

N° d'ordre: xxxx

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Séverine MOLKO-DAUGAS

Prise en compte des singularités géométriques dans le préconditionnement d'équations intégrales pour le problème de Helmholtz.

Soutenue le xx Xxxxxxxxxx 2010 devant la Commission d'examen:

M. François ALOUGES (Directeur de thèse)

M. David LEVADOUX (Directeur de thèse)

M.

M.

M.

M.

M.

(Président du jury)

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
Département d'ElectroMagnétisme et Radar - Signature, Furtivité, Modélisation

Résumé

Pour la résolution numérique de la diffraction d'une onde par un objet, plusieurs méthodes sont utilisables dont une grande classe consiste à ne poser le problème que sur le bord de l'objet à l'aide d'une formulation intégrale de la solution. Le problème linéaire à résoudre peut néanmoins être de taille respectable si le bord de l'objet est finement discrétisé, et l'emploi de méthodes itératives devient incontournable pour résoudre le système linéaire sous-jacent. Ceci conduit naturellement à se poser la question de préconditionner ce système afin d'en accélérer sa résolution. Une technique efficace (la GCSIE) a été développée dans le cas de surfaces lisses par Levadoux [38] et S. Borel [5]. Elle consiste à utiliser une approximation de l'opérateur admittance (Dirichlet-to-Neumann). Lorsque la surface possède des singularités (arêtes, coins, pointes, etc.), comme c'est souvent le cas dans les applications, la technique fonctionne sensiblement moins bien, la qualité de l'approximation, fondée intrinsèquement sur une approximation de la surface par son plan tangent, étant mauvaise près de ces endroits.

L'idée que nous proposons consiste à garder le schéma numérique de la GCSIE classique, mais en utilisant l'admittance de surfaces canoniques (plan tangent comme pour les surfaces lisses, arête, coin, ou cône). Cela suppose donc de connaître l'admittance de surfaces canoniques, mais aussi de pouvoir étudier les opérateurs sur des surfaces non lisses.

Dans cette thèse, nous traitons le cas du problème de Helmholtz en dimension 2. L'admittance du cône infini pour le problème de Laplace se calcule explicitement grâce à la transformée de Mellin. En ce qui concerne le problème de Helmholtz, nous avons utilisé une décomposition spectrale [12] pour donner une expression explicite de l'admittance du cône infini, utilisable en pratique. D'autre part, la théorie pseudo-différentielle de Kondrat'ev [28], [43] sur des ouverts singuliers, nous permet de faire l'analyse et de montrer le caractère bien posé de la formulation GCSIE. Enfin, nous avons implémenté la nouvelle GCSIE comme définie plus haut. Nous obtenons une amélioration de la vitesse de convergence de l'ordre de 50% par rapport à la GCSIE habituelle sur une pointe, ainsi qu'une amélioration de la précision de l'ordre de 75%.

Mots-clefs : Equations intégrales, opérateurs de Mellin, théorie pseudo-différentielle sur variétés singulières, opérateur Dirichlet-to-Neumann.

TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRICAL SINGULARITIES IN THE PRECONDITIONMENT OF INTEGRAL EQUATIONS FOR THE HELMHOLTZ PROBLEM

Abstract

To compute the scattering of an object, we can use several methods. Among them, a great class consists in posing the problem on the boundary of the diffracted object. In this way, we gain one spatial dimension and we get around the problem of the infinite exterior domain. But the linear system is full, and because of the high frequency, the number of unknowns is large. So we have to use iterative methods to solve the underlying linear system. This leads to pose the question of the preconditionment, in order to accelerate the solving. Recently, an efficient method (the GCSIE) was developed for smooth boundaries [38], [5]. It consists in using an approximation of the admittance (Dirichlet-to-Neumann). When the boundary have some singularities (edges, wedges, cones, etc.), like in a lot of applications, this method is less efficient because of the quality of the approximation, based on the approximation of the boundary by its tangent plane.

The idea we suggest, is to keep the numerical scheme of the classical GCSIE, but by using the admittance of canonical boundaries (tangent plane on smooth boundaries, edges, wedges, cones). This implies to know the admittance of canonical boundaries, and to know how to study operators on singular surfaces.

In this PhD work, we study the 2d Helmholtz problem. The admittance of an infinite cone is explicitly known, thanks to the Mellin transform. For the Helmholtz problem, we have used a spectral decomposition [12], to give an explicite expression of the admittance of an infinite cone, which is computable. On the other hand, the Kondrat'ev pseudo-differential theory on singular manifolds [28], [43], allows us to make the analysis and to prove that the so-build GCSIE is well-posed. Finally, we have computed this new GCSIE. We obtain an about 50% improvement for the convergence speed, and about 75% for the precision.

Keywords : Integral equations, Mellin operators, pseudo-differential theory on singular manifolds, Dirichlet-to-Neumann operator.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Introduction | vii |
| 1 Présentation d'une théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ | 1 |
| 1.1 La transformée de Mellin | 4 |
| 1.1.1 La transformée de Mellin | 4 |
| 1.1.2 Quelques propriétés de la transformée de Mellin | 6 |
| 1.1.3 Produit de convolution multiplicatif | 6 |
| 1.1.4 Exemples : premiers calculs de transformée de Mellin | 7 |
| 1.2 Les espaces à poids $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ | 11 |
| 1.2.1 Définition des espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ | 11 |
| 1.2.2 Résultats de compacité | 19 |
| 1.2.3 Asymptotiques conormales | 22 |
| 1.2.4 Les espaces $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ | 24 |
| 1.3 Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ | 27 |
| 1.3.1 Notations issues de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R} | 28 |
| 1.3.2 Définition d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ | 29 |
| 1.3.3 Cas particulier des symboles indépendants de t | 30 |
| 1.3.4 Etude du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ | 31 |
| 1.3.5 Lien avec les opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R} | 32 |
| 1.4 Le développement de Mellin | 34 |
| 1.4.1 Opérateurs de Green | 35 |
| 1.4.2 Opérateurs plats | 36 |
| 1.4.3 Opérateurs de Mellin | 38 |
| 1.4.4 Développement de Mellin | 43 |
| 1.5 Restriction à \mathbb{R}^+ d'opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R} | 47 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2 | Le problème de Laplace | 57 |
| 2.1 | Applications de la théorie pseudo-différentielle de Mellin | 59 |
| 2.1.1 | Espaces à poids sur $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ | 59 |
| 2.1.2 | Opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ et théorie de Fredholm . . | 61 |
| 2.2 | Le problème de Laplace : théorème de représentation | 62 |
| 2.2.1 | Existence et unicité du problème intérieur | 62 |
| 2.2.2 | Existence et unicité du problème extérieur | 63 |
| 2.2.3 | Théorème de représentation | 63 |
| 2.3 | Construction des potentiels simple et double couches | 68 |
| 2.3.1 | Propriétés des traces de solutions du laplacien | 68 |
| 2.3.2 | Projecteurs de Calderón | 70 |
| 2.3.3 | Potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace . | 71 |
| 2.4 | Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ouvert lisse | 71 |
| 2.4.1 | L'équation simple couche | 73 |
| 2.4.2 | L'équation double couche en source | 77 |
| 2.4.3 | L'équation double couche en champs | 78 |
| 2.4.4 | Introduction à la GCSIE | 79 |
| 2.5 | Résolution du problème de Laplace dans un cône infini | 82 |
| 2.5.1 | Le problème de Laplace dans un cône infini | 82 |
| 2.5.2 | Calcul de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann | 83 |
| 2.5.3 | Cas particuliers | 84 |
| 2.6 | Préconditionnement du simple couche sur un segment | 85 |
| 2.6.1 | Etude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par le log. | 86 |
| 2.6.2 | Préconditionnement du simple couche sur un segment | 89 |
| 2.7 | Construction de la GCSIE prenant en compte la présence de pointes . . . | 91 |
| 2.7.1 | Présentation de la nouvelle GCSIE | 91 |
| 2.7.2 | Existence et unicité d'une solution | 91 |
| 3 | Le problème de Helmholtz | 103 |
| 3.1 | Présentation du problème de Helmholtz | 104 |
| 3.1.1 | Le problème de Helmholtz intérieur | 105 |
| 3.1.2 | Le problème de Helmholtz extérieur. | 107 |
| 3.1.3 | Théorème de représentation | 109 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.1.4 | Caractérisation des traces | 111 |
| 3.2 | Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ouvert lisse | 111 |
| 3.2.1 | Équation simple couche | 111 |
| 3.2.2 | Équation double couche en source | 113 |
| 3.2.3 | Équation double couche en champs | 113 |
| 3.2.4 | Équation combinée en champs | 114 |
| 3.2.5 | Introduction à la GCSIE | 115 |
| 3.3 | Résolution du problème de Helmholtz dans un cône infini | 117 |
| 3.3.1 | Résolution du problème Dirichlet homogène de Helmholtz avec second membre | 117 |
| 3.3.2 | Admittance du problème de Helmholtz sur un cône infini | 120 |
| 3.4 | Construction de la GCSIE prenant en compte la présence de pointes | 125 |
| 3.4.1 | Préliminaires : étude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par la fonction de Bessel. | 126 |
| 3.4.2 | Présentation de la nouvelle GCSIE | 127 |
| 3.4.3 | Existence et unicité d'une solution | 127 |
| 4 | Résultats numériques | 139 |
| 4.1 | Etude de la précision de la nouvelle GCSIE | 140 |
| 4.1.1 | Approximation de l'admittance | 140 |
| 4.1.2 | Précision de la solution | 141 |
| 4.2 | Etude de la vitesse de convergence | 145 |
| 4.2.1 | Influence de la fréquence | 146 |
| 4.2.2 | Influence de l'angle de la pointe | 147 |
| 4.2.3 | Influence de l'angle de l'onde incidente | 148 |
| 4.3 | Un autre choix d'approximation de l'admittance | 149 |
| 4.3.1 | Etude de la précision | 149 |
| 4.3.2 | Etude de la vitesse de convergence | 151 |
| | Conclusion | 155 |
| | ANNEXES | 157 |
| A | Preuve des lemmes permettant le calcul de l'admittance du cône infini pour le problème de Helmholtz | 159 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A.1 | Preuve du lemme 3.3.7 | 160 |
| A.2 | Preuve du lemme 3.3.8 | 160 |
| A.3 | Preuve du lemme 3.3.10 | 161 |
| B | Implémentation de l'hypersingulier | 163 |
| B.1 | Notations et formules classiques d'intégration | 164 |
| B.2 | Matrice de Galerkin de l'opérateur hypersingulier | 164 |
| B.2.1 | Première configuration | 165 |
| B.2.2 | Deuxième configuration | 166 |
| B.2.3 | Troisième configuration | 167 |
| B.3 | Calcul de la matrice d'amplitude | 168 |
| B.4 | Implémentation de l'opérateur D-to-N du cône infini | 170 |
| B.4.1 | Les deux éléments sont confondus | 171 |
| B.4.2 | Eléments adjacents sur la même face | 172 |
| B.4.3 | Eléments adjacents autour de la pointe | 172 |
| B.4.4 | Eléments lointains dont l'un touche la pointe | 172 |
| B.4.5 | Eléments lointains, loin de la pointe | 172 |
| | Index | 174 |
| | Bibliographie | 177 |

Introduction

Contexte et motivations

En électromagnétisme, la résolution de problèmes de diffraction d'ondes à haute fréquence intervient dans plusieurs domaines : simulation de la furtivité d'un avion, modélisation d'antennes, influence des éoliennes sur le comportement des oiseaux, etc. Beaucoup de ces applications peuvent être modélisées par la résolution de problèmes aux limites sur un objet diffractant parfaitement conducteur, c'est-à-dire des problèmes aux limites de type Dirichlet. Destiné à plus long terme à de telles applications, notre travail a nécessité un approfondissement du cas de la dimension 2. Nous traitons donc ici des problèmes d'acoustique en dimension 2.

Les problèmes de diffraction d'ondes sont des problèmes extérieurs, ce qui entraîne une difficulté de modélisation liée au fait que le domaine de calcul n'est pas borné. La méthode de résolution par équations intégrales consiste à poser le problème sur la surface de l'objet diffractant. Cela permet de se ramener à un problème borné, et de gagner une dimension en espace. En revanche, les systèmes ainsi obtenus sont pleins. Etant dans un contexte haute fréquence, le nombre d'inconnues est très grand (de l'ordre du millier dans nos applications 2d, et de l'ordre du million pour les problèmes d'électromagnétisme). Le problème général est donc celui du bon conditionnement des systèmes obtenus par méthodes intégrales. En dimension 3, les équations intégrales bien conditionnées sont généralement couplées à des FMM (Fast Multipole Method, [44]) afin de permettre un si grand nombre d'inconnues.

Les méthodes intégrales sont apparues historiquement dans les années 1960, lorsque l'arrivée des premiers calculateurs a permis leur résolution numérique. Les premières équations intégrales avaient l'avantage d'être simples à construire et à mettre en oeuvre, et naturelles d'un point de vue physique. En électromagnétisme : l'EFIE pour *Electric Field Integral Equation* est une équation en champ électrique, et la MFIE pour *Magnetic Field Integral Equation* est une équation en champ magnétique. Mais ces équations possèdent des fréquences de résonance, où il n'y a plus unicité de la solution.

De nombreux travaux ont cherché à construire de nouvelles équations bien posées à toute fréquence. Retenons en acoustique les travaux de Brakhage et Werner [7], et Burton et Miller [10], qui proposent une équation en champs combinés (CFIE pour *Combined Field Integral Equation*). Le principe de cette équation repose sur l'idée suivante. Les équations EFIE et MFIE ayant des fréquences de résonance différentes, il est possible de construire une équation les couplant avec un coefficient de couplage bien choisi, de sorte que l'équation combinée n'ait plus de fréquence de résonance.

Mais rappelons que les systèmes obtenus par ces méthodes sont pleins, les opérateurs

mis en jeu ne sont pas locaux. De nombreuses études ont donc cherché à préconditionner les équations intégrales, ou bien à construire des équations intégrales intrinsèquement bien conditionnées. L'idée générale pour préconditionner un système mal conditionné $Au = b$, est de trouver une matrice M bien choisie, de telle sorte que MA soit bien conditionnée (c'est-à-dire proche de l'identité), puis de résoudre le système $MAu = Mb$. Idéalement, on aimerait choisir $M = A^{-1}$, mais l'inverse d'une matrice est bien souvent très coûteux à calculer, puisqu'au contraire on préfère résoudre le système par méthodes itératives pour calculer cet inverse.

Un moyen de calculer la matrice M est d'utiliser la théorie pseudo-différentielle [31]. Les opérateurs intégraux de surface qui interviennent dans la construction de la matrice A sont des opérateurs pseudo-différentiels (ce sont des potentiels de Poisson). On choisit donc comme opérateur associé à M un pseudo-inverse de l'opérateur associé à A [31]. Cette idée permet par exemple de construire un pseudo-inverse de l'opérateur sous-jacent à l'EFIE (l'opérateur simple couche), et donc de préconditionner cette équation [3]. Cette opération permet de régulariser l'opérateur simple couche, mais pas de supprimer la fréquence de résonance. Pour cela, il faut préconditionner la CFIE. Plusieurs auteurs proposent des régularisations pour cette équation intégrale bien posée à toute fréquence, parmi lesquels Steinbach et Wendland [45], Christiansen et Nédélec [14], et Levadoux [32], [30]. Cette nouvelle équation, appelée PCFIE a l'avantage d'être bien conditionnée, et telle que son bien-fondé mathématique est indépendant de la fréquence. En revanche, cette équation perd en précision par rapport à l'EFIE. Grâce aux formules de Calderón, on remarque qu'il est possible de généraliser la CFIE de façon intéressante. En effet, elles indiquent qu'en choisissant un opérateur de couplage idéal (l'opérateur Dirichlet-to-Neumann) à la place du coefficient de couplage de la CFIE, l'opérateur sous-jacent est exactement l'identité. L'opérateur D-to-N, généralement appelé opérateur admittance, est rarement connu explicitement. Le problème de préconditionnement devient donc un problème d'approximation de cet opérateur. Cette approche a été présentée pour le problème de Helmholtz par Levadoux [31], en développant la GCSIE (Generalized Combined Source Integral Equation). Il choisit une approximation basée sur le découpage de la surface en sous-surfaces, assimilables à leur plan tangent, et sur lesquelles l'admittance est explicitement connue. La GCSIE est ensuite adaptée au problème de l'électromagnétisme par Levadoux, Alouges et Borel [33], [2]. Une autre idée, basée sur le même formalisme GCSIE, est proposée par Darbas et Antoine qui consiste en une approximation micro-locale de l'admittance [19].

La GCSIE converge deux fois plus vite que la CFIE en terme de nombre d'itérations [5]. De plus, sa précision est comparable à celle de l'EFIE, réputée être l'une des formulations intégrales les plus précises. En revanche, en présence de pointes, la vitesse de convergence diminue, ainsi que la précision de la solution. En effet, la qualité de sa construction, intrinsèquement fondée sur l'approximation des sous-surfaces par leur plan tangent, est mauvaise près des singularités géométriques de la surface. Les qualités de la GCSIE sur des surfaces lisses, laissent penser qu'en prenant en compte la présence des singularités géométriques lors de sa construction, nous pourrions obtenir des résultats semblables pour des surfaces à pointes.

Notre étude consiste donc à améliorer le conditionnement de la GCSIE introduite par Levadoux [31] et Borel [5] en prenant en compte les singularités géométriques de l'objet diffractant. Afin de comprendre les phénomènes mis en jeu par cette problématique, nous nous concentrons ici sur les problèmes de Laplace et de Helmholtz en dimension 2.

Plusieurs études ont porté sur la problématique des équations intégrales sur des surfaces lipschitziennes. En effet, les opérateurs intégraux ne vérifient pas les mêmes continuités lorsque la surface n'est plus lisse [17]. Leur bien-fondé mathématique est donc souvent remis en cause dans ce cas. Ainsi, la CFIE n'est plus une perturbation compacte de l'identité. En effet, l'opérateur double couche contenu dans la partie MFIE n'est plus compact dans les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma)$ si la surface Γ n'est pas lisse, cet opérateur faisant intervenir la normale de la surface. Buffa et Hiptmair ont alors l'idée de régulariser l'opérateur double couche présent dans la CFIE [8], [9]. Cela permet d'obtenir une perturbation compacte d'un opérateur coercif dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour améliorer encore le conditionnement des systèmes linéaires à résoudre, il serait intéressant d'avoir une perturbation compacte de l'identité. Pour cela, rappelons nous que les formules de Calderón restent valables dans le cas de surfaces lipschitziennes. Donc comme nous l'avons remarqué plus haut, nous savons que pour un choix judicieux d'opérateur de couplage à la place du coefficient de la CFIE (l'opérateur D-to-N), nous obtenons exactement l'identité. On en déduit que la singularité fonctionnelle qui apparaît dans le double couche en présence de pointes, est compensée par cet opérateur de couplage appliqué à l'opérateur simple couche (sur la partie EFIE). Nous pensons donc qu'il est possible de régulariser cet opérateur à l'aide d'une bonne approximation de l'admittance (donc une généralisation de la GCSIE aux surfaces à pointes), ce qui permettra d'obtenir une perturbation compacte de l'identité, de même que sur une surface lisse.

Cependant, rappelons qu'il s'agit de préconditionnement, et qu'une des principales techniques pour construire une équation bien conditionnée est d'utiliser la théorie pseudo-différentielle, qui permet de calculer des pseudo-inverses. Or la théorie pseudo-différentielle habituelle n'est pas adaptée à des variétés non lisses. Plusieurs auteurs ont cherché à la généraliser à des variétés singulières, parmi lesquels Melrose [37] et Kondrat'ev [28]. Il semble approprié à notre cadre d'étude de s'intéresser à cette théorie pseudo-différentielle sur variété singulière, ou plus simplement sur \mathbb{R}^+ en dimension 1. Kondrat'ev considère des variétés possédant un nombre fini de points coniques, ce qui permet par changement de carte de se ramener à l'étude d'une variété conique (soit deux fois \mathbb{R}^+ pour un cône de dimension 2). Cette théorie permet à Fabes et al. [22] d'étudier l'opérateur double couche du laplacien pour le problème de Dirichlet sur une surface conique Γ , et de trouver les espaces $L^p(\Gamma)$ tel qu'il soit bien posé. Ce travail est généralisé par Costabel [35], pour des problèmes mixtes Dirichlet-Neumann. D'autre part, cette théorie permet de connaître le comportement asymptotique des solutions près des singularités géométriques. Dans l'étude des décompositions de domaines singuliers (avec pointes, cônes ou arêtes), Chniti [13] applique cette partie de la théorie pseudo-différentielle sur variétés singulières. A notre connaissance, très peu d'auteurs ont utilisé le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés coniques, à la théorie des équations intégrales. Citons par exemple Ola et Päiväranta [40], qui ont montré en 2003 comment utiliser cette théorie à des cas pratiques, étudiant par exemple l'opérateur simple couche au travers d'un développement de Mellin.

Pour construire la nouvelle GCSIE sur un ouvert conique de dimension 2, nous allons utiliser le calcul symbolique de Kondrat'ev.

Plan de la thèse

Nous avons donc commencé par étudier la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ [43], théorie adaptée aux espaces à singularités géométriques. Cette théorie étant rarement appliquée à des cas concrets, nous nous sommes efforcés de diminuer les hypothèses très générales d'une théorie globale, aux hypothèses utiles dans nos cas pratiques, et en particulier aux équations intégrales. Nous avons en fait voulu pouvoir disposer d'un formulaire nous permettant d'étudier les opérateurs mis en jeu par la GCSIE sur des surfaces à coins, au même titre que l'on utilise la théorie pseudo-différentielle classique pour étudier ces opérateurs sur des surfaces lisses. (Chapitre 1)

Ensuite, nous nous sommes placés dans le cadre du problème de Laplace. En effet, les opérateurs intervenant dans le problème de Laplace sont des perturbations compactes de ceux du problème de Helmholtz. En particulier, les opérateurs simple et double couche sont des opérateurs de convolution de Mellin, autrement dit des opérateurs relativement simples à étudier. Leur étude nous a été d'une grande utilité pour passer au problème de Helmholtz. Cela nous a permis de comprendre les phénomènes mis en jeu par la prise en compte des singularités géométriques. A l'aide de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ nous avons montré que la nouvelle GCSIE était bien posée sur une surface possédant une pointe. D'autre part, dans ce cadre simple, il nous a été possible de calculer de façon totalement explicite l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur un cône infini. (Chapitre 2)

Nous nous sommes donc ensuite placés dans le cadre de l'équation de Helmholtz, objectif de notre étude. Ne pouvant plus utiliser de calculs simples et directs pour écrire explicitement l'admittance d'une pointe infini, nous nous sommes tournés vers la théorie spectrale [12] et [11]. Nous avons effectivement retrouvé l'opérateur admittance du problème de Laplace modulo un opérateur compact. Cet opérateur compact a cependant une grande importance, comme nous le verrons dans les résultats numériques. En effet, il contient la fréquence du problème. Dans ce cadre où les opérateurs sont des perturbations compactes des opérateurs introduits pour le problème de Laplace, nous avons également utilisé la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ pour montrer que la nouvelle GCSIE était bien posée. (Chapitre 3)

Enfin, nous avons vérifié que cette nouvelle équation pour le problème de Helmholtz est efficace numériquement : nous avons implémenté cette méthode afin de comparer le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du problème de Helmholtz par cette nouvelle GCSIE, par rapport à la GCSIE de D. Levadoux et S. Borel. Nous avons également vérifié la précision de notre équation en calculant le champ lointain de la solution, dans un cadre où la solution exacte est connue. (Chapitre 4)

Le premier chapitre est riche en notations. Afin de s'y retrouver, nous renvoyons à l'index qui se trouve à la fin de ce document.

Chapitre 1

Présentation d'une théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | La transformée de Mellin | 4 |
| 1.1.1 | La transformée de Mellin | 4 |
| 1.1.2 | Quelques propriétés de la transformée de Mellin | 6 |
| 1.1.3 | Produit de convolution multiplicatif | 6 |
| 1.1.4 | Exemples : premiers calculs de transformée de Mellin | 7 |
| 1.2 | Les espaces à poids $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ | 11 |
| 1.2.1 | Définition des espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ | 11 |
| 1.2.2 | Résultats de compacité | 19 |
| 1.2.3 | Asymptotiques conormales | 22 |
| 1.2.4 | Les espaces $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ | 24 |
| 1.3 | Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ . . | 27 |
| 1.3.1 | Notations issues de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R} . . . | 28 |
| 1.3.2 | Définition d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ | 29 |
| 1.3.3 | Cas particulier des symboles indépendants de t | 30 |
| 1.3.4 | Etude du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ . . . | 31 |
| 1.3.5 | Lien avec les opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R} | 32 |
| 1.4 | Le développement de Mellin | 34 |
| 1.4.1 | Opérateurs de Green | 35 |
| 1.4.2 | Opérateurs plats | 36 |
| 1.4.3 | Opérateurs de Mellin | 38 |
| 1.4.4 | Développement de Mellin | 43 |
| 1.5 | Restriction à \mathbb{R}^+ d'opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R} . . | 47 |

La théorie pseudo-différentielle joue un rôle très important dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Les opérateurs sont associés à des symboles à l'aide de la transformée de Fourier. Le calcul symbolique permet de calculer le symbole d'un produit d'opérateurs, et permet donc de trouver des pseudo-inverses, c'est-à-dire des inverses modulo un opérateur compact. C'est ensuite la théorie de Fredholm qui permet de montrer l'unicité de solutions. De nombreux auteurs ont développé cette théorie, parmi lesquels Hörmander [26], Boutet de Monvel [6], etc. Nous nous appuyerons sur l'ouvrage de Alinhac et Gérard [1] pour présenter rapidement cette théorie au paragraphe 3.

Cette théorie a cependant des limites. Développée d'abord sur \mathbb{R}^n , elle a été généralisée aux variétés à la condition qu'elles soient régulières (typiquement de classe C^∞).

Parallèlement, d'autres théories ont été développées afin d'étudier l'existence et l'unicité de problèmes elliptiques posés sur des domaines polygonaux. Nous citerons en particulier Grisvard [25] et Dauge [20]. Ils montrent que la régularité de la solution ainsi que son comportement asymptotique dépendent des angles du polygone. Ainsi par exemple, si l'on considère le problème de Laplace en dimension 2

$$\Delta u = f$$

où $f \in L^2$, la solution u n'est pas dans H^2 comme dans des domaines lisses, mais dans $H^{1+\epsilon}$ où $\epsilon \in]0, 1]$ dépend des angles rentrants du domaine polygonal. En revanche, cette théorie ne permet pas de faire du calcul symbolique afin d'étudier des opérateurs.

Pour répondre à cette objection, des théories généralisant la théorie pseudo-différentielle ont été développées, parmi lesquelles celles de Melrose [37] et Kondratiev [28]. Kondratiev considère des variétés possédant un nombre fini de points coniques, ce qui permet par changement de carte de se ramener à l'étude d'une variété conique. En dimension 2, cela correspond donc à un cône $\mathbb{R}^+ \cup e^{i\theta}\mathbb{R}^+$. Il étudie les solutions d'un problème différentiel $Lu = f$. En dehors du point conique, cela ne diffère pas du cas régulier (si les coefficients de L et f sont C^∞ , alors la solution u est C^∞). Pour étudier ce problème, il faut donc regarder ce qu'il se passe au voisinage de ce point singulier (ramené à 0 par translation). En dimension 2, un changement de variable $x = \log \frac{1}{t}$ permet de se ramener à un cylindre. Dans ce système de coordonnées, Kondratiev montre l'existence et l'unicité de solutions dans des espaces de Sobolev à poids. Il donne également le comportement de la solution en 0 (c'est-à-dire une fois revenu dans les coordonnées en t), qui est du type :

$$\sum_j \sum_k a_j t^{-p_j} \log^k(t),$$

où p_j peut être complexe, et k est entier.

La principale différence entre la théorie pseudo-différentielle habituelle, et celle généralisée à des variétés singulières, est qu'il ne suffit plus de considérer le symbole classique des opérateurs, mais également leur comportement près de la pointe. Un symbole pertinent doit donc contenir ces deux informations : en résumé, il nous faut le comportement du noyau de l'opérateur près de la diagonale (théorie habituelle), et le comportement près de zéro (théorie de Kondratiev). Parmi les nombreux auteurs à avoir développé la théorie de Kondratiev, nous nous appuyerons en très grande partie sur les travaux de Schulze et Rempel [43], [42] pour la présenter. Schulze a développé cette

théorie sans effectuer le changement de variable $x = \log \frac{1}{t}$, mais en restant sur la variété conique. Ainsi en dimension 1, il introduit de nouveaux espaces sur \mathbb{R}^+ qui sont simplement l'image des espaces de Sobolev à poids exponentiels via une contraction exponentielle transformant \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ .

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les outils qui nous permettront d'étudier les opérateurs qui apparaîtront dans les chapitres suivants. Nous souhaitons également rendre cette théorie plus accessible à une utilisation pratique. Ainsi n'avons-nous pas strictement respecté la présentation de Schulze. En effet, il nous a semblé important de traduire les espaces introduits en terme d'espaces de Sobolev ou plus exactement de les définir à partir des espaces de Sobolev classiques ; et de rapprocher autant que possible cette théorie de la théorie pseudo-différentielle habituelle, déjà largement utilisée en analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Enfin, nous avons essayé d'exposer cette théorie de façon auto-contenue afin d'en rendre la lecture plus claire.

Dans le premier paragraphe, nous introduirons la transformée de Mellin et ses principales propriétés. Calculer la transformée de Mellin d'une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , revient presque à dilater la demi-droite \mathbb{R}^+ en la droite \mathbb{R} , puis à calculer la transformée de Fourier. Autrement dit, il s'agit d'une transformée de Fourier après le changement de variable $t = e^{-x}$.

Dans le second paragraphe, nous définirons les espaces à poids $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ à l'aide des espaces de Sobolev sur \mathbb{R} et de la transformation exponentielle. Nous introduirons alors les asymptotiques conormales, qui représentent le comportement en 0 des solutions d'équations posées sur \mathbb{R}^+ (cône en dimension 1), et correspond à ceux introduits par Kondratiev : $\sum_j \sum_k a_j t^{-p_j} \log^k(t)$.

Dans le troisième paragraphe, nous rappellerons la théorie pseudo-différentielle en nous appuyant sur l'ouvrage de Alinhac et Gérard [1], puis nous introduirons la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ (définie en utilisant la transformée de Mellin au lieu de celle de Fourier). Dans ce paragraphe, nous ne démontrerons pas les résultats présentés, redirigeant le lecteur vers [1] et [43] pour trouver les preuves.

Dans le quatrième paragraphe, nous présenterons le développement de Mellin, qui nous permettra d'avoir un calcul symbolique prenant en compte le symbole des opérateurs (au sens du calcul pseudo-différentiel habituel), mais aussi le comportement en zéro (donc près de la pointe). Des propriétés de Fredholm y seront exhibées. Les preuves y ont été complétées par rapport à celles de Schulze [43], de façon à ne nécessiter comme acquis que les résultats admis au paragraphe précédent.

Enfin, dans le cinquième paragraphe, nous appliquerons les résultats précédents au cas de la restriction à \mathbb{R}^+ d'un opérateur pseudo-différentiel de Fourier, cas souvent rencontré dans nos applications. Ceci nous sera donc utile pour les chapitres suivants. Ce dernier paragraphe s'appuie essentiellement sur [42].

Avant de commencer cet exposé, nous allons présenter un petit dictionnaire de correspondance "Fourier-Mellin", qui a deux objectifs. Le premier est d'introduire quelques notations qui seront définies ensuite. Le second est de permettre de s'y référer au fil de la lecture de ce chapitre (et des suivants) afin de la faciliter.

| | | |
|---|---|---------------------|
| $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ | $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ | |
| $Ff(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \xi \in \mathbb{R}$ | $Mu(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} u(t) dt, \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$ | cf définition 1.1.1 |
| $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ | $u \star v(s) = \int_0^{+\infty} u\left(\frac{s}{t}\right) v(t) \frac{dt}{t}$ | cf définition 1.1.4 |
| $H^s(\mathbb{R})$ | $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$ | cf définition 1.2.1 |
| $-i\partial_x$ | $-t\partial_t$ | |
| $op(a) = F^{-1}aF$ | $op_M(h) = M^{-1}hM$ | cf définition 1.3.8 |

TAB. 1.1 – *Tableau de correspondance "Fourier-Mellin".*

Soit S la transformation de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$Su(x) = e^{-x/2} u(e^{-x}), \quad \Rightarrow \quad S^{-1}f(t) = t^{-1/2} f(-\log t).$$

La justification de ce choix pour S sera donnée dans la section 1.1. La transformation S^{-1} permet de passer de la première colonne du tableau 1.1 à la deuxième.

1.1 La transformée de Mellin

Dans cette section, nous présentons la transformée de Mellin et ses principales propriétés. La transformée de Fourier est définie sur le groupe additif \mathbb{R} . De plus, elle transforme le produit de convolution additif en produit :

$$F(f * g) = F(f)F(g).$$

La transformée de Mellin peut-être définie comme une transformation de Fourier sur le groupe multiplicatif \mathbb{R}^+ . Nous introduirons donc également le produit de convolution multiplicatif. La transformée de Mellin transforme le produit de convolution multiplicatif en produit.

Enfin, nous calculerons quelques exemples de transformée de Mellin. Certains de ces exemples seront réutilisés dans la suite de l'exposé.

1.1.1 La transformée de Mellin

Définition 1.1.1 (Transformée de Mellin). *Pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, la transformée de Mellin Mu est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par la formule intégrale suivante :*

$$Mu(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} u(t) dt. \quad (1.1)$$

La transformation de Mellin est en fait une transformation de Fourier transportée sur le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* à l'aide d'un changement de variable exponentiel. En effet, notons $Ff = \hat{f}$ la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$Ff(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx,$$

et \tilde{S} l'opérateur de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ suivant : $\tilde{S}u(x) = u(e^{-x})$. Alors on voit facilement (changement de variable $t = e^{-x}$) que pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, pour tout réel ξ :

$$F(\tilde{S}u)(\xi) = Mu(i\xi).$$

Par conséquent, de nombreuses propriétés de la transformée de Fourier pourront être étendues à la transformée de Mellin.

Ce choix pour transformer $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas forcément le plus agréable. En effet, si $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, alors $\tilde{S}u \in e^{x/2}L^2(\mathbb{R})$. Afin d'avoir un opérateur isométrique de $L^2(\mathbb{R}^+, dt)$ dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$, nous préférons donc choisir l'opérateur S suivant :

$$\boxed{Su(x) = e^{-x/2}u(e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},} \quad (1.2)$$

et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, nous avons :

$$\boxed{F(Su)(\xi) = Mu\left(\frac{1}{2} + i\xi\right).} \quad (1.3)$$

La relation (1.3) indique que le domaine naturel en variable Mellin est la droite $\{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Re}(z) = 1/2\}$, où $\mathbf{Re}(z)$ désigne la partie réelle de la variable complexe z . De plus, elle nous donne immédiatement quelques propriétés issues de celles vérifiées par la transformée de Fourier. La première est l'isométrie :

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, dt) \rightarrow L^2\left(\mathbf{Re}(z) = 1/2, \frac{dz}{2i\pi}\right),$$

dont l'inverse est donné par :

$$M^{-1}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2-ix} f\left(\frac{1}{2} + ix\right) dx.$$

L'identité de Parseval reste donc vérifiée :

Proposition 1.1.2 (Identité de Parseval). *Pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$,*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{Re}(z)=1/2} |Mu(z)|^2 dz = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

De même, la transformée de Fourier est naturellement étendue aux distributions à support compact $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Définissons $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$:

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) : u = v|_{\mathbb{R}_+}, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})\},$$

et nous pouvons étendre la transformée de Mellin à cet espace de distributions :

$$\forall u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+), \quad Mu(z) = \langle v, t^{z-1}\theta^+ \rangle, \quad u = v|_{\mathbb{R}_+}, \quad (1.4)$$

où θ^+ est la fonction caractéristique de \mathbb{R}_+ . Cela a un sens car $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

1.1.2 Quelques propriétés de la transformée de Mellin

La transformée de Mellin a des propriétés proches de celles de la transformée de Fourier, qui se vérifient facilement par le calcul :

Proposition 1.1.3. *Pour tous $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, $z \in \mathbb{C}$, $p, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :*

$$M\left(-t \frac{d}{dt} u\right)(z) = zMu(z), \quad (1.5)$$

$$M(t^p u)(z) = Mu(z + p), \quad (1.6)$$

$$M((\log t)u)(z) = \frac{d}{dz} Mu(z), \quad (1.7)$$

$$M(u(t^\alpha))(z) = \alpha^{-1} Mu(\alpha^{-1} z), \quad (1.8)$$

$$M(u(\lambda t))(z) = \lambda^{-z} Mu(z). \quad (1.9)$$

En application de 1.6, pour tout réel γ , nous pouvons aussi définir l'application M sur l'espace $L^{2,\gamma}(\mathbb{R}^+) = t^\gamma L^2(\mathbb{R}^+)$ comme une isométrie :

$$M : L^{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, dt) \rightarrow L^2\left(\operatorname{Re}(z) = 1/2 - \gamma, \frac{dz}{2i\pi}\right),$$

dont l'inverse est donné par :

$$M^{-1}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\gamma-1/2-ix} f\left(\frac{1}{2} - \gamma + ix\right) dx.$$

Il s'agit en effet d'un simple changement de variable.

