Convolution rapide par des noyaux radiaux en deux dimensions

Martin Averseng

Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées

15-07-2016

Introduction

Le problème : calculer

$$q_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} G(|x_k - x_l|) f_l$$

- Discretisation dans le domaine de Fourier $\iff$ périodisation de l'espace.
- Convolution en espace $\iff$ multiplication en Fourier.
- Fonctions de base

$$e_\lambda(x) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{i\lambda x \cdot \xi} d\sigma(u)$$

- On obtient une base avec un ensemble discret de valeurs de λ.
- En dimension 3 : sinc. En dimension 2 : fonctions de Bessel.

Présentation de la méthode

- Champ lointain :
  - Partie radiale
  - Partie circulaire
- Champ proche

Partie radiale :

$$G \approx \sum_{p=1}^{P} \alpha_p J_0(\rho_p |x|)$$

Partie circulaire :

$$J_0(|x|) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} e^{ix \cdot \xi_m}$$

Opérateur Laplacien radial

- Espace de Hilbert des fonctions radiales L^2 sur la boule unité : $L^2_{rad}(B)$, $H^1_{rad}(B)$ et $H^1_{0,rad}(B)$
- Densité de $\mathcal{C}^\infty_{c,rad}(B)$ dans L^2, inégalité de Poincaré.
- Le Laplacien est auto-adjoint positif à résolvente compacte - diagonalisable en base orthonormée de vecteurs propres.

Décroissance rapide des coefficients

Proposition fondamentale

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in H^{2n}(B)$. On suppose que pour tout entier $s \leq n-1$, l'itéré numéro s de l'opérateur $-\Delta$ sur f noté $(-\Delta)^s f$ vérifie la condition de Dirichlet sur ∂B. Alors :

$$c_k(f) = \frac{c_k\left(\left(-\Delta\right)^n f\right)}{\rho_k^{2n}}$$

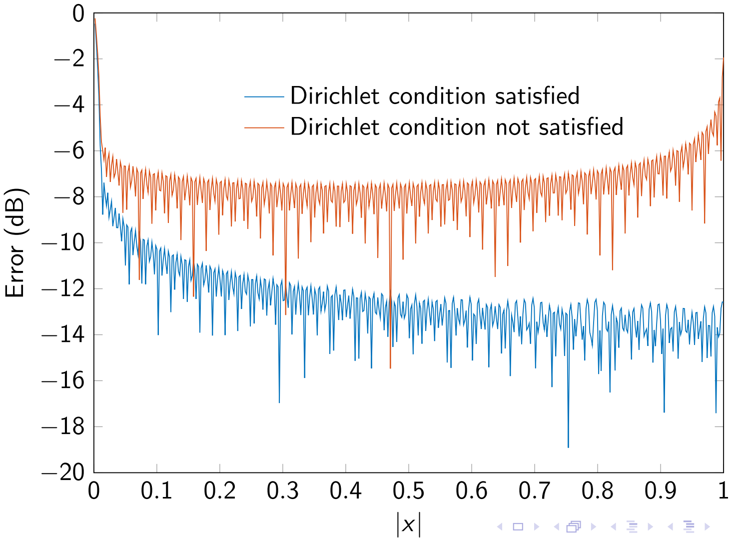
for any $k \in \mathbb{N}^*$

$$\rho_k \sim k\pi$$

Exploitation du résultat

- Restriction à un anneau et majoration du reste à l'aide d'un prolongement (polynomial, interpolation par fonctions de Bessel ?)
- Condition de Dirichlet à tout ordre s : les noyaux de Laplace et Helmholtz sont des cas favorables... (mais bien choisir l'anneau pour Y_0).

Importance de la fréquence ajustée



Conditions de Robin

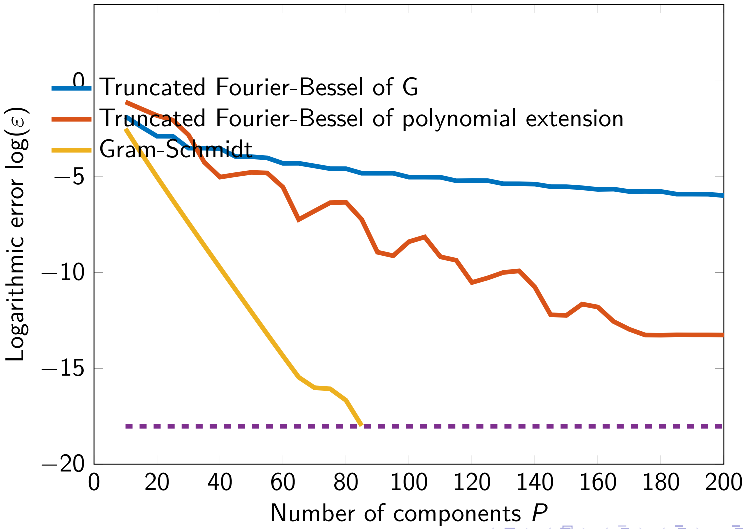
Cas des conditions de Robin pour $c \geq 0$

- Opérateur Δ_c sur $H^1_{rad}(B)$ toujours auto-adjoint
- Valeurs propres positives ou nulles (pas le cas pour $c < 0$)
- Condition de Robin à ajuster sur la fonction à approximer.

