par

$$Su(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \ln(|x-y|)u(y)dy$$

On pose $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$. On s'intéresse aux propriétés de l'opérateur $\alpha \mapsto \dfrac{1}{\omega}S\dfrac{1}{\omega}\alpha$. Selon la remarque du paragraphe 2.3 de [1], on admet la conjecture suivante :

Theorem 1.1. *Soit f une fonction dans $H^s(-1, 1)$, $s > 0$. Alors l'unique solution de l'équation d'inconnue $\alpha \in H^1(-1, 1)$:*

$$S\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) = f$$

est dans $H^{s+1}(-1, 1)$.

L'intérêt de cette remarque est qu'on obtient une convergence rapide de l'approximation par éléments finis lorsque le pas du maillage h devient petit. Ce fait se base sur une version du lemme de Céa adaptée à notre situation. Soit $S_\omega := \dfrac{1}{\omega}S\dfrac{1}{\omega}$ (ce n'est pas la même notation que celle choisie par Oscar Bruno). De manière immédiate, S_ω hérite de la propriété de coercivité de S.

Proposition 1.1. *Pour tout α tel que $\frac{\alpha}{\omega} \in H^{-1/2}(-1, 1)$, on a*

$$(S_\omega\alpha, \alpha) \geq c\left\|\frac{\alpha}{\omega}\right\|^2_{H^{-1/2}}$$

Proof. On a $(S_\omega\alpha, \alpha) = \left(\dfrac{1}{\omega}S\dfrac{1}{\omega}\alpha, \alpha\right) = \left(S\dfrac{1}{\omega}\alpha, \dfrac{1}{\omega}\alpha\right) \geq c\left\|\dfrac{\alpha}{\omega}\right\|^2_{H^{-1/2}}$ □

Soit V_h un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\left\{\alpha \mid \alpha/\omega \in H^{-1/2}\right\}$. Soit α_h l'unique solution de la formulation variationnelle : $\forall \beta_h \in V_h$:

$$(S_\omega\alpha_h, \alpha_h) = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{\beta_h(x)}{w(x)}.$$

Le lemme de Céa assure

$$\|(\alpha - \alpha_h)/\omega\|_{H^{-1/2}} \leq \inf_{\beta_h \in V_h} C\,\|(\alpha - \beta_h)/\omega\|_{H^{-1/2}}$$

Question Y a-t-il une bonne méthode pour montrer que le terme de droite est d'ordre $O(h)$ pour des éléments finis $\mathbb{P}_1$? ?

Soient T_n les polynômes de Tchebychev de première espèce. D'après [1], on a

$$S\left(\frac{T_n}{\omega}\right) = \lambda_n T_n$$

Avec $\lambda_0 = \frac{\ln(2)}{2}$ et $\lambda_n = \dfrac{1}{2n}$ pour $n \neq 0$. D'autre part, considérons l'opérateur Λ qui, à une fonction g définie sur le segment $(-1,1)$ associe la donnée de Neumann de la solution u du problème $\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\times\{0\}\} \\ \quad u &= g \quad \text{sur } (-1,1)\times\{0\} \end{cases}$ En prenant la normale du côté des y positifs. Les formules de Calderòn impliquent alors que

$$S\Lambda g = \frac{1}{2} g$$

Donc $S^{-1} = 2\Lambda$. On a donc

$$\omega \Lambda T_n = \mu_n T_n$$

où $\mu_n = \frac{1}{\ln(2)}$ si $n = 0$ et $\mu_n = n$ sinon. Or l'équation différentielle vérifiée par les polynômes T_n nous fournit un opérateur différentiel P explicite qui satisfait pour $n \neq 0$ à la relation $PT_n = -\mu_n^2 T_n$. L'opérateur P est donné par

$$P = (1-x^2)\partial_{xx} - x\partial_x = (\omega\partial_x)^2$$

Les polynômes T_n forment une base Hilbertienne de $L^2\left[(-1,1), \omega^{-1}(x)dx\right]$. On a donc pour toute fonction $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n T_n(x)$ dans cet espace :

$$\left[P^2 + (\omega\Lambda)^2\right]\varphi = c_0 \mu_0^2 T_0$$

L'intérêt de cette relation est qu'il permet d'exprimer l'opérateur $\omega\Lambda$ en fonction d'un opérateur différentiel donc local, qui permet une discrétisation numérique efficace. Dans l'optique de la résolution d'un problème intégral, on pourrait utiliser $\omega\Lambda$ ou une approximation de celui-ci pour préconditionner l'équation. Puisque les deux opérateurs du membre de gauche sont diagonalisée par une même base Hilbertienne, ils commutent sur cet espace de Hilbert.

References

[1] Oscar P Bruno and Stéphane K Lintner. Second-kind integral solvers for te and tm problems of diffraction by open arcs. *Radio Science*, 47(6), 2012.