1.1.3 Produit de convolution multiplicatif

Définition 1.1.4. *Soient $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+)$. On définit le produit de convolution $u \star v$ par :*

$$\langle u \star v, \phi \rangle = \langle u \otimes v, \phi(ts) \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+),$$

où \langle, \rangle désigne le crochet de distributions sur \mathbb{R}^2 , et $u \otimes v(s, t) = u(t)v(s)$.

Lorsque cela est défini, on a donc

$$u \star v(s) = \int_0^{+\infty} u(t)v\left(\frac{s}{t}\right) \frac{dt}{t}.$$

On notera $f * g$ le produit de convolution habituel (additif) sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On vérifie facilement la relation suivante entre le produit de convolution additif et le produit de convolution multiplicatif :

$$u \star v = S^{-1}(Su * Sv),$$

et on démontre aussi (à l'aide de la relation (1.3) ou par le calcul) les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.5. Soient $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+)$. On note δ_1 la masse de Dirac en 1.

$$u \star v = v \star u, \quad (1.10)$$

$$u \star \delta_1 = u, \quad (1.11)$$

$$M(u \star v) = M(u)M(v), \quad (1.12)$$

$$-t \frac{d}{dt}(u \star v) = u \star \left(-t \frac{dv}{dt}\right). \quad (1.13)$$

Remarque 1.1.6. On retrouve ainsi $M\delta_1 = 1$.

1.1.4 Exemples : premiers calculs de transformée de Mellin

Exemple 1.1.7. La transformée de Mellin de la masse de Dirac en $t \in \mathbb{R}_+$ est :

$$M\delta_t(z) = t^{z-1}.$$

Exemple 1.1.8. Soit $u(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)t^{-p} \log^k(t)$, $p \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Re}(p) < \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } Mu(z) = \frac{(-1)^k k!}{(z-p)^{k+1}}.$$

On remarque que dans cet exemple, Mu est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} de pôle p de multiplicité $k+1$. Pour pouvoir faire le calcul, il a fallu supposer que $\mathbf{Re}(p) < \frac{1}{2}$. La transformée de Mellin nous est alors donnée sur la droite $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$:

$$Mu(z) = \int_0^1 t^{z-p-1} \log^k(t) dt, \text{ où } \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2},$$

et $t \rightarrow t^{z-p-1} \log^k(t)$ est intégrable en zéro si et seulement si $\mathbf{Re}(p) < \frac{1}{2}$. Nous aurions en fait pu faire le calcul pour $\mathbf{Re}(p) < \frac{1}{2} - \gamma$, et calculer alors la transformée de Mellin sur la droite $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2} - \gamma$.

Si u possède ce même comportement asymptotique en l'infini, nous avons alors :

Exemple 1.1.9. Soit $u(t) = \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)t^{-p} \log^k(t)$, $p \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Re}(p) > \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } Mu(z) = -\frac{(-1)^k k!}{(z-p)^{k+1}}.$$

Ces deux exemples sont très instructifs, car ils permettent de comprendre que le comportement asymptotique de u en 0 et en l'infini se reflète dans le comportement analytique de sa transformée de Mellin. Autrement dit, connaître les pôles de Mu et leur multiplicité permet de connaître le comportement asymptotique de u en zéro en observant les pôles à gauche de $\mathbf{Re}(p) = \frac{1}{2}$, et le comportement asymptotique en l'infini en observant les pôles à droite. Cela ne reste vrai que si Mu n'a pas de pôle sur la droite $\mathbf{Re}(p) = \frac{1}{2}$.

D'autre part, l'exemple suivant nous sera très utile par la suite :

Exemple 1.1.10. Soit $u(t) = \frac{t^\delta}{t-a}$, avec $|\delta| < \frac{1}{2}$, $\delta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

$$Mu(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\delta+z-1}}{t-a} dt.$$

Cette intégrale est bien définie et holomorphe pour $-\delta < \mathbf{Re}(z) < 1 - \delta$.

Définissons $f(\zeta) = \frac{\zeta^{\delta+z-1}}{\zeta-a} = \frac{e^{(\delta+z-1)\log(\zeta)}}{\zeta-a}$ où le logarithme complexe est donné par $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$, pour $0 < \arg(z) < 2\pi$.

La fonction f est une fonction méromorphe qui contient un pôle en a de résidu $e^{(\delta+z-1)\log(a)}$.

Intégrons cette fonction sur le contour $C_{r,R,\varepsilon}$:

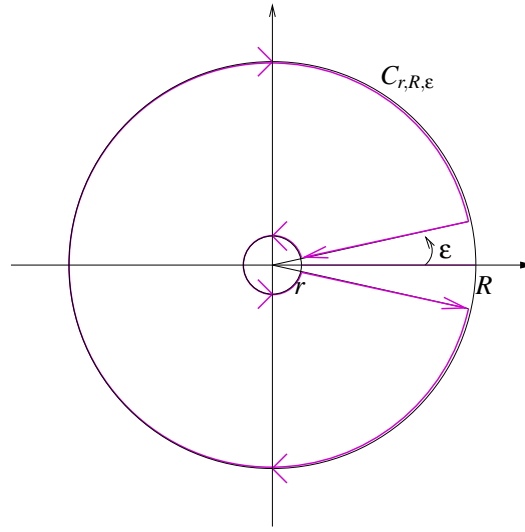


FIG. 1.1 – Contour d'intégration $C_{r,R,\varepsilon}$.

Pour r et ε assez petit et R assez grand, a se trouve à l'intérieur du contour, avec un indice -1 pour le sens de parcours choisi. Donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_{C_{r,R,\varepsilon}} f(\zeta) d\zeta = -2i\pi e^{(\delta+z-1)\log(a)} \quad (1.14)$$

$$= -e^{i\varepsilon(\delta+z)} \int_r^R \frac{t^{\delta+z-1}}{te^{i\varepsilon} - a} dt + \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{e^{(\delta+z-1)\log(re^{i\theta})}}{re^{i\theta} - a} ire^{i\theta} d\theta \quad (1.15)$$

$$+ e^{-i\varepsilon} \int_r^R \frac{e^{i(2\pi-\varepsilon)(\delta+z-1)} t^{\delta+z-1}}{te^{-i\varepsilon} - a} dt - \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{e^{(\delta+z-1)\log(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta} - a} iRe^{i\theta} d\theta \quad (1.16)$$

Donc en notant I_r et I_R les intégrales sur les cercles de rayon respectivement r et R , et en faisant tendre ε vers zéro (convergence dominée) :

$$(1 - e^{2i\pi(\delta+z)}) \int_r^R \frac{t^{\delta+z-1}}{t-a} dt - I_r + I_R = 2i\pi e^{(\delta+z-1)\log(a)}.$$

Comme $-\delta < \mathbf{Re}(z) < 1 - \delta$, on montre par majoration que $I_r \rightarrow 0$ et par convergence dominée que $I_R \rightarrow 0$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\delta+z-1}}{t-a} dt = \frac{2i\pi e^{(\delta+z-1)\log(a)}}{1 - e^{2i\pi(\delta+z)}}.$$

Pour terminer cette section, nous allons calculer la transformée de Mellin de la valeur principale et de la partie finie, ce qui est une application de l'exemple précédent, et dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants.

Définition 1.1.11. On définit la valeur principale de $\frac{1}{x}$ comme la distribution vérifiant :

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On définit également la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ par

$$\text{Pf} \frac{1}{x^2} = -(\text{vp} \frac{1}{x})'.$$

Lemme 1.1.12. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \text{vp} \frac{1}{x} &= (\log |x|)', \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} &= \text{vp} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta_0, \text{ au sens des distributions,} \\ \langle \text{Pf} \frac{1}{x^2}, \phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi(0)}{\varepsilon}, \\ x \text{Pf} \frac{1}{x^2} &= \text{vp} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Pour la preuve, on se reportera à [4].

Si g est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} , on peut parler de $\text{vp} \frac{1}{g} : \langle \text{vp} \frac{1}{g}, \phi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \phi \circ g^{-1} |(g')^{-1}| \rangle$.

Lemme 1.1.13. Pour $0 < \text{Re}(z) < 1$,

$$M(\text{vp} \frac{1}{1-t})(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

Remarque 1.1.14. La distribution $\text{vp} \frac{1}{1-t}$ n'est pas à support compact, donc on ne sait a priori pas calculer sa transformée de Mellin. Mais on peut la décomposer en une distribution à support compact (autour de 1) et une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, donc $M(\text{vp} \frac{1}{1-t})$ est bien définie.

Démonstration. Dans l'exemple 1.1.10, nous avons calculé la transformée de Mellin de $u(t) = \frac{1}{t-a}$, avec $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t-a} dt = \frac{2i\pi e^{(z-1)\log(a)}}{1 - e^{2i\pi(z)}},$$

où $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$, $0 < \arg(z) < 2\pi$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce calcul, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t-1+i\varepsilon} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi z}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t-1-i\varepsilon} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2i\pi e^{2i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}}.$$

Le lemme 1.1.12 nous permet de passer à la limite au sens des distributions, et de conclure :

$$M(\text{vp} \frac{1}{1-t})(z) = \frac{-1}{2} \left(2i\pi \frac{1+e^{2i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} \right) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

□

Par application directe de la proposition 1.1.3, nous obtenons alors le résultat suivant :

Corollaire 1.1.15. *Pour $-n < \text{Re}(z) < 1-n$,*

$$M\left(t^n \text{vp} \frac{1}{1-t}\right)(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

Lemme 1.1.16. *Pour $0 < \text{Re}(z) < 1$,*

$$M\left(\frac{1}{1+t}\right)(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat de l'exemple 1.1.10 pour $a = -1$. □

De même, le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 1.1.16 et de la proposition 1.1.3 :

Lemme 1.1.17. *Pour $-n < \text{Re}(z) < 1-n$,*

$$M\left(\frac{t^n}{1+t}\right)(z) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi z)}.$$

La partie finie étant la dérivée de la distribution valeur principale, nous obtenons sa transformée de Mellin par dérivation :

Lemme 1.1.18. *Pour $0 < \text{Re}(z) < 1$,*

$$M\left(-t \text{Pf} \frac{1}{(1-t)^2}\right)(z) = \frac{\pi z}{\tan(\pi z)}.$$

1.2 Les espaces à poids $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$

Les espaces de Sobolev sur \mathbb{R} sont construits à partir de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et à l'aide de la transformée de Fourier. Ils sont définis comme étant

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (1.17)$$

Pour $s = n \in \mathbb{N}$, on peut également définir $H^n(\mathbb{R})$ comme :

$$H^n(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall m \leq n, \partial^m f \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad (1.18)$$

et en particulier $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. Ces espaces permettent donc de mesurer la régularité d'une fonction. Ils jouent un grand rôle dans la théorie pseudo-différentielle. En effet, un opérateur différentiel d'ordre m :

$$\sum_{j=0}^m a_j (i\partial)^j, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

envoie naturellement $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R})$, ce que l'on peut aisément constater pour $s \in \mathbb{N}$, $s > m$ grâce à la définition (1.18), mais qui reste vrai pour tout $s \in \mathbb{R}$. De même, un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m (dont nous rappellerons la définition section 1.3) envoie $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R})$. Cela permet donc de mesurer la régularité des opérateurs pseudo-différentiels.

Voulant construire des opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ , il est naturel de vouloir construire des espaces correspondant aux espaces de Sobolev, à l'aide de la transformation S définie en (1.2) par :

$$\boxed{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+) = S^{-1}H^s(\mathbb{R}).}$$

Rappelons que $Su(x) = e^{-x/2}u(e^{-x})$ et que cette transformation nous place dans le domaine Mellin $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 1/2\}$, que nous noterons $\Gamma_{1/2}$. De façon plus générale, nous aurons donc besoin de la notation suivante : pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, nous notons Γ_β la droite $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \beta\}$.

1.2.1 Définition des espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$

Nous posons donc la définition suivante :

Définition 1.2.1. *Pour tout réel s , l'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$ est défini comme :*

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+) = S^{-1}H^s(\mathbb{R}).$$

Pour $\gamma \in \mathbb{R}$ on définit $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ par :

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) = t^\gamma \mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+).$$

On prendra garde à ne pas confondre $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, et l'espace $H^s(\mathbb{R}^+)$, défini comme l'ensemble des fonctions sur \mathbb{R}^+ , qui prolongées par zéro sont dans $H^s(\mathbb{R})$. Par exemple,

soit $u : t \mapsto t^{-1/4}\omega(t)$, où ω est à support compact dans $[0, +\infty[$ valant 1 en zéro. Alors $u \in \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^+)$ pour tout entier n , mais son prolongement à \mathbb{R} par zéro n'est pas continu (donc u n'est pas dans $H^1(\mathbb{R}^+)$).

Enfin, il est utile d'introduire les espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. En effet, la transformation S^{-1} envoie $-\infty$ en zéro : donc pour avoir des injections compactes entre espaces $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, il faudra soit être sur des compacts de \mathbb{R}^+ (zéro exclus), soit ajouter un poids en zéro, d'où l'intérêt de ces espaces à poids. Nous verrons cela en détail dans le paragraphe 1.2.2.

Remarque 1.2.2. *On peut traduire les espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ à l'aide d'espaces de Sobolev à poids exponentiel : définissons*

$$H^{s,\gamma}(\mathbb{R}) = e^{-\gamma x} H^s(\mathbb{R}),$$

muni de la norme $\|f\|_{s,\gamma} = \|e^{\gamma x} f\|_s$. Alors

$$\boxed{\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) = S^{-1} H^{s,\gamma}(\mathbb{R}).}$$

Cette définition faisant intervenir les espaces de Sobolev classiques, nous pouvons retrouver des propriétés analogues à celles des espaces de Sobolev pour les espaces $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$. Ainsi, nous aurions pu définir ces espaces comme le sont souvent les espaces de Sobolev, c'est-à-dire comme un complété pour une norme bien choisie de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.

En effet, partant de la définition 1.2.1 :

$$u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow Su \in H^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow u(t) = t^{-1/2}v(-\log(t)), v \in H^s(\mathbb{R}),$$

et la relation (1.3) nous donne immédiatement :

$$Su \in H^s(\mathbb{R}) \iff (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{Su}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.19)$$

$$\iff (1 + |\xi|^2)^{s/2} Mu\left(\frac{1}{2} + i\xi\right) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.20)$$

$$\iff (1 + |z|^2)^{s/2} Mu(z) \in L^2\left(\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}\right). \quad (1.21)$$

Ceci permet d'écrire la proposition suivante (qui aurait pu servir de définition) :

Proposition 1.2.3. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+)$ est le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ pour la norme :*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s} = \left(\int_{\Gamma_{1/2}} (1 + |z|^2)^s |Mu(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

De même, les espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ vérifient une proposition similaire :

Proposition 1.2.4. *Pour $s, \gamma \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ est le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ pour la norme :*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{s,\gamma}} = \left(\int_{\Gamma_{1/2-\gamma}} (1 + |z|^2)^s |Mu(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'utiliser la proposition 1.1.3 puis d'effectuer un changement de variable. \square

La plupart des propriétés des espaces de Sobolev sont immédiatement transmises aux espaces $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$. L'opérateur différentiel jouant le rôle de $-i\partial_x$ est remplacé sur \mathbb{R}^+ par l'opérateur $-t\partial_t$:

$$F(-i\partial_x f)(\xi) = \xi Ff(\xi), \quad M(-t\partial_t u)(z) = zMu(z).$$

Remarque 1.2.5. 1. $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+)$;

2. $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) = \{t^{-1/2+\gamma}u(\log t) : u \in H^s(\mathbb{R})\}$, pour tous réels s, γ ;

3. $\mathcal{H}^{0,\gamma}(\mathbb{R}_+) = t^\gamma L^2(\mathbb{R}^+) =: L^{2,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, pour tout réel γ ;

4. Pour $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}_+) : \left(-t\frac{d}{dt}\right)^j u \in L^2(\mathbb{R}_+), j = 0, \dots, s \right\}$;

5. Pour tous $s, \gamma \in \mathbb{R}$, $t\frac{d}{dt} : \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{H}^{s-1,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ est continue.

De même, les trois propositions qui suivent sont une simple traduction des propriétés connues des espaces de Sobolev. Ainsi, nous disposons d'un produit scalaire.

Proposition 1.2.6. L'espace $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$(u, v)_{s,\gamma} = \int_{\Gamma_{1/2-\gamma}} (1 + |z|^2)^s Mu(z)Mv(z) \frac{dz}{2i\pi}$$

pour tous réels s, γ . De plus, $(\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+))' = \mathcal{H}^{-s,-\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. Cela provient directement des propriétés des espaces de Sobolev. \square

Les espaces \mathcal{H}^s permettent également de mesurer la régularité des fonctions, mais à partir de $L^2(\mathbb{R}^+)$ au lieu de $L^2(\mathbb{R})$:

Proposition 1.2.7. Soit l'espace $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R}^+) = \cap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$. Alors

$$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R}^+) \subset C^\infty(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^+) = L^2(\mathbb{R}^+)$, on a clairement une partie de l'inclusion. Enfin rappelons que pour tout entier n , pour tout $u \in \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^+)$, il existe $v \in H^n(\mathbb{R})$ tel que $u(t) = t^{-1/2}v(\log(t))$. Comme $H^n(\mathbb{R}) \subset C^{n-1}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^+) \subset C^{n-1}(\mathbb{R}^+)$, ce qui permet de conclure. \square

Enfin, les éléments de $\mathcal{H}^{-n}(\mathbb{R}^+)$ pour un entier n positif peuvent s'écrire à l'aide d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Proposition 1.2.8. Pour tout entier positif n , pour tout $u \in \mathcal{H}^{-n}(\mathbb{R}^+)$, il existe $v \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tel que

$$u = t^{-1/2} \left(-t \frac{d}{dt} \right)^n (t^{1/2}v).$$

Démonstration. On sait que pour tout $f \in H^{-n}(\mathbb{R})$, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $f = g^{(n)}$. Or il existe $f \in H^{-n}(\mathbb{R})$ tel que $u = t^{-1/2}f(\log t)$. Un calcul simple nous donne :

$$t^{-1/2} \left(-t \frac{d}{dt} \right)^n (g(\log t)) = t^{-1/2} g^{(n)}(\log t),$$

d'où le résultat. \square

D'autres propriétés sont liées à la présence du poids γ , qui joue en fait sur l'asymptotique des fonctions en zéro ou en l'infini (asymptotique en t^γ).

Remarque 1.2.9. 1. Pour tous $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $a > 0$, $\mathcal{H}^{s,\gamma}([0, a]) \subset \mathcal{H}^s([0, a])$.
 2. Pour tous $s \in \mathbb{R}$, $\gamma < 0$, $a > 0$, $\mathcal{H}^{s,\gamma}([a, +\infty[) \subset \mathcal{H}^s([a, +\infty[)$.
 3. Pour tous $s, \gamma \in \mathbb{R}$, l'opérateur de multiplication $t^\gamma : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ est continu.

Rappelons que d'une manière plus générale, la différence fondamentale de cette théorie par rapport à la théorie pseudo-différentielle habituelle, et qui justifie son introduction, est la prise en compte du comportement asymptotique des fonctions en zéro et en l'infini (ce qui est équivalent à l'observation du comportement des éléments d'espaces de Sobolev classiques en plus ou moins l'infini).

Dans nos cas pratiques, les surfaces considérées seront bornées, et donc les fonctions tronquées en l'infini. Autrement dit, nous ne voulons pas considérer le comportement asymptotique des fonctions en l'infini. Cela nous permet de simplifier les notations, et la théorie peut être facilement généralisée par un changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$. Nous définissons donc de nouveaux espaces, constitués d'éléments de \mathcal{H}^s à support compact. Ce nouvel espace va être construit comme une limite inductive des espaces à support inclus dans les boules $K_N = [0, N]$, pour N entier. Définissons tout d'abord les espaces de Hilbert de fonctions $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$ à support dans un compact K de $[0, +\infty[$.

Définition 1.2.10. Soit K un compact de $[0, +\infty[$, pour tout réel s , on définit l'espace \mathcal{K}_K^s comme étant l'ensemble

$$\mathcal{K}_K^s = \{u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+) \mid \text{Supp } u \subset K\}.$$

Proposition 1.2.11. Pour tout K compact de $[0, +\infty[$, pour tout réel s , l'espace \mathcal{K}_K^s muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans \mathcal{K}_K^s . Alors la suite (u_n) converge vers $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, et il est facile de voir que son support est inclus dans K . \square

On peut maintenant définir l'espace des fonctions de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$ à support compact :

Définition 1.2.12. Soit $K_N = [0, N]$ pour tout entier $N \geq 1$. Pour tout réel s , on définit l'espace $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ comme étant la limite inductive des espaces de Fréchet $\mathcal{K}_{K_N}^s$ munis de la topologie induite par la norme sur $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$.

Pour mieux comprendre ce qu'est la topologie sur ces espaces $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, il nous semble important d'indiquer la proposition suivante [24] sur les suites convergentes. Cependant, nous n'utiliserons pas ce résultat par la suite.

Proposition 1.2.13. *Pour qu'une suite (x_n) converge vers x dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, il faut et il suffit que cette suite soit contenue dans un sous-espace $\mathcal{K}_{K_N}^s$, et qu'elle converge vers x dans $\mathcal{K}_{K_N}^s$.*

Pour montrer que des applications sont continues dans les espaces $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, il suffira de montrer qu'elles sont continues avec la norme de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, comme nous l'autorise la proposition suivante [24] :

Proposition 1.2.14. *Soit f une application linéaire de $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ (s réel) dans un espace localement convexe sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue est que sa restriction à chaque sous-espace $\mathcal{K}_{K_N}^s$ soit continue dans $\mathcal{K}_{K_N}^s$ muni de la topologie induite par la norme sur $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$.*

Enfin, on peut définir les espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ pour $s, \gamma \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.15. *Pour tout réels s, γ , on définit :*

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) = t^\gamma \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+),$$

et pour tout compact K de $[0, +\infty[$, on définit :

$$\mathcal{K}_K^{s,\gamma} = t^\gamma \mathcal{K}_K^s$$

Les espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ permettent d'étudier le comportement asymptotique en zéro. Pour exprimer un élément de $H^s(\mathbb{R})$ restreint à \mathbb{R}^+ en fonction d'éléments dans $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, il est donc naturel de faire un développement de Taylor en zéro. Ce théorème permet de mieux comprendre ces espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, mais aussi de donner une première idée de développement près de zéro. C'est le même principe qui sera appliqué plus tard aux opérateurs pseudo-différentiels restreints à \mathbb{R}^+ .

Pour tout réel x , nous notons $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Théorème 1.2.16 ([13], thm 3). *Pour tout $s > 0$ tel que $s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, soit $u \in H^s(\mathbb{R}^+)$ à support compact dans $[0, +\infty[$. Alors u admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\{\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2} - s\}$, admettant des pôles simples en $z_k = -k$, $k \in \{0, \dots, \lfloor s - \frac{1}{2} \rfloor\}$, de résidu $\frac{1}{k!} \partial_t^k u(0)$. De plus, si ω désigne une fonction plateau valant 1 autour de zéro, alors*

$$u - \omega \sum_{k=0}^{\lfloor s-1/2 \rfloor} \frac{t^k}{k!} \partial_t^k u(0) \in \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+),$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

On peut également interpréter le théorème de la façon suivante :

Corollaire 1.2.17. *Pour tout $s > 0$ tel que $s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, si ω désigne une fonction plateau valant 1 autour de zéro, alors*

$$\omega H^s(\mathbb{R}^+) = \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+) + \operatorname{Vect}(\omega t^j, 0 \leq j \leq \lfloor s - \frac{1}{2} \rfloor).$$

On a en fait le résultat suivant [40], [43] :

Proposition 1.2.18 ([43] thm 1.2.2.16). *Nous avons les isomorphismes suivants :*

$$\omega H^s(\mathbb{R}^+) = \begin{cases} \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+) + \text{Vect}(\omega t^j, 0 \leq j \leq \lfloor s - \frac{1}{2} \rfloor), & s > \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \\ \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+), & s < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\omega H_0^s(\mathbb{R}^+) = \begin{cases} \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+), & s > \frac{-1}{2}, \\ \mathcal{K}^{s,s}(\mathbb{R}^+) + \text{Vect}(\omega(\partial_t)^j \delta_0, 0 \leq j \leq \lfloor -s - \frac{1}{2} \rfloor), & s < \frac{-1}{2}, s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la traduction en domaine Mellin du comportement près de zéro de fonctions à support compact dans $[0, +\infty[$. Nous renvoyons à l'exemple 1.1.8 pour rappeler qu'une fonction qui possède un comportement en zéro du type :

$$t^{-p} \log^k(t), \quad p \in \mathbb{C}, \text{Re}(p) < \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}$$

a sa transformée de Mellin méromorphe de pôle p , de multiplicité k .

Tout d'abord, remarquons qu'une fonction qui n'est pas plate en l'infini, n'est pas analytique dans le domaine Mellin, d'où l'intérêt d'avoir choisi un espace de fonctions ne contenant que des éléments à support compact dans $[0, +\infty[$ (puisque nous ne nous intéressons qu'au comportement en zéro). La proposition suivante illustre cela.

Nous désignerons par $\mathcal{A}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{C} , l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Proposition 1.2.19. *Soient $\gamma_1 > \gamma_2$,*

$$\begin{aligned} & M(L^{2,\gamma_1} \cap L^{2,\gamma_2}) \\ &= \left\{ h \in \mathcal{A}\left(\frac{1}{2} - \gamma_1 < \text{Re}(z) < \frac{1}{2} - \gamma_2\right) \left| \int_{\Gamma_{1/2-\rho}} |h(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} < +\infty, \forall \gamma_2 \leq \rho \leq \gamma_1 \right. \right\}. \end{aligned}$$

Les éléments de $L^{2,\gamma_1} \cap L^{2,\gamma_2}$ ont un poids γ_1 en l'infini et γ_2 en zéro.

Démonstration. Soit $u \in L^{2,\gamma_1} \cap L^{2,\gamma_2}$. L'application $z \mapsto t^{z-1}u(t)$ est holomorphe sur \mathbb{C} .

Soit $a > 0$, montrons que $Mu \in \mathcal{A}(\frac{1}{2} - \gamma_1 - a < \text{Re}(z) < \frac{1}{2} - \gamma_2 + a)$.

$$\begin{aligned} |t^{z-1}u(t)| &= t^{\text{Re}(z)+\gamma_1-1} |t^{-\gamma_1}u(t)| \mathbf{1}_{[0,1]} + t^{\text{Re}(z)+\gamma_2-1} |t^{-\gamma_2}u(t)| \mathbf{1}_{]1,+\infty[} \\ &\leq t^{-1/2-a} |t^{-\gamma_1}u(t)| \mathbf{1}_{[0,1]} + t^{-1/2+a} |t^{-\gamma_2}u(t)| \mathbf{1}_{]1,+\infty[}, \end{aligned}$$

donc le théorème d'intégrales à paramètre holomorphe s'applique et permet de conclure.

Pour montrer que $\int_{\Gamma_{1/2-\rho}} |Mu(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} < +\infty, \forall \gamma_1 \leq \rho \leq \gamma_2$, il suffit de voir que :

$$L^{2,\gamma_1} \cap L^{2,\gamma_2} \subset L^{2,\rho}, \quad \forall \gamma_1 \leq \rho \leq \gamma_2,$$

et

$$\|u\|_{2,\rho} \leq C(\|u\|_{2,\gamma_1} + \|u\|_{2,\gamma_2}).$$

□

A la vue de ce cas d'étude, il semble se poser le problème de la définition de l'inverse de la transformée de Mellin à cause du domaine d'intégration. La proposition suivante nous assure que la définition est correcte :

Proposition 1.2.20. *Soit u tel que $h = Mu \in \mathcal{A}(\alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta)$, pour α et β réels. Pour tout $\frac{1}{2} - \beta < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{1}{2} - \alpha$, notons*

$$M_{\gamma_j}^{-1}h = \int_{\{\operatorname{Re}(z)=1/2-\gamma_j\}} t^{-z} h(z) \frac{dz}{2i\pi}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Alors

$$u = M_{\gamma_1}^{-1}h = M_{\gamma_2}^{-1}h.$$

Démonstration. Soient $u_1 = M_{\gamma_1}^{-1}h$ et $u_2 = M_{\gamma_2}^{-1}h$. Nous pouvons définir $M_{\gamma_1} u_j = (Mu_j)|_{\Gamma_{\frac{1}{2}-\gamma_j}}$, qui peut être étendu holomorphiquement en h au voisinage de $\Gamma_{\frac{1}{2}-\gamma_j}$, pour $j \in \{1, 2\}$. Donc par théorème des zéros isolés, $Mu_1 = h = Mu_2$ sur $\{\alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta\}$, d'où le résultat. □

Nous pouvons caractériser les fonctions *plates* (en zéro et en l'infini), c'est-à-dire à support compact dans $]0, +\infty[$. Pour ne pas entraîner de confusion sur le support des fonctions considérées, nous parlerons de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ pour désigner des fonctions à support compact dans $]0, +\infty[$, et de $C_0^\infty([0, +\infty[)$ pour désigner des fonctions dont le support peut contenir 0.

Proposition 1.2.21. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La distribution complexe f est la transformée de Mellin de $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$,*
- (ii) *La distribution complexe f est holomorphe sur \mathbb{C} , et il existe $a > 1$, tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m \in \mathbb{R}^+$,*

$$|f(z)| \leq \frac{C_m}{(1 + |z|)^m} a^{|\operatorname{Re}(z)|}, \quad (1.24)$$

et dans ce cas, $\operatorname{Supp}(u) \subset \left[\frac{1}{a}, a\right]$.

Démonstration. • (i) \Rightarrow (ii).

Soit u à support dans $\left[\frac{1}{a}, a\right]$, $a > 1$, de classe C^∞ . Soit $v = \frac{u}{t}$. La fonction v est donc de classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ à support dans $\left[\frac{1}{a}, a\right]$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} u(t) dt \\ &= \frac{(-1)^m}{(z+1) \cdots (z+m)} \int_{1/a}^a t^{z+m} v^{(m)}(t) dt, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (1.24). D'autre part, le théorème des intégrales à paramètre holomorphe s'applique sur tout compact de \mathbb{C} , donc f est holomorphe sur \mathbb{C} .

• (ii) \Rightarrow (i). Comme f est holomorphe sur \mathbb{C} et vérifie l'inégalité (1.24), d'après la proposition 1.2.20, pour tout réel γ ,

$$M^{-1}f(t) = \int_{\Gamma_\gamma} t^{-z} f(z) \frac{dz}{2i\pi}. \quad (1.25)$$

On note $u = M^{-1}f$. Comme f vérifie (1.24) pour tout entier m , u est dans $\mathcal{H}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$.

Montrons que u est à support compact inclus dans $\left[\frac{1}{a}, a\right]$.

Pour tout $t > a$, pour tout $m > 1$, pour tout $\gamma > 1$,

$$|u(t)| \leq \frac{C_m}{2\pi} \left(\frac{a}{t}\right)^\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1 + \sqrt{\gamma^2 + \xi^2})^m},$$

et pour tout $t > a$ et $\gamma > 1$, $\left(\frac{a}{t}\right)^\gamma \leq 1$, puis par changement de variable $\xi \mapsto \frac{\xi}{\gamma}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \frac{C_m}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \xi^2}\right)^{m/2} d\xi \\ &\leq \widetilde{C}_m \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{m-1} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

or u est indépendant de γ d'après (1.25), d'où $u(t) = 0$ pour tout $t > a$.

Le même raisonnement permet de montrer que $u(t) = 0$ pour tout $t < \frac{1}{a}$, en choisissant cette fois $\gamma < -1$ puis en faisant tendre γ vers $-\infty$.

□

Les fonctions que nous considérerons en pratique seront tronquées en l'infini. En domaine Mellin, elles ne seront donc plus analytiques sur tout \mathbb{C} (voir l'exemple 1.1.8), mais seulement sur le demi-espace $\{\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2} - \gamma\}$.

Proposition 1.2.22. *Soit $u \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, $s, \gamma \in \mathbb{R}$. Alors Mu est holomorphe dans $\{\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2} - \gamma\}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $\gamma = 0$, on termine par un changement de variable dans le domaine complexe grâce à la formule (1.6).

Soit $u \in \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ à support dans $[0, a]$. Si $s \geq 0$, on peut simplement appliquer le théorème d'intégration des fonctions à paramètre holomorphe :

$$Mu(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} u(t) dt = \int_0^a t^{z-1} u(t) dt.$$

Pour tout $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta$, pour presque tout $t > 0$,

$$|t^{z-1} u(t) \mathbf{1}_{[0,a]}| \leq t^{\alpha-1} |u(t)| \mathbf{1}_{[0,1]} + t^{\beta-1} |u(t)| \mathbf{1}_{[1,a]},$$

est intégrable. Donc Mu est holomorphe sur tout compact de $\{\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}\}$, d'où le résultat.

Si $s < 0$, soit $-n$ la partie entière de s . Donc d'après la proposition 1.2.8, il existe $v \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tel que $u = t^{-1/2} \left(-t \frac{d}{dt}\right)^n (t^{1/2} v)$. Comme u est à support dans $[0, a]$, alors v aussi. On a ainsi

$$Mu = \langle u, t^{z-1} \rangle = (-1)^n \langle t^{1/2} v, \left(-t \frac{d}{dt}\right)^n t^{z-3/2} \rangle = \left(z - \frac{3}{2}\right)^n \langle v, t^{z-1} \rangle,$$

ce qui permet d'appliquer le résultat précédent. \square

1.2.2 Résultats de compacité

Le lemme de Rellich joue un rôle très important dans la théorie pseudo-différentielle. Il permet de montrer que certains opérateurs pseudo-différentiels sont compacts, puis d'appliquer la théorie de Fredholm¹. C'est dans le même esprit qu'il est important d'avoir des résultats de compacité pour les espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}$ et $\mathcal{K}^{s,\gamma}$.

Cependant, ainsi que nous avons déjà pu le constater, ces espaces peuvent être traduits comme l'image d'espace de Sobolev à poids, par une application S transformant des opérateurs sur \mathbb{R} en opérateurs sur \mathbb{R}^+ .

Nous allons tout d'abord généraliser le lemme de Rellich à des espaces de Sobolev à poids. En effet, nous avons préféré écrire ces résultats sur les espaces de Sobolev, importants en tant que tels. Puis nous les traduirons en espace $\mathcal{H}^{s,\gamma}$, ce qui nous sera utile pour la suite.

Soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ . Nous définissons

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(I) = \{u \mid \exists \tilde{u} \in \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+), \tilde{u}|_I = u\}.$$

On se reportera à [13] pour plus de détails.

Rappelons tout d'abord le lemme de Rellich :

Théorème 1.2.23 (Lemme de Rellich). *Soit Ω un compact de \mathbb{R} , alors pour tout $s > t$ l'injection :*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^t(\Omega)$$

est compacte.

¹Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m envoie l'espace H^s dans H^{s-m} .

Ce théorème se traduit naturellement dans les espaces $\mathcal{H}^{s,\gamma}$ par :

Proposition 1.2.24. *Soit I un intervalle compact de $]0, +\infty[$. Alors pour tout $s > t$ et $\gamma \geq \eta$, $\mathcal{H}^{s,\gamma}(I)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{H}^{t,\eta}(I)$.*

Démonstration. Comme S^{-1} et la multiplication par t^γ sont continues, c'est immédiat : on pose $\Omega = -\log(I)$,

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(I) = t^\gamma S^{-1} H^s(\Omega) \xrightarrow{\text{compact}} t^\gamma S^{-1} H^t(\Omega) = \mathcal{H}^{t,\gamma}(I) \xrightarrow{\text{continue}} \mathcal{H}^{t,\eta}(I),$$

si $\gamma \geq \eta$. □

On peut généraliser le théorème de Rellich, lorsque le domaine n'est pas borné, mais que les fonctions vérifient une décroissance exponentielle en l'infini. Pour cela, généralisons les espaces à poids $H^{s,\gamma}$ définis précédemment, de manière à autoriser un poids différent en $+\infty$ et $-\infty$.

Introduisons pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, une fonction e^{γ_1, γ_2} lisse, qui est égale à $e^{-\gamma_1 x}$ au voisinage de $-\infty$, et $e^{-\gamma_2 x}$ au voisinage de $+\infty$. On pose

$$H^{s,\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}) = e^{\gamma_1,\gamma_2} H^s(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, γ_1 indique le comportement en $+\infty$ et γ_2 en $-\infty$. Si $\gamma_2 = \gamma_1$, remarquons que la définition de H^{s,γ_1,γ_1} coïncide avec celle de H^{s,γ_1} .

Il est facile de voir que la définition de H^{s,γ_1,γ_2} ne dépend pas du choix de la fonction e^{γ_1,γ_2} .

Remarque 1.2.25. *Les asymptotiques du type $t^{-p}(\log t)^k$ se lisent en observant les pôles de la transformée de Mellin. De même, le comportement asymptotique en $e^{\gamma x}$ en $\pm\infty$ correspond à des pôles de la transformée de Fourier étendue sur \mathbb{C} .*

Proposition 1.2.26. *Pour tout $s > t$, pour tout $\gamma_i > \eta_i$, ($i = 1, 2$) l'injection :*

$$H^{s,\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{t,\eta_1,\eta_2}(\mathbb{R})$$

est compacte.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on coupe le domaine d'étude en trois : une partie compacte qui est gérée par le lemme de Rellich, et les parties à l'infini qui sont gérées par les exponentielles.

Démontrons tout d'abord ce résultat du côté $+\infty$. Considérons donc un compact Ω de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (c'est-à-dire contenant un intervalle du type $[a, +\infty[$).

Soit v_k une suite bornée de $H^{s,\gamma}(\Omega)$. Montrons qu'à une sous-suite près, v_k converge dans $H^{t,\eta}(\Omega)$.