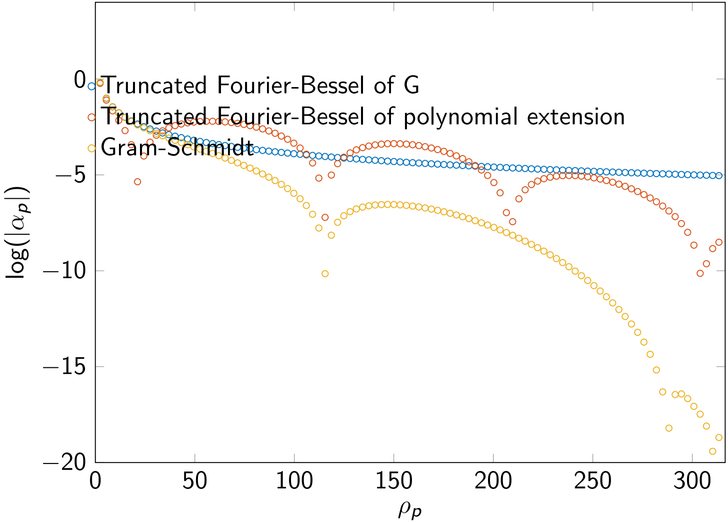
Preuve d'un contrôle L^∞

Au tableau

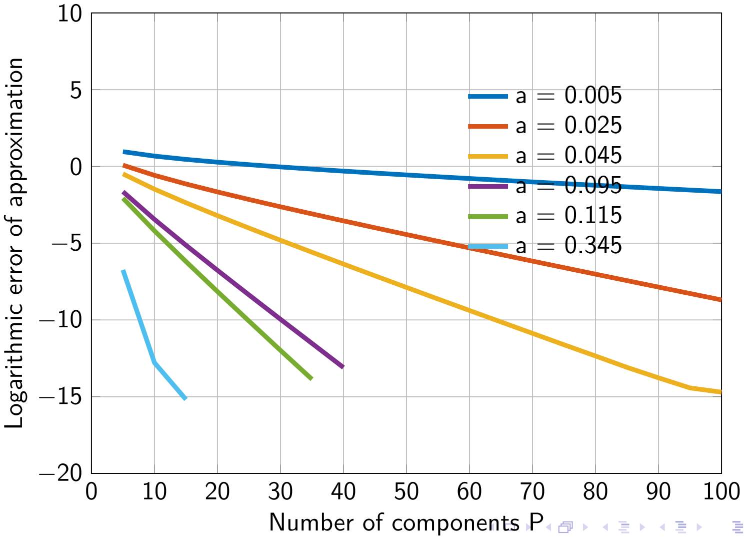
Quadrature radiale pour le log



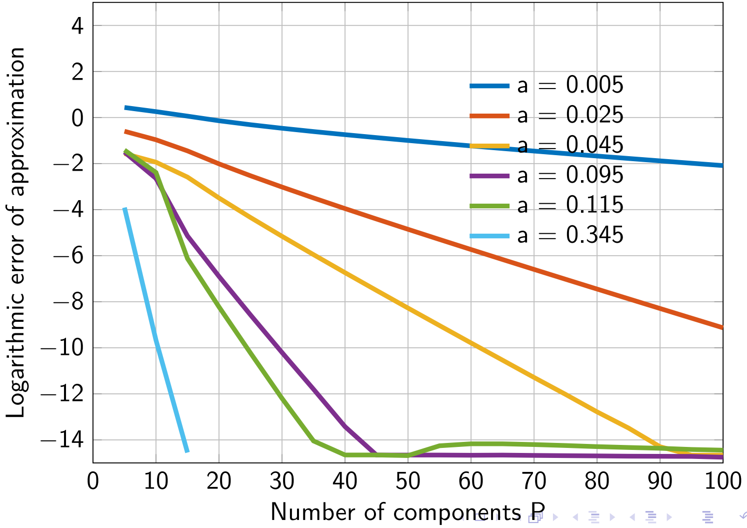
Quadrature radiale pour le log



Importance du paramètre *a* pour la fonction log



Importance du paramètre a pour la fonction Y_0



Complexité de la méthode

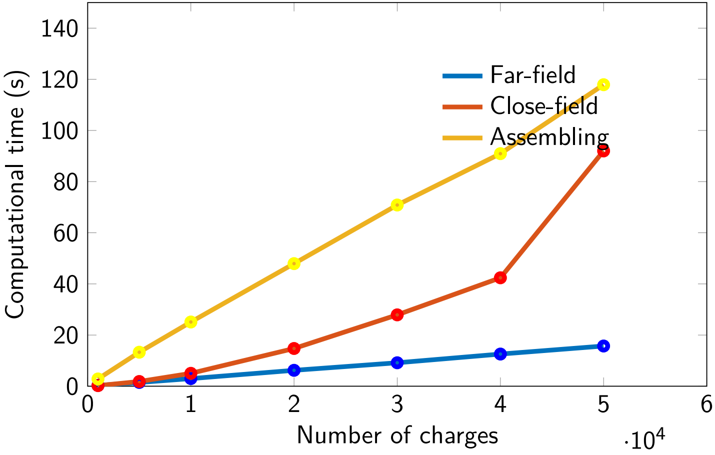
- Champ lointain $O(P^2)$ ($O(P^3)$ en dimensions 3).
- Champ proche $O(a^2N^2)$
- Calcul de la quadrature $O(P^3)$ (mais précalcul uniquement)
- Choix de la constante a détermine la complexité globale.

$$P = O\left(-\frac{\log(\varepsilon)}{a}\right) \quad a = O\left(\frac{-\log(\varepsilon)}{\sqrt{N}}\right)$$

Complexité globale :

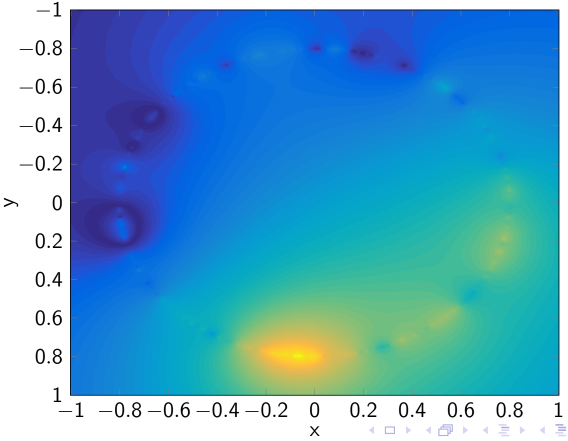
- Pré-calcul : $O(N^{3/2})$
- Calcul : $O(N\log(N))$