Comme $v_k \in H^{s,\gamma}(\Omega)$, alors $v_k \in H^{s,\eta}(\Omega)$ car $\eta < \gamma$, il existe donc f_k, g_k dans $H^s(\Omega)$ tels que

$$v_k = e^{-\gamma x} f_k = e^{-\eta x} g_k \quad \Rightarrow \quad g_k = e^{-(\gamma-\eta)x} f_k.$$

Les suites f_k et g_k sont bornées dans $H^s(\Omega)$ (par définition de $H^{s,\gamma}(\Omega)$ et de v_k).

Pour $L > 0$, soit $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $] -\infty, L] \cap \Omega$. On écrit :

$$g_k = \Phi g_k + (1 - \Phi)g_k.$$

Or (Φg_k) est une suite bornée de $H^s(K)$ où K est un compact de \mathbb{R} . Donc pour tout $t < s$, à une sous suite près, (Φg_k) converge dans $H^t(\Omega)$ et par conséquent est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $L_\varepsilon > 0$ tel que $e^{-(\gamma-\eta)x} < e^{-(\gamma-\eta)L_\varepsilon} < \varepsilon$ pour tout $x > L_\varepsilon$. Pour ce L_ε , on définit Φ_ε comme ci-dessus. La suite $(\Phi_\varepsilon g_k)$ est bornée dans $H^t(\Omega)$. On peut donc construire une sous-suite telle qu'il existe N tel que pour tout $p, q > N$, $\|\Phi_\varepsilon g_p - \Phi_\varepsilon g_q\|_t < \varepsilon$, mais cette sous-suite dépend de ε . Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \|g_p - g_q\|_t &< \|\Phi g_p - \Phi g_q\|_t + e^{-(\gamma-\eta)L} \|f_p - f_q\|_t \\ &< \varepsilon(1 + \|f_p - f_q\|_s) \\ &< C\varepsilon, \end{aligned}$$

car (f_k) est bornée dans $H^s(\Omega)$.

On va construire une sous-suite qui converge (donc indépendamment de ε), par récurrence sur $\varepsilon = 2^{-k}$.

Pour $\varepsilon = 1$, on construit comme précédemment Φ_1 , ce qui nous permet d'extraire une sous-suite $g_{\Psi_1(n)}$ telle qu'il existe $N > 0$, pour tout $p, q > N$, $|g_{\Psi_1(p)} - g_{\Psi_1(q)}| < 1$. On choisit $p > N$, on pose $n_1 = \Psi_1(p)$. Donc pour tout $q > p$, i.e. $\Psi_1(q) > n_1$, $|g_{n_1} - g_{\Psi_1(q)}| < 1$.

On suppose la sous-suite construite jusqu'à n_k , puis pour $\varepsilon = 2^{-(k+1)}$, on construit Φ_{k+1} , ce qui permet d'extraire une sous-suite $g_{\Psi_1 \circ \dots \circ \Psi_k \circ \Psi_{k+1}(n)}$ notée $g_{\tilde{\Psi}_{k+1}(n)}$ telle qu'il existe $N > 0$, pour tout $p, q > N$, $|g_{\tilde{\Psi}_{k+1}(p)} - g_{\tilde{\Psi}_{k+1}(q)}| < 2^{-(k+1)}$. On choisit $p > N$ tel que $\tilde{\Psi}_{k+1}(p) = \tilde{\Psi}_k \circ \Psi_{k+1}(p) > n_k$, et on pose $n_{k+1} = \tilde{\Psi}_{k+1}(p)$, ce qui nous donne :

$$|g_{n_{k+1}} - g_{n_k}| < 2^{-k}, \quad \forall q > p (\Rightarrow \tilde{\Psi}_{k+1}(q) > n_{k+1}), |g_{n_{k+1}} - g_{\tilde{\Psi}_{k+1}(q)}| < 2^{-(k+1)}.$$

La suite (g_{n_k}) ainsi construite est donc de Cauchy dans $H^t(\Omega)$, par conséquent elle converge dans $H^t(\Omega)$, d'où (v_k) converge dans $H^{t,\eta}(\Omega)$.

On démontre exactement de la même façon ce résultat pour un compact Ω de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ce qui termine la preuve. \square

De même que pour la proposition 1.2.24, la proposition 1.2.26 se traduit en terme d'espace $\mathcal{H}^{s,\gamma}$ par la proposition suivante :

Proposition 1.2.27. *Soit I un intervalle compact de $[0, +\infty[$. Alors pour tout $s > t$ et $\gamma > \eta$, $\mathcal{H}^{s,\gamma}(I)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{H}^{t,\eta}(I)$.*

Démonstration. L'opérateur S^{-1} est continue, donc en posant $\Omega = -\log(I)$,

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(I) = S^{-1}H^{s,\gamma}(\Omega) \xrightarrow{\text{compact}} S^{-1}H^{t,\eta}(\Omega) = \mathcal{H}^{t,\eta}(I)$$

\square

Autrement dit, en terme d'espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}$, cela s'écrit simplement :

Proposition 1.2.28. *Pour tous $s > t, \gamma > \eta$, pour tout compact K de $[0, +\infty[$, l'injection suivante est compacte :*

$$\mathcal{K}_K^{s,\gamma} \hookrightarrow \mathcal{K}_K^{t,\eta}.$$

Enfin, la proposition suivante est également une simple traduction de la proposition 1.2.26 :

Proposition 1.2.29. *Pour tous $s > t, \varepsilon > 0$, l'injection suivante est compacte :*

$$\mathcal{H}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{H}^{s,-\varepsilon}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow \mathcal{H}^t(\mathbb{R}_+),$$

où la norme sur $\mathcal{H}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{H}^{s,-\varepsilon}(\mathbb{R}_+)$ est $\|u\| = \max(\|u\|_{s,\varepsilon}, \|u\|_{s,-\varepsilon})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathcal{H}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{H}^{s,-\varepsilon}(\mathbb{R}_+) = S^{-1}H^{s,\varepsilon,\varepsilon}$. \square

La proposition 1.2.29 ne nous sera pas utile, elle ne sert que si nous choisissons d'étudier également les asymptotiques en l'infini. Cependant, nous avons souhaité la présenter ici comme une application directe de la proposition 1.2.26.

1.2.3 Asymptotiques conormales

Nous souhaitons connaître le comportements asymptotiques des éléments de $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$. Nous allons donc définir des sous-espaces de $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, notés $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, de fonctions ayant le comportement asymptotique P . Pour cela, il faut donc choisir une base de comportement asymptotique. Cette base sera constituée d'éléments du type :

$$t^{-p_j} \log^k t,$$

où p_j est complexe, et k est entier.

Pourquoi ce choix ? D'une part, nous savons que le comportement de solutions de problèmes elliptiques sur des variétés coniques, est de ce type près de la pointe [20], [28]. Nous constatons également que lorsque la condition de transmission n'est pas respectée, c'est ce type de singularités qui apparaît [1]. D'autre part, nous considérons des espaces de Sobolev à poids exponentiel, puis nous nous replaçons sur \mathbb{R}^+ par le changement de variable $x = -\log(t)$. Il est donc naturel de voir apparaître ce type d'asymptotique. Enfin, pour nous convaincre, nous pouvons faire le petit calcul suivant à l'aide de l'exemple 1.1.8 :

$$\begin{aligned} M((-t\partial_t)^n u) &= z^n M u, \quad M \left(\mathbf{1}_{[0,1]} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1} t \right) = z^{-n}, \\ \Rightarrow M \left(\mathbf{1}_{[0,1]} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1} \star u \right) &= z^{-n} M u. \end{aligned}$$

Ainsi l'inverse de l'opérateur $(-t\partial_t)^n$ est la convolution par $\mathbf{1}_{[0,1]} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1} t$: nous voyons à nouveau apparaître une puissance de log près de zéro.

On appelle asymptotiques conormales, des asymptotiques de la forme :

$$u(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m_j} c_{j,k} t^{-p_j} \log^k t. \quad (1.26)$$

On rappelle (exemple 1.1.8) que si $\mathbf{Re}(p_j) < \frac{1}{2}$, la transformée de Mellin d'une telle fonction tronquée à l'infini est méromorphe de pôles p_j de multiplicité $m_j + 1$.

Définissons les types d'asymptotique, qui correspondent aux puissances (p_j, k) des asymptotiques conormales. Cette définition autorise la possibilité d'un nombre infini de $\{p_j\}$ (développement asymptotique). En revanche, sur chaque bande complexe $\{\alpha < \mathbf{Re}(z) < \beta\}$, il ne doit y en avoir qu'un nombre fini.

Définition 1.2.30. On appelle types d'asymptotique discrets les ensembles

$$P = \{(p_j, m_j), p_j \in \mathbb{C}, m_j \in \mathbb{N}\}$$

tels que $\pi_{\mathbb{C}} P \cap \{\alpha < \mathbf{Re}(z) < \beta\}$ est fini pour tous α et β dans \mathbb{R} , où $\pi_{\mathbb{C}}$ est la projection de $\mathbb{C} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. On note \mathcal{R} l'ensemble de ces types d'asymptotique discrets.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, on note \mathcal{R}^γ l'ensemble des $P \in \mathcal{R}$ tels que :

$$\{\pi_{\mathbb{C}} P \cap \{\mathbf{Re}(z) = 1/2 - \gamma\}\} = \emptyset.$$

Si $P \in \mathcal{R}^\gamma$, on note $P(\gamma) = \{(p_j, m_j) \in P, \mathbf{Re}(p_j) < 1/2 - \gamma\}$.

Parmi tous les types d'asymptotique, retenons l'exemple le plus classique, qui est le type d'asymptotique de Taylor :

$$\mathcal{T} = \{(-j, 0), j \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{T}(\gamma) = \{(-j, 0) \in \mathcal{T}, j > \gamma - \frac{1}{2}\}.$$

Définition 1.2.31. Soit A un ensemble de \mathbb{C} . On appelle une A -excision, une application $0 \leq \chi \leq 1$ de classe $C^\infty(\mathbb{C})$ qui vaut zéro sur un voisinage de A et 1 en dehors d'un voisinage de A .

Pour simplifier, si P est un type d'asymptotique discret, nous parlerons d'une P -excision au lieu d'une $\pi_{\mathbb{C}} P$ -excision.

Comme nous l'avons rappelé, il existe un lien direct entre le comportement asymptotique d'une fonction u et le comportement analytique de sa transformée de Mellin :

Proposition 1.2.32. Si $u \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ admet en zéro le développement asymptotique :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k} t^{-p_j} \log^k t + O(|t^{-p_N} \log^{m_N} t|),$$

alors

$$Mu(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k} \frac{(-1)^k k!}{(z - p_j)^{k+1}} + h_N(z),$$

où $h_N \in \mathcal{A}(\mathbf{Re}(z) > -\mathbf{Re}(p_N))$.

Démonstration. Il suffit de voir que :

$$u(t) = O(|t^{-p_N} \log^{m_N} t|) \Rightarrow Mu(z) \in \mathcal{A}(\operatorname{Re}(z) > -\operatorname{Re}(p_N)).$$

Il existe $a, b > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout réel t , pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > -\operatorname{Re}(p_N)$:

$$|t^{z-1}u(t)| \leq Ct^{\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Re}(p_N)-1} \log^{m_N} t \mathbf{1}_{[0,a]} + C\mathbf{1}_{[a,b]},$$

donc le théorème d'intégrales à paramètre holomorphe s'applique sur tout compact de $\{\operatorname{Re}(z) > -\operatorname{Re}(p_N)\}$. □

1.2.4 Les espaces $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$

Nous notons $\omega_{p,k} = t^{-p} \log^k(t) \omega(t)$ où $\omega \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ vaut 1 près de zéro. La fonction $\omega_{p,k}$ est donc un élément de la base d'asymptotiques que nous avons définie au paragraphe précédent.

Proposition 1.2.33. *Nous avons $\omega_{p,k} \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ pour tout réel s , si et seulement si $\operatorname{Re}(p) < \frac{1}{2} - \gamma$.*

Démonstration. On montre par récurrence que pour tout entier n , il existe des réels c_j tels que :

$$\left(-t \frac{\partial}{\partial t}\right)^n (t^{-p} \log^k(t)) = t^{-p} \sum_{j=0}^n c_j \log^j t,$$

donc pour tout entier n , $(-t\partial_t)^n \omega_{p,k} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si $\operatorname{Re}(p) < \frac{1}{2}$. □

Pour tout type d'asymptotique P , nous définissons $\mathcal{D}(P, \gamma)$, sous-espace de $\mathcal{K}^{\infty,\gamma}$, par :

$$\mathcal{D}(P, \gamma) = \operatorname{Vect}\{\omega_{p,k} \mid (p, k) \in P(\gamma)\}.$$

Les espaces à asymptotiques $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ sont les sous-espaces des éléments de $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ possédant des asymptotiques de type $P(\gamma)$.

Nous dirons qu'un élément de $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ possède l'asymptotique de type P , s'il s'écrit comme un élément sans asymptotique (nous dirons un élément plat), plus une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{D}(P, \gamma)$.

Avant de définir les espaces à asymptotiques $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, commençons donc par définir les éléments plats, c'est-à-dire sans asymptotique.

Pour tout $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, pour tous $s \in \mathbb{R}, \beta > 0$, soit :

$$\|h\|_{s,\beta} = \left(\int_{\Gamma_{1/2-\beta}} (1 + |z|^2)^s |h(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} \right)^{1/2},$$

et soit l'espace

$$\mathcal{A}^s = \{h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) : \sup_{\beta > \varepsilon} \|h\|_{s,\beta} < +\infty, \forall \varepsilon > 0\}.$$

Définition 1.2.34. Pour tout compact K de $[0, +\infty[$, pour tout réel s , on définit

$$\mathcal{K}_0^s(K) = \{u \in M^{-1}\mathcal{A}^s \mid \text{Supp } u \subset K\}.$$

Proposition 1.2.35. Pour tout K compact de $[0, +\infty[$, pour tout réel s , l'espace $\mathcal{K}_0^s(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{K}_0^s(K)$. Donc $u_n \in M^{-1}\mathcal{A}^s$, et par définition de \mathcal{A}^s , cela signifie que la suite u_n est dans l'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, et est une suite de Cauchy. Donc la suite (u_n) converge vers $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, et il est facile de voir que son support est inclus dans K (comme dans la preuve de la proposition 1.2.11). \square

On remarque qu'on a en même temps montré que pour tout réel s , $\mathcal{K}_0^s(K) \subset \mathcal{K}_K^s$. On peut maintenant définir l'espace des fonctions de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$ à support compact :

Définition 1.2.36. Pour tout réel s , on définit l'espace $\mathcal{K}_0^s(\mathbb{R}^+)$ comme étant la limite inductive des espaces de Fréchet $\{\mathcal{K}_0^s([0, N])\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ munis de la topologie induite par la norme sur $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$.

Remarque 1.2.37. L'espace $\mathcal{H}_0^s(\mathbb{R}^+) = M^{-1}\mathcal{A}^s$ est l'espace des éléments plats en zéro et en l'infini. En effet, s'il est nécessaire d'étudier le comportement asymptotique près de zéro et de l'infini, il faut considérer séparément les deux demi-plans complexes $\{\text{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$ et $\{\text{Re}(z) > \frac{1}{2}\}$. Ce qui se passe à gauche de la droite $\{\text{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$ concerne le comportement en zéro, et à droite le comportement en l'infini.

Exemple 1.2.38. On a $M(e^{-1/t}) = \Gamma(-z) \in \mathcal{A}(\text{Re}(z) < \frac{1}{2})$, donc $e^{-1/t}$ est plat en zéro, mais pas en l'infini.

Comme nous ne considérons que le comportement près de zéro en tronquant par une fonction ω plateau autour de zéro, nous choisissons de définir ainsi les fonctions plates en zéro (en l'infini, la fonction est tronquée, donc nécessairement plate), puis nous rajoutons les pôles autour de zéro.

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, pour tout type d'asymptotique $P \in \mathcal{R}^\gamma$, on définit l'espace à asymptotiques $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) = \mathcal{K}_0^s(\mathbb{R}^+) \oplus \mathcal{D}(P, \gamma).$$

Lorsque $\gamma = 0$, nous notons $\mathcal{K}_P^{s,0}(\mathbb{R}^+) = \mathcal{K}_P^s(\mathbb{R}^+)$.

Il est très important de remarquer que dans cette notation, l'asymptotique P devrait en fait (par définition de ces espaces) être remplacé par $P(\gamma)$. Pour alléger les notations, et le γ apparaissant déjà en exposant, nous parlerons donc des espaces $\mathcal{K}_P^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, indiquant ainsi implicitement que l'asymptotique de ses éléments sont du type $P(\gamma)$. En particulier, si $u \in \mathcal{K}_P^s(\mathbb{R}^+)$, alors le type d'asymptotique de u est $P(0)$.

Remarque 1.2.39. Remarquons que le même travail peut être fait au voisinage de l'infini. En effet, $t^{-p} \log^k(t) \mathbf{1}_{[1,+\infty[} \in \mathcal{H}^{\infty,\gamma}$ si et seulement si $\mathbf{Re}(p) > \frac{1}{2} - \gamma$, et l'on peut de même étudier le comportement asymptotique près de l'infini des éléments de $\mathcal{H}^{s,\gamma}$ en considérant les pôles p dans le domaine Mellin tels que $\mathbf{Re}(p) > \frac{1}{2} - \gamma$. Cela revient en fait à faire le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Nous désignons par \mathcal{D}_P l'espace :

$$\mathcal{D}_P = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{K}_P^s(\mathbb{R}^+).$$

On remarque que $\mathcal{D}_P \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^+ , à support compact dans $[0, +\infty[$, et possédant le type d'asymptotique $P(0)$ près de zéro.

Nous avons pu constater que l'opérateur différentiel "agréable" en domaine Mellin est l'opérateur $-t\partial_t$, c'est-à-dire un opérateur de Fuchs. Un opérateur de Fuchs s'écrit sous la forme :

$$\sum a_j \left(-t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j.$$

Le principal apport de cette théorie est l'étude du comportement asymptotique. Avant de nous intéresser aux opérateurs pseudo-différentiels, nous pouvons déjà voir comment sont transportées les asymptotiques par quelques opérateurs simples (opérateurs de Fuchs, multiplication par t^a).

Théorème 1.2.40 (Transport d'asymptotiques). *Les asymptotiques sont transportées de la manière suivante par :*

– les opérateurs de dérivation :

$$t \frac{d}{dt} : \mathcal{D}_P \rightarrow \mathcal{D}_P,$$

– l'opérateur de multiplication par t^a , pour tout réel $a \geq 0$:

$$t^a : \mathcal{D}_P \rightarrow \mathcal{D}_{T^{-a}P},$$

$$\text{où } T^{-a}P = \{(p_j - a, m_j), (p_j, m_j) \in P\},$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{D}_P$, alors

$$u = \sum_j \sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k} t^{-p_j} \log^k t \omega + u_0,$$

où u_0 est plate. Alors

$$M(-t\partial_t u_0)(z) = z M u_0(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}), \quad M(t^a u_0)(z) = M u_0(z - a) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}),$$

et

$$-t\partial_t t^{-p_j} \log^k t \omega = -p_j t^{-p_j} \log^k(t) \omega + k t^{-p_j} \log^{k-1} t \omega + t^{-p_j+1} \log^k(t) \omega',$$

et ω' est nulle près de zéro (ω est une fonction plateau autour de zéro).

□

1.3 Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+

Avant d'aborder la théorie pseudo-différentielle de Mellin, commençons par quelques rappels sur la théorie pseudo-différentielle. L'idée est de remplacer l'étude d'opérateurs par l'étude de fonctions associées (symbole de l'opérateur). Afin de préciser cette idée, donnons un premier exemple très simple : cherchons la solution élémentaire de l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u = \delta_0.$$

Par transformée de Fourier, on transforme cette équation aux dérivées partielles en un problème de division par un polynôme :

$$-||\xi||^2 \hat{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad u = -F^{-1}||\xi||^{-2}.$$

Le polynôme $-||\xi||^2$ est le symbole de l'opérateur de Laplace Δ , opérateur différentiel d'ordre 2.

Notons $D = -i\partial_x$, soit $P = \sum_{k=0}^m a_k D^k$ un polynôme différentiel d'ordre m à coefficients constants. Alors

$$FPu = a(\xi)\hat{u} \quad \text{où} \quad a(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k,$$

on dit que a est le symbole de P , et $a_m(\xi) = a_m \xi^m$ est le symbole principal de P . Le symbole a est dit d'ordre m . De tels opérateurs peuvent être multipliés : le symbole du produit est le produit des symboles (car les coefficients sont constants) : si $Q = \sum_{j=0}^n b_j D^j$, alors le symbole de PQ est $c(\xi) = a(\xi)b(\xi)$, où $b(\xi) = \sum_{j=0}^n b_j \xi^j$; le symbole c est d'ordre $m+n$.

On peut en fait généraliser à des symboles non polynomiaux. On note alors $A = \text{op}(a)$ l'opérateur défini par :

$$\text{op}(a)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Une fonction a doit vérifier un certain nombre d'hypothèses pour être un symbole, on renvoie pour cela à la définition 1.3.1. C'est le comportement asymptotique en $\xi \rightarrow \infty$ qui est important. On souhaite que a ait un comportement polynomial en ξ (et l'ordre du symbole sera alors l'ordre de ce polynôme), dont la puissance décroît par dérivation en ξ . D'autre part, on souhaite également qu'en dérivant par rapport à x , on garde ce comportement asymptotique (de même ordre). Cela permet de fabriquer une classe de symboles, notée S^m qui contient les symboles d'ordre m .

Le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels A et B , de symboles respectifs a et b , est encore un opérateur pseudo-différentiel C de symbole c , qui s'écrit asymptotiquement :

$$c = a \# b \sim \sum_j \frac{1}{j!} \partial_\xi^j a D_x^j b.$$

C'est ce que l'on appelle le *calcul symbolique*.

L'un des intérêts de cette théorie est de pouvoir calculer l'inverse d'un opérateur à l'aide du calcul symbolique. Revenons à l'exemple de l'opérateur de Laplace : on a en fait calculé un opérateur $\text{op} \frac{-1}{\|\xi\|^2}$ qui inverse le laplacien. D'une manière générale, on ne pourra pas calculer exactement l'inverse d'un opérateur de symbole a non nul, mais l'approcher par l'opérateur de symbole $\frac{1}{a(x, \xi)}$. Par approcher, on entend calculer modulo un opérateur très régularisant. C'est ce que l'on appelle calculer une *paramétrix*, ou *pseudo-inverse*.

Nous renvoyons à l'ouvrage de Alinhac et Gérard [1] pour plus de détails.

Pour construire des opérateurs pseudo-différentiels au sens de Mellin, l'idée est exactement la même. Cette fois, l'opérateur différentiel de référence est $-t\partial_t$ sur \mathbb{R}^+ :

$$M(-t\partial_t u)(z) = zMu(z).$$

Un polynôme différentiel en $-t\partial_t$ est appelé *opérateur de Fuchs*. La transformée de Mellin transforme un tel polynôme différentiel en un symbole polynômial en z .

Si $a(t, z)$ est une fonction "raisonnable" (voir la définition 1.3.8), on peut définir de même que précédemment un opérateur dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ par :

$$\text{op}_M a(u)(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \int_0^{+\infty} a(s, z) \left(\frac{t}{s}\right)^z u(t) \frac{dt}{t} dz. \quad (1.27)$$

Cette section sert à introduire les outils dont nous aurons besoin par la suite. Sauf indication contraire, toutes les démonstrations peuvent être trouvées dans [43].

1.3.1 Notations issues de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}

Rappelons tout d'abord quelques définitions et résultats issus de la théorie pseudo-différentielle de Fourier. Pour les démonstrations, on se reportera à [1].

Définition 1.3.1 (Symboles d'ordre m). Soit $m \in \mathbb{R}$. On note S^m l'ensemble des $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad |\partial_t^\alpha \partial_\xi^\beta a(t, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-\beta}.$$

On note $S^\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$.

Lemme 1.3.2. Soient $a_1, \dots, a_k \in S^0$ et $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$, alors $F(a_1, \dots, a_k) \in S^0$.

Proposition 1.3.3. Soient $a_j \in S^{m_j}$ pour une suite décroissante $m_j \rightarrow -\infty$. Alors il existe $a \in S^{m_0}$ tel que $a \sim \sum a_j$ au sens où :

$$\forall k \geq 0, \quad a - \sum_{j=0}^k a_j \in S^{m_{k+1}}.$$

On dit qu'un symbole est classique si l'on peut écrire son développement asymptotique comme une somme de symboles homogènes d'ordre $m - j$:

Définition 1.3.4. Un symbole $a \in S^m$ est dit classique si $a \sim \sum a_j$, les a_j étant homogènes d'ordre $m - j$ pour $|z| \geq 1$. On note S_{cl}^m l'ensemble des symboles classiques de S^m .

Enfin, on peut écrire tout symbole comme la restriction à la droite $\left\{ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \right\}$ d'une fonction analytique :

Lemme 1.3.5 ([43], prop 1.2.4.10). Pour tout symbole $a \in S^m$, il existe $b \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}(\mathbb{C}))$ tel que

$$a(t, \xi) - b(t, \frac{1}{2} + i\xi) \in S^{m-1}.$$

Pour la preuve, on se reportera à [43].

1.3.2 Définition d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ .

Il faut tout d'abord définir les symboles. La définition diffère très peu de celle de la théorie de Fourier. La différence provient du fait que les symboles sont définis avec une variable complexe, c'est-à-dire qu'un symbole a s'écrira comme $a(t, x + i\xi)$. Mais cela revient à multiplier par e^{-tx} le symbole $a(t, i\xi)$. Or la multiplication par une fonction de classe C^∞ ne change pas l'ordre d'un opérateur pseudo-différentiel. C'est pourquoi on définit simplement les symboles de Mellin comme étant des fonctions analytiques sur \mathbb{C} , symboles d'ordre m en la variable ξ , pour tout x fixé dans \mathbb{R} .

Définition 1.3.6 (Symboles de Mellin d'ordre m). Soit $m \in \mathbb{R}$. On note S_0^m l'ensemble des $a \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto a(x + i\xi) \in S_{cl}^m$.

L'apport principal de cette théorie est la prise en compte du comportement asymptotique près de zéro. Or nous avons vu précédemment que ce comportement était visible en domaine Mellin par la présence de pôles. Il est donc important de pouvoir classer les symboles en fonction de leur comportement analytique.

Définition 1.3.7 (Symboles de Mellin d'ordre m , de type d'asymptotique P). Soit $m \in \mathbb{R}$, $P = \{(p_j, m_j)\} \in \mathcal{R}$. On note S_P^m l'ensemble des $a \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \pi_{\mathbb{C}} P)$, méromorphes de pôles p_j de multiplicité m_j tels que pour toute P -excision χ , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \chi a(x + i\xi) \in S_{cl}^m$.

Rappelons qu'en théorie pseudo-différentielle, les symboles a d'ordre m indépendants de t sont des opérateurs de convolution par $F^{-1}a$ (au sens des distributions). De même ici, les symboles $a(z) = a(x + i\xi)$ d'ordre m sont des opérateurs de convolution par $M^{-1}a$. En assimilant l'ensemble S_0^m des symboles de Mellin analytiques d'ordre m à l'ensemble des distributions par qui la convolution est un opérateur d'ordre m , nous pouvons visualiser l'espace S_P^m comme :

$$S_P^m = S_0^m + \mathcal{D}_P.$$

Par extension de la théorie habituelle, nous noterons $S^m = \bigcup_{P \in \mathcal{R}} S_P^m$ l'ensemble des symboles de Mellin. Enfin, nous notons $S^{m, \gamma} = \bigcup_{P \in \mathcal{R}^\gamma} S_P^m$.

Pour simplifier les notations, nous noterons un élément a de $C^\infty(\mathbb{R}^+, S^m)$ comme la fonction à deux variables $a(t, z) \in S^m(\mathbb{R}^+)$.

Nous disposons de classes de symboles, nous pouvons donc définir les opérateurs pseudo-différentiels de Mellin.

Définition 1.3.8. [Opérateur pseudo-différentiel de Mellin] Soit $P \in \mathcal{R}^0$, pour tout $a \in S^m(\mathbb{R}^+)$, on définit $A = \text{op}_M a$ opérateur pseudo-différentiel de Mellin par :

$$\text{op}_M a(u)(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \int_0^{+\infty} a(s, z) \left(\frac{t}{s}\right)^z u(t) \frac{dt}{t} dz.$$

1.3.3 Cas particulier des symboles indépendants de t

Comme dans la théorie de Fourier, on peut multiplier des opérateurs et des symboles. Si les symboles ne dépendent pas de t , le produit des symboles est le symbole du produit des opérateurs, comme l'indique la proposition suivante. Ayant rajouté une classification sur le comportement analytique des symboles, il faut également connaître celui du produit de deux symboles.

Proposition 1.3.9 ([43], prop 1.2.3.7). Soient $h_1 \in S_P^m$ et $h_2 \in S_Q^n$, où $P, Q \in \mathcal{R}^0$. Alors $h_1 h_2 \in S_{P+Q}^{m+n}$ où

$$\begin{aligned} P + Q &= \{(p_j, m_j), (q_k, n_k) : (p_j, m_j) \in P, (q_k, n_k) \in Q, p_j \neq q_k\} \\ &\cup \{(p_j, m_j + n_j + 1) : (p_j, m_j) \in P, (p_j, n_j) \in Q\}. \end{aligned}$$

De plus, la composée $\text{op}_M(h_1) \text{op}_M(h_2)$ a un sens et

$$\text{op}_M(h_1) \text{op}_M(h_2) = \text{op}_M(h_1 h_2).$$

Un symbole d'ordre m et d'asymptotique P peut se décomposer en un symbole plat d'ordre m , c'est-à-dire qui contient l'information importante au sens pseudo-différentiel habituel, et d'un symbole d'opérateur très régularisant mais d'asymptotique P , c'est-à-dire ne contenant que l'information nouvelle. Ce résultat permettra de décomposer les problèmes en deux problèmes séparés.

Proposition 1.3.10 ([43], thm 1.2.3.6). Tout $h \in S_P^m$ peut se décomposer comme $h = h_1 + h_2$, où $h_1 \in S_0^m$ et $h_2 \in S_P^{-\infty}$.

Remarque 1.3.11. Pour $h \in S_P^m$, où $P \in \mathcal{R}^0$, l'opérateur $\text{op}_M(h)$ est un opérateur de convolution de Mellin par $M^{-1}(h)$.

Il est important de savoir comment sont transportées les asymptotiques par ce type d'opérateur :

Proposition 1.3.12 (Transport des asymptotiques, [43], prop 1.2.18). Soit $h \in S_P^m$, $P \in \mathcal{R}^0$ alors l'opérateur $\text{op}_M(h)$ transporte les asymptotiques de la manière suivante :

$$\text{op}_M(h) : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_{P+Q}.$$

Du point de vue de la régularité Sobolev, le comportement de tels opérateurs est celui attendu.

Proposition 1.3.13. *Soit $P \in \mathcal{R}^0$, pour tout $h \in S_P^m$, l'opérateur $\text{op}_M(h)$ induit pour tout réel s la continuité suivante :*

$$\text{op}_M(h) : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+).$$

Démonstration. Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Alors

$$|M(\text{op}_M(h)u)(z)| = |h(z)||Mu(z)| \leq C(1 + |z|)^m |Mu(z)|,$$

car $h \in S^m$ d'où

$$\|\text{op}_M(h)u\|_{s-m}^2 = \int_{\Gamma_{1/2}} (1 + |z|^2)^{s-m} |h(z)Mu(z)|^2 \frac{dz}{2i\pi} \leq C \|u\|_s^2.$$

On conclut par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, puis la multiplication par ω permet d'assurer la continuité cherchée. \square

1.3.4 Etude du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ .

Si $a \in S^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, calculons le noyau de l'opérateur $\text{op}_M a$

$$\begin{aligned} Au(s) = \text{op}_M a(u)(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \int_0^{+\infty} a(s, z) \left(\frac{t}{s}\right)^z u(t) \frac{dt}{t} dz \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \left(\frac{t}{s}\right)^z a(s, z) dz u(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} K_A(s, t) u(t) \frac{dt}{t}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

où

$$K_A(s, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \left(\frac{t}{s}\right)^z a(s, z) dz. \tag{1.29}$$

Posons $\widetilde{K}_A(s, \rho) = K_A\left(s, \frac{s}{\rho}\right)$.

Lorsque $a \in S^m$, on peut interpréter (1.29) comme $\widetilde{K}_A(s, \rho) = M_{z \rightarrow \rho}^{-1}(a(s, z))$. Inversement, on peut donc écrire pour $a \in S^m$,

$$a(s, z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^z K_A(s, t) \frac{dt}{t}. \tag{1.30}$$

Définition 1.3.14. On note ML^m l'ensemble des opérateurs $A + G$ où A est un opérateur pseudo-différentiel de Mellin de symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^+)$ à support propre et G est un opérateur à noyau $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ (c'est-à-dire très régularisant).

Soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ stable par inversion. Nous notons $C_*^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(I)$ telles que $t \mapsto u(\frac{1}{t}) \in C^\infty(I)$. Le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel de Mellin est C^∞ partout, sauf en 1. Donc de même que dans la théorie habituelle, l'information importante des opérateurs pseudo-différentiels (l'information de régularité Sobolev) se trouve sur la diagonale $\{s = t\}$. On trouvera l'information nouvelle concernant le comportement asymptotique près de zéro sur les droites $\{s = 0\}$ et $\{t = 0\}$.

Proposition 1.3.15 ([43], prop 1.2.4.8). *Si $a \in S^m$ alors*

$$\widetilde{K}_A(s, \rho) \in C_*^\infty(\overline{\mathbb{R}_+} \times (\overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{-1\})),$$

$$(1 - \psi(\rho))\widetilde{K}_A(s, \rho) \in C_*^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{T}(\mathbb{R}_+)),$$

où ψ est une fonction plateau autour de 1 et $\mathcal{T}(\mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R}_+) : \forall N \in \mathbb{N}, \log^N t \cdot u(t) \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R}_+)\}$.

Inversement, si $\widetilde{K}_A(s, \rho) \in C_*^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{T}(\mathbb{R}_+))$, alors (1.30) définit $a \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, S^{-\infty})$.

Corollaire 1.3.16 ([43], cor 1.2.4.9). *Tout opérateur pseudo-différentiel de Mellin A défini par (1.27) de symbole $a \in S^m$ est dans ML^m .*

Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'étude où les fonctions sont à support compact dans $[0, +\infty[$. Il est donc nécessaire d'avoir des opérateurs qui restent dans ces espaces.

Définition 1.3.17. *Soit A un opérateur de noyau K . On dit que A est à support compact si le noyau K est à support compact dans $[0, +\infty]^2$.*

Une autre manière d'exprimer cette définition est de dire que A est à support compact s'il existe un compact K de $[0, +\infty]^2$ tel que pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, Au est à support dans K .

1.3.5 Lien avec les opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R} .

Nous avons pu observer un lien très fort entre les deux théories. Un opérateur pseudo-différentiel de Mellin peut-être vu comme un opérateur pseudo-différentiel de Fourier, et l'on peut donc définir son symbole principal à l'aide du symbole principal de la théorie de Fourier :

Théorème 1.3.18. *Soit $a \in S_P^m$, où $P \in \mathcal{R}^0$. Alors $A = \text{op}_M(a)$ peut-être vu comme un opérateur pseudo-différentiel de Fourier,*

$$a_F(A)(t, \xi) \sim a\left(t, \frac{1}{2} + it\xi\right) \mod (S_{cl}^{m-1}), \quad (1.31)$$

où a_F est le symbole Fourier de A ($A = \text{op}(a_F)$).

On peut ainsi définir le symbole principal de $a \in S^m$:

Définition 1.3.19. Soit $a \in S_P^m$, où $P \in \mathcal{R}^0$. On appelle *symbole principal* de $A = \text{op}_M a$

$$\sigma_b^m(\text{op}_M a)(s, \xi) = a^{(m)}\left(t, \frac{1}{2} + i\xi\right) = a_F^m\left(s, \frac{\xi}{s}\right), \quad (1.32)$$

où $a^{(m)}$ est la partie homogène principale de a , et a_F est le symbole classique de l'opérateur $\text{op}_M(a)$.

Si $A \in ML^m$, alors avec ces notations, $A - \text{op}_M(a^{(m)}) \in ML^{m-1}$.

Enfin, le résultat qui suit nous semble extrêmement important, car il nous permet de faire le lien entre opérateur sur \mathbb{R} restreint à \mathbb{R}^+ , et opérateur sur \mathbb{R}^+ .

On note r^+ l'opérateur de restriction à \mathbb{R}_+ :

$$r^+ : u \mapsto u|_{\mathbb{R}_+},$$

et e^+ l'opérateur qui prolonge une application de \mathbb{R}_+ à tout \mathbb{R} par zéro :

$$e^+ : u \mapsto \bar{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit l'opérateur $\text{op}_\psi(a) = r^+ \text{op}(a) e^+$ la restriction à \mathbb{R}^+ d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R} . Ces opérateurs seront étudiés plus en détail dans la section 1.5. Le résultat suivant est cependant fondamental, et la clé de l'étude plus précise qui sera faite dans la section 1.5.

Proposition 1.3.20. Soit $a \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, S^{m,0})$, soit ω une fonction plateau autour de zéro. alors pour tout réel s ,

$$\omega \text{op}_\psi a \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+).$$

Cette proposition est un corollaire des théorèmes 1.2.3.14 et 1.2.3.16 de [43]. Afin d'en faciliter la lecture, précisons les ingrédients de ce résultat. Cela nécessite de regarder des symboles qui dépendent des deux variables s et t , et plus seulement s . Nous n'utiliserons pas de tels symboles par la suite. Pour tout symbole $a \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+, S^m)$, m réel, on définit pour tout $u \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$:

$$\text{op}_M a u(s) = \int_{\Gamma_{1/2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^z a(s, t, z) u(t) \frac{dt}{t} \frac{dz}{2i\pi}.$$

Cette définition est formelle et peut-être justifiée à l'aide d'intégrales oscillantes.

Théorème 1.3.21 ([43], thm 1.2.3.14). Pour tout réel m , il existe une bijection

$$\Psi : C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \overline{\mathbb{R}^+}, S^{m,0}) \rightarrow C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \overline{\mathbb{R}^+}, S^{m,0}),$$

telle que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$,

$$\text{op}_M(a)u(t) = \text{op}_\psi(\Psi a)u(t).$$

Pour montrer ce théorème, on écrit formellement l'égalité par un changement de variable, puis on prouve ensuite que Ψa qui apparaît est bien un symbole [43].

Proposition 1.3.22 ([43], prop 1.2.3.16). *Soit $a \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \overline{\mathbb{R}^+}, S_P^m)$ (où $P \in \mathcal{R}^0$), alors pour tout réel s , pour toute fonction plateau ω , $\omega \operatorname{op}_M(a)\omega$ induit l'opérateur continu :*

$$\omega \operatorname{op}_M(a)\omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+).$$

Comme on a clairement $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, S^{m,0}) \subset C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \overline{\mathbb{R}^+}, S^{m,0})$, ces deux résultats donnent donc immédiatement la proposition 1.3.20.

1.4 Le développement de Mellin

Ecrire un symbole classique a sous la forme d'une somme de symboles homogènes d'ordre $m - j$ est une façon d'écrire un développement contenant les informations importantes de a , et essentiellement son symbole principal. Or il est maintenant également nécessaire de pouvoir développer un symbole comme une somme de symboles *conormaux*, c'est-à-dire des opérateurs de la forme $t^j \operatorname{op}_M h_j$. C'est en effet cette décomposition qui permettra d'analyser le comportement asymptotique près de zéro.

Dans cette section, nous allons donc étudier une classe particulière d'opérateurs pseudo-différentiels de Mellin. Nous noterons $\mathbf{L}^{m,(k)}$, où $m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, cette classe d'opérateurs qui s'écrivent sous la forme :

$$A = \sum_{j=0}^k t^j \operatorname{op}_M(h_j) + F + G,$$

où h_j sont des symboles d'ordre m ne dépendant pas de t , F est un opérateur d'ordre m plat à l'ordre k et G un opérateur de Green à l'ordre k . Tous ces opérateurs vont être définis par la suite de façon précise. Mais nous pouvons déjà en donner une définition "avec les mains".

Nous avons déjà rencontré les opérateurs de type $\operatorname{op}_M(h_j)$. Ce sont des opérateurs de convolution (car h_j ne dépend pas de t), qui transportent les asymptotiques de la fonction test, selon le type d'asymptotique de h_j .

Un opérateur d'ordre m *plat à l'ordre k* est un opérateur pseudo-différentiel de symbole classique d'ordre m , mais qui aplanit les asymptotiques de la fonction test à l'ordre k (en gros de type $O(t^k)$: nous donnerons la définition précise au paragraphe 1.4.2).

Un *opérateur de Green* est un opérateur très régulier au sens pseudo-différentiel classique, c'est à dire dont le noyau $g(s, t)$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. En revanche, cet opérateur possède des asymptotiques près de zéro : un opérateur de Green va absorber les singularités de la fonction test et lui imposer son propre type d'asymptotique (qui est intégrable de type L^2).

Cette classe d'opérateur est intéressante à deux titres. Tout d'abord d'un point de vue théorique : elle semble nous indiquer un moyen de développer un opérateur près d'une singularité. Dans cette section, nous définissons ces opérateurs sur \mathbb{R}^+ , ce qui impose le choix des h_j de façon unique. Nous pouvons cependant espérer obtenir de cette façon

un développement symbolique près d'une pointe de la surface diffractante étudiée, à l'aide de troncatures. Il semble donc important d'étudier ces opérateurs. Ensuite, les opérateurs auxquels nous aurons affaire dans les chapitres suivants sont des restrictions à \mathbb{R}^+ d'opérateurs pseudo-différentiels de Fourier. Or ces opérateurs se développent naturellement sous la forme $t^m A$, où A appartient à la classe $\mathbf{L}^{m,(k)}$. Pour cela, il suffit de faire un développement de Taylor près de zéro du développement symbolique classique. Nous développerons cela dans la section suivante.

1.4.1 Opérateurs de Green

Les opérateurs de Green sont l'équivalent des opérateurs de symbole dans $\mathbf{S}^{-\infty}$ de la théorie habituelle. Ces opérateurs sont très régularisants, et sont compacts.

Définition 1.4.1 (Opérateur de Green). *On appelle opérateur de Green, un opérateur G à support propre tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{D}_{P_1}, \quad G^* : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{D}_{P_2}$$

sont continues, où $P_1, P_2 \in \mathcal{R}$ ne dépendent pas de s . On note \mathbf{L}_G l'ensemble des opérateurs de Green.

Les asymptotiques P_1 et P_2 ne dépendent que de l'opérateur G (et pas de s). Quelle que soit l'asymptotique de $u \in \mathcal{K}^s$, Gu est donc forcément d'asymptotique P_1 , imposée par G .

Exemple 1.4.2. *Soit $g \in \mathcal{D}_{P_1} \otimes \mathcal{D}_{P_2}$, alors l'opérateur de noyau g est un opérateur de Green.*

En fait, on peut même montrer le résultat suivant. Nous renvoyons à [43] pour la preuve.

Proposition 1.4.3. *L'ensemble \mathbf{L}_G est égal à l'ensemble des opérateurs de noyau*

$$g \in \mathcal{D}_{P_1} \otimes_{\pi} \mathcal{D}_{P_2},$$

où $F \otimes_{\pi} G$ est l'adhérence de l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{n=1}^N f_n(s) g_n(t), \quad f_n \in F, g_n \in G \right\}.$$

Pour mieux comprendre ces opérateurs, il est intéressant de connaître le comportement de leur noyau :

Proposition 1.4.4. *Soit $G \in \mathbf{L}_G$, alors G possède un noyau g vérifiant :*

$$s \mapsto g(s, t) \in \mathcal{D}_{P_1}(\mathbb{R}^+), \quad t \mapsto g(s, t) \in \mathcal{D}_{P_2}(\mathbb{R}^+).$$

Démonstration. Il suffit pour cela d'appliquer G aux fonctions de Dirac en $s_0 \in \mathbb{R}^+$ et en $t_0 \in \mathbb{R}^+$:

$$g(s, t_0) = G\delta_{t_0} \text{ et } g(s_0, t) = G^*\delta_{s_0},$$

ce qui implique donc que $s \mapsto g(s, t) \in \mathcal{D}_{P_1}(\mathbb{R}^+)$ et $t \mapsto g(s, t) \in \mathcal{D}_{P_2}(\mathbb{R}^+)$. □

Théorème 1.4.5. *Un opérateur de Green est compact sur $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 1.2.28 : nous allons montrer qu'il existe un compact K de $[0, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et $\sigma > s$ tel que

$$G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_K^{\sigma, \varepsilon},$$

la proposition 1.2.28 nous permettant alors de conclure que G est compact dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, car on aura alors :

$$G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_K^{\sigma, \varepsilon} \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{K}_K^s \xrightarrow{\text{continue}} \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+).$$

D'après la proposition 1.4.4 et la définition 1.4.1, pour tout réel s ,

$$G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{D}_P(\mathbb{R}^+)$$

et continue. D'autre part, G est à support propre, donc il existe un compact K de $[0, +\infty[$ tel que pour tout $\sigma > s$:

$$G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_P^\sigma(K).$$

Il reste à montrer qu'il existe un ε tel que $\mathcal{K}_P^\sigma \subset \mathcal{K}^{\sigma, \varepsilon}$.

Soit $u \in \mathcal{K}_P^\sigma$, alors $u = u_0 + u_1$, où $u_0 \in \mathcal{K}_0^\sigma$ est un élément plat, et $u_1 \in \mathcal{D}(P, 0)$.

$$\mathcal{D}(P, 0) = \text{Vect}\{\omega t^{-p_j} \log^k t, 0 \leq k \leq m_j, (p_j, m_j) \in P, \mathbf{Re}(p_j) < \frac{1}{2}\},$$

où $\omega \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ est une fonction plateau autour de zéro. D'après la définition des types d'asymptotiques, il n'y a qu'un nombre fini de (p_j) dans toute bande complexe $\{\alpha < \mathbf{Re}(z) < \beta\}$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout j , $\mathbf{Re}(p_j) + \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Pour ce ε , $t^{-\varepsilon}u \in \mathcal{K}^\sigma$, donc $u \in \mathcal{K}^{\sigma, \varepsilon}$, d'où le résultat. \square

Exemple 1.4.6. *Soit ω une fonction plateau autour de zéro. Soit $Gu(s) = \omega(s) \log(s) \int_0^\infty \omega(t)u(t)dt$. L'opérateur G est un opérateur de Green.*

1.4.2 Opérateurs plats

Les opérateurs plats sont régularisants au sens des asymptotiques près de zéro : ils aplatisent les fonctions en zéro.

Définition 1.4.7 (Opérateurs plats). *Soit F un opérateur d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ qui appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+), \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On dit que F est un opérateur d'ordre m plat si pour tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$F : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_0^{s-m}(\mathbb{R}^+)$$

est continue. On note \mathbf{L}_F^m l'ensemble des opérateurs d'ordre m plats.

Définition 1.4.8 (Opérateurs plats à l'ordre k). Soit F un opérateur d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ qui appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+), \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On dit que F est un opérateur d'ordre m plat à l'ordre k si pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$F : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow t^k \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+) = \mathcal{K}^{s-m,k}(\mathbb{R}^+)$$

est continue. On note $\mathbf{L}_F^{m,(k)}$ l'ensemble des opérateurs d'ordre m plats à l'ordre k .

Nous pouvons donner un exemple assez intuitif d'un opérateur plat. Nous verrons la démonstration dans la section suivante (cf proposition 1.4.17), car nous ne disposons pas pour le moment de tous les éléments nécessaires.

Exemple 1.4.9. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, pour tout $h \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathbf{S}_0^m)$, pour toute fonction plateau ω ,

$$\omega t^\alpha \text{op}_M(h) t^\beta \omega \in \mathbf{L}_F^{m,(\alpha+\beta)}.$$

Remarquons tout de même que la preuve est immédiate si $\beta = 0$:

$$\omega t^\alpha \text{op}_M(h) \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s,\alpha}(\mathbb{R}^+).$$

Le problème consiste finalement à commuter t^β et $\text{op}_M(h)$ (proposition 1.4.16).

Nous disposons donc de deux types d'opérateurs régularisants : l'un au sens de la régularité d'espaces, l'autre au sens du comportement asymptotique près de zéro.

Définition 1.4.10. On note :

$$\mathbf{L}_{F+G}^m = \mathbf{L}_F^m + \mathbf{L}_G,$$

$$\mathbf{L}_{F+G}^{m,(k)} = \mathbf{L}_F^{m,(k)} + \mathbf{L}_G.$$

Proposition 1.4.11. Pour toutes $\omega_1, \omega_2, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$ fonctions plateaux autour de zéro, soit $h \in \mathbf{S}_P^m$, alors :

$$\omega_1 \text{op}_M h \omega_2 - \widetilde{\omega}_1 \text{op}_M h \widetilde{\omega}_2 \in \mathbf{L}_{F+G}^m,$$

$$\omega_1 \text{op}_M h (1 - \omega_1) \in \mathbf{L}_{F+G}^m.$$

Démonstration. On a $\omega_1 \text{op}_M h \omega_2 - \widetilde{\omega}_1 \text{op}_M h \widetilde{\omega}_2 = (\omega_1 - \widetilde{\omega}_1) \text{op}_M h \omega_2 + \widetilde{\omega}_1 \text{op}_M h (\omega_2 - \widetilde{\omega}_2)$. Or :

$$(\omega_1 - \widetilde{\omega}_1) \text{op}_M(h) \omega_2 : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\text{op}_M h \omega_2} \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\omega_1 - \widetilde{\omega}_1} \mathcal{K}_0^{s-m}(\mathbb{R}^+) \text{ est un opérateur plat ;}$$

d'après la proposition 1.3.10, on peut décomposer h comme $h = h_0 + h_1$ où $h_0 \in \mathbf{S}_0^m$ et $h_1 \in \mathbf{S}_P^{-\infty}$, et :

$$\widetilde{\omega}_1 \text{op}_M(h_0)(\omega_2 - \widetilde{\omega}_2) : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\omega_2 - \widetilde{\omega}_2} \mathcal{K}_0^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\widetilde{\omega}_1 \text{op}_M h_0} \mathcal{K}_0^{s-m}(\mathbb{R}^+) \text{ est un opérateur plat,}$$

enfin l'opérateur $\widetilde{\omega}_1 \text{op}_M(h_1)(\omega_2 - \widetilde{\omega}_2)$ est un opérateur à support propre, qui vérifie pour tout réel s :

$$\widetilde{\omega}_1 \text{op}_M(h_1)(\omega_2 - \widetilde{\omega}_2) : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\omega_2 - \widetilde{\omega}_2} \mathcal{K}_0^s \xrightarrow{\widetilde{\omega}_1 \text{op}_M h_1} \mathcal{D}_P \text{ est un opérateur de Green}$$

car $h_1 \in \mathbf{S}_P^{-\infty}$.

Cela démontre aussi la deuxième égalité de la proposition. \square

Définition 1.4.12. L'opérateur $Id + A$ où $A \in \mathbf{L}_{F+G}^{0,(k)}$ est dit elliptique, si pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$ (incluant l'infini), pour tout $\xi \neq 0$, $1 + \sigma_b^0(A) \neq 0$.

Proposition 1.4.13. Soit l'opérateur $Id + A$ où $A \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1,(k)}$ est un opérateur à support propre. Si $Id + A$ est elliptique, alors il existe une paramétrix de la forme $Id + B$, $B \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1,(k)}$, au sens où :

$$Id - (Id + A)(Id + B), Id - (Id + B)(Id + A) \in \mathbf{L}_G.$$

Démonstration. Posons $b \sim \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a^j$, où a est le symbole de A . Pour tout entier N , posons

$$B_N = \sum_{j=1}^N (-1)^j A^j,$$

alors

$$(Id + A)(Id + B_N) - Id = (-1)^N A^{N+1} : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_P^{s+N+1}(\mathbb{R}^+),$$

où P ne dépend que de $A \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1,(k)}$, et est à support propre. De même

$$(Id + B_N)(Id + A) - Id = (-1)^N A^{N+1} : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_P^{s+N+1}(\mathbb{R}^+),$$

est à support propre.

Ceci est vrai pour tout $N > 0$, donc l'opérateur B de symbole b vérifie :

$$(Id + A)(Id + B) - Id : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_P^{-\infty}(\mathbb{R}^+),$$

est à support propre et

$$(Id + B)(Id + A) - Id : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_P^{-\infty}(\mathbb{R}^+)$$

est à support propre. D'après la proposition 1.4.4, cela implique que ces opérateurs ont des noyaux de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Donc les opérateurs $(Id + A)(Id + B) - Id$ et $(Id + B)(Id + A) - Id \in \mathbf{L}_G$. \square

1.4.3 Opérateurs de Mellin

Les opérateurs de Mellin sont des opérateurs du type $t^j \text{op}_M h$, c'est-à-dire des opérateurs de convolution multipliés par une puissance de t . Nous avons défini de tels opérateurs à la définition 1.3.8. Pour cela, nous avons supposé que $h \in \mathbf{S}_P^m$, où $P \in \mathcal{R}^0$. (Rappelons que $P \in \mathcal{R}^\beta$ signifie que $P \cap \{\text{Re}(z) = \frac{1}{2} - \text{Re}(\beta)\} = \emptyset$, où l'on identifie dans cette notation P à sa projection sur \mathbb{C} .) Il est cependant toujours possible de définir des opérateurs de convolution Mellin si $P \in \mathcal{R}^\gamma$, mais $P \notin \mathcal{R}^0$. En effet, il suffit pour cela de se “décaler” au bon endroit :

Définition 1.4.14. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, soient $P \in \mathcal{R}^\gamma$ et $h \in \mathbf{S}_P^m$. On note :

$$\text{op}_M^\gamma(h) = M_\gamma^{-1} h M_\gamma,$$

où $M_\gamma = M_{|\text{Re}(z)=1/2-\gamma}$, et M_γ^{-1} est défini dans la proposition 1.2.20.

Remarquons que cette définition coïncide avec celle de $\text{op}_M h$, pour $\gamma = 0$.

Il s'agit vraiment de se déplacer sur \mathbb{R} pour trouver une droite Γ_γ sur laquelle h n'a pas de pôle. Il est toujours possible de faire ce genre d'opérations, puisque par définition des asymptotiques, il n'y a qu'un nombre fini de pôle dans chaque bande $\{\alpha < \text{Re}(z) < \beta\}$. Par simple changement de variable dans le domaine Mellin, il est simple de voir que $\text{op}_M^\gamma h$ peut s'exprimer comme un $\text{op}_M h$:

Proposition 1.4.15. *Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, soient $P \in \mathcal{R}^\gamma$ et $h \in \mathbf{S}_P^m$. On a*

$$\text{op}_M^\gamma(h) = t^\gamma \text{op}_M(T^{-\gamma}h)t^{-\gamma},$$

pour $\gamma \in \mathbb{R}$, où $T^\eta h(z) = h(z + \eta)$.

Cette façon d'écrire ces opérateurs (qui sont toujours des opérateurs de convolution, mais par $M_\gamma^{-1}h$ et plus $M^{-1}h$), permet de faire plus aisément des opérations puisqu'on se ramène ainsi à l'objet de référence $\text{op}_M h$ (pour $\gamma = 0$).

Proposition 1.4.16. *Soient $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\beta) \geq 0$, et $h \in \mathbf{S}_P^m$, $P \in \mathcal{R}^0 \cap \mathcal{R}^{-\beta}$, alors :*

$$\omega t^\beta \text{op}_M(h)\omega - \omega \text{op}_M(T^\beta h)t^\beta \omega$$

est un opérateur de Green d'asymptotique Q , avec $Q = P \cap \{\frac{1}{2} - \text{Re}(\beta) < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$.

De plus, si $P \cap \{\frac{1}{2} - \text{Re}(\beta) < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}\} = \emptyset$, alors

$$\omega t^\beta \text{op}_M(h)\omega = \omega \text{op}_M(T^\beta h)t^\beta \omega.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.3.10, on peut décomposer h comme $h = h_0 + h_1$ où $h_0 \in \mathbf{S}_0^m$ et $h_1 \in \mathbf{S}_P^{-\infty}$. Pour $i = 1, 2$, on pose $A_i = \omega t^\beta \text{op}_M(h_i)\omega - \omega \text{op}_M(T^\beta h_i)t^\beta$. Soient $u \in C_0^\infty$ et $v = \frac{1}{2i\pi}u\omega$.

$$\begin{aligned} A_i u &= \omega s^\beta \int_{\Gamma_{1/2}} t^{-z} h(z) M u(z) \frac{dz}{2i\pi} - \int_{\Gamma_{1/2}} t^{-z} h(z + \beta) M u(z + \beta) \frac{dz}{2i\pi} \\ &= \omega s^\beta \left(\int_{\Gamma_{1/2}} t^{-z} h(z) M u(z) \frac{dz}{2i\pi} - \int_{\Gamma_{1/2-\beta}} t^{-z} h(z) M u(z) \frac{dz}{2i\pi} \right). \end{aligned}$$

Soit C un contour entourant les pôles de h entre $\Gamma_{1/2-\text{Re}(\beta)}$ et $\Gamma_{1/2}$. Dans $\{\frac{1}{2} - \text{Re}(\beta) < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}\} \setminus P$, $z \mapsto t^{-z} h(z) M u(z)$ est holomorphe, et

$$\left| \int_{1/2-\text{Re}(\beta) < \text{Re}(z) < 1/2, \text{Im}(z)=R} t^{-z} h(z) M u(z) \frac{dz}{2i\pi} \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

grâce à la propriété 1.24 et car $h \in \mathcal{S}^m$ en dehors des pôles. Donc :

$$A_i u = \omega s^\beta \int_C t^{-z} h(z) M u(z) \frac{dz}{2i\pi}.$$

Or h_0 est holomorphe partout à l'intérieur du contour C , donc $A_0 u = 0$. Donc par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, $A_0 = 0$.

Enfin, comme $h_1 \in \mathbf{S}_P^{-\infty}$, le noyau de l'opérateur A_1 est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, et par définition, A_1 est à support propre. Enfin, il reste à connaître le comportement asymptotique de cet opérateur près de zéro.

Si $P \cap \{\frac{1}{2} - \mathbf{Re}(\beta) < \mathbf{Re}(z) < \frac{1}{2}\} = \emptyset$, alors on se retrouve dans le cas précédent (fonction holomorphe dans le contour C , et on obtient $A_1 = 0$). Donc les seules asymptotiques intervenant sont celles se trouvant dans la bande $\{\frac{1}{2} - \mathbf{Re}(\beta) < \mathbf{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$, ce qui permet de conclure que A_1 est un opérateur de Green. \square

! On voit ainsi que si h ne possède pas de pôle dans une bande $\{\frac{1}{2} - \gamma_1 < \mathbf{Re}(z) < \frac{1}{2} - \gamma_2\}$, alors $\text{op}_M^{\gamma_1} h = \text{op}_M^{\gamma_2} h$ (ce que l'on retrouve également en utilisant la proposition 1.2.20 sur la définition 1.4.14).

Autrement dit, si nous n'avions affaire qu'à des fonctions analytiques sur \mathbb{C} ou au moins sur un demi-plan $\{\mathbf{Re}(z) > \alpha\}$, il serait inutile d'introduire cette notations supplémentaire. Mais dans les cas pratiques que nous étudierons, nous aurons presque toujours affaire à des fonctions ayant un nombre infini (dénombrable) de pôles. C'est pourquoi la présence du γ en exposant est importante.

En particulier, si $h \in \mathcal{S}_0^m$ (c'est-à-dire que h est holomorphe sur \mathbb{C}), alors pour tous entiers positifs a et b , l'opérateur

$$\omega t^a \text{op}_M h t^b \omega = \omega t^{a+b} \text{op}_M h \omega \in \mathbf{L}_F^{m, (a+b)}.$$

Remarquons que la preuve de la proposition 1.4.16 reste vraie pour $h \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathbf{S}_0^m)$, ce qui nous permet d'avoir le résultat :

Proposition 1.4.17. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathbf{S}_0^m)$, pour toute fonction plateau ω ,*

$$\omega t^\alpha \text{op}_M(a) t^\beta \omega \in \mathbf{L}_F^{m, (\alpha+\beta)}.$$

Démonstration. En effet, $\omega t^\alpha \text{op}_M(a) t^\beta = t^{\alpha+\beta} \text{op}_M(a)$, puis d'après la proposition 1.3.13 :

$$\omega t^{\alpha+\beta} \text{op}_M(a) \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\text{op}_M(h)\omega} \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\omega t^\alpha} \mathcal{K}^{s-m, \alpha}(\mathbb{R}^+).$$

\square

Ceci est faux si h possède des pôles dans $\{\frac{1}{2} - \beta < \mathbf{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$. La proposition 1.4.16 permet d'avoir tout de même un résultat intéressant :

Proposition 1.4.18. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, pour tout $h \in \mathbf{S}_P^m$ ($P \in \mathcal{R}^0$), pour toute fonction plateau ω ,*

$$\omega t^\alpha \text{op}_M(h) t^\beta \omega \in \mathbf{L}_{F+G}^{m, (k)},$$

l'asymptotique de la partie Green étant égale à $T^\alpha(P \cap \{\frac{1}{2} - \beta < \mathbf{Re}(z) < \frac{1}{2}\})$.

Démonstration. En effet,

$$\omega t^\alpha \operatorname{op}_M(h) t^\beta \omega = \omega t^{\alpha+\beta} \operatorname{op}_M(h) \omega + t^\alpha G,$$

où G est un opérateur de Green, d'asymptotique $T^\alpha(P \cap \{\frac{1}{2} - \beta < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\})$ d'après la proposition 1.4.16. Enfin, d'après la proposition 1.4.17, nous savons que $\omega t^{\alpha+\beta} \operatorname{op}_M(h) \omega \in \mathbf{L}_F^{m,(\alpha+\beta)}$. \square

Remarque 1.4.19. La proposition 1.3.13 nous donne tout de suite le résultat suivant : pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, pour tout $P \in \mathcal{R}^\gamma$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'application

$$t^j \omega \operatorname{op}_M^\gamma h \omega : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma+j}(\mathbb{R}^+)$$

est continue.

Si l'on veut composer de tels opérateurs, il faut pouvoir restreindre les continuités précédentes à $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, ce qui impose que $\gamma \leq 0$, et il faut que l'espace d'arrivée soit inclus dans $\mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+)$ ce qui impose que $\gamma + j \geq 0$. Ainsi, par restriction à $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ (si $\gamma \leq 0$), l'opérateur $t^j \omega \operatorname{op}_M^\gamma h \omega$ vérifie la continuité suivante :

$$t^j \omega \operatorname{op}_M^\gamma h \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma+j}(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+),$$

pour tout $-j \leq \gamma \leq 0$. Nous supposons donc toujours cette hypothèse vérifiée dans les calculs qui vont suivre, et essentiellement pour écrire des développements de Mellin (que nous devrons pouvoir composer pour construire une algèbre raisonnable).

Définition 1.4.20. Soit un entier $j \geq 0$, soit un réel γ vérifiant :

$$-j \leq \gamma \leq 0, \tag{1.33}$$

soit $h \in \mathbf{S}_P^m$ où $P \in \mathcal{R}^\gamma$. L'opérateur

$$t^j \omega \operatorname{op}_M^\gamma(h) \omega,$$

où ω fonction plateau près de zéro, est appelé opérateur de Mellin d'ordre conormal $-j$ et h est son symbole conormal.

Enfin, il est naturel de se demander si la présence de ce γ est indispensable, étant donné que nous souhaitons restreindre les opérateurs à $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ de toute façon. Comme nous l'avons déjà remarqué, le réel γ permet de choisir la bonne droite complexe $\{\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} - \gamma\}$, telle que le type d'asymptotiques P de h ne la croise pas : $P \in \mathcal{R}^\gamma$. Nous verrons dans la proposition suivante en quoi cela est indispensable (précisément pour composer de tels opérateurs).

Proposition 1.4.21. Pour tous entiers i, j positifs ou nuls, soient γ_i et γ_j vérifiant la condition

$$-i \leq \gamma_i \leq 0, \quad -j \leq \gamma_j \leq 0,$$

soient $h_i \in \mathbf{S}_{P_i}^{m_i}$ et $h_j \in \mathbf{S}_{P_j}^{m_j}$, avec $P_i \in \mathcal{R}^{\gamma_i}$ et $P_j \in \mathcal{R}^{\gamma_j}$. Alors il existe $-i - j \leq \gamma \leq 0$ tel que $P_i \in \mathcal{R}^{\gamma+j}$ et $P_j \in \mathcal{R}^\gamma$, et :

$$t^i \omega \operatorname{op}_M^{\gamma_i} h_i \omega t^j \omega \operatorname{op}_M^{\gamma_j} h_j \omega = t^{i+j} \omega \operatorname{op}_M^\gamma T^{-j} h_i h_j \omega \mod \mathbf{L}_{F+G}^{m_i+m_j}.$$

Démonstration. Tout d'abord, nous utilisons la proposition 1.4.11, pour écrire que :

$$t^i \omega \operatorname{op}_M^{\gamma_i} h_i \omega t^j \omega \operatorname{op}_M^{\gamma_j} h_j \omega = t^i \omega \operatorname{op}_M^{\gamma_i} h_i t^j \operatorname{op}_M^{\gamma_j} h_j \omega \mod \mathbf{L}_{F+G}^{m_i+m_j}.$$

Il reste donc à traiter le terme du milieu :

$$\operatorname{op}_M^{\gamma_i} h_i t^j \operatorname{op}_M^{\gamma_j} h_j.$$

Comme $j \geq 0$, on peut utiliser la proposition 1.4.16, mais il faut alors supposer que $P_i \in \mathcal{R}^{\gamma_i+j}$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver $-i-j \leq \gamma \leq 0$ tel que $P_i \in \mathcal{R}^{\gamma+j}$ et $P_j \in \mathcal{R}^\gamma$, et alors la proposition 1.4.16 nous assure que

$$\operatorname{op}_M^{\gamma_j} h_j = \operatorname{op}_M^\gamma h_j \mod \mathbf{L}_{F+G}^{m_j},$$

et

$$\operatorname{op}_M^{\gamma_i} h_i t^j = t^j \operatorname{op}_M^\gamma T^{-j} h_i \mod \mathbf{L}_{F+G}^{m_i},$$

ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 1.3.9. \square

Remarque 1.4.22. D'après la remarque 1.4.19, un opérateur de Mellin d'ordre conormal $-j \in \mathbb{N}$ est un opérateur plat à l'ordre j . En revanche, un opérateur de Mellin ne peut pas être un opérateur de Green. En effet, la proposition de transport des asymptotiques 1.3.12 nous affirme que l'asymptotique de $\operatorname{op}_M(h)u$ dépend de l'asymptotique de u . Or un opérateur de Green impose sa propre asymptotique (celle de son noyau).

Proposition 1.4.23. Soient $h \in \mathbf{S}_P^m$ où $P \in \mathcal{R}^0$, $j \geq 0$ et $G \in \mathbf{L}_G$, alors

$$t^j \operatorname{op}_M h G, \quad G t^j \operatorname{op}_M h \in \mathbf{L}_G.$$

Démonstration. Notons Q l'asymptotique de G (qui ne dépend pas de s). Pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$t^j \operatorname{op}_M h G : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{G} \mathcal{D}_Q \xrightarrow{t^j \operatorname{op}_M h} \mathcal{D}_{P+Q},$$

où l'asymptotique $P+Q$ ne dépend pas de s (seulement de h et G), et

$$G t^j \operatorname{op}_M h : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{t^j \operatorname{op}_M h} \mathcal{K}^{s-m,j}(\mathbb{R}^+) \hookrightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{G} \mathcal{D}_Q.$$

\square

Proposition 1.4.24. Soient $h \in \mathbf{S}_P^m$ où $P \in \mathcal{R}^0$ et $F \in \mathbf{L}_F^n$, alors

$$t^j \operatorname{op}_M h F, \quad F t^j \operatorname{op}_M h \in \mathbf{L}_{F+G}^{m+n}.$$

Démonstration. Pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$F t^j \operatorname{op}_M h : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{t^j \operatorname{op}_M h} \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{F} \mathcal{K}_0^{s-m-n}(\mathbb{R}^+).$$

D'après la proposition 1.3.10, on peut décomposer h comme $h = h_0 + h_1$ où $h_0 \in \mathfrak{M}_0^m$ et $h_1 \in \mathfrak{M}_P^{-\infty}$.

$$t^j \operatorname{op}_M h_0 F : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{F} \mathcal{K}_0^{s-n}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{t^j \operatorname{op}_M h_0} \mathcal{K}_0^{s-m-n}(\mathbb{R}^+) \in \mathfrak{N}_F^{m+n},$$

$$t^j \operatorname{op}_M h_1 F : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{F} \mathcal{K}_0^{s-n}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{t^j \operatorname{op}_M h_1} \mathcal{D}_P \in \mathfrak{N}_G.$$

\square

1.4.4 Développement de Mellin

Définition 1.4.25. Pour tout $k > 0$, on désigne par $\mathbf{L}^{m,(k)}$ l'ensemble des opérateurs $A \in \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+), \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+))$ tels que, il existe $-j \leq \gamma_j \leq 0$ et $h_j \in \mathbf{S}_{P_j}^m$ pour $P_j \in \mathcal{R}^{\gamma_j}$ tels que pour toute fonction plateau ω :

$$A - \omega \sum_{j=0}^{k-1} t^j \text{op}_M^{\gamma_j}(h_j) \omega \in \mathbf{L}_{F+G}^{m,(k)}.$$

On dit alors que A admet un développement de Mellin à l'ordre k près de zéro.

Pour la signification de la présence de l'exposant γ_j , ainsi que de l'hypothèse qu'il doit vérifier, nous renvoyons au paragraphe précédent.

Remarque 1.4.26. Pour tout $N > 0$, $\mathbf{L}^{m,(k+1)} \subset \mathbf{L}^{m,(k)}$

Définition 1.4.27. Soit $\mathbf{L}^m = \bigcap_{k \geq 0} \mathbf{L}^{m,(k)}$. Pour tout $A \in \mathbf{L}^m$, on note alors :

$$A \sim \sum t^j \text{op}_M^{\gamma_j}(h_j),$$

et on dit que A admet un développement de Mellin près de zéro.

Définition 1.4.28. On pose $\sigma_M^{-j}(A) = h_j$ le symbole Mellin de A d'ordre conormal j et $\sigma_M(A) = \{\sigma_M^{-j}(A)\}$ le symbole Mellin complet de A .

D'autre part, nous disposons par la définition 1.3.19 d'un symbole principal de A , noté σ_b^m : pour tout $k > 0$, A s'écrit : $A = S_k + F_k + G$, où $S_k = \omega \sum_{j=0}^{k-1} t^j \text{op}_M^{\gamma_j}(h_j) \omega$, $F_k \in \mathbf{L}_F^{m,(k)}$ et $G \in \mathbf{L}_G$, donc :

$$\sigma_b^m(A) = \omega^2(t) \sum_{j=0}^{k-1} t^j h_j^{(m)}(-i\xi) + \sigma_b^{(m)} F_k,$$

où $h_j^{(m)}$ est le symbole principal de $h_j \in \mathbf{S}_{P_j}^m$.

Définition 1.4.29. $A \in \mathbf{L}^{m,(k)}$ est dit elliptique si

- (i) $\sigma_b^m(A)(t, \xi) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (ii) $\sigma_M^0(A)(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Gamma_{1/2}$.

Remarque 1.4.30. Remarquons que cette définition respecte l'inclusion

$$\mathbf{L}^{m,(k+1)} \subset \mathbf{L}^{m,(k)}.$$

Définition 1.4.31. Soit $A \in \mathbf{L}^{m,(k)}$, alors $B \in \mathbf{L}^{-m,(k)}$ est appelée paramétrix de A si

$$AB - Id \in \mathbf{L}_G \text{ et } BA - Id \in \mathbf{L}_G.$$

Théorème 1.4.32. Soit $A \in \mathbf{L}^{m,(k)}$ elliptique, alors il existe une paramétrix $B \in \mathbf{L}^{-m,(k)}$ et :

$$A : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+)$$

est un opérateur de Fredholm pour tout réel s .

De plus, si $Au = f \in \mathcal{K}_{as}^s(\mathbb{R}_+)$, alors $u \in \mathcal{K}_{as}^{s+m}(\mathbb{R}_+)$ où le type d'asymptotique dépend de A et de f , mais pas de s .

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires.

Proposition 1.4.33. L'opérateur linéaire

$$\sigma_M : \mathbf{L}^{m,(k)} \rightarrow (\mathbf{S}^m)^k$$

est surjectif de noyau $\mathbf{L}_{F+G}^{m,(k)}$.

Démonstration. Cet opérateur est surjectif par définition de $\mathbf{L}^{m,(k)}$. Cherchons son noyau.

Soit ω une fonction plateau autour de zéro. Soit $a(t, z) = t^{-z}\omega(t)$, pour tout $z \in \{\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$. Alors

$$M_{t \rightarrow \zeta} a(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + f(z, \zeta),$$

où f est holomorphe en z et en ζ dans $\left\{ \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \right\}$.

Pour $A = \omega_1 t^j \operatorname{op}_M h_j \omega_1$,

$$M_{t \rightarrow \zeta} Aa(z, \zeta) = h_j(\zeta + j) \left(\frac{1}{\zeta + j - z} + f(z, \zeta + j) \right) + \tilde{f}(z, \zeta),$$

où \tilde{f} est holomorphe en z et ζ dans $\left\{ \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \right\}$.

Supposons $A \neq F + G$, il existe donc $(h_j) \in (\mathbf{S}^m)^k$ non tous nuls tels que $A = \omega_1 \sum_{j=0}^{k-1} t^j \operatorname{op}_M h_j \omega_1 + G + F$. Alors

$$M_{t \rightarrow \zeta} Aa(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{k-1} h_j(\zeta + j) \left(\frac{1}{\zeta + j - z} + f(z, \zeta + j) \right) + \tilde{f}(z, \zeta) + \tilde{\tilde{f}}(z, \zeta),$$

où $\tilde{\tilde{f}}$ est holomorphe pour $\{\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$, $\frac{1}{2} - N < \operatorname{Re}(\zeta) < \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(\zeta) > C$ (pour un certain $C > 0$).

Cela provient de la définition des opérateurs plats à l'ordre N , et du fait que le nombre d'asymptotique sur chaque bande $\{\alpha < \operatorname{Re}(\zeta) < \beta\}$ est fini (d'où l'existence du C).