Tests numériques du temps de calcul



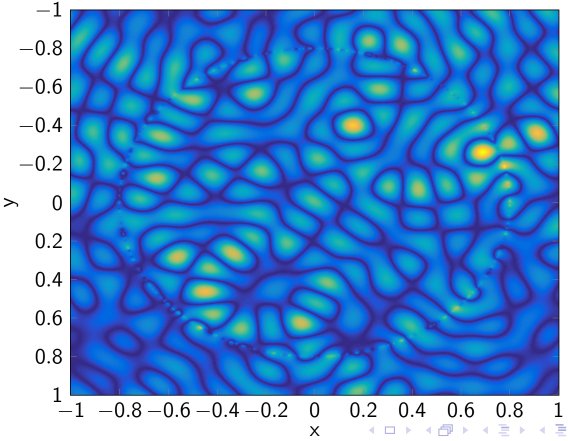
Quelques jolies figures

Champ Coulombien rayonné par des charges aléatoires disposées sur un cercle (grille 500x500, 1000 charges).



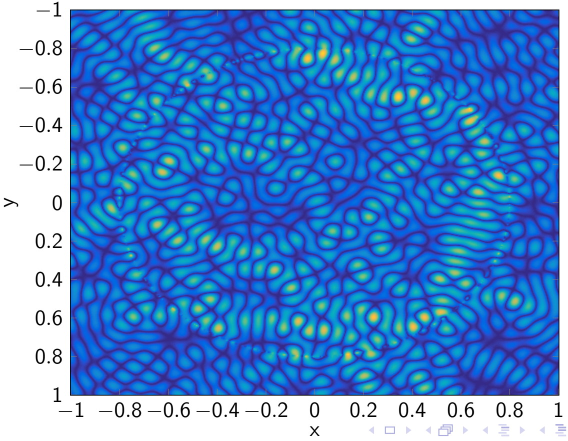
Quelques jolies figures

Champ Helmholtzien rayonné par des sources aléatoires disposées sur un cercle (grille 500x500, 1000 charges)



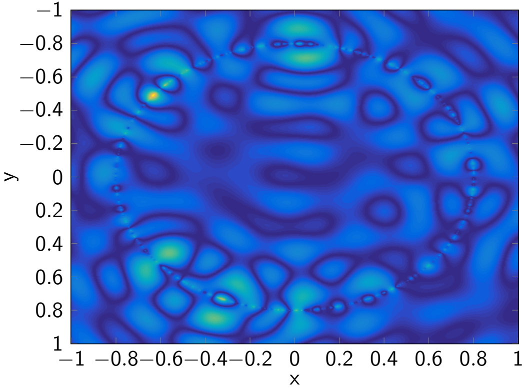
Quelques jolies figures

Champ Helmholtzien rayonné par des sources aléatoires disposées sur un cercle (grille 500x500, 1000 charges)



Quelques jolies figures

Champ Helmholtzien rayonné par des sources aléatoires disposées sur un cercle (grille 500x500, 1000 charges)



Quelques jolies figures

Champ Helmholtzien rayonné par des sources constantes disposées sur un cercle (grille 500x500, 10 charges)