Choisissons ζ_j tel que $\frac{1}{2} - N < \operatorname{Re}(\zeta_j) < \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(\zeta_j) > C$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$M_{t \rightarrow \zeta} Aa(z, \zeta_j) - \frac{h_j(\zeta_j + j)}{\zeta_j + j - z} = f_j(z)$$

est holomorphe dans le disque $|z - \zeta_j - j| < \varepsilon$. Soit ζ dans le disque de centre ζ_j et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Notons C le cercle de centre $\zeta + j$ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$h_j(\zeta + j) = \frac{-1}{2i\pi} \int_C M_{t \rightarrow \zeta} A a(z, \zeta) dz,$$

donc h_j peut-être retrouvé dans un disque assez petit autour de $\zeta_j + j$ par l'action de A sur a . Or h_j est une fonction méromorphe, elle est donc définie de façon unique partout en connaissant sa valeur sur un disque. \square

Proposition 1.4.34. *L'opérateur linéaire*

$$\sigma_b^m : \mathbf{L}^{m,(k)} \rightarrow \mathbf{S}^m$$

est surjectif de noyau $\mathbf{L}^{m-1,(k)}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbf{S}^m$. D'après le lemme 1.3.5, il existe $b \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathcal{A}(\mathbb{C}))$ tel que

$$a(t, \xi) = b(t, \frac{1}{2} + i\xi) \mod (\mathbf{S}^{m-1}).$$

Un développement de Taylor en t près de zéro nous donne :

$$b(t, z) = \sum_{j=0}^{k-1} t^j b_j(z) + t^k b_k(t, z).$$

Soit

$$A = \omega \sum_{j=0}^{k-1} t^j \text{op}_M^{\gamma_j} b_j \omega + \omega t^k \text{op}_M^{\gamma_k} b_k \omega.$$

D'après la proposition 1.4.18, $\omega t^k \text{op}_M b_k \omega \in \mathbf{L}_F^{m,(k)}$, donc $A \in \mathbf{L}^{m,(k)}$, et par construction le symbole principal de A est égal à a modulo \mathbf{S}^{m-1} , ce qui nous donne la surjectivité de σ_b^m .

Enfin, si $\sigma_b^m(A) = 0$, alors A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m-1$. Donc pour tout j , $\sigma_M^{-j}(A) \in \mathbf{S}^{m-1}$, et F est d'ordre $m-1$, d'où $A \in \mathbf{L}^{m-1,(k)}$. \square

Comme les preuves précédentes le montrent, les symboles σ_M et σ_b^m doivent satisfaire une condition de compatibilité pour être symboles d'un même opérateur. Définissons l'espace :

$$\mathfrak{S}_{(k)}^m = \left\{ (h_j, a) \in (\mathbf{S}^m)^k \times \mathbf{S}^m : \sigma_b^m(h_j)(\xi) = \frac{\partial^j}{j! \partial t^j} a(t, \xi)|_{t=0} \right\}.$$

Alors les deux preuves précédentes montrent que :

Proposition 1.4.35. *L'opérateur linéaire*

$$(\sigma_M, \sigma_b^m) : \mathbf{L}^{m,(k)} \rightarrow \mathfrak{S}_{(k)}^m$$

est surjectif de noyau $\mathbf{L}_{F+G}^{m-1,(k)}$.

Proposition 1.4.36. Soient $A_i \in \mathbf{L}^{m_i, (k)}$, pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $A_1 A_2 \in \mathbf{L}^{m_1+m_2, (k)}$ et pour tout $l < k$:

$$\sigma_M^{-l}(A_1 A_2)(z) = \sum_{i+j=l} \sigma_M^{-i}(A_1)(z-j) \sigma_M^{-j}(A_2)(z),$$

$$\sigma_b^{m_1+m_2}(A_1 A_2) = \sigma_b^{m_1}(A_1) \sigma_b^{m_2}(A_2).$$

Démonstration. La première égalité provient des propositions 1.4.23, 1.4.24 et 1.4.21 qui nous permettent d'écrire :

$$A_1 A_2 = \sum_{i,j=0}^k t^{i+j} \text{op}_M^\gamma(T^{-j} h_i f_j) + F + G,$$

où $-(i+j) \leq \gamma \leq 0$, $F \in \mathbf{L}_F^{m_1+m_2, (k)}$ et $G \in \mathbf{L}_G$.

La seconde égalité provient de la théorie pseudo-différentielle au sens de Fourier. \square

Nous pouvons à présent montrer le théorème 1.4.32, que nous recitons ci-dessous.

Théorème 1.4.37. Soit $A \in \mathbf{L}^{m, (k)}$ elliptique, alors il existe une paramétrix $B \in \mathbf{L}^{-m, (k)}$ et :

$$A : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+)$$

est un opérateur de Fredholm pour tout réel s .

De plus, si $Au = f \in \mathcal{K}_{as}^s(\mathbb{R}_+)$, alors $u \in \mathcal{K}_{as}^{s+m}(\mathbb{R}_+)$ où le type d'asymptotique dépend de A et de f , mais pas de s .

Démonstration. Soit $A \in \mathbf{L}^{m, (k)}$ elliptique, on veut construire $B \in \mathbf{L}^{-m, (k)}$ qui vérifie :

$$\sigma_b^0(AB) = 1,$$

$$\sigma_M^0(AB) = 1, \quad \sigma_M^{-j}(AB) = 0, \forall j > 0.$$

Notons $\sigma_b^0(A) = a(t, \xi)$, $\sigma_M^{-j}(A) = h_j(z)$. On sait que a et h_j vérifient la relation de compatibilité :

$$\sigma_b^m(h_j)(\xi) = \frac{\partial^j}{j! \partial t^j} a(t, \xi)|_{t=0}, \forall j \geq 0.$$

Notons $\sigma_b^0(B) = b(t, \xi)$, $\sigma_M^{-j}(B) = f_j(z)$. Alors, d'après la proposition 1.4.36, on a :

$$b(t, \xi) = \frac{1}{a(t, \xi)}, \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^*, \quad f_0(z) = \frac{1}{h_0(z)}, \forall z \in \Gamma_{1/2},$$

$$\sum_{i+j=n} h_i(z-j) f_j(z) = 0, \forall n > 0, z \in \Gamma_{1/2}.$$

Ces relations définissent b et f_j de façon unique. Vérifions qu'ils vérifient alors la relation de compatibilité.

Comme pour tout $n > 0$, $\partial_t^n(ab) = 0$, on a :

$$\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \partial_t^i a(t, \xi) \frac{1}{j!} \partial_t^j b(t, \xi) = 0, \forall n > 0, \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^*.$$

D'autre part, le symbole principal de $h_j(a + i\xi)$ est égal au symbole principal de $h_j(i\xi)$ pour tout réel a fixé, modulo \mathbf{S}^{m-1} , car leur comportement asymptotique lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$ est le même.

Par conséquent, $(f_j, b) \in \mathfrak{S}_{(k)}^m$. D'après la proposition 1.4.35, il existe donc $\tilde{B} \in \mathbf{L}^{-m, (k)}$ de symboles $\sigma_b^0(\tilde{B}) = b(t, \xi)$ et $\sigma_M^{-j}(\tilde{B}) = f_j(z)$.

D'après les propositions 1.4.23, 1.4.24 et 1.4.16,

$$A\tilde{B} = Id + R,$$

où $R \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1, (k)}$. En effet, $R = A\tilde{B} - Id$ est dans le noyau de l'application surjective de la proposition 1.4.35. Or d'après la proposition 1.4.13, il existe $C \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1, (k)}$ tel que :

$$(Id + R)(Id + C) - Id, \quad (Id + C)(Id + R) - Id \in \mathbf{L}_G.$$

Posons $B = \tilde{B}(Id + C)$, alors

$$AB - Id = G \in \mathbf{L}_G.$$

On peut construire de façon similaire un opérateur B' tel que $B'A - Id = G' \in \mathbf{L}_G$. Alors :

$$B - B' = B - B'(AB - G) = B - (G' + Id)B + B'G = B'G - G'B \in \mathbf{L}_G,$$

d'où

$$BA - Id \in \mathbf{L}_G.$$

De plus, $BA\tilde{B} = \tilde{B}(Id + C)(Id + R) = \tilde{B} + G$, où $G \in \mathbf{L}_G$, donc $(BA - Id)\tilde{B} \in \mathbf{L}_G$.

D'autre part, l'existence de B continue de $\mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ tel que $AB = Id + G_1$ et $BA = Id + G_2$, où G_1 et G_2 sont des opérateurs de Green, donc compacts dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, nous permet d'assurer que A est un opérateur de Fredholm de $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{K}^{s-m}(\mathbb{R}^+)$ [34].

Enfin, si $Au = f \in \mathcal{K}_Q^s(\mathbb{R}_+)$, $u \in \mathcal{K}^{-\infty}(\mathbb{R}_+)$, alors

$$BAu = u + Gu = Bf, \quad G \in \mathbf{L}_G,$$

donc $u = Bf - Gu$ est d'asymptotique $Q' + P$ où Q' ne dépend que de f et B et P ne dépend que de G , donc l'asymptotique de u ne dépend pas de s , mais seulement de A et f . \square

La réciproque est vraie, nous renvoyons à [43] pour la preuve.

Il reste donc à savoir calculer le symbole conormal des opérateurs que nous allons utiliser.

1.5 Restriction à \mathbb{R}^+ d'opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}

Les opérateurs auxquels nous avons affaire sont des restrictions à la demi-droite \mathbb{R}^+ d'opérateurs pseudo-différentiels au sens de Fourier. Nous allons donc nous intéresser

dans cette section à de tels opérateurs. L'objectif de cette section est de donner un développement de Mellin d'un opérateur pseudo-différentiel restreint à \mathbb{R}^+ .

On note r^+ l'opérateur de restriction à \mathbb{R}_+ :

$$r^+ : u \mapsto u|_{\mathbb{R}_+},$$

et e^+ l'opérateur qui prolonge une application de \mathbb{R}_+ à tout \mathbb{R} par zéro :

$$e^+ : u \mapsto \bar{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans cette section, nous étudions les opérateurs de la forme $r^+op(a)e^+$, pour $a \in \mathbf{S}_{cl}^m(\mathbb{R})$, où

$$op(a)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

On note :

$$op_{\psi}(a) = r^+op(a)e^+. \quad (1.34)$$

On note enfin θ^+ la fonction indicatrice de \mathbb{R}_+ , $\theta^- = 1 - \theta^+$, et

$$g^+(z) = \frac{1}{1 - e^{-2i\pi z}} \quad \text{et} \quad g^-(z) = \frac{1}{1 - e^{2i\pi z}}.$$

Remarquons que $g^+ + g^- = 1$.

Nous souhaitons donner un développement de Mellin de cet opérateur. L'objectif de cette section est en fait de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.5.1. *Pour tout $a \in \mathbf{S}_{cl}^m(\mathbb{R})$ indépendant de x , $m \in \mathbb{R}$, pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \gamma - m \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}} & \text{si } m < 0, \\ \gamma \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}} & \text{si } m \geq 0, \end{cases}$$

alors

$$\omega op_{\psi} a \omega = t^{-m} \omega \sum_{j=0}^N t^j op_M^{\gamma}(\sigma_M^{m-j}(a)) \omega + g_N,$$

où $g_N \in \mathbf{L}_{F+G}^{N-m-1, (N-m-1)}$, dont la partie Green est d'asymptotique \mathcal{T} de Taylor, et

$$\sigma_M^{m-j}(a)(z) = \begin{cases} (a_j^+ g^+(z+m) + a_j^- g^-(z+m)) \frac{\Gamma(z-m+j)}{\Gamma(z)} & \text{si } m < 0, \\ (a_j^+ g^+(z) + a_j^- g^-(z)) \frac{\Gamma(z-m+j)}{\Gamma(z)} & \text{si } m \geq 0. \end{cases}$$

De plus, pour tout réel s ,

$$\omega op_{\psi} a \omega : \mathcal{K}^{s, \gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m, \gamma-m}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$$

est continue.

Nous supposons que a est indépendant de x . Comme $a \in \mathbf{S}_{cl}^m(\mathbb{R})$, nous pouvons déjà développer asymptotiquement a en $\pm\infty$. Nous n'imposerons pas à a de vérifier la condition de transmission, nous notons donc a_k^\pm les coefficients du développement asymptotique en $\pm\infty$:

$$a(\xi) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} (i\xi)^{m-k} a_k^\pm, \quad \xi \rightarrow \pm\infty.$$

On peut donc écrire :

$$a(\xi) = \sum_{k=0}^N [a_k^+ \theta^+(\xi) + a_k^-(\alpha) \theta^-(\xi)] (i\xi)^{m-k} + a_N(\xi),$$

où $a_N \in \mathbf{S}_{cl}^{m-N}(\mathbb{R})$.

Le calcul du développement de Mellin de $\text{op}_\Psi(a)$ va se faire en plusieurs étapes. Tout d'abord, il est assez simple de donner un développement de Mellin (restreint en fait à un terme) de $\text{op}_\psi(\theta^\pm)$, ce que nous allons voir dans le lemme 1.5.2. Ensuite, nous montrerons que le reste $\text{op}_\Psi(a_N)$ est un opérateur plat à l'ordre $N-m-1$, plus un opérateur de Green d'asymptotiques de Taylor (cf lemme 1.5.7). Enfin, il nous restera à calculer le développement de Mellin des termes homogènes $\text{op}_\Psi((i\xi)^{m-k})$ (cf lemme 1.5.5). Pour cela, nous utiliserons les résultats d'Èskin sur les opérateurs pseudo-différentiels homogènes [23]. Ensuite, il restera à assembler ces opérateurs.

Lemme 1.5.2. *On a :*

$$\text{op}_\psi(\theta^\pm) = \text{op}_M(g^\pm).$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

$$\begin{aligned} \text{op}_\psi(\theta^\pm e^{-\varepsilon\xi})u(x) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon\xi} u(y) dy \frac{d\xi}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{i u(y)}{(x-y) + i\varepsilon} dy. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'exemple 1.1.10,

$$\frac{1}{x + i\varepsilon - y} = \int_{\Gamma_{1/2}} x^{-z} \frac{e^{(z-1)\log(y-i\varepsilon)}}{1 - e^{2i\pi(z-1)}} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Gamma_{1/2}} y^{z-1} x^{-z} g^+(z) dz.$$

Donc en passant à la limite (le théorème de convergence dominée s'applique) :

$$\text{op}_\psi(\theta^\pm)u(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{1/2}} \int_0^{+\infty} y^{z-1} x^{-z} g^+(z) u(y) dy dz = \text{op}_M(g^\pm)u(x).$$

□

Remarquons que les pôles de g^\pm sont les entiers, donc pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$,

$$\text{op}_M(g^\pm) = \text{op}_M^\gamma(g^\pm),$$

et donc pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$,

$$\omega \text{op}_M(g^\pm) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$$

est continue.

Lemme 1.5.3. *Pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$ tel que $\gamma \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$, la restriction de l'opérateur $\omega \text{op}_M(g^\pm)$ à $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ donne la continuité :*

$$\omega \text{op}_M(g^\pm) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+).$$

Démonstration. Pour tout z tel que $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$, pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$, pour tout $u \in \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$,

$$h(z) = M(\text{op}_M(g^\pm)t^\gamma u)(z) = g^\pm(z)Mu(z + \gamma).$$

Or h est holomorphe dans $\{\mathbf{Re}(z) > \frac{1}{2} - \gamma\} \setminus \mathbb{Z}$, donc par le théorème des zéros isolés,

$$h(z) = g^\pm(z)Mu(z + \gamma)$$

pour tout $z \in \left(\{\mathbf{Re}(z) > \frac{1}{2} - \gamma\} \setminus \mathbb{Z}\right)$. Or pour de tels z , $|g^\pm(z)| \leq \text{Cste}$, donc pour tout $u \in \mathcal{K}^{s,\gamma}$ avec $\gamma > \frac{-1}{2}$ tel que $\gamma \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$,

$$\|\text{op}_M(g^\pm)u\|_{s,N}^2 \leq C\|u\|_{s,N}.$$

□

Il nous reste donc à connaître le développement de Mellin de $\text{op}_\psi((i\xi)^{-k})$. Pour cela, utilisons le fait qu'un opérateur pseudo-différentiel homogène a un noyau homogène [23] :

Théorème 1.5.4. *Soit A l'opérateur pseudo-différentiel homogène d'ordre $-k$ de symbole $a(\xi) = (i\xi)^{-k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Alors A est un opérateur de noyau $(x, y) \mapsto K_A(x - y)$, où K_A est homogène de degré $k - 1$, et*

$$K_A(1) = \frac{(-1)^k}{2(k-1)!} \quad , \quad K_A(-1) = \frac{1}{2(k-1)!}.$$

Ce théorème permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 1.5.5. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $\gamma \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$,*

$$\text{op}_\psi((i\xi)^{-k}) = t^k \text{op}_M^\gamma \left(\frac{\Gamma(z - k)}{\Gamma(z)} \right).$$

Démonstration. • Commençons par le cas où $k > 0$.

On est alors dans le cadre du théorème 1.5.4 : notons a le noyau de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $(i\xi)^{-k}$, alors a vérifie

$$a(x) = |x|^{k-1} a\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad a(1) = \frac{(-1)^k}{2(k-1)!}, \quad a(-1) = \frac{1}{2(k-1)!}.$$

Pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,

$$\text{op}_\psi((i\xi)^{-k})u(s) = s^k \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^{-k} a\left(\frac{s}{t} - 1\right) u(t) \frac{dt}{t} = s^k \text{op}_M h u(s),$$

où

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1-k} a\left(\frac{t-1}{|t-1|}\right) |t-1|^{k-1} dt \\
 &= a(-1) \int_0^1 t^{z-1-k} (1-t)^{k-1} dt + a(1) \int_1^{+\infty} t^{z-1-k} (t-1)^{k-1} dt \\
 &= a(-1) \int_1^{+\infty} t^{-z} (t-1)^{k-1} dt + a(1) \int_1^{+\infty} t^{z-1-k} (t-1)^{k-1} dt.
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement la formule suivante :

$$\int_1^{+\infty} (t-1)^{\alpha-1} t^{-\alpha-\beta} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (1.35)$$

et donc :

$$h(z) = a(-1) \frac{\Gamma(k)\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)} + a(1) \frac{\Gamma(1-z)\Gamma(k)}{\Gamma(1-z+k)}.$$

De plus, pour tout $-1 < \mathbf{Re}(z) < 1$ (soit $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$), $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, d'où :

$$h(z) = \frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)}.$$

- Lorsque $k = 0$,

$$\mathrm{op}_\psi((i\xi)^0) = id = \mathrm{op}_M^\gamma(1), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Lorsque $k < 0$, montrons par récurrence que :

$$\mathrm{op}_\psi((i\xi)^{-k}) = s^k \mathrm{op}_M^\gamma \left(\frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)} \right), \quad \gamma < \frac{1}{2}$$

- * $k = -1$

$$\mathrm{op}_\psi(i\xi)u = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)\mathcal{F}u) = -u' = s^{-1}(\mathrm{op}_M^\gamma(z)u), \quad \gamma < \frac{1}{2}.$$

- * $k < -1$ De la même manière,

$$\begin{aligned}
 \mathrm{op}_\psi((i\xi)^{-k}) &= -\frac{d}{ds} \mathrm{op}_\psi((i\xi)^{-k+1}) \\
 &= s^{-1} \mathrm{op}_M^\gamma z s^{-k+1} \mathrm{op}_M^\gamma \left(\frac{\Gamma(z-k+1)}{\Gamma(z)} \right) \\
 &= s^{-k} \mathrm{op}_M^\gamma \left((z-k+1) \frac{\Gamma(z-k+1)}{\Gamma(z)} \right) \\
 &= s^{-k} \mathrm{op}_M^\gamma \left(\frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)} \right).
 \end{aligned}$$

□

Remarquons que pour tout entier k négatif, $h_k(z) = \frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)}$ est holomorphe dans \mathbb{C} , et pour tout entier k positif,

$$h_k(z) = \frac{1}{(z-1)\dots(z-k)} \in \mathcal{A}(\{\operatorname{Re}(z) < 1\}),$$

donc pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$,

$$\operatorname{op}_\psi((i\xi)^{-k}) = t^k \operatorname{op}_M^\gamma \left(\frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z)} \right) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+k,\gamma+k}$$

est continue.

Etudions enfin le reste $\operatorname{op}_\Psi(a_N)$. Pour cela, commençons par démontrer un résultat plus général :

Proposition 1.5.6. *Soit A un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-N$. Alors sa restriction à \mathbb{R}^+ vérifie, pour toute fonction plateau ω valant 1 autour de zéro, pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$, pour tout réel s ,*

$$\omega r^+ A e^+ \omega : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+N,N}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_T,$$

où \mathcal{T} est l'asymptotique de Taylor.

Démonstration. Tout d'abord, l'opérateur A étant d'ordre $-N$, nous pouvons appliquer le corollaire 1.3.20 : pour tout réel s ,

$$\omega r^+ A e^+ \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+N-m-1}(\mathbb{R}^+).$$

Soit R le noyau de l'opérateur A :

$$R(s, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(s-t)\xi} a(s, \xi) \frac{d\xi}{2\pi},$$

où a est le symbole de A . L'opérateur A est d'ordre $-N$, donc

$$|a(s, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{-N/2}.$$

Comme $\mathcal{F}_{t \rightarrow \xi}(R)(s, \xi) = e^{is\xi} a(s, \xi)$, on voit tout de suite que $t \mapsto R(s, t) \in H^{N-m-1}(\mathbb{R})$ donc est de classe $C^{N-m-2}(\mathbb{R})$.

D'autre part, l'opérateur adjoint A^* est aussi d'ordre $-N$, et de noyau $\overline{R(t, s)}$. Par le même raisonnement, $s \mapsto R(s, t) \in H^{N-m-1}(\mathbb{R})$ donc est de classe $C^{N-m-2}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, par un développement de Taylor en s , nous pouvons écrire :

$$R(s, t) = \sum_{j=0}^{N-m-2} s^j \tilde{R}_j(t) + s^{N-m-1} \tilde{R}_{N-m-1}(s, t),$$

où \tilde{R}_{N-m-1} est de classe $C^0(\mathbb{R}^2)$. D'où :

$$\omega r^+ A e^+ \omega = A_1 + A_2,$$

où A_1 est l'opérateur de noyau $\omega(s) \sum_{j=0}^{N-m-2} s^j \tilde{R}_j(t) \omega(t)$, donc A_1 est un opérateur de Green ; et A_2 est l'opérateur de noyau $\omega(s) s^{N-m-1} \tilde{R}_{N-m-1}(s, t) \omega(t)$: comme $\omega \in \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}^+)$, pour tout réel s , pour tout $u \in \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$,

$$|A_2 u(s)| \leq \omega(s) s^{N-m-1} \|u\|_{\mathcal{K}^s} \|\omega\|_{\mathcal{K}^{-s}} \sup_{\text{Supp}(\omega)} |\tilde{R}_{N-m-1}|,$$

et comme $A_2 = \omega r^+ A e^+ \omega - A_1$, $A_2 : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+N-m-1}(\mathbb{R}^+)$, d'où

$$\omega r^+ A e^+ \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+N-m-1, N-m-1}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_{\mathcal{T}}.$$

D'autre part, les fonctions \tilde{R}_j et $t \rightarrow \tilde{R}_{N-m-1}(s, t)$ possèdent des asymptotiques tels que $\text{Re}(p) < 0$ près de zéro (fonctions continues sur \mathbb{R}), on peut donc étendre $\omega r^+ A e^+ \omega$ pour tout $\gamma > \frac{-1}{2}$:

$$\omega r^+ A e^+ \omega : \mathcal{K}^{s, \gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s+N-m-1, N-m-1}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_{\mathcal{T}}.$$

□

Lemme 1.5.7. *Pour tout $N > m + 1$ entier strictement positif, soit*

$$a_N(\xi) = a(\xi) - \sum_{k=0}^N [a_k^+ \theta^+(\xi) + a_k^-(\alpha) \theta^-(\xi)] (i\xi)^{m-k},$$

alors pour toute fonction plateau ω sur \mathbb{R}^+ , valant 1 près de zéro, $R = \omega \text{op}_{\Psi}(a_N) \omega$ est dans $\mathbf{L}_{F+G}^{N-m-1, (N-m-1)}$, dont la partie Green est d'asymptotique \mathcal{T} de Taylor. De plus, pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma \leq N - 1$ cet opérateur s'étend en un opérateur continue :

$$R : \mathcal{K}^{s, \gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m, \gamma-m}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_{\mathcal{T}}.$$

Démonstration. Soit :

$$b_N(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a_N(\xi) \frac{d\xi}{2\pi}.$$

L'opérateur R est de noyau $\omega(s) b_N(s - t) \omega(t)$. Ce lemme est donc un corollaire direct de la proposition 1.5.6. □

Nous pouvons à présent montrer le résultat recherché, rappelons le théorème 1.5.1 :

Théorème 1.5.8. *Pour tout $a \in \mathbf{S}_{cl}^m(\mathbb{R})$ indépendant de x , $m \in \mathbb{R}$, pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma < N - 1$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \gamma - m \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}} & \text{si } m < 0, \\ \gamma \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}} & \text{si } m \geq 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

alors

$$\omega \text{op}_{\psi} a \omega = t^{-m} \omega \sum_{j=0}^N t^j \text{op}_M^{\gamma}(\sigma_M^{m-j}(a)) \omega + g_N,$$

où $g_N \in \mathbf{L}_{F+G}^{N-m-1, (N-m-1)}$, dont la partie Green est d'asymptotique \mathcal{T} de Taylor, et

$$\sigma_M^{m-j}(a)(z) = \begin{cases} (a_j^+ g^+(z+m) + a_j^- g^-(z+m)) \frac{\Gamma(z-m+j)}{\Gamma(z)} & \text{si } m < 0, \\ (a_j^+ g^+(z) + a_j^- g^-(z)) \frac{\Gamma(z-m+j)}{\Gamma(z)} & \text{si } m \geq 0. \end{cases}$$

De plus, pour tout réel s ,

$$\omega \operatorname{op}_\psi a\omega : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+) + \mathcal{D}_\mathcal{T}$$

est continue.

Démonstration. En effet, pour assembler les résultats des lemmes 1.5.2, 1.5.7 et 1.5.5, il reste à faire le produit de $\operatorname{op}_M g^\pm$ par $t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k)$.

Supposons tout d'abord $m < 0$. Il est possible de faire ce produit, grâce aux continuités suivantes :

$$t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma+k-m}(\mathbb{R}^+) \hookrightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+),$$

et comme $\gamma - m > \frac{-1}{2}$, et $\gamma - m \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$,

$$\operatorname{op}_M g^\pm : \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+),$$

donc :

$$\operatorname{op}_M g^\pm t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+)$$

et

$$\operatorname{op}_M g^\pm t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) = (t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(T^m g^\pm h_k) + G_k \operatorname{op}_M^\gamma(h_k),$$

où G_k est un opérateur de Green (provenant de la commutation de t^{k-m} avec $\operatorname{op}_M g^\pm$), d'asymptotique de Taylor (les pôles de g^\pm dans la bande $\{\frac{1}{2} - k - \gamma + m < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$).

Si $m \leq 0$, il suffit de composer les opérateurs dans l'autre sens :

$$a(\xi) = \sum_{k=0}^N (i\xi)^{m-k} [a_k^+ \theta^+(\xi) + a_k^- (\alpha) \theta^-(\xi)] + a_N(\xi),$$

et comme $\gamma > \frac{-1}{2}$ et $\gamma \neq \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$,

$$\operatorname{op}_M g^\pm : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+),$$

donc :

$$t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) \operatorname{op}_M g^\pm : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-m,\gamma-m}(\mathbb{R}^+)$$

et

$$t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) \operatorname{op}_M g^\pm = t^{k-m} \operatorname{op}_M^\gamma(T^m g^\pm h_k).$$

D'autre part, pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$, on a vu à la suite du lemme 1.5.2 que $\operatorname{op}_M^\gamma g^\pm = \operatorname{op}_M g^\pm$. Il reste donc le cas où $\gamma > 0$: d'après la proposition 1.4.16,

$$\operatorname{op}_M g^\pm = t^{-\gamma} \operatorname{op}_M(T^\gamma g^\pm) t^\gamma = \operatorname{op}_M^\gamma h + G^\pm,$$

où G^\pm est un opérateur de Green. D'autre part, d'après le lemme 1.5.3, on sait que G^\pm vérifie la continuité :

$$G^\pm : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+).$$

Enfin, $g_N = \omega \left(\sum_{k=0}^N G_k \operatorname{op}_M^\gamma(h_k) + \operatorname{op}_\psi a_N \right) \omega \in \mathbf{L}_{F+G}^{N-m-1, (N-m-1)}$, dont la partie Green est d'asymptotique \mathcal{T} de Taylor (et $G_k = 0$ si $m \geq 0$). \square

Ce résultat peut en fait s'étendre à tout $\gamma > \frac{-1}{2}$ vérifiant la condition (1.36), nous renvoyons pour cela à [42].

Chapitre 2

Le problème de Laplace

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| 2.1 Applications de la théorie pseudo-différentielle de Mellin . | 59 |
| 2.1.1 Espaces à poids sur $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ | 59 |
| 2.1.2 Opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ et théorie de Fredholm | 61 |
| 2.2 Le problème de Laplace : théorème de représentation | 62 |
| 2.2.1 Existence et unicité du problème intérieur | 62 |
| 2.2.2 Existence et unicité du problème extérieur | 63 |
| 2.2.3 Théorème de représentation | 63 |
| 2.3 Construction des potentiels simple et double couches | 68 |
| 2.3.1 Propriétés des traces de solutions du laplacien | 68 |
| 2.3.2 Projecteurs de Calderón | 70 |
| 2.3.3 Potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace | 71 |
| 2.4 Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ou- | |
| vert lisse | 71 |
| 2.4.1 L'équation simple couche | 73 |
| 2.4.2 L'équation double couche en source | 77 |
| 2.4.3 L'équation double couche en champs | 78 |
| 2.4.4 Introduction à la GCSIE | 79 |
| 2.5 Résolution du problème de Laplace dans un cône infini . . . | 82 |
| 2.5.1 Le problème de Laplace dans un cône infini | 82 |
| 2.5.2 Calcul de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann | 83 |
| 2.5.3 Cas particuliers | 84 |
| 2.6 Préconditionnement du simple couche sur un segment . . . | 85 |
| 2.6.1 Etude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par le log. . . . | 86 |
| 2.6.2 Préconditionnement du simple couche sur un segment | 89 |
| 2.7 Construction de la GCSIE prenant en compte la présence | |
| de pointes | 91 |
| 2.7.1 Présentation de la nouvelle GCSIE | 91 |
| 2.7.2 Existence et unicité d'une solution | 91 |

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser dans un cadre simple la théorie pseudo-différentielle de Mellin que nous avons présentée dans le premier chapitre. En effet, le problème de Laplace possède l'avantage de permettre de nombreux calculs explicites. Ainsi, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (appelé opérateur capacité en électrostatique) sur un cône infini peut-il être explicitement calculé. Mais surtout, les opérateurs simple couche, double couche et capacité s'expriment à l'aide d'opérateurs de Mellin (c'est-à-dire sous la forme $t^{jop_M}h$, $h \in \mathcal{M}_{as}^m$), et sont donc faciles à étudier. La principale difficulté provient du fait que l'opérateur simple couche n'est pas elliptique, mais s'écrit comme $S = tA$ où A est elliptique. C'est ce qui complique notre étude, et sera traité dans la sixième section de ce chapitre.

L'objectif de notre travail est de construire une équation intégrale intrinsèquement bien conditionnée sur un ouvert à pointe, en gardant la philosophie de construction de la GCSIE (Generalized Combined Source Integral Equation). Dans ce chapitre, nous allons donc construire une GCSIE adaptée à la présence de pointes dans le cas du problème de Laplace.

Le premier paragraphe n'est pas spécifique au problème de Laplace, mais sera à nouveau utilisé dans le chapitre suivant. Il s'agit de définir correctement les espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}$ sur la frontière d'un ouvert de dimension 2. Ces espaces ne seront pas définis comme des espaces de traces, mais de façon plus générale, et intrinsèque à la frontière. Ensuite, nous écrirons un théorème nous permettant d'utiliser de manière pratique la théorie pseudo-différentielle de Mellin sur des développements de Mellin (théorème 2.1.2). Ce théorème est fondamental, puisqu'il nous permet de passer de la théorie pure, aux cas pratiques, grâce à un critère simple d'étude des opérateurs pouvant s'écrire sous forme de développement de Mellin.

Dans le deuxième paragraphe, nous présenterons le problème de Laplace intérieur et extérieur, rappelant les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions. Ensuite, nous écrirons un théorème de représentation pour le problème de Laplace dans les espaces de Beppo-Levi. En effet, ces espaces nous permettent d'avoir l'unicité du problème de Dirichlet extérieur. Ils jouent le rôle de la condition de rayonnement en l'infini que l'on a pour les problèmes de Helmholtz et de Maxwell.

Le théorème de représentation nous permettra dans un troisième paragraphe, de construire les potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace. Nous rappellerons également dans ce paragraphe les propriétés des traces de solutions intérieures et extérieures. En effet, il est possible de caractériser les espaces de traces de solutions. Cela sera utile pour montrer l'unicité d'une solution de la GCSIE.

Pour construire une GCSIE sur une frontière singulière, il est indispensable d'en rappeler la construction sur une frontière lisse. Ce sera l'objet du quatrième paragraphe. Nous rappellerons tout d'abord la construction des équations intégrales simple et double couches, avant d'écrire la GCSIE. Cette équation fait intervenir l'opérateur capacité, approchée localement par celui d'une droite infinie. Pour construire la GCSIE en prenant en compte les pointes, il va donc falloir connaître la capacité sur un cône infini.

Ainsi, dans le cinquième paragraphe, nous étudierons le problème de Laplace sur un cône infini. Il est possible de calculer la solution d'un problème de Dirichlet en dehors d'un cône infini, et donc de connaître de façon explicite l'opérateur capacité.

Le théorème de représentation, rappelé dans le deuxième paragraphe, nous assure

que le saut de l'opérateur capacité est exactement l'inverse de l'opérateur simple couche sur un segment. Or, nous venons de calculer cet opérateur sur une demi-droite infinie (cas du cône aplati). En parallèle, nous pouvons écrire en première application de la théorie de Mellin un préconditionnement de l'équation intégrale en simple couche sur un segment. En calculant un pseudo-inverse de l'opérateur simple couche à l'aide de la théorie de Mellin, nous retrouvons alors l'expression du saut de la capacité.

Enfin, nous disposons de tous les outils pour construire la GCSIE sur un ouvert singulier. Nous introduirons la nouvelle GCSIE et démontrerons son caractère bien posé dans le dernier paragraphe.

2.1 Applications de la théorie pseudo-différentielle de Mellin

2.1.1 Espaces à poids sur $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$

Considérons un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ possédant une pointe. Nous voulons définir les espaces à poids $\mathcal{K}^{s,\gamma}$ sur la frontière Γ . Nous allons donner une définition intrinsèque à la surface, autrement dit, les éléments de $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma)$ n'auront pas forcément de relèvement dans un espace de Sobolev. En revanche, ces espaces contiennent les espaces de traces de Sobolev (pour $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$: voir le lemme 2.2.3 dû à Costabel [17], ou bien pour $s = m - 1/2$, m entier, avec des conditions de raccordement à la pointe [25]). Les résultats qui suivent sont donc généraux : ils autorisent par exemple une discontinuité sur la pointe. En revanche, ils n'autorisent pas une source ponctuelle située au niveau de la pointe (ce qui est rare en pratique).

Le cas d'un cône infini

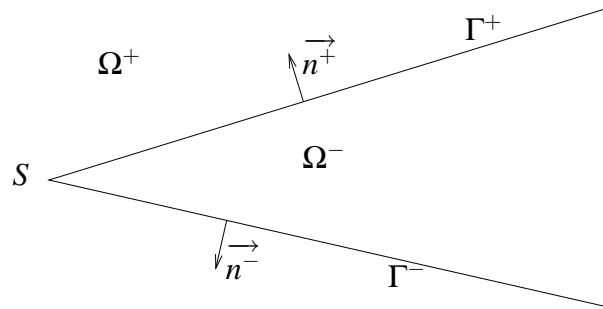


FIG. 2.1 – *Le cône $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.*

Supposons tout d'abord que la surface Γ est un cône infini $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, où $\Gamma^\pm \cong \mathbb{R}^+$ (cf figure 2.1). On pose pour tous réels s, γ ,

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma) = \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+),$$

et pour tout $u \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma)$, on notera

$$u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix},$$

où $u^\pm \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ est la restriction de u à Γ^\pm .

Le cas d'un ouvert borné à pointe

Considérons maintenant un ouvert Ω^- borné dont la frontière Γ possède une pointe notée S .

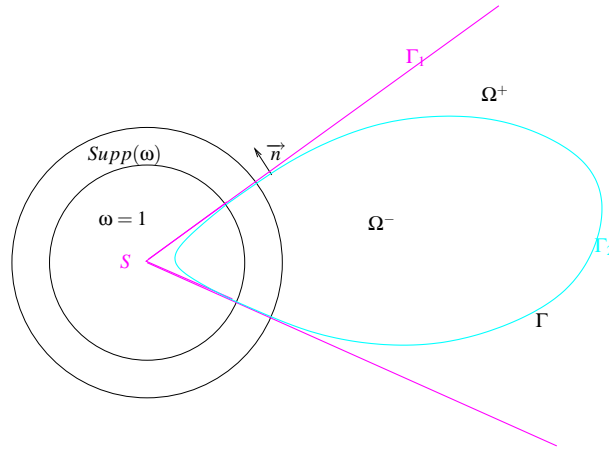


FIG. 2.2 – La frontière $\Gamma = \omega\Gamma_1 + (1 - \omega)\Gamma_2$.

Supposons que Γ soit une frontière bornée telle que :

$$\Gamma \cap \text{Supp}(\omega) = \Gamma_1 \cap \text{Supp}(\omega), \quad \text{et} \quad \Gamma \cap \text{Supp}(1-\omega) = \Gamma_2 \cap \text{Supp}(1-\omega),$$

où ω est une fonction plateau de \mathbb{R}^2 qui vaut 1 près de la pointe S , et 0 en dehors d'un voisinage de S , Γ_1 est un cône infini d'angle extérieur θ_0 , et Γ_2 est une frontière bornée C^∞ (cf figure 2.2). Pour représenter cette propriété, nous noterons

$$\Gamma = \omega\Gamma_1 + (1 - \omega)\Gamma_2.$$

On définit alors

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma) = \omega\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma_1) + (1 - \omega)H^s(\Gamma_2),$$

où $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma_1)$ est défini au paragraphe précédent (cas d'un cône infini).

Nous nous ramenons donc toujours à l'étude des opérateurs sur des surfaces lisses ou bien sur \mathbb{R}^+ , par l'application d'une fonction plateau autour de la pointe S , puis par la séparation du cône près de S en deux branches assimilables à \mathbb{R}^+ . Tous les résultats du chapitre précédent pourront donc être appliqués.

2.1.2 Opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^+ et théorie de Fredholm

Dans la théorie habituelle sur des ouverts lisses, nous pouvons déduire de l'étude du symbole principal d'un opérateur, des propriétés de Fredholm : si le symbole à l'ordre 0 d'un opérateur d'ordre 0 est nul, alors il est compact dans $H^s(\mathbb{R})$. Nous souhaitons avoir un résultat similaire dans le cadre de la théorie de Mellin. Il va donc falloir faire intervenir le symbole principal, ainsi que le symbole conormal à l'ordre 0.

Proposition 2.1.1. *Soit $\omega_1 \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$, soit $A \in \mathbf{L}^{m,(k)}$. Alors A et $\omega_1 A \omega_1$ ont même symbole conormal.*

Démonstration. Soit $\sigma_M(A) = \{h_j\}$, alors il existe $\omega \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$, $F + G \in \mathbf{L}_{F+G}^{m,(k)}$ tels que :

$$A - \omega_1 A \omega_1 = \sum_{j=0}^{k-1} t^j (\omega \text{op}_M(h_j) \omega - \omega_1 \omega \text{op}_M(h_j) \omega_1 \omega + F + G - \omega_1 (F + G) \omega_1).$$

D'après les propositions 1.4.11, 1.4.23 et 1.4.24, $A - \omega_1 A \omega_1 \in \mathbf{L}_{F+G}^{m,(k)}$. Donc d'après la proposition 1.4.33, $\sigma_M(A - \omega_1 A \omega_1) = 0$, ce qui permet de conclure. \square

Le théorème et le corollaire qui suivent nous seront très utiles pour les applications pratiques :

Théorème 2.1.2. *Soit $A \in \mathbf{L}^{0,(k)}$ tel que :*

$$\begin{cases} \sigma_M^0(A) = 0, \\ \sigma_b^0(A) = 0, \end{cases}$$

alors $\omega A \omega$ est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, pour tout réel s et tout $\omega \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$. Plus précisément, cet opérateur vérifie $\omega A \omega \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1,(1)}$.

Démonstration. D'après la proposition 1.4.34, comme $\sigma_b^0(A) = 0$, alors $A \in \mathbf{L}^{-1,(k)}$. De plus, $\sigma_M^0(A) = 0$, donc on a :

$$\omega A \omega = t \sum_{j=0}^{k-2} t^j \omega \text{op}_M h_{j+1} \omega + \omega F \omega + G,$$

et (on note I un intervalle compact de $[0, +\infty[$ contenant le support de ω :

$$\omega t \sum_{j=0}^{k-2} t^j \text{op}_M h_{j+1} \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\sum t^j \text{op}_M h_{j+1} \omega} \mathcal{K}_I^{s+1} \xrightarrow{t} \mathcal{K}_I^{s+1,1} \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{K}_I^s \xrightarrow{\omega} \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+),$$

$$\omega F \omega : \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{F \omega} \mathcal{K}_I^{s+1,k} \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{K}_I^s \xrightarrow{\omega} \mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+),$$

sont des opérateurs compacts de $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, et G est un opérateur de Green, donc d'après le théorème 1.4.5, G est compact dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$. D'où le résultat. \square

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 2.1.3. *Soit $A = Id + \omega C\omega$, où $C \in \mathbf{L}^{0,(k)}$ est tel que*

$$\sigma_M^0(C) = 0 \text{ et } \sigma_b^0(C) = 0,$$

alors A est un opérateur de Fredholm d'indice 0 dans $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, pour tout réel s .

2.2 Le problème de Laplace : théorème de représentation

Nous considérons la frontière Γ définie au paragraphe précédent, régulière partout, sauf en des points isolés où Γ présente une singularité conique :

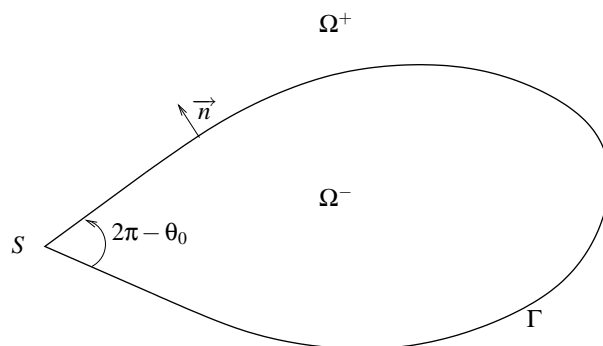


FIG. 2.3 – *Ouvert à coin.*

Pour écrire des équations intégrales sur la frontière Γ , il est nécessaire d'avoir un théorème de représentation, c'est-à-dire de trouver un opérateur reliant la solution du problème de Laplace à l'intérieur ou à l'extérieur de Γ à ses données de Dirichlet et de Neumann sur la frontière. Nous allons commencer par rappeler les théorèmes d'existence de solutions du problème de Laplace avec données de Dirichlet.

2.2.1 Existence et unicité du problème intérieur

Soit le problème de Laplace intérieur :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 2.2.1. *Le problème de Laplace intérieur (2.1) possède une unique solution dans l'espace $H^1(\Omega^-)$ si $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.*

Pour la preuve, on se reportera à [39]. On pourra y vérifier que la démonstration ne fait pas intervenir la régularité de la surface. Seule l'existence de l'application trace de $H^1(\Omega)$ vers $H^{1/2}(\Gamma)$ et de son relèvement sont nécessaires, ce qui est garantie par le lemme 2.2.3.

On note W^- l'espace des solutions du problème de Laplace intérieur.

2.2.2 Existence et unicité du problème extérieur

On considère le problème de Laplace extérieur :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit l'espace :

$$W(\Omega^+) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^+) : \nabla u \in L^2(\Omega^+), \frac{u}{\log(2 + |x|^2)(1 + |x|^2)^{1/2}} \in L^2(\Omega^+) \right\}.$$

Théorème 2.2.2. *Le problème de Laplace extérieur (2.2) possède une unique solution dans l'espace $W(\Omega^+)$ si $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.*

Pour la preuve, on se reportera à [39]. De même que pour le problème intérieur, la démonstration ne fait pas intervenir la régularité de la surface.

On note W^+ l'espace des solutions du problème de Laplace extérieur, dans $W(\Omega^+)$.

2.2.3 Théorème de représentation

Notons g la solution élémentaire de l'équation de Laplace :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

On note γ_0^\pm la trace sur Γ et γ_1^\pm la trace de la dérivée normale sur Γ . Le signe $+$ ou $-$ indique s'il s'agit d'une trace extérieure ou intérieure.

Pour tout $x \in \Omega^+$, on définit les potentiels simple et double couches :

$$\mathcal{S}u(x) = \int_{\Gamma} g(y - x)u(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |x - y|u(y)dy,$$

$$\mathcal{D}u(x) = \int_{\Gamma} \partial_{n_y} g(y - x)u(y)dy.$$

Comme la frontière est lipschitzienne, on ne peut a priori pas définir la trace de Neumann, car l'application trace

$$\gamma_0^\pm : H^s(\Omega^\pm) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$$

n'est bien définie et continue que pour $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ comme le montre le lemme suivant, dû à Costabel.

Lemme 2.2.3 ([17]). *Pour tout $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, l'application trace $\gamma_0 : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ est continue pour un ouvert Ω à frontière lipschitzienne, et possède un relèvement continu.*

Cependant, on peut définir la trace de Neumann par dualité :

Rappelons que l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ existe, c'est le dual de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. D'autre part, il existe un relèvement continu de la trace $\eta_0^\pm : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega^\pm)$.

Soit $u \in W(\Omega^+)$ solution du problème de Laplace extérieur (2.2), on définit $\gamma_1^+ u$ par : pour tout $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$\int_{\Gamma} \gamma_1^+ u \Phi = \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla (\eta_0^+ \Phi).$$

Cette définition a un sens : comme $u \in W(\Omega^+)$, $\nabla u \in L^2(\Omega^+)$, et $\eta_0^+ \Phi \in H^1(\Omega^+)$.

De même, pour $u \in W^-$, solution du problème de Laplace intérieur (2.1), on définit $\gamma_1^- u$ par : pour tout $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$\int_{\Gamma} \gamma_1^- u \Phi = \int_{\Omega^-} \nabla u \cdot \nabla (\eta_0^- \Phi).$$

Un théorème de représentation pour le problème de Laplace est donné par Costabel :

Théorème 2.2.4 ([18]). *Soit u solution du problème de Laplace (2.2), vérifiant de plus la condition à l'infini suivante : il existe a et b réels tels que*

$$u = a + \frac{b}{2\pi} \log |x| + o(1), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Alors pour tout $x \in \Omega^+$,

$$u(x) = \mathcal{S}(\gamma_1^+ u)(x) - \mathcal{D}(\gamma_0^+ u)(x) + a.$$

De plus, $b = \int_{\Gamma} \gamma_1^+ u$.

Seulement, il n'y a pas existence et unicité d'une telle solution. On aimerait donc pouvoir écrire un tel théorème de représentation dans l'espace $W(\Omega^+)$, dans lequel le théorème 2.2.2 nous assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Laplace extérieur.

Théorème 2.2.5 (de représentation). *La solution extérieure $u \in W(\Omega^+)$ de (2.2) vérifie :*

$$u(x) = a + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

et pour tout $x \in \Omega^+$,

$$u(x) = \mathcal{S}(\gamma_1^+ u)(x) - \mathcal{D}(\gamma_0^+ u)(x) + a.$$

D'autre part, pour tout $x \in \Omega^-$,

$$\mathcal{S}(\gamma_1^+ u)(x) - \mathcal{D}(\gamma_0^+ u)(x) + a = 0.$$

La solution intérieure $u \in H^1(\Omega^-)$ de (2.1) vérifie pour tout $x \in \Omega^-$, :

$$u(x) = \mathcal{D}(\gamma_0^- u)(x) - \mathcal{S}(\gamma_1^- u)(x).$$

D'autre part, pour tout $x \in \Omega^+$,

$$\mathcal{S}(\gamma_1^- u)(x) - \mathcal{D}(\gamma_0^- u)(x) = 0.$$

Connaissant le comportement asymptotique de u en l'infini, il suffit d'appliquer le théorème 2.2.4 pour avoir le théorème de représentation. Mais pour obtenir ce développement asymptotique, nous trouvons en même temps la représentation intégrale cherchée.

Démonstration. On montre le théorème pour la solution du problème extérieur. Le reste se démontre de la même manière.

Soient $x \in \Omega^+$, $r > 0$ assez petit pour que $B(x, r)$ n'intersecte pas Ω^- , et $R > 0$ assez grand pour que $B(0, R)$ contienne $B(x, r)$.

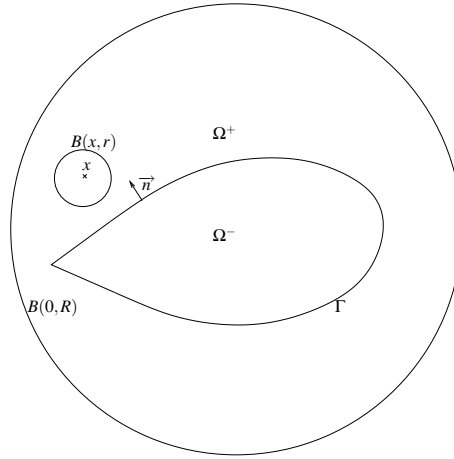


FIG. 2.4 – Notations de la démonstration.

Appliquons la formule de Green dans $B(0, R) \setminus \Omega^-$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(0, R) \setminus \Omega^-} \Delta u(y) g(y - x) - u(y) \Delta g(y - x) dy \\ &= \int_{C(0, R) - C(x, r) - \Gamma} \partial_n u(y) g(y - x) - u(y) \partial_n g(y - x) dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Notons :

$$\begin{aligned} I_r(x) &= \int_{C(x, r)} \partial_n u(y) g(y - x) - u(y) \partial_n g(y - x) dy, \\ I_{1, R}(x) &= \int_{C(0, R)} \partial_n u(y) g(y - x) dy, \\ I_{2, R}(x) &= \int_{C(0, R)} u(y) \partial_n g(y - x) dy. \end{aligned}$$

- Regardons tout d'abord $I_r(x)$.

Pour cela calculons la dérivée normale de g : $\partial_n g(y - x) = \frac{1}{2\pi} \frac{y - x}{|y - x|^2} \cdot \frac{y - x}{r} = \frac{1}{2\pi r}$, d'où

$$I_r(x) = \frac{r \log(r)}{2\pi} \int_{C(0, 1)} \partial_n u(x + ry) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{C(0, 1)} u(x + ry) dy \xrightarrow{r \rightarrow 0} -u(x),$$

pour tout $x \in \Omega^+$.

• Montrons que $\frac{1}{\log(R_n)} I_{2,R_n}$ tend vers zéro uniformément sur tout compact de Ω^+ , pour presque toute suite (R_n) tendant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

Soit K un compact de Ω^+ , choisissons R assez grand pour que $B(0, R)$ contienne K . Pour tout $x \in K$,

$$|I_{2,R}(x)| \leq \left(\int_{C(0,R)} |u(y)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{C(0,R)} |\partial_n g(y-x)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Or $|\partial_n g(y-x)|^2 \leq \frac{1}{|y-x|^2} \leq \frac{C}{1+R^2}$, pour $C > 0$, d'où :

$$\sup_{x \in K} |I_{2,R}(x)| \leq \left(\frac{CR}{(1+R^2)} \int_{C(0,R)} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Soit $R_1 > 0$ assez grand pour que $\Omega^- \subset B(0, R_1)$. Alors comme $u \in W(\Omega^+)$, on a :

$$\int_{R_1}^{+\infty} \int_{C(0,R)} \frac{|u(y)|^2}{(1+R^2)(\log(2+R^2))^2} dy dR < +\infty,$$

donc

$$\int_{R_1}^{+\infty} \frac{\log(R)}{R(\log(2+R^2))^2} \int_{C(0,R)} \frac{R|u(y)|^2}{\log(R)(1+R^2)} dy dR < +\infty.$$

Or $R \mapsto \frac{\log(R)}{R(\log(2+R^2))^2}$ n'est pas intégrable dans $L^2(R_1, +\infty)$, donc pour presque toute suite (R_n) tendant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\int_{C(0,R_n)} \frac{R_n |u(y)|^2}{\log(R_n)(1+R_n^2)} dy \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

d'où

$$\sup_{x \in K} \left(\frac{1}{\log(R_n)} I_{2,R_n}(x) \right) \rightarrow 0.$$

• Montrons que $I_{1,R_n} \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de Ω^+ , pour la même suite (R_n) que celle choisie à l'étape précédente.

Soit K un compact de Ω^+ , choisissons R assez grand pour que $B(0, R)$ contienne K . Remarquons (en utilisant (2.3) et en faisant tendre r vers 0) que pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log(R_n)} I_{1,R_n}(x) &= \frac{1}{\log(R_n)} \left(\int_{\Gamma} \partial_n u(y) g(y-x) - u(y) \partial_n g(y-x) dy \right) \\ &+ \frac{-u(x)}{\log(R_n)} + \frac{1}{\log(R_n)} I_{2,R_n}(x). \end{aligned}$$

Or par ellipticité du laplacien, u est bornée sur tout compact de Ω^+ (car de classe C^∞ en dehors de la frontière Γ), donc

$$\sup_{x \in K} \left(\frac{1}{\log(R_n)} I_{1,R_n}(x) \right) \rightarrow 0.$$

D'autre part,

$$2\pi I_{1,R}(x) = \log(R) \int_{C(0,R)} \partial_n u(y) dy - \int_{C(0,R)} \partial_n u(y) \left(\frac{x \cdot y}{R^2} + o\left(\frac{1}{R}\right) \right), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Comme $u \in W(\Omega^+)$,

$$\int_{R_1}^{+\infty} \int_{C(0,R)} |\nabla u|^2 < +\infty,$$

donc il existe $C > 0$ tel que pour presque tout R , $\int_{C(0,R)} |\nabla u|^2 < C$.

Donc pour presque tout R ,

$$\left| \int_{C(0,R)} \partial_n u \frac{x \cdot y}{R^2} \right| \leq \left(\int_{C(0,R)} |\partial_n u|^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{R}},$$

et

$$2\pi I_1(R) = \log(R) \int_{C(0,R)} \partial_n u + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

De plus, pour tout R ,

$$\int_{C(0,R)} \partial_n u = \int_{\Gamma} \partial_n u.$$

On peut donc choisir une suite R_n qui convienne pour $I_{1,R}$ et $I_{2,R}$, et en divisant par $\log(R_n)$, $\int_{\Gamma} \partial_n u = 0$ et $I_{1,R_n}(x) \rightarrow 0$. Remarquons le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\boxed{\int_{\Gamma} \gamma_1^+ u = 0.}$$

- Montrons que $I_{2,R_n}(x) \rightarrow a$ constante. Notons $a_n(x) = I_{2,R_n}(x)$.

$$a_n(x) = \int_{C(0,R_n)} u(y) \nabla g(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) dy, \quad \forall x \in B(0, R_n) \setminus \Omega^-.$$

Notons

$$a(x) = u(x) - \int_{\Gamma} \partial_n u(y) g(y-x) - u(y) \partial_n g(y-x) dy.$$

En ré-écrivant (2.3) pour $R = R_n$, et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient donc pour tout compact K de Ω^+ ,

$$\sup_{x \in K} |a_n(x) - a(x)| \rightarrow 0.$$

De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$\nabla a_n(x) = \int_{C(0,R_n)} u(y) \left(\frac{y}{|y|} - \frac{y \cdot (x-y)}{|y||x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} \right) \frac{1}{(x-y)^2} dy.$$

Donc par application de la formule de Cauchy-Schwartz, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned} |\nabla a_n(x)| &\leq C \left(\int_{C(0,R_n)} |u(y)|^2 \frac{R_n}{\log(R_n)(1+R_n^2)} dy \right)^{1/2} \left(\int_{C(0,R_n)} \frac{\log(R_n)(1+R_n^2)}{R_n|x-y|^4} dy \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{\log(R_n)(1+R_n^2)}{(1+R_n)^4} \left(\int_{C(0,R_n)} |u(y)|^2 \frac{R_n}{\log(R_n)(1+R_n^2)} dy \right)^{1/2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'après (2.4).

Donc $\sup_{x \in K} |\nabla a_n(x)| \rightarrow 0$, donc ∇a_n tend vers zéro au sens des distributions.

Or a_n tend vers a au sens des distributions, donc ∇a_n tend vers ∇a au sens des distributions, et par unicité de la limite, $\nabla a = 0$ sur Ω^+ .

Donc pour tout $x \in \Omega^+$,

$$I_{2,R_n}(x) \rightarrow a(x) = a = \text{cste.}$$

• Donc finalement,

$$u(x) = \int_{\Gamma} (\partial_n u(y) g(y-x) - u(y) \partial_n g(y-x)) dy + a, \text{ pour } x \in \Omega^+.$$

Comme $\int_{\Gamma} \partial_n u = 0$, on a donc le développement suivant pour u :

$$u(x) = a + O\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

□

Enfin, les opérateurs simple et double couches vérifient les formules de saut, à l'interface Γ , suivants :

Proposition 2.2.6 ([18]). *Soient $(u, v) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, alors $\mathcal{S}u$ et $\mathcal{D}v$ sont dans W^{\pm} , et :*

$$\gamma_0^+ \mathcal{S}u = \gamma_0^- \mathcal{S}u, \quad \gamma_1^+ \mathcal{S}u - \gamma_1^- \mathcal{S}u = u, \quad (2.5)$$

$$-\gamma_0^+ \mathcal{D}v + \gamma_0^- \mathcal{D}v = v, \quad \gamma_1^+ \mathcal{D}v = \gamma_1^- \mathcal{D}v. \quad (2.6)$$

On peut donc noter :

$$S = \gamma_0^+ \mathcal{S}, \quad D = \gamma_0^+ \mathcal{D} + \frac{1}{2} Id \quad \text{et} \quad N = \gamma_1^+ \mathcal{D}.$$

On remarque que $\gamma_1^+ \mathcal{S} - \frac{1}{2} Id = D^*$ (cf [39]). Les opérateurs S , D et N sont définis sur la surface Γ . On nomme généralement S le *potentiel simple couche*, et D le *potentiel double couche*. Pour le problème de Laplace, une constante a apparaît dans la formule de représentation, qui n'est pas présente pour le problème de Helmholtz. Par conséquent, nous appellerons potentiels simple et double couches les opérateurs S et D modulo une constante qui va être explicitée par la suite. C'est l'objet de la section suivante.

2.3 Construction des potentiels simple et double couches

2.3.1 Propriétés des traces de solutions du laplacien

Nous avons déjà pu voir l'importance de la valeur de la moyenne de la trace de Neumann d'une solution du problème de Laplace : elle détermine le comportement

asymptotique logarithmique de la solution en l'infini. Dans notre cadre d'étude (unicité de la solution), nous avons remarqué que cette moyenne s'annule (et la solution tend vers une constante en l'infini) :

Proposition 2.3.1. *Soit $u \in W^\pm$, alors*

$$\int_{\Gamma} \gamma_1^\pm u = 0.$$

Démonstration. Pour $u \in W^+$, ce résultat a été démontré dans la preuve du théorème de représentation.

Pour $u \in W^-$, il s'agit simplement de la formule de Green. \square

D'autre part, il suffit de savoir résoudre les problèmes de Laplace pour des données de Dirichlet vérifiant $\int_{\Gamma} u_0 = 0$. En effet, si u est solution du problème de Laplace (intérieur ou extérieur) avec donnée de Dirichlet $u_0 - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} u_0$, alors $u + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} u_0$ est la solution de W^\pm du problème de Laplace (extérieur ou intérieur) avec donnée de Dirichlet u_0 .

Notons X l'espace des traces à moyenne nulle : $X = H_\bullet^{1/2}(\Gamma) \times H_\bullet^{-1/2}(\Gamma)$, où

$$H_\bullet^s(\Gamma) = \{u \in H^s(\Gamma) \mid \langle u, 1 \rangle = 0\},$$

et X^\pm les sous espaces de X composés des couples de trace $(\gamma_0^\pm u, \gamma_1^\pm u) \in X$, pour $u \in W^\pm$.

On définit également les espaces

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma)_\bullet = \{u \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\Gamma) \mid \langle u, 1 \rangle = 0\},$$

ce qui est bien défini car Γ est borné.

Il est possible de caractériser les espaces X^+ et X^- :

Proposition 2.3.2. *Pour tout $(p, q) \in X^+ \setminus \{(0, 0)\}$,*

$$\langle p, q \rangle < 0.$$

Pour tout $(p, q) \in X^- \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\langle p, q \rangle > 0.$$

Démonstration. Soit $(p, q) \in X^- \setminus \{(0, 0)\}$, alors $p = \gamma_0^- u$ et $q = \gamma_1^- u$ pour $u \in W^- \setminus \{0\}$. Donc

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Omega^-} |\nabla u|^2.$$

Or comme p est non nul et de moyenne nulle, u n'est pas constant et $\langle p, q \rangle > 0$.

Soit $(p, q) \in X^+ \setminus \{(0, 0)\}$, alors $p = \gamma_0^+ u$ et $q = \gamma_1^+ u$ pour $u \in W^+ \setminus \{0\}$. Donc

$$\langle p, q \rangle = - \int_{\Omega^+ \cap B(0, R)} |\nabla u|^2 + \int_{C(0, R)} \partial_n u u.$$

Or $u = a + O\left(\frac{1}{R}\right)$, donc $\partial_n u = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, et $\int_{C(0,R)} \partial_n u u = O\left(\frac{1}{R}\right)$. D'autre part, $\nabla u \in L^2(\Omega^+)$, donc on peut passer à la limite :

$$\langle p, q \rangle = - \int_{\Omega^+} |\nabla u|^2 < 0,$$

car de même, u n'est pas constante sur Ω^+ .

Le changement de signe provient du fait que la normale est choisie dirigée vers l'extérieur du domaine pour le problème intérieur comme pour le problème extérieur. \square

2.3.2 Projecteurs de Calderón

Soient les potentiels définis par :

$$\mathcal{C}^+(p, q) = \begin{cases} \mathcal{S}q - \mathcal{D}p & \text{dans } \Omega^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega^-, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^-(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \mathcal{D}p - \mathcal{S}q & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

Remarquons que pour $u \in W^+$, $u = \mathcal{C}^+(\gamma_0^+ u, \gamma_1^+ u) + a$, donc en prenant la trace de Dirichlet, on peut exprimer la constante a par :

$$a = \gamma_0^+ u - \gamma_0^+ \mathcal{C}^+(\gamma_0^+ u, \gamma_1^+ u) = \gamma_0^- \mathcal{C}^-(\gamma_0^+ u, \gamma_1^+ u).$$

Nous pouvons alors définir :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}}^+ : \mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}'(\Gamma) &\rightarrow W^+ \\ (p, q) &\mapsto \mathcal{C}^+(p, q) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \gamma_0^- \mathcal{C}^-(p, q), \end{aligned} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}}^- : \mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}'(\Gamma) &\rightarrow W^- \\ (p, q) &\mapsto \mathcal{C}^-(p, q) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \gamma_0^- \mathcal{C}^-(p, q). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les opérateurs \mathcal{C}^\pm sont appelés *projecteurs de Calderón*. Leur nom se justifie par la proposition suivante :

Proposition 2.3.3. *Les opérateurs*

$$\overline{\mathcal{C}}^\pm = \gamma_0^\pm \oplus \gamma_1^\pm (\overline{\mathcal{C}}^\pm)$$

sont des projecteurs qui décomposent l'espace X en $X^+ \oplus X^-$.

Démonstration. • Soit $(p, q) \in X^+$, alors on vient de voir que la constante à l'infini de la solution $u \in W^+$ correspondante vérifie :

$$a = \gamma_0^- \mathcal{C}^-(\gamma_0^+ u, \gamma_1^+ u),$$

donc on a clairement

$$(p, q) = \overline{C}^+(p, q).$$

• Soit $(p, q) \in X^-$, alors on sait que $p = \gamma_0^- \mathcal{C}^-(p, q)$. Or $p \in H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$, donc on a bien :

$$(p, q) = \overline{C}^-(p, q).$$

• Enfin, on vérifie très facilement que pour tout $(p, q) \in X$,

$$(p, q) = \overline{C}^+(p, q) + \overline{C}^-(p, q).$$

□

2.3.3 Potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace

Les opérateurs simple et double couche se définissent en écrivant :

$$\overline{C}^\pm(p, q) = \overline{C}^\pm(0, q) + \overline{C}^\pm(p, 0) = \pm (\overline{\mathcal{S}}(q) - \overline{\mathcal{D}}(p)).$$

Commençons par écrire la constante a de manière plus explicite :

$$a = \gamma_0^- \mathcal{C}^-(p, q) = Dp + \frac{1}{2}p - Sq.$$

Comme a est constante, on peut écrire :

$$a = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma (Dp + \frac{1}{2}p - Sq) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma (Dp - Sq),$$

pour tout $(p, q) \in X$.

On a donc :

$$\overline{\mathcal{S}}(q) = \mathcal{S}(q) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Sq,$$

$$\overline{\mathcal{D}}(q) = \mathcal{D}(q) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Dq,$$

et

$$\overline{S} = S - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma S, \quad \overline{D} = D - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma D.$$

Les opérateurs \overline{S} et \overline{D} sont respectivement appelés les *potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace*.

2.4 Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ouvert lisse

Dans cette section, nous allons rappeler le mode de construction des équations intégrales classiques (simple couche, double couche), pour arriver à la construction de la

GCSIE (Generalized Combined Source Integral Equation) dans le cas de surfaces lisses [5]. Cette équation intégrale a été conçue pour le problème de Helmholtz [31] puis le problème de Maxwell. Nous devrons l'adapter légèrement pour le problème de Laplace, du fait de la présence de la constante a dans le théorème de représentation. Cela dit, le formalisme reste exactement le même pour ces trois problèmes.

Le principe général des équations intégrales est le suivant. Notons $[\gamma_i u] = \gamma_i^+ u - \gamma_i^- u$ le saut de la trace γ_i ($i = 0, 1$). Nous avons exhibé deux opérateurs $\overline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ tels qu'une solution u du problème de Laplace vérifie :

$$u = \overline{\mathcal{S}}[\gamma_1 u] - \overline{\mathcal{D}}[\gamma_0 u].$$

En fait, pour tout p et q choisis dans de bons espaces sur le bord (typiquement $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$, $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$),

$$u = \overline{\mathcal{S}}q - \overline{\mathcal{D}}p$$

est une solution du problème extérieur de Laplace, dans l'espace $W(\Omega^+)$. Résoudre le problème de Laplace extérieur avec donnée au bord u_0 , sous forme d'équation intégrale, revient à chercher $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$ et $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$ tels que :

$$u = \overline{\mathcal{S}}q - \overline{\mathcal{D}}p, \quad \gamma_0^+ u = u_0.$$

Il y a plusieurs façon d'aborder ce problème, c'est ce qui va donner les différents types d'équations. Par exemple, nous pouvons choisir de prolonger u dans Ω^- par la solution du problème intérieur de Laplace avec $\gamma_0^- u = \gamma_0^+ u = u_0$. Dans ce cas, le théorème de représentation nous donne :

$$u = \overline{\mathcal{S}}[\gamma_1 u] \quad \Rightarrow \quad \gamma_0^+ u = \overline{\mathcal{S}}[\gamma_1 u].$$

Soit q la solution (si elle existe) de :

$$\overline{\mathcal{S}}q = u_0,$$

alors le relèvement $u = \overline{\mathcal{S}}q$ est une solution du problème de Laplace extérieur avec la donnée u_0 au bord. Nous venons de construire l'*équation simple couche*, souvent notée SLSIE (Single Layer Equation).

Une deuxième façon de procéder est de choisir de prolonger u dans Ω^- par une solution du problème intérieur de Laplace avec $\gamma_1^- u = \gamma_1^+ u$. Le théorème de représentation s'écrit alors :

$$u = -\overline{\mathcal{D}}[\gamma_0 u] \quad \Rightarrow \quad \gamma_0^+ u = \left(\frac{1}{2} Id - \overline{\mathcal{D}} \right) [\gamma_0 u].$$

Soit p la solution (si elle existe) de :

$$\left(\frac{1}{2} Id - \overline{\mathcal{D}} \right) p = u_0,$$

alors le relèvement $u = -\overline{\mathcal{D}}p$ est une solution du problème de Laplace extérieur avec la donnée u_0 au bord. Nous venons de construire l'*équation double couche*, souvent notée DLSIE (Double Layer Equation).

Ces équations sont appelés *équations en source*, car les variables p et q ne représentent pas une grandeur physique. Cela fait opposition aux *équations en champs*, construites à partir de grandeur physique.

Par exemple, la SLSIE peut être considérée comme une équation en champs. Pour cela, choisissons un "champ incident" u^i (par analogie aux problèmes de Helmholtz et de Maxwell, c'est-à-dire une solution du problème de Laplace avec pour second membre une dirac placée dans Ω^+ en un point dit *source*), et imposons $u_0 = -\gamma_0^+ u^i$ sur le bord Γ . Nous supposons bien sûr toujours que $\gamma_0^+ u^i$ est de moyenne nulle, quitte à la rendre nulle comme dans le paragraphe 2.3.1. Nous avons alors :

$$u^d = \bar{\mathcal{C}}^+(\gamma_0^+ u^d, \gamma_1^+ u^d) \text{ dans } \Omega^+,$$

et comme u^i est solution du problème intérieur (la source étant placée à l'extérieur),

$$0 = \bar{\mathcal{C}}^+(\gamma_0^+ u^i, \gamma_1^+ u^i) \text{ dans } \Omega^+,$$

d'où en sommant :

$$u^d = \bar{\mathcal{C}}^+(0, \gamma_1^+ u^t) \text{ dans } \Omega^+,$$

où $u^t = u^d + u^i$. Enfin en prenant la trace de Dirichlet, nous cherchons finalement $q = \gamma_1^+ u^t$ vérifiant :

$$Sq - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} Sq = -\gamma_0^+ u^i.$$

La variable q représente cette fois une grandeur physique (c'est la trace de Neumann du champ total).

2.4.1 L'équation simple couche

On cherche la solution de (2.2) sous la forme $u = Sq - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} Sq$, on résout donc l'équation :

$$(SLSIE) \quad \bar{S}q := Sq - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} Sq = p_0.$$

On suppose que $p_0 \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$ est de moyenne nulle.

Proposition 2.4.1. *Le noyau de S dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ est de dimension inférieure ou égale à 1, et est décrit par :*

$$\ker(S) = \left\{ \gamma_1^+ w, \text{ tel que } \exists b \in \mathbb{R} \mid w \text{ est solution de } (*) \right\}, \quad (2.9)$$

avec

$$(*) : \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ w = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ w = b \log(|x|) + o(1), & |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Démonstration. Notons N l'espace de droite dans l'égalité (2.9).

• Montrons tout d'abord que $N \subset \ker(S)$.

Soit $q \in N$, alors il existe w tel que $q = \gamma_1^+ w$, où w vérifie (*). Alors d'après le théorème 2.2.4, $w = Sq$, donc en prenant la trace de Dirichlet, on obtient $0 = Sq$, d'où $q \in \ker(S)$.

- Montrons maintenant que $\ker(S) \subset N$.

Soit $q \in \ker(S)$, alors $Sq = 0$. Posons $w = Sq$, donc w vérifie

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \gamma_0^- w = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

donc $w = 0$ dans Ω^- , d'où $\gamma_1^- w = 0 = D^t q - \frac{1}{2}q$, donc $\gamma_1^+ w = D^t q + \frac{1}{2}q = q$ et w vérifie bien (*).

- Montrons que $\dim(\ker S) \leq 1$.

Soient $q_1 = \gamma_1^+ w_1$ et $q_2 = \gamma_1^+ w_2$ deux éléments non nuls de $\ker(S)$. Notons b_1 et b_2 la constante b qui caractérise leur comportement en log à l'infini. Posons $q = \frac{q_1}{b_1} - \frac{q_2}{b_2}$. (Les constantes b_i sont non nulles car sinon q_i serait nulle).

Alors $q = \gamma_1^+ w$ où $w = \frac{w_1}{b_1} - \frac{w_2}{b_2}$. Alors $w \in W(\Omega^+)$ vérifie le problème de Laplace avec condition de Dirichlet homogène, donc $w = 0$, d'où $b_2 q_1 = b_1 q_2$.

□

Remarque 2.4.2. Dans certains cas, le noyau de S peut-être vide. En effet, considérons $\Gamma = \mathcal{C}(0, \varepsilon)$ le cercle de centre 0 et de rayon ε . Comme le noyau de S est de dimension plus petite que 1, il est inclus dans l'ensemble des fonctions constantes :

Soit $q \in \ker(S)$, et soit r_θ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $r_\theta q \in \ker(S)$ car Γ est invariante par rotation, donc q et $r_\theta q$ sont colinéaires, donc q est constante.

Mais alors $Sq(x) = \frac{q}{2\pi} \int_\Gamma \log|x-y| dy < 0$ pour ε assez petit ($\varepsilon < \frac{1}{2}$), ce qui est contradictoire. Donc $\ker(S) = \emptyset$.

Proposition 2.4.3. La dimension du noyau de \bar{S} dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ vérifie :

$$1 \leq \dim(\bar{S}) \leq 2.$$

Démonstration. • Tout d'abord, le noyau de \bar{S} est non vide :

Supposons que $0 \in \Omega^-$ (quitte à faire une translation) et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \gamma_0^+ w = \log(|x|) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Une solution de ce problème est $w(x) = \log(|x|)$ dans Ω^+ . Mais cette solution n'est pas dans $W(\Omega^+)$, et d'après le théorème 2.2.2, il existe une (unique) solution $v \in W(\Omega^+)$ de 2.4.1, qui vérifie à l'infini : $v = a + o(1)$.

Donc $u = w - v$ est une solution non nulle (comportement en l'infini en log) du problème de Laplace avec condition de Dirichlet homogène. De plus, d'après le théorème 2.2.4, $u = \mathcal{S}\gamma_1^+ u - a$. En prenant la trace de Dirichlet, on a bien obtenu un élément non nul (puisque ce même théorème nous assure que $\int_\Gamma \gamma_1^+ u = 2\pi$) du noyau de \bar{S} .

• Soit $q \in \ker(\bar{S})$ non nul. Alors Sq est constante sur Γ . Deux solutions sont alors possibles : soit tous les éléments du noyau de \bar{S} sont dans le noyau de S , soit il existe au moins un élément tel que $Sq \neq 0$. Dans ce cas, tous les αq ($\alpha \in \mathbb{R}$) vérifiant cela, on peut trouver deux éléments distincts q_1 et q_2 tels que $Sq_i = c_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq 2$). Donc $\frac{q_1}{c_1} - \frac{q_2}{c_2}$ est dans le noyau de S . Notons u un vecteur de $\ker(S)$ (on choisit $u = 0$ si le noyau de S est vide et $u \neq 0$ sinon) : $\ker(S) = \text{Vect}(u)$. Alors $q_1 = \frac{c_1}{c_2}q_2 + c_3u$. Autrement dit, $\dim(\ker(\bar{S})) = 1$ ou 2 .

□

Proposition 2.4.4. *L'équation (SLSIE) est bien posée dans $H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. • **Unicité** : Soit $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $Sq - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} Sq = 0$. Alors Sq est constante sur Γ . De plus, comme $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$, $Sq = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ en l'infini, donc par unicité des solutions du laplacien extérieur dans $W(\Omega^+)$, Sq est constante dans Ω^+ , et donc (comportement en l'infini) est nulle. D'où $Sq = 0$, donc $q \in N$, et $\int_{\Gamma} q = b = 0$, d'où $q = 0$.

• **Existence** : Soit $p_0 \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$, on cherche q vérifiant : $Sq - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} Sq = p_0$. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^- \\ \gamma_0^+ w = \gamma_0^- w = p_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors la solution w telle que sa restriction à Ω^+ soit dans $W(\Omega^+)$ existe et s'écrit :

$$w = \mathcal{S}[\gamma_1 w] - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} S[\gamma_1 w].$$

Donc $q = [\gamma_1 w]$ convient.

□

Les résultats qui précèdent restent valables pour une surface singulière. Dans le cas d'une surface lisse, on a en fait un résultat de coercivité pour \bar{S} sur $H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$:

Proposition 2.4.5. *L'opérateur $-\bar{S}$ est coercif dans $H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. On sait [29] que $-S$ est coercive sur $H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$. Soit $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$, alors :

$$\langle -\bar{S}q, q \rangle = \langle -Sq, q \rangle + \langle cste, q \rangle = \langle -Sq, q \rangle \geq \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

car q est d'intégrale nulle.

□

Proposition 2.4.6. *L'opérateur $-\bar{S}$ peut se décomposer sous la forme $-\bar{S} = C + K$, où C est coercif et K est compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$:*

$$\exists c > 0, \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \langle Cq, q \rangle \geq c\|q\|_{H^{-1/2}}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ autour de l'espace pivot $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Notons P_1 et P_2 les projecteurs de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur $H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma) \oplus \mathbb{R}$. Soit $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$, alors :

$$\langle -\bar{S}q, q \rangle = - \langle SP_1q - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_1q - P_2q + Kq, P_1q + P_2q \rangle = \langle Cq + Kq, P_1q + P_2q \rangle,$$

$$\text{où } K = SP_2 + P_2 - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_2.$$

$$\begin{aligned} \langle Cq, q \rangle &= \langle -SP_1q, P_1q \rangle + \langle P_2q, P_2q \rangle + \langle \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_1q - P_2q, P_1q \rangle \\ &\quad - \langle SP_1q - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_1q, P_2q \rangle. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_1q - P_2q$ est une fonction constante et P_1q d'intégrale nulle. De même, $SP_1q - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} SP_1q$ est d'intégrale nulle et P_2q est une fonction constante. Donc

$$\begin{aligned} \langle Cq, q \rangle &= \langle -SP_1q, P_1q \rangle + \langle P_2q, P_2q \rangle \geq c \|P_1q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|P_2q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\geq \tilde{c} (\|P_1q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|P_2q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2) \\ &\geq \tilde{c} \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Enfin K est clairement compacte, car P_2 envoie toute fonction sur l'espace des fonctions constantes, et S est un opérateur d'ordre -1 donc SP_2 envoie $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{\infty}(\Gamma)$ et s'injecte donc de façon compacte dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Les autres composantes de K sont constantes et donc compactes de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. □

Pour poser ce problème dans tout $H^{-1/2}(\Gamma)$, nous allons utiliser une *méthode de pénalisation*.

Cherchons $(q, \lambda) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -\bar{S}q + \lambda &= -p_0 \\ \int_{\Gamma} q &= 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit A l'opérateur sous-jacent à cette équation :

$$\begin{aligned} A : H^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R} &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R} \\ (q, \lambda) &\mapsto (-\bar{S}q + \lambda, \int_{\Gamma} q). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.7. *L'opérateur A est injectif, et s'écrit comme la somme d'un opérateur coercif et d'un opérateur compact. De plus, pour tout $p_0 \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$, le problème (2.10) possède une et une seule solution dans $H^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ (et alors nécessairement, $\lambda = 0$, et $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$).*

Démonstration. Soient (q, λ) tel que $A(q, \lambda) = 0$. Alors, comme $\overline{S}u$ est d'intégrale nulle, $\lambda = 0$, donc $q \in H_{\bullet}^{-1/2}(\Gamma)$ est dans le noyau de \overline{S} , d'où $q = 0$. L'opérateur A s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -\overline{S} & Id \\ \int_{\Gamma} \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui peut se décomposer sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 1 \\ \int_{\Gamma} \cdot & -1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire comme somme d'un opérateur coercif et d'un opérateur compact d'après la proposition 2.4.6. \square

2.4.2 L'équation double couche en source

On cherche la solution de (2.2) sous la forme $u = \mathcal{D}p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \mathcal{D}p$, on résout donc l'équation :

$$(DLSIE) \quad \overline{\mathcal{D}}p := \mathcal{D}p - \frac{1}{2}p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \mathcal{D}p = p_0.$$

On suppose $p_0 \in L_{\bullet}^2(\Gamma)$.

Théorème 2.4.8. *Le noyau de $\mathcal{D} - \frac{1}{2}Id$ dans $L^2(\Gamma)$ est l'ensemble des fonctions constantes.*

Démonstration. • Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}c = 0$ dans Ω^+ . En effet, pour tout $x \in \Omega^+$, $u = g(x - \cdot)$ est solution du problème de Laplace intérieur (on rappelle que l'on note g la solution élémentaire du laplacien). Donc $\mathcal{D}c = \int_{\Gamma} \gamma_1^- u c = 0$, d'où $\gamma_0^+ \mathcal{D}c = \mathcal{D}c - \frac{1}{2}c = 0$.

• Soit $p \in L^2(\Gamma)$ tel que $\mathcal{D}p - \frac{1}{2}p = 0$. Posons $u = \mathcal{D}p$, alors u vérifie $u = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ en l'infini, et

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \gamma_0^+ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

donc $u = 0$ dans Ω^+ .

D'autre part, $\gamma_0^- u = p$, donc u vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \gamma_0^+ u = p & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

donc $u = \mathcal{D}p - \mathcal{S}\gamma_1^- u$ dans Ω^- , donc en prenant la trace de Dirichlet, on a : $\mathcal{S}\gamma_1^- u = 0$. Donc $\gamma_1^- u \in \ker(\mathcal{S})$, donc il existe w vérifiant (*) tel que $\gamma_1^- u = \gamma_1^+ w$. Mais alors $b = \int_{\Gamma} \gamma_1^+ w = \int_{\Gamma} \gamma_1^- u = 0$ car u est solution d'un problème de Laplace intérieur, et donc $w = 0$, d'où $\gamma_1^- u = 0$ sur Γ , et $\Delta u = 0$ dans Ω^- , d'où p est constante sur Γ . \square

Proposition 2.4.9. *L'équation (DLSIE) est bien posée dans $L^2_\bullet(\Gamma)$.*

Démonstration. • **Unicité** : Soit $p \in L^2_\bullet(\Gamma)$ tel que $Dp - \frac{1}{2}p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Dp = 0$. Donc $Dp - \frac{1}{2}p$ est constante. Or $\mathcal{D}p = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ en l'infini, donc $\mathcal{D}p$ est constante dans Ω^+ , donc (comportement en l'infini) est nul sur Ω^+ , donc $Dp - \frac{1}{2}p = 0$, donc p est constante et d'intégrale nulle, donc $p = 0$.

• **Existence** : D est un opérateur d'ordre -1 donc compact dans $L^2(\Gamma)$, donc $Dp - \frac{1}{2}p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Dp$ est une perturbation compacte de l'identité. C'est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0 injectif, donc surjectif. □

Cette preuve fait intervenir la compacité de l'opérateur double couche dans $L^2(\Gamma)$, car c'est un opérateur d'ordre -1 . Ce résultat n'est pas conservé sur une surface singulière : en présence de pointes, l'opérateur double couche n'est pas compact ainsi que nous le verrons dans la section 2.7.

Théorème 2.4.10. *L'équation (DLSIE) est bien posée dans $L^2(\Gamma)$, pour toute donnée $p_0 \in L^2_\bullet(\Gamma)$.*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, il ne reste qu'à montrer l'unicité de la solution.

Soit $p \in L^2(\Gamma)$ tel que $Dp - \frac{1}{2}p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Dp = 0$. Donc $\frac{1}{2}p = Dp - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma Dp$, d'où $p \in L^2_\bullet(\Gamma)$, donc d'après la proposition précédente, $p = 0$. □

2.4.3 L'équation double couche en champs

Reprenons la construction de l'équation SLSIE en champs faite dans l'introduction de cette section, nous étions arrivé à l'équation :

$$u^d = \bar{\mathcal{C}}^+(0, \gamma_1^+ u^t) \text{ dans } \Omega^+,$$

où $u^t = u^d + u^i$ est le champ total, u^i le champ incident et u^d le champ diffracté (ces termes étant à prendre comme des analogies aux problèmes de Helmholtz et de Maxwell).

En prenant la trace de Neumann, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$(DLFIE) \quad D^t q - \frac{1}{2}q = -\gamma_1^+ u^i =: q_0.$$

Théorème 2.4.11. *L'équation (DLFIE) est bien posée dans $H_\bullet^{-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. • **Unicité** : Soit $q \in H_\bullet^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $D^t q - \frac{1}{2}q = 0 = \gamma_1^- \mathcal{S}q$. Donc $u = \mathcal{S}q$ est constante dans Ω^- , donc $\gamma_0^+ u$ est constante. Comme q est de moyenne nulle

sur Γ , u est dans l'espace $W(\Omega^+)$, et donc $u = \mathcal{S}q$ est constante dans Ω^+ , donc nulle (comportement en l'infini en $O\left(\frac{1}{|x|}\right)$). Donc q est dans le noyau de S et de moyenne nulle, donc (toujours par le même raisonnement), $q = 0$.

• **Existence** : On cherche q vérifiant : $D^t q - \frac{1}{2}q = -\gamma_1^+ u^i =: q_0$. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^- \\ \gamma_0^+ w = \gamma_0^- w & \text{sur } \Gamma \\ \gamma_1^- w = q_0. \end{cases}$$

Alors la solution w telle que sa restriction à Ω^+ soit dans $W(\Omega^+)$ existe et s'écrit :

$$w = \mathcal{S}[\gamma_1 w] - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} S[\gamma_1 w].$$

Donc $q = [\gamma_1 w]$ convient. □

2.4.4 Introduction à la GCSIE

La GCSIE est une équation en source. Elle a d'abord été introduite pour le problème de Helmholtz [31], puis à été étendue au problème de Maxwell [5]. En électromagnétisme, l'équivalent de l'équation simple couche est la EFIE (Electric Field Integral Equation), qui est une équation en champ électrique, et l'équivalent de l'équation double couche en champ est la MFIE (Magnetic Field Integral Equation) (pour la construction de l'EFIE et de la MFIE, voir par exemple [16]). Ces deux équations ont l'inconvénient de ne pas être bien posée à toute fréquence (c'est ce que l'on appelle des *fréquences de résonances*). Parmi les solutions proposées par plusieurs auteurs, une autre équation a été introduite par Burton et Miller [10], ou encore Brakhage et Werner [7], la CFIE (Combined Field Integral Equation). Cette équation combinée s'écrit

$$CFIE = EFIE + \alpha MFIE, \quad \text{Im} \alpha \neq 0.$$

Cette équation, combinaison linéaire des deux précédentes, ne possède pas de fréquence de résonance. En effet, l'EFIE et la MFIE possède des fréquences de résonance différentes : les combiner permet de supprimer ces fréquences de résonance. Mais cette équation présente encore une limite, liée à son conditionnement. Les équations intégrales étant posées sur la frontière, leurs systèmes linéaires sous-jacents sont généralement pleins (les opérateurs ne sont pas locaux). Or les problèmes pratiques, à haute fréquence, nous imposent un très grand nombre d'inconnues. Cela nous amène à choisir des méthodes de résolution itératives. Il est donc indispensable de preconditionner correctement les équations.

La solution apportée par Levadoux [31] et Borel [5] est la GCSIE, équation intrinsèquement bien conditionnée. Cette équation peut être vue comme une CFIE en prenant comme coefficient de couplage un opérateur correctement choisi. Nous pouvons également l'introduire d'une manière plus naturelle, et adaptée au problème de Laplace pour

lequel il n'a pas été nécessaire de construire un équivalent de la CFIE (la fréquence n'intervient pas dans ce problème).

Soit Y^+ l'opérateur Dirichlet-to-Neumann du problème de Laplace extérieur : si $u \in W(\Omega^+)$ est solution du problème de Laplace extérieur avec donnée au bord u_0 ,

$$Y^+ u_0 = \gamma_1^+ u.$$

Alors nous pouvons ré-écrire le théorème de représentation en fonction uniquement de la donnée de Dirichlet :

$$u = \overline{S}Y^+ u_0 - \overline{D}u_0,$$

d'où en prenant la trace de Dirichlet de cette expression :

$$\overline{S}Y^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id = Id. \quad (2.11)$$

L'équation devient alors trivial. Le problème est que l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (appelé admittance par les physiciens, ou opérateur capacité pour le problème électrostatique) n'est que rarement connu explicitement. Par exemple, il est connu explicitement sur une droite infinie. En effet, sur une droite infinie, nous vérifions aisément que $D = 0$ (opérateur d'ordre -1 nul partout sauf en $\{x = y\}$), donc $-2\gamma_0^+ \mathcal{D}u_0 = u_0$. Par conséquent, sur le plan infini,

$$Y^+ u_0 = -2\gamma_1^+ \mathcal{D}u_0 = -2Nu_0.$$

C'est la base de la construction de la GCSIE [5]. On découpe la surface Γ en sous-surface ouvertes $(\mathcal{U}_n)_{1 \leq n \leq N}$ à l'aide d'une partition quadratique $(\chi_n)_{1 \leq n \leq N}$ associée à ce découpage :

$$\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = 1, \quad \text{et} \quad \text{Supp} \chi_n \subset \mathcal{U}_n.$$

Chaque sous-surface \mathcal{U}_n est assimilable à une droite tangente en première approximation. Soit \tilde{Y}^+ est une approximation de l'admittance construite comme :

$$\tilde{Y}^+ = -2 \sum_{n=1}^N (\chi_n N \chi_n - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \chi_n N \chi_n), \quad (2.12)$$

qui est bien de moyenne nulle sur Γ . Alors on écrit l'opérateur sous-jacent à la GCSIE :

$$(\text{GCSIE}) : \quad \overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id.$$

Théorème 2.4.12. *L'équation GCSIE construite avec l'opérateur de couplage (2.12) est bien posée dans $H^s(\Gamma)$, pour tout réel s .*

Démonstration. • On renvoie à Levadoux [31] pour calculer les symboles principaux de S , D et N :

$$\sigma_{\psi}(S) = \frac{-1}{2\|\xi\|}, \quad \sigma_{\psi}(N) = \frac{\|\xi\|}{2},$$

et l'opérateur D a un noyau C^∞ , donc $D \in S^{-\infty}$. Or comme $\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = 1$, on a :

$$\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id = Id + K,$$

où K est un opérateur d'ordre au plus -1 , donc est compact dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, $\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Il reste donc à montrer que cet opérateur est injectif dans $H^s(\Gamma)$. Pour cela, montrons tout d'abord qu'il est injectif dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

• Soit $p \in H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$, $p \neq 0$. Alors

$$\langle \tilde{Y}^+ p, p \rangle = -2 \sum_n \langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle < 0. \quad (2.13)$$

En effet, notons $p_n = \chi_n p$, alors $Np_n = \gamma_1^\pm \mathcal{D}p_n$, et $p_n = \gamma_0^- \mathcal{D}p_n - \gamma_0^+ \mathcal{D}p_n$, d'après (2.6). Donc d'après la proposition 2.3.2, pour tout n , $\langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle \geq 0$. Supposons que $\langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle = 0$, alors $\gamma_0^- \mathcal{D}p_n = \gamma_0^+ \mathcal{D}p_n = 0$, d'où $p_n = 0$. Or $p \neq 0$, donc il existe au moins un n tel que $p_n \neq 0$. Cela nous donne (2.13).

Donc toujours grâce à la proposition 2.3.2, $(u, \tilde{Y}^+ u) \notin X^-$, ce qui implique que

$$\gamma_0^+ \mathcal{C}^+(u, \tilde{Y}^+ u) \neq 0,$$

pour tout $u \neq 0$. D'où l'injectivité de $A := \overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id$ dans $H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$.

Soit $p \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que $Ap = 0$. Alors

$$-\frac{1}{2}p = \overline{S}\tilde{Y}^+ p - \overline{D}p, \quad (2.14)$$

donc $\int_\Gamma p = 0$, d'où $p \in H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$. Or A est injective dans $H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$, donc $p = 0$.

D'autre part, si $p \in H^s(\Gamma)$ pour un réel s quelconque, les opérateurs S et D étant d'ordre -1 , la relation (2.14) nous montre par récurrence que $p \in H^\infty(\Gamma)$. Donc comme A est injective dans $H_\bullet^{1/2}(\Gamma)$, $p = 0$, ce qui termine la preuve. \square

Un problème apparaît naturellement avec la présence de pointe : l'opérateur double couche n'est plus compact car la normale à la surface Γ est discontinue en la pointe. Mais la GCSIE a été écrite en approchant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur chaque sous-surface par celui du plan tangent. Nous allons procéder de la même manière lorsque la surface possède une pointe, mais en approchant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann près de la pointe par celui d'un cône infini.

En effet, l'égalité (2.11) nous assure que quelque chose dans l'opérateur Y^+ supprime la singularité qui apparaît dans le double couche. Il est naturel de penser que c'est le comportement de Y^+ près de la pointe qui possède cette propriété.

C'est pourquoi nous allons tout d'abord nous intéresser à la résolution du problème de Laplace sur un cône infini, ce qui nous permettra de calculer explicitement l'opérateur Dirichlet-to-Neumann du cône infini.

2.5 Résolution du problème de Laplace dans un cône infini

Dans cette section, nous allons résoudre le problème de Laplace dans un cône infini. Il n'est pas exclu de choisir un cône aplati (cas particulier de la demi-droite infinie), ni le cône d'angle π (cas particulier d'une droite infinie).

2.5.1 Le problème de Laplace dans un cône infini

Nous notons $0 < \theta_0 < 2\pi$ l'angle intérieur du cône considéré (cf figure 2.5). On définit en coordonnées polaires les ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{(r, \theta), r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \{0, \theta_0\}\}, \\ \Omega^+ &= \{(r, \theta), r \in \mathbb{R}_+, 0 < \theta < \theta_0\}, \\ \Omega^- &= \{(r, \theta), r \in \mathbb{R}_+, \theta_0 < \theta < 2\pi\}.\end{aligned}$$

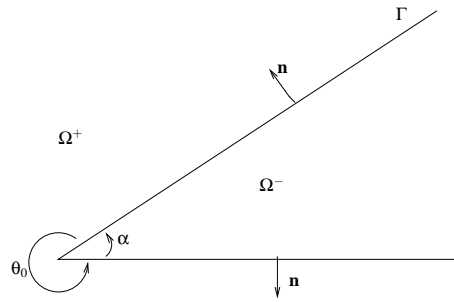


FIG. 2.5 – *Problème de Laplace dans un cône infini.*

L'ensemble Γ est la surface du cône (assimilable à l'ensemble des deux demi-droites $\mathbb{R}^+ \times e^{i\theta_0}\mathbb{R}^+$), Ω^+ est l'ouvert extérieur et Ω^- l'ouvert intérieur. On définit le problème de Laplace à l'extérieur du cône infini Γ par :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où l'on suppose $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ à support compact sur Γ .

On effectue le changement de variable polaire :

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+, 0 < \theta < \theta_0,$$

qui transforme l'équation de Laplace en :

$$\begin{cases} (-t \frac{\partial}{\partial t})^2 u + \frac{\partial u}{\partial \theta^2} = 0 & 0 < \theta < \theta_0, \\ u = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où l'on représente par

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

une fonction f définie sur Γ par $f(t, 0) = f_1(t)$ et $f(t, \theta) = f_2(t)$.

On applique la transformée de Mellin en t à cette équation, pour $z \in \mathbb{C}$ arbitraire pour le moment. On obtient alors :

$$\begin{cases} z^2 Mu(z, \theta) + \partial_\theta^2 Mu(z, \theta) = 0 & 0 < \theta < \theta_0, \\ Mu(z) = \begin{pmatrix} Mu_1^0 \\ Mu_2^0 \end{pmatrix} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

ce qui permet de résoudre l'équation en domaine Mellin :

$$Mu(z, \theta) = \frac{-1}{e^{iz\theta_0} - e^{-iz\theta_0}} (Mu_1^0(z)(e^{iz(\theta-\theta_0)} - e^{-iz(\theta-\theta_0)}) + Mu_2^0(z)(e^{-iz\theta} - e^{iz\theta})).$$

2.5.2 Calcul de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann

Nous souhaitons calculer l'opérateur Dirichlet-to-Neumann du problème de Laplace, également appelé opérateur capacité. En effet, cet opérateur intervient dans la construction de la GCSIE. Pour prendre en compte la présence de pointes dans la construction de la GCSIE, il est donc nécessaire de connaître cet opérateur.

$$MY^+ u_0(z) = \gamma_0^+ M(\partial_n u)(z) = \begin{pmatrix} M(\partial_n u)(z, 0) \\ M(\partial_n u)(z, \theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\frac{1}{t} \partial_\theta u)(z, 0) \\ M(\frac{-1}{t} \partial_\theta u)(z, \theta_0) \end{pmatrix},$$

donc

$$MY^+ u_0(z) = \begin{pmatrix} \partial_\theta Mu(z-1, 0) \\ -\partial_\theta Mu(z-1, \theta_0) \end{pmatrix},$$

soit

$$MY^+ u_0(z) = \frac{z-1}{\sin(\theta(z-1))} \begin{pmatrix} -\cos(\theta_0(z-1)) & 1 \\ 1 & -\cos(\theta_0(z-1)) \end{pmatrix} Mu_0(z-1),$$

or $Mu_0(z-1) = M(\frac{u_0}{t})(z)$, d'où

$$Y^+ u = \begin{pmatrix} \text{op}_M^\gamma h_1 & \text{op}_M^\gamma h_2 \\ \text{op}_M^\gamma h_2 & \text{op}_M^\gamma h_1 \end{pmatrix} \frac{u}{t},$$

où $h_1(z) = \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))}$, $h_2(z) = \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))}$ et γ un réel bien choisi (en fonction des pôles de h_1 et h_2).

Les deux lemmes 1.1.15 et 1.1.17 (pour $n = 1$) nous permettent alors d'écrire, en appliquant les règles de calcul de la transformée de Mellin de la proposition 1.1.3, ainsi que la définition de la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ (cf section 1.1.4) : pour tout $1 - \frac{\pi}{\theta_0} < \mathbf{Re}(z) < 1$,

$$h_1(z) = M \left(\frac{\pi}{\theta_0^2} s^{\pi/\theta_0-1} \text{Pf} \frac{1}{(1 - s^{\pi/\theta_0})^2} \right) (z), \quad h_2(z) = M \left(\frac{\pi}{\theta_0^2} \frac{s^{\pi/\theta_0-1}}{(1 + s^{\pi/\theta_0})^2} \right) (z).$$

On choisit donc $\gamma = \frac{1}{2} - \mathbf{Re}(z)$ tel que :

$$\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{-1}{2} + \frac{\pi}{\theta_0}.$$

Remarque 2.5.1. On peut alors vérifier l'asymptotique près de zéro. On considère le plus grand pôle de $h_i(z)$ ($i \in \{1, 2\}$) inférieur à $\frac{1}{2} - \gamma$ et sa multiplicité, soit $(1 - \frac{\pi}{\theta}, 0)$, ce qui donne une asymptotique en $O(s^{\pi/\theta_0-1})$.

Réécrivons Y^+ sous la forme d'un produit de convolution de Mellin :

$$Y^+ u = \left(\begin{array}{cc} \frac{\pi}{\theta_0^2} \frac{s^{\pi/\theta_0-1}}{(1 - s^{\pi/\theta_0})^2} & \frac{\pi}{\theta_0^2} \frac{s^{\pi/\theta_0-1}}{(1 + s^{\pi/\theta_0})^2} \\ \frac{\pi}{\theta_0^2} \frac{s^{\pi/\theta_0-1}}{(1 + s^{\pi/\theta_0})^2} & \frac{\pi}{\theta_0^2} \frac{s^{\pi/\theta_0-1}}{(1 - s^{\pi/\theta_0})^2} \end{array} \right) \star \frac{u}{t},$$

où les fractions $\frac{1}{(1 - s^{\pi/\theta_0})^2}$ sont prises au sens de $\text{Pf} \frac{1}{(1 - s^{\pi/\theta_0})^2}$.

On peut également calculer l'admittance intérieure Y^- . Dans le calcul précédent, il suffit de remplacer l'angle θ_0 par $\alpha = 2\pi - \theta_0$ et de changer les signes (les normales restent les mêmes donc vu de l'intérieur du cône, elles sont dans le sens opposé). D'où :

$$Y^- u = - \left(\begin{array}{cc} \frac{\pi}{\alpha^2} \frac{s^{\pi/\alpha-1}}{(1 - s^{\pi/\alpha})^2} & \frac{\pi}{\alpha^2} \frac{s^{\pi/\alpha-1}}{(1 + s^{\pi/\alpha})^2} \\ \frac{\pi}{\alpha^2} \frac{s^{\pi/\alpha-1}}{(1 + s^{\pi/\alpha})^2} & \frac{\pi}{\alpha^2} \frac{s^{\pi/\alpha-1}}{(1 - s^{\pi/\alpha})^2} \end{array} \right) \star \frac{u}{t},$$

où les fractions $\frac{1}{(1 - s^{\pi/\alpha})^2}$ sont prises au sens de $\text{Pf} \frac{1}{(1 - s^{\pi/\alpha})^2}$.

2.5.3 Cas particuliers

Dans le cas de la *droite infinie* ($\theta_0 = \pi$), on retrouve en effet l'opérateur $Y^+ = -2N$ où $N = \gamma_1^+ \mathcal{D}$ est l'opérateur hypersingulier : $u_0^-(t) = u_0(-t)$ d'où

$$Y_\pi^+ u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \text{Pf} \frac{1}{(x - y)^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas de la *demi-droite infinie* ($\theta_0 = 2\pi$), calculons l'opérateur Dirichlet-to-Neumann en supposant que $u_0^+ = u_0^- = u_0$:

$$(Y^+u_0)^+ = (Y^+u_0)^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t+s}{\sqrt{st}} \text{Pf} \frac{1}{(s-t)^2} u_0(t) dt.$$

Notons $[Y^+u_0]$ le saut de l'admittance extérieur sur la demi-droite. Le signe de la normale est présente dans le calcul de l'admittance (de signe opposée au-dessus et en-dessous). C'est pourquoi

$$[Y^+u_0] = (Y^+u_0)^+ + (Y^+u_0)^- = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t+s}{\sqrt{st}} \text{Pf} \frac{1}{(s-t)^2} u_0(t) dt.$$

2.6 Préconditionnement du simple couche sur un segment

Avant de construire la GCSIE sur un ouvert à pointe, profitons de la connaissance de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur la demi-droite \mathbb{R}^+ , pour preconditionner l'équation simple couche sur un segment.

Soit le problème de Laplace posé en dehors d'un segment $[a, b]$, de condition au bord $u_0 \in H^{1/2}([a, b])$. Sur le segment $[a, b]$, le simple couche s'écrit

$$Su(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \log(|x-y|) u(y) dy, \quad \forall x \in [a, b].$$

Nous voulons trouver un preconditionneur du simple couche, à l'aide de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ .

Soit (χ_1, χ_2) une partition quadratique C_0^∞ sur ce segment, tel que

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b], \end{cases}$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b], \end{cases}$$

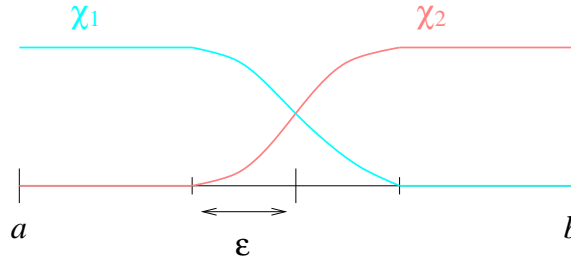
et $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$.

Pour $i = 1, 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\chi_i S \chi_i(s) = \tilde{\chi}_i(s) \int_0^{+\infty} \log |s-t| \tilde{\chi}_i(t) u_i(t) dt,$$

où $\tilde{\chi}_1(s) = \chi_1(s+a)$, $\tilde{\chi}_2(s) = \chi_2(b-s)$, $u_1(t) = u(t+a)$ et $u_2(t) = u(b-t)$.

Il nous faut donc étudier la restriction à \mathbb{R}^+ de la convolution par le log. L'avantage de cet exemple réside dans sa simplicité : beaucoup de calculs peuvent être fait à la main, ce qui permet de bien comprendre les mécanismes en jeu dans cette étude faite à l'aide de la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ .

FIG. 2.6 – Partition quadratique sur le segment $[a, b]$.

2.6.1 Etude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par le log.

Soit l'opérateur :

$$Au(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} u(t) \log |t - s| dt, \quad s > 0.$$

On voit que $A = r^+ \text{op}(a) e^+ = \text{op}_\psi(a)$ est la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par le log. Il nous faut tout d'abord connaître le symbole classique de l'opérateur pseudo-différentielle $\text{op}(a)$. Il est connu que la transformée de Fourier de la valeur principale de x est :

$$F(\text{vp} \frac{1}{x}) = -i\pi \text{sgn}(\xi),$$

d'où l'on conclut que le symbole de $\text{op}(a)$ est $a(\xi) = \frac{-1}{2|\xi|}$. Donc $a \in S_{cl}^{-1}$ est indépendant de x . Nous sommes dans le cadre du paragraphe 1.5, appliquons donc ces résultats.

- Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j^\pm = \mp \frac{i}{2} \delta_{j,0}$. Donc les symboles Mellin de A sont :

$$\sigma_M^{-1}(A)(z) = \frac{1}{2(z-1)} \frac{1}{\tan(\pi z)} \text{ et } \sigma_M^{-j}(A)(z) = 0, j > 1.$$

Inversement, pour retrouver à quel opérateur correspond ce symbole conormal, il faut appliquer l'opérateur inverse de Mellin. Mais souvenons nous qu'il faut choisir pour cela une droite complexe $\{\text{Re}(z) = \frac{1}{2} - \gamma\}$ sur laquelle appliquer la transformée inverse de Mellin. Cela n'a pas d'importance tant que le symbole conormal est holomorphe. Mais le fait de changer de bande d'analyticité modifie le résultat (cela modifie le comportement asymptotique des solutions). Or $h := \sigma_M^{-1}(A)$ d'ordre -1 , possède des pôles en $z \in \mathbb{Z}$. Le théorème 1.5.1 nous permet de choisir $\gamma > \frac{-1}{2}$, diff rent de $\frac{1}{2}$ modulo \mathbb{Z} . De plus, nous voulons respecter la condition (1.33) pour avoir un opérateur continu de $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{K}^{s+1}(\mathbb{R}^+)$. Nous choisissons donc :

$$\frac{-1}{2} < \gamma \leq 0.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$M\left(\frac{t^n}{1-t}\right) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}, \quad -n < \text{Re}(z) < -n + 1.$$

En choisissant $n = 1$, la proposition 1.1.3 nous donne donc :

$$M\left(\frac{1}{2\pi t} \log |1 - t|\right) = \frac{1}{2(z-1)} \frac{1}{\tan(\pi z)}, \text{ pour } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1,$$

ce qui permet d'écrire A sous la forme :

$$\omega A \omega u(s) = \frac{s}{2\pi} \omega(s) \int_0^{+\infty} \frac{t}{s} \omega(t) \log \left| 1 - \frac{s}{t} \right| u(t) \frac{dt}{t} + Gu(s),$$

où G est un opérateur plat + Green. On voit très facilement que

$$Gu(s) = \omega(s) \int_0^{+\infty} \log t u(t) \omega(t) dt,$$

qui est un opérateur de Green (à valeurs dans \mathbb{R}).

On peut donner le développement de Mellin de A près de zéro :

$$\omega A \omega = \omega s \operatorname{op}_M^\gamma \left(\frac{1}{2(z-1) \tan(\pi z)} \right) \omega + G, \text{ pour } \frac{-1}{2} < \gamma \leq 0.$$

Nous noterons $I = \operatorname{Supp} \omega \subset [0, +\infty[$.

• Nous souhaitons calculer une paramétrix de l'opérateur A . Or cet opérateur n'est pas un opérateur elliptique (cf définition 1.4.29). Pourtant, en ne considérons que la partie :

$$A_1 = \omega s \operatorname{op}_M^\gamma h \omega : \mathcal{K}^{s,\gamma} \rightarrow \mathcal{K}^{s+1,\gamma+1},$$

il semble possible de construire un pseudo-inverse $B : \mathcal{K}^{s+1,\gamma+1} \rightarrow \mathcal{K}^{s,\gamma}$:

$$B = \omega \operatorname{op}_M^\gamma f s^{-1} \omega,$$

où $f(z) = 2(z-1) \tan(\pi z)$. En effet, le symbole principal de $\operatorname{op}_M^\gamma h$ est clairement l'inverse de celui de $\operatorname{op}_M^\gamma f$ (cf théorème 1.3.18), donc le symbole principal de

$$K = \omega \operatorname{op}_M^\gamma h \omega^2 \operatorname{op}_M^\gamma f \omega - \omega^4 Id$$

à l'ordre 0 est nul. De plus, son symbole conormal à l'ordre O est nul aussi (cf proposition 2.1.1). Donc d'après le théorème 2.1.2, l'opérateur K est compact dans $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$ pour tout réel s , donc finalement

$$A_1 B = \omega^4 Id + s K s^{-1},$$

où l'opérateur $s K s^{-1}$ est compact dans $\mathcal{K}^{s,\gamma+1}(\mathbb{R}^+)$ pour tout réel s . Nous aimerions cependant affiner ce résultat, de sorte que le reste soit compact dans un espace plus gros (au plus proche de $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ que nous le pourrions). Il nous faut donc être plus précis, et ce à cause de la présence du s^{-1} à droite de K .

On voit bien que sans la présence des fonctions de troncature ω , on aurait directement l'identité. Cet opérateur K provient donc de la commutation de ω avec $\operatorname{op}_M^\gamma f$:

$$\omega \operatorname{op}_M^\gamma f = \operatorname{op}_M^\gamma f \omega + \operatorname{op}_M^\gamma f (1 - \omega) - (1 - \omega) \operatorname{op}_M^\gamma f \quad (2.15)$$

d'où

$$K = \omega \operatorname{op}_M^\gamma h \operatorname{op}_M^\gamma f (1 - \omega^2) \omega - \omega \operatorname{op}_M^\gamma h (1 - \omega^2) \operatorname{op}_M^\gamma f \omega = \omega^2 (1 - \omega^2) - \omega \operatorname{op}_M^\gamma h (1 - \omega^2) \operatorname{op}_M^\gamma f \omega.$$

Le premier terme $s\omega^2(1-\omega^2)s^{-1}$ est clairement un opérateur de Green plat (noyau de classe C^∞ , à support compact dans \mathbb{R}^+), ce terme ne nous pose donc pas de soucis. Etudions le second. Remarquons que les pôles de f sont dans $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, donc pour tout $-1 < \eta < 0$, $B = \omega \operatorname{op}_M^\eta f s^{-1} \omega$, donc :

$$B : \mathcal{K}^{s+1, \eta+1} \rightarrow \mathcal{K}^{s, \eta}.$$

Soit $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ (à ce stade, nous pouvions choisir $\varepsilon < 1$, mais nous verrons que pour la compacité, il est plus judicieux de choisir un tel ε), et écrivons η sous la forme $\eta = \varepsilon - 1$, donc :

$$s\omega \operatorname{op}_M^\gamma h(1-\omega^2) \operatorname{op}_M^\gamma f \omega s^{-1} : \mathcal{K}^{s, \varepsilon}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{F} \mathcal{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{H}^{s-1, \gamma}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{H} \mathcal{K}^{s, \gamma+1}(\mathbb{R}^+),$$

où $F = (1-\omega^2) \operatorname{op}_M^\gamma f \omega s^{-1}$ et $H = s\omega \operatorname{op}_M^\gamma h$. Le théorème 2.1.2 nous précise que $K \in \mathbf{L}_{F+G}^{-1, (1)}$, donc en réalité :

$$s\omega \operatorname{op}_M^\gamma h(1-\omega^2) \operatorname{op}_M^\gamma f \omega s^{-1} : \mathcal{K}^{s, \varepsilon}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_I^{s+1, \gamma+1} \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{K}_I^{s, \varepsilon} \hookrightarrow \mathcal{K}^{s, \varepsilon}(\mathbb{R}^+)$$

car $\gamma + 1 > \frac{1}{2} \geq \varepsilon$.

Maintenant, nous devons vérifier que l'opérateur B est une paramétrix de $A = A_1 + G$. La principale difficulté est liée aux continuités que vérifient B et G , qui semblent incompatibles avec la possibilité de composer ces deux opérateurs entre eux :

$$B : \mathcal{K}^{s, \varepsilon}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^{s-1, \varepsilon-1}(\mathbb{R}^+),$$

$$G : \mathcal{K}^{s-1}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{D}_P,$$

or $\varepsilon - 1 < 0$. Mais l'asymptotique de G^* est $P^* = \{(0, 1)\}$:

$$G^*u(s) = \omega(s) \log(s) \int_0^{+\infty} \omega(t)u(t)dt.$$

Donc $G^* : \mathcal{K}^{-N}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}_{P^*}^s(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{K}^{s, \eta}(\mathbb{R}^+)$, pour tout entier N , pour tout réel s , pour tout $\eta < \frac{1}{2}$. Cela est dû au fait que $\operatorname{Re}(\pi_{\mathbb{C}}(P^*)) = 0 < \frac{1}{2} - \eta$. Par conséquent, par dualité,

$$G : \mathcal{K}^{s, \gamma}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}^+)$$

est continue pour tout réel s et pour tout $\gamma > -\frac{1}{2}$. Donc il est possible de calculer

$$GB : \mathcal{K}^{s, \gamma+1}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Cela nous permet de montrer que ce produit d'opérateur est compact dans $\mathcal{K}^{\varepsilon+1/2}(\mathbb{R}^+)$. Nous souhaitons faire mieux. Pour cela, explicitons l'opérateur B .

Rappelons que $B = \operatorname{op}_M^\gamma(2(z-1)\tan(\pi z))s^{-1}$, pour $\frac{-1}{2} < \gamma < 0$. En procédant exactement comme dans le lemme 1.1.13, on démontre le lemme suivant :

Lemme 2.6.1. *Pour $\frac{-1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$,*

$$M(\sqrt{t} \operatorname{vp}(\frac{1}{1-t}))(z) = \pi \tan(\pi z).$$

On a donc :

$$M\left(\frac{t+1}{\pi\sqrt{t}} \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\right)(z) = 2(z-1)\tan(\pi z), \text{ pour } \frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{3}{2},$$

c'est-à-dire pour $-1 < \gamma < 0$, soit

$$Bu(s) = \omega(s) \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(t+s)}{\sqrt{ts}(t-s)^2} \omega(t)u(t)dt,$$

où les fractions $\frac{1}{(t-s)^2}$ sont prises au sens de $\operatorname{Pf} \frac{1}{(t-s)^2}$.

Nous remarquons donc que cet opérateur B est en fait égale au saut de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur une demi-droite $\omega[Y^+]\omega$ (cf section 2.5.3). Le théorème de représentation nous donne [40] :

$$\overline{S}[Y^+] = Id,$$

et donc nous pouvons conclure que $G \operatorname{op}_M f s^{-1} = 0$ sur $\mathcal{K}^{s,\gamma+1}(\mathbb{R}^+)$ (ce qui peut également se vérifier par le calcul), et peut donc se prolonger sur tout $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$ par l'opérateur nul.

En utilisant ce résultat et l'égalité (2.15), on montre que :

$$GB = -G(1-\omega) \operatorname{op}_M^{1+\varepsilon} f \omega s^1 : \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{(1-\omega) \operatorname{op}_M^{1+\varepsilon} f \omega s^1} \mathcal{K}_0^s(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{G} \mathcal{D}_P$$

est donc compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ pour tout $0 < \varepsilon < 1$. Finalement, nous avons montré le résultat suivant :

$$\omega A \omega B = \omega^4 Id + \tilde{K}, \quad (2.16)$$

où \tilde{K} est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

2.6.2 Préconditionnement du simple couche sur un segment

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour fabriquer une paramétrix de l'opérateur simple couche. Notons T_1 et T_2 les opérateurs de translation :

$$T_1 u(t) = u(t+a) \quad T_2 u(t) = u(b-t).$$

Alors nous pouvons définir $Y_i = T_i^{-1}[Y_{2\pi}]$, où $Y_{2\pi}$ est le saut de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann de la demi-droite infinie, puis

$$\tilde{Y} = \chi_1 Y_1 \chi_1 + \chi_2 Y_2 \chi_2.$$

Afin de rester dans les espaces pointés, nous posons en fait :

$$\widetilde{\widetilde{Y}} = \tilde{Y} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \tilde{Y},$$

ce qui a peu d'incidences sur le plan fonctionnel car nous rajoutons simplement une constante (donc un opérateur de Green).

Comme $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$, le résultat (2.16) nous assure que

$$\omega S \omega \tilde{Y} = \omega^2 Id + K$$

où K est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(a,b) := \chi_1^2 T_1^{-1} \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+) + \chi_2^2 T_2^{-1} \mathcal{K}^{s,\gamma}(a,b)$ pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Il suffit donc de choisir $\omega = 1$ sur $[a,b]$ pour avoir construit une paramétrix de l'opérateur S sur le segment $[a,b]$.

D'après la théorie de Fredholm, il nous reste donc à montrer l'injectivité de cet opérateur pour montrer que cette équation est bien posée.

Proposition 2.6.2. *L'équation $\bar{S}\tilde{Y}$ possède une unique solution dans $\mathcal{K}_{\bullet}^{1/2,1/2}(a,b)$, où*

$$\mathcal{K}_{\bullet}^{1/2,1/2}(a,b) = \{u \in \mathcal{K}^{1/2,1/2}(a,b) : \int u = 0\}.$$

Démonstration. L'opérateur \tilde{Y} s'écrit sous la forme $\text{op}_M^{\gamma} f t^{-1}$, où $-1 < \gamma < 0$. Donc :

$$\tilde{Y} : \mathcal{K}^{s,\gamma+1}([a,b]) \rightarrow \mathcal{K}^{s-1,\gamma}(a,b).$$

Pour tout $u \in \mathcal{K}^{1/2,1/2}(a,b)$ (soit $\gamma = \frac{1}{2}$), on a donc $\tilde{Y}u \in \mathcal{K}^{-1/2,-1/2}(a,b) = H^{-1/2}(a,b)$ d'après la proposition 1.2.18. De plus, par construction, $\tilde{Y}u$ est de moyenne nulle. Or d'après la proposition 2.4.4, l'opérateur \bar{S} est injectif dans $H_{\bullet}^{-1/2}(a,b)$. Donc :

$$\bar{S}\tilde{Y}u = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y}u = \text{cste}.$$

Par conséquent, comme u est de moyenne nulle,

$$\langle \tilde{Y}u, u \rangle = \text{cste} \int u = 0.$$

Cela est en contradiction avec la proposition 2.3.2, car si u est non nul, soit $\chi_1 u$, soit $\chi_2 u$ est non nul, et donc

$$\langle \tilde{Y}u, u \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle Y_i \chi_i u, \chi_i u \rangle < 0,$$

d'où $u = 0$. □

Pour avoir l'unicité d'une solution dans $\mathcal{K}^{1/2,1/2}(a,b)$, il faut faire une méthode de pénalisation, c'est-à-dire résoudre le problème suivant :

Soit $u_0 \in H^{1/2}(a,b)$, on cherche $(u, \lambda) \in \mathcal{K}^{1/2,1/2}(a,b) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{S}\tilde{Y}u + \lambda &= u_0 \\ \int_{\Gamma} u &= 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

L'opérateur sous-jacent s'écrit toujours comme un opérateur compact plus l'identité : on ne rajoute que le terme identité sur la dernière composante (λ) à l'opérateur précédent. D'autre part, on a cette fois l'unicité dans tout $\mathcal{K}^{1/2,1/2}(a,b)$, car par construction, si $u_0 = 0$ alors $\lambda = 0$, ce qui nous ramène au problème précédent dans $\mathcal{K}_{\bullet}^{1/2,1/2}(a,b)$.

2.7 Construction de la GCSIE prenant en compte la présence de pointes

Nous allons maintenant construire la GCSIE sur l'ouvert à pointe défini précédemment $\Gamma = \omega\Gamma_1 + (1 - \omega)\Gamma_2$, où Γ_1 est un cône infini, et Γ_2 un ouvert de classe C^∞ . Nous noterons S la pointe de cette surface, et $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ l'angle extérieur.

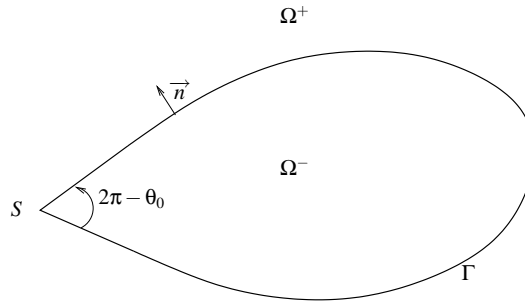


FIG. 2.7 – La frontière Γ .

Notons $\tilde{\omega}$ une fonction à support compact dans \mathbb{R}^2 telle que $\tilde{\omega} = 1$ sur Γ . Par abus de langage, nous désignerons par $\tilde{\omega}$ la fonction $\tilde{\omega}$ restreinte à Γ_1 .

2.7.1 Présentation de la nouvelle GCSIE

De même que pour construire la GCSIE sur un ouvert lisse [5], découpons la surface Γ en sous-surfaces $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0 \leq n \leq N}$, associées à une partition quadratique $\{\chi_n\}_{n=0 \leq n \leq N}$:

$$\sum_{n=0}^N \chi_n^2 = 1, \quad \text{et} \quad \text{Supp } \chi_n \subset \mathcal{U}_n.$$

Nous imposons toutefois une condition supplémentaire :

$$\forall n \neq 0, S \notin \mathcal{U}_n, \quad \text{et} \quad \text{Supp } \chi_0 \subset \text{Supp } \omega.$$

On pose

$$\tilde{Y}^+ u = \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - 2 \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n,$$

et

$$(\text{GCSIE}) : \quad \bar{S} \tilde{Y}^+ - \bar{D} + \frac{1}{2} Id.$$

2.7.2 Existence et unicité d'une solution

Le théorème 2.4.12 nous assure que

$$-2\bar{S} \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n - \bar{D}(1 - \chi_0^2) + \frac{1}{2} Id(1 - \chi_0^2) = (1 - \chi_0^2) Id + K_1,$$

où K_1 est compact dans $(1 - \chi_0^2)H^{1/2}(\Gamma_2)$. En effet, cet opérateur est un opérateur pseudo-différentiel sur la surface lisse Γ_2 , et de symbole principal $\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = (1 - \chi_0^2)$.

Concentrons nous donc sur l'opérateur

$$\tilde{\omega} \left(\overline{S} \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - \overline{D} \chi_0^2 + \frac{1}{2} Id \chi_0^2 \right),$$

sur $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$. Pour simplifier les notations, nous oublierons le $\tilde{\omega}$ par la suite, en sachant que les fonctions que nous manipulons sont à support dans $K_\omega = \text{Supp } \tilde{\omega}$. Par conséquent, nous nous autoriserons à parler directement d'injection compacte dans les espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, ce qui est a priori abusif car ce sont des espaces de Fréchet, mais justifié par le fait que les fonctions sont à support dans K_ω , et par conséquent il s'agira en fait toujours des espaces de Hilbert $\mathcal{K}_{K_\omega}^{s,\gamma}$.

Rappelons que par définition de $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$, nous notons

$$u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$$

un élément de $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$, avec $u^\pm \in \mathcal{K}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$.

Nous allons commencer par étudier séparément les opérateurs mis en jeu. L'opérateur $Y_{\theta_0}^+$ a été calculé dans la section 2.5. Rappelons son expression en terme d'opérateur de Mellin :

$$Y_{\theta_0}^+ = \begin{pmatrix} \text{op}_M^\gamma \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M^\gamma \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} \\ \text{op}_M^\gamma \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M^\gamma \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} \end{pmatrix} \frac{1}{t},$$

avec $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{-1}{2} + \frac{\pi}{\theta_0}$. Cet opérateur admet donc la continuité :

$$\omega Y_{\theta_0}^+ : \mathcal{K}^{s,\gamma+1} \rightarrow \mathcal{K}^{s-1,\gamma}.$$

Comme $0 < \theta_0 < 2\pi$, $\frac{-1}{2} + \frac{\pi}{\theta_0} \leq 0$, on peut donc choisir $\frac{-1}{2} < \gamma \leq 0$ (ce qui permet de choisir le même exposant γ pour l'opérateur simple couche, cf section 2.6.1).

L'opérateur simple couche

L'opérateur simple couche sur le cône infini Γ_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} S \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} \log |s-t| u^+(t) + \log |s-te^{i\theta_0}| u^-(t) dt \\ \int_0^{+\infty} \log |se^{i\theta_0}-t| u^+(t) + \log |s-t| u^-(t) dt \end{pmatrix} \\ &= \left[s \begin{pmatrix} \text{op}_M^\gamma h_0 & \text{op}_M^\gamma h_{\theta_0} \\ \text{op}_M^\gamma h_{\theta_0} & \text{op}_M^\gamma h_0 \end{pmatrix} + G \right] \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $h_0(z) = \frac{1}{2(z-1)\tan(\pi z)}$ a été calculé dans la section 2.6.1,

$$(Gu)^+ = (Gu)^- = \int_0^{+\infty} \log |t|(u^+(t) + u^-(t))dt$$

est un opérateur de Green, et $h_{\theta_0} = M \left(\frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta_0}| \right)$.

Remarquons que l'opérateur G est constant sur tout Γ_1 .

En effet, outre le calcul de la section 2.6.1 qui permet de retrouver le développement de Mellin de la restriction d'un opérateur pseudo-différentiel directement à partir de son symbole complet, on peut simplement écrire :

$$\int_0^{+\infty} \log |s - te^{i\theta}| u^\pm(t) dt = s \int_0^{+\infty} \frac{t}{s} \log \left| \frac{s}{t} - e^{i\theta_0} \right| u^\pm(t) \frac{dt}{t} + \int_0^{+\infty} \log |t| u^\pm(t),$$

la première intégrale du terme de droite étant clairement un produit de convolution de Mellin. Il nous faut donc calculer $h_\theta = M \left(\frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta}| \right)$, pour $\frac{1}{2} \leq \mathbf{Re}(z) < 1$, ce qui sera fait dans le lemme 2.7.3.

Remarquons que le produit $SY_{\theta_0}^+$ est continue :

$$SY_{\theta_0}^+ : \mathcal{K}^{s, \gamma+1} \rightarrow \mathcal{K}^{s, \gamma+1},$$

pour tout réel s , pour tout $\frac{-1}{2} < \gamma \leq 0$.

L'opérateur double couche

Rappelons tout d'abord l'expression générale de l'opérateur double couche :

$$Du(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(x-y) \cdot n(y)}{|x-y|^2}.$$

Sur le cône infini Γ_1 , l'opérateur double couche s'écrit donc :

$$D \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} \frac{-s \sin \theta}{|s - te^{i\theta_0}|^2} u^-(t) dt \\ \int_0^{+\infty} \frac{-s \sin \theta}{|s - te^{-i\theta_0}|^2} u^+(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{op}_M^{\gamma+1} f_{\theta_0} \\ \text{op}_M^{\gamma+1} f_{\theta_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix},$$

où $f_{\theta_0} = M \left(\frac{-\sin \theta}{2\pi} \frac{t}{|t - e^{i\theta_0}|^2} \right)$. Il est en effet clair que ces intégrales sont des produits de convolution de Mellin. Il nous faut donc calculer f_{θ_0} pour $\frac{-1}{2} \leq \mathbf{Re}(z) < 0$, ce qui sera fait dans le lemme 2.7.2.

Remarque 2.7.1. *L'exposant $\gamma + 1$ est là pour permettre l'addition de cet opérateur avec le produit \widetilde{SY}^+ .*

Le calcul des termes extra-diagonaux

Lemme 2.7.2. *Pour tout complexe z dans $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \mathbf{Re}(z) < 1\}$, pour tout $0 < \theta < 2\pi$,*

$$f_\theta(z) = M\left(\frac{1}{2\pi} \frac{-t \sin \theta}{|t - e^{i\theta}|^2}\right)(z) = \frac{-1}{2} \left(\cos z\theta - \frac{\sin z\theta}{\tan \pi z} \right).$$

Démonstration. Pour tout $0 < \mathbf{Re}(z) < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{|t - e^{i\theta}|^2} dt = \frac{1}{2i \sin \theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t - e^{i\theta}} - \frac{t^{z-1}}{t - e^{i(2\pi-\theta)}} dt.$$

On utilise le résultat de l'exemple 1.1.10, en prenant garde à ce que les arguments soient dans $[0, 2\pi]$ pour appliquer le log :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{|t - e^{i\theta}|^2} dt = \frac{1}{2i \sin \theta} \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi z}} \left(e^{i\theta(z-1)} - e^{i(2\pi-\theta)(z-1)} \right),$$

d'où le résultat en appliquant la propriété 1.6 du chapitre 1. On obtient f_θ , fonction méromorphe de pôles $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Donc finalement, l'égalité du lemme 2.7.2 est vraie sur toute la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \mathbf{Re}(z) < 1\}$ (nous renvoyons au chapitre 1 pour plus de détails). \square

Lemme 2.7.3. *Pour tout complexe z dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathbf{Re}(z) < 1\}$, pour tout $0 < \theta < 2\pi$,*

$$h_\theta(z) = M\left(\frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta}|\right)(z) = \frac{1}{2(z-1)} \left(\sin(z-1)\theta + \frac{\cos(z-1)\theta}{\tan \pi z} \right).$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$,

$$-t\partial_t \left(\frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta}| \right) = \frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta}| - \frac{1}{2\pi t} \frac{t - \cos \theta}{|t - e^{i\theta}|^2}.$$

Or pour tout $-1 < \mathbf{Re}(z) < 1$,

$$M\left(\frac{1}{2\pi} \frac{t}{|t - e^{i\theta}|^2}\right)(z) = \frac{1}{2 \sin \theta} \left(\cos(z-1)\theta - \frac{\sin(z-1)\theta}{\tan \pi z} \right),$$

et pour tout $0 < \mathbf{Re}(z) < 2$,

$$M\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|t - e^{i\theta}|^2}\right)(z) = \frac{1}{2 \sin \theta} \left(\cos z\theta - \frac{\sin z\theta}{\tan \pi z} \right),$$

donc pour tout $0 < \mathbf{Re}(z) < 1$,

$$\begin{aligned} (z-1)M\left(\frac{1}{2\pi t} \log |t - e^{i\theta}|\right)(z) &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left(\cos(z-1)\theta - \frac{\sin(z-1)\theta}{\tan \pi z} \right) \\ &\quad - \frac{\cos(\theta)}{2 \sin(\theta)} \left(\cos z\theta - \frac{\sin z\theta}{\tan \pi z} \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat pour tout $0 < \mathbf{Re}(z) < 1$, après simplifications trigonométriques. \square

Bilan de ces opérateurs sur un cône infini

Pour résumer, nous avons donc :

$$S = s \begin{pmatrix} \text{op}_M^\gamma \frac{1}{2(z-1)\tan(\pi z)} & \text{op}_M^\gamma \left(\frac{\sin(z-1)\theta}{2(z-1)} + \frac{\cos(z-1)\theta}{2(z-1)\tan \pi z} \right) \\ \text{op}_M^\gamma \left(\frac{\sin(z-1)\theta}{2(z-1)} + \frac{\cos(z-1)\theta}{2(z-1)\tan \pi z} \right) & \text{op}_M^\gamma \frac{1}{2(z-1)\tan(\pi z)} \end{pmatrix} + G,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \text{op}_M^{\gamma+1} \frac{-1}{2} \left(\cos z\theta - \frac{\sin z\theta}{\tan \pi z} \right) \\ \text{op}_M^{\gamma+1} \frac{-1}{2} \left(\cos z\theta - \frac{\sin z\theta}{\tan \pi z} \right) & 0 \end{pmatrix},$$

pour $\frac{-1}{2} < \gamma \leq 0$.

On vérifie ensuite par un simple calcul matriciel que sur le cône infini :

$$SY_{\theta_0}^+ - D + \frac{1}{2}Id = Id + GY_{\theta_0}^+.$$

Rappelons que l'opérateur $GY_{\theta_0}^+$ n'est a priori pas un opérateur de Green (à cause de la présence du t^{-1} dans l'expression de $Y_{\theta_0}^+$), et vérifie :

$$GY_{\theta_0}^+ : \mathcal{K}^{s,\gamma+1}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^\infty(\Gamma_1),$$

comme nous l'avons montré dans la section 2.6.1.

Or par construction (donc par le théorème de représentation 2.2.5), nous savons que $SY_{\theta_0}^+ - D + \frac{1}{2}Id = Id$ sur Γ_1 , car $Y_{\theta_0}^+$ est exactement l'opérateur Dirichlet-to-Neumann du cône infini Γ_1 . Donc :

$$GY_{\theta_0}^+ = 0$$

sur $\mathcal{K}^{s,\gamma+1}(\Gamma_1)$, et se prolonge donc par l'opérateur nul sur tout $\mathcal{K}^s(\Gamma_1)$.

De plus,

$$S\chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 = SY_{\theta_0}^+ \chi_0^2 + SY_{\theta_0}^+ \chi_0(1 - \chi_0) - S(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+ \chi_0, \quad (2.18)$$

$$= (D + \frac{1}{2}Id)\chi_0^2 + (D + \frac{1}{2}Id)(1 - \chi_0)\chi_0 - S(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+ \chi_0, \quad (2.19)$$

d'où

$$S\chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - D\chi_0^2 + \frac{1}{2}Id\chi_0^2 = \chi_0^2 + (D + \frac{1}{2}Id)(1 - \chi_0)\chi_0 - S(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+ \chi_0.$$

Comme $(D + \frac{1}{2}Id) \in \mathbf{L}^0$, on sait (même preuve que pour la proposition 1.4.11) que :

$$(D + \frac{1}{2}Id)(1 - \chi_0)\chi_0 \in \mathbf{L}_{F+G}^0,$$

où la partie Green est de l'asymptotique de $(D + \frac{1}{2}Id)$, c'est-à-dire l'asymptotique de Taylor \mathcal{T} . On peut notamment restreindre cet opérateur à $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$.

Notons G_1 la partie Green, en restreignant à $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$, on a donc :

$$G_1 : \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1) \subset \mathcal{K}^s(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^\infty(\Gamma_1) \hookrightarrow \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$$

est compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$ (car l'asymptotique de Taylor vérifie $\mathbf{Re}(-j) < \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$).

D'autre part, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+\chi_0 : \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}_0^{s-1}(\Gamma_1).$$

Or grâce à la proposition donc en décomposant $f = f_0 + f_1$, avec $f_0 \in \mathbf{S}_0^1$ et $f_1 \in S_P^{-\infty}$ où P est l'asymptotique de S), on montre que

$$S(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+\chi_0 \in \mathbf{L}_{F+G}^0,$$

où la partie Green notée G_2 est de l'asymptotique de S , c'est-à-dire l'asymptotique de Taylor \mathcal{T} . Donc de même que précédemment, l'opérateur G_2 est compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$.

Pour l'instant, nous avons donc montré que :

$$S\chi_0Y_{\theta_0}^+\chi_0 - D\chi_0^2 + \frac{1}{2}Id\chi_0^2 = Id\chi_0^2 + F + K_3,$$

où F est un opérateur d'ordre 0 plat et K_3 est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Or nous connaissons les symboles principaux de S et D grâce à [31], ainsi que le symbole principal de $Y_{\theta_0}^+$ par construction, ce qui nous permet d'affirmer par la même preuve que 2.4.12 que le symbole principal de $F + K_3$ (et donc de F) est nul à l'ordre 0, donc :

$$F : \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}_0^{s+1}(\Gamma_1) \hookrightarrow \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$$

est compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$. Nous noterons $K_2 = F + K_3$ compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$.

En rassemblant tout ceci, nous pouvons donc écrire que :

$$\begin{aligned} S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id &= -2\bar{S} \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n - \bar{D}(1 - \chi_0^2) + \frac{1}{2}Id(1 - \chi_0^2) \\ &+ \bar{S}\chi_0Y_{\theta_0}^+\chi_0 - \bar{D}\chi_0^2 + \frac{1}{2}Id\chi_0^2 \\ &= (1 - \chi_0^2)Id + K_1 + \chi_0^2Id + K_2 = Id + K, \end{aligned}$$

où $K = K_1 + K_2$ est compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$.

Théorème d'existence et d'unicité

Par une preuve similaire à celle de la GCSIE classique, il est possible de démontrer l'unicité d'une solution de la nouvelle GCSIE dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

Proposition 2.7.4. *Avec les mêmes notations que précédemment, l'opérateur*

$$\bar{S}\tilde{Y}^+ - \bar{D} + \frac{1}{2}Id$$

est injectif dans $H^{1/2}(\Gamma) \subset \mathcal{K}^{1/2}(\Gamma)$.

Démonstration. Soit $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$, $p \neq 0$. Alors montrons le lemme suivant :

Lemme 2.7.5. *Pour tout $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$ non nul, alors $\langle \tilde{Y}^+ p, p \rangle > 0$.*

Démonstration. Pour tout $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$,

$$\langle \tilde{Y}^+ p, p \rangle = \langle Y_{\theta_0}^+ \chi_0 p, \chi_0 p \rangle - 2 \sum_{n=1}^N \langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle.$$

Comme $Y_{\theta_0}^+$ est exactement égal à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur le cône Γ_1 , or $\chi_0 p$ est à support dans Γ_1 . D'après la proposition 2.3.2, nous savons donc que $\langle Y_{\theta_0}^+ \chi_0 p, \chi_0 p \rangle \geq 0$.

D'autre part, notons $p_n = \chi_n p$ pour tout $1 \leq n \leq N$, et d'après la relation (2.5) sur les sauts des traces du double couche :

$$\begin{aligned} \langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle &= \langle \gamma_1^+ \mathcal{D} p_n, \gamma_0^- \mathcal{D} p_n - \gamma_0^+ \mathcal{D} p_n \rangle \\ &= \langle \gamma_1^- \mathcal{D} p_n, \gamma_0^- \mathcal{D} p_n \rangle - \langle \gamma_1^+ \mathcal{D} p_n, \gamma_0^+ \mathcal{D} p_n \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.3.2. Supposons que $\langle N \chi_n p, \chi_n p \rangle = 0$, alors $\gamma_0^- \mathcal{D} p_n = 0$ et $\gamma_0^+ \mathcal{D} p_n = 0$, d'où $p_n = 0$. Or p est non nul, donc il existe au moins un n tel que p_n soit non nul. Cela conclut la preuve. \square

D'après le lemme précédent,

$$\langle \tilde{Y}^+ p, p \rangle = \sum_i \langle Y_i^+ \chi_i p, \chi_i p \rangle > 0.$$

Donc grâce à la proposition 2.3.2, $(u, \tilde{Y}^+ u) \notin X^-$, ce qui implique que

$$\gamma_0^+ \bar{\mathcal{C}}^+(u, \tilde{Y}^+ u) \neq 0,$$

pour tout $u \neq 0$. D'où l'injectivité de $A := S\tilde{Y}^+ - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} S\tilde{Y}^+ - D + \int_{\Gamma} D + \frac{1}{2}$ dans $H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$.

Soit $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$ tel que $Ap = 0$. Alors :

$$-\frac{1}{2}p = S\tilde{Y}^+ p - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} S\tilde{Y}^+ p - Dp + \int_{\Gamma} Dp,$$

donc $\int_{\Gamma} p = 0$, d'où $p \in H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$. Or A est injective dans $H_{\bullet}^{1/2}(\Gamma)$, donc $p = 0$ ce qui termine la preuve. \square

Pour démontrer l'unicité d'une solution, nous aurons besoin de relever la solution dans l'extérieur du domaine, et donc du théorème ci-dessous, énoncé par Grisvard [25] sur un cône infini. Nous conservons nos notations liées au cône infini Γ_1 .

Théorème 2.7.6. *Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Gamma_1})$, posons :*

$$f_k = \partial_y^k u^+; \quad g_l = \partial_x^l u^-.$$

Alors l'application

$$u \mapsto \{\{f_k\}_{0 \leq k \leq m-1}, \{g_l\}_{0 \leq l \leq m-1}\}$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+))^m$ se prolonge pour tout entier $m > 0$ par continuité en une application linéaire continue surjective notée \tilde{T} :

$$\tilde{T} : H^m(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T},$$

où \mathcal{T} est le sous-espace de

$$\prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\mathbb{R}_+) \times \prod_{l=0}^{m-1} H^{m-l-1/2}(\mathbb{R}_+)$$

défini par :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \partial_x^l f_k(0) = \partial_y^k g_l(0), \quad k+l < m-1, \text{ si } m > 1, \\ (b) \quad & \int_0^{+\infty} |\partial_x^l f_k(t) - \partial_y^k g_l(t)|^2 \frac{dt}{t} < +\infty, \quad k+l = m-1. \end{aligned}$$

De plus, \tilde{T} admet un relèvement continu.

Théorème 2.7.7. *La GCSIE, d'opérateur sous-jacent*

$$\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id,$$

avec

$$\tilde{Y}^+ u = \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - 2 \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n,$$

est bien posée dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma)$, pour tout réel s , pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Rappelons que par définition, \overline{S} et \overline{D} sont égaux respectivement à S et D modulo une constante (donc un opérateur compact).

Nous avons démontré précédemment que

$$S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id = Id + K,$$

où K est un opérateur compact de $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma)$. L'opérateur sous-jacent à la GCSIE est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0. Il nous reste à montrer qu'il est injectif dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma)$.

Soit $u \in \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma)$ tel que

$$\left(\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id \right) u = 0,$$

nous allons montrer que nécessairement $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, la proposition 2.7.4 nous permettant alors de conclure.

Pour cela, nous voulons connaître le comportement de u près de la pointe, afin de pouvoir utiliser le théorème 2.7.6. Cela revient donc à connaître le comportement asymptotique de Ku près de la pointe. En effet, si u est dans le noyau de la GCSIE, alors

$$0 = u + Ku \quad \Rightarrow u = -Ku.$$

Rappelons-nous la construction de l'opérateur compact K :

$$K = K_1 + K_2,$$

où

- l'opérateur K_1 est compact dans $H^s(\Gamma)$ pour tout réel s ;
- l'opérateur K_2 est la somme d'un opérateur plat plus un opérateur de Green :
 $K_2 = S(Y_{\theta_0}^+(1 - \chi_0) - (1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+)\chi_0.$

Tout d'abord d'un point de vue de la régularité en dehors de la pointe :

$$K : \mathcal{K}^{s,\epsilon}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}^{s+1,\epsilon}(\Gamma)$$

pour tout réel s , d'après tout ce qui précède. Or si $u = -Ku$, donc par récurrence, si $u \in \mathcal{K}^{s,\epsilon}(\Gamma)$ est dans le noyau de la GCSIE alors $u \in \mathcal{K}^{\infty,\epsilon}(\Gamma)$.

Il nous reste à étudier le comportement asymptotique de u près de la pointe. Par construction de K , il suffit d'étudier l'asymptotique de l'opérateur de Green contenu dans K_2 . Pour cela, on peut considérer en entrée une fonction de \mathcal{D}_Q , pour $Q \in \mathcal{R}^0$, puisqu'on ne s'intéresse ici qu'au comportement asymptotique près de zéro.

On sait que $Y_{\theta_0}^+$ s'écrit comme une matrice de terme de la forme $\text{op}_M^\gamma h \frac{1}{t}$, où $-1 < \gamma < 0$. La présence du $(1 - \chi_0)$ à droite permet de ne pas se préoccuper du $\frac{1}{t}$: ce sont de toute façon des fonctions plates en zéro (car à support compact dans \mathbb{R}^+ ouvert). Donc pour tout type d'asymptotique $Q \in \mathcal{R}^0$,

$$Y_{\theta_0}^+(1 - \chi_0) : \mathcal{D}_Q \xrightarrow{(1-\chi_0)} \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_P,$$

où le type d'asymptotique P ne dépend que des pôles de h qui sont dans $\{z = \frac{k\pi}{\theta_0} + 1, k \in \mathbb{Z}\}$; donc $P = \{z = \frac{k\pi}{\theta_0}, k \in \mathbb{Z}, \frac{k\pi}{\theta_0} < \frac{-3}{2}\}$ (car $\gamma > -1$).

Le second terme est plus simple :

$$(1 - \chi_0)Y_{\theta_0}^+ : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_0.$$

A cela, nous appliquons l'opérateur S qui s'écrit comme une matrice de terme $s \text{op}_M^\gamma f$, où f est d'asymptotique de Taylor \mathcal{T} . Par conséquent, l'asymptotique de K_2 est :

$$P_2 = P + T^1 \mathcal{T},$$

c'est-à-dire que $K_2 u$ se comporte près de zéro comme t^α avec $\alpha > \frac{1}{2}$.

Finalement, l'opérateur compact $K = Id - (S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id)$ vérifie :

$$K : \mathcal{K}^{0,\varepsilon}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}_{P+T^1\mathcal{T}}^{1,\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{K}^{1,1}(\Gamma).$$

D'autre part, rappelons que d'après la proposition 1.2.18,

$$\mathcal{K}^{1,1}(\mathbb{R}^+) \subset H^1(\mathbb{R}^+) \subset H^{1/2}(\mathbb{R}^+),$$

et les comportements asymptotiques près de la pointe nous assure que le raccordement de la fonction en la pointe vérifie la condition d'intégrabilité du théorème 2.7.6, ce qui nous permet donc de conclure que $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, et d'après la proposition 2.7.4, $u = 0$. \square

Chapitre 3

Le problème de Helmholtz

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.1 | Présentation du problème de Helmholtz | 104 |
| 3.1.1 | Le problème de Helmholtz intérieur | 105 |
| 3.1.2 | Le problème de Helmholtz extérieur. | 107 |
| 3.1.3 | Théorème de représentation | 109 |
| 3.1.4 | Caractérisation des traces | 111 |
| 3.2 | Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ou- | |
| | vert lisse | 111 |
| 3.2.1 | Équation simple couche | 111 |
| 3.2.2 | Équation double couche en source | 113 |
| 3.2.3 | Équation double couche en champs | 113 |
| 3.2.4 | Équation combinée en champs | 114 |
| 3.2.5 | Introduction à la GCSIE | 115 |
| 3.3 | Résolution du problème de Helmholtz dans un cône infini . | 117 |
| 3.3.1 | Résolution du problème Dirichlet homogène de Helmholtz avec second membre | 117 |
| 3.3.2 | Admittance du problème de Helmholtz sur un cône infini . . . | 120 |
| 3.4 | Construction de la GCSIE prenant en compte la présence | |
| | de pointes | 125 |
| 3.4.1 | Préliminaires : étude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par la fonction de Bessel. | 126 |
| 3.4.2 | Présentation de la nouvelle GCSIE | 127 |
| 3.4.3 | Existence et unicité d'une solution | 127 |

Grâce aux outils présentés dans le chapitre 1, nous avons développés une nouvelle équation GCSIE (Generalized Combined Source Integral Equation), prenant en compte la présence de singularités géométriques pour résoudre le problème extérieur de Laplace. Pour cela, nous avons adapté la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ , de façon à la rendre utilisable en pratique (cf section 2.1). Notre objectif est de construire une équation GCSIE qui prend en compte la présence de pointes pour résoudre le problème de Helmholtz. Nous allons voir que les résultats du chapitre 2 nous seront très utiles pour le problème de Helmholtz.

Dans le premier paragraphe, nous présenterons le problème de Helmholtz (en dimension 2), afin d'en rappeler le théorème de représentation. Cela est en effet la base de la construction d'équations intégrales via les potentiels simple et double couches.

Nous nous placerons ensuite dans un cadre lisse, afin de rappeler la construction des équations intégrales classiques, et notamment la GCSIE [5]. Cette équation fait intervenir l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (appelée opérateur *admittance* par les physiciens), localement approchée par l'admittance de droites infinies (tangentes à la surface considérée).

Pour adapter la GCSIE à une surface possédant une pointe, il nous faut donc connaître l'admittance d'un cône infini (de dimension 2). Pour cela, nous utilisons une décomposition spectrale de l'opérateur de Helmholtz sur un cône infini [11].

Enfin, nous construisons une nouvelle GCSIE prenant en compte les pointes pour le problème extérieur de Helmholtz.

3.1 Présentation du problème de Helmholtz

Un champ scalaire u vérifie l'équation des ondes si :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

où dans un milieu homogène, c représente la vitesse de propagation d'une onde.

Nous considérons les solutions dites *harmoniques* de cette équation, nous cherchons donc une solution de la forme

$$u(t, x) = e^{i\omega t} \tilde{u}(x),$$

le réel ω est appelée la pulsation : $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence de l'onde. La longueur d'onde vérifie $\lambda = \frac{c}{f}$.

L'onde dite *stationnaire* \tilde{u} vérifie alors l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0,$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est un réel appelé *nombre d'onde*.

Nous considérons le problème de Helmholtz à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface Γ définie au chapitre 2, dans la section 2.1.1.

Nous notons γ_0^\pm la trace extérieure ou intérieure sur la surface Γ et γ_1^\pm la trace de la dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}} u$, extérieure ou intérieure.

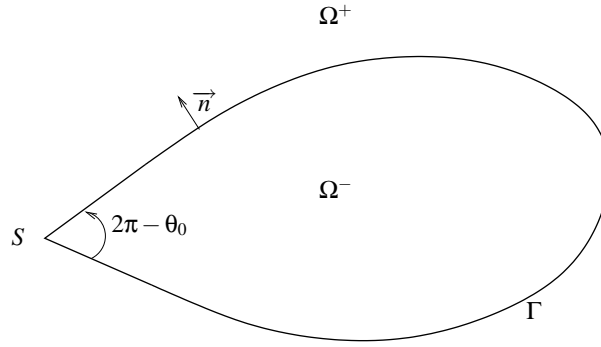


FIG. 3.1 – Ouvert à coin.

Comme la frontière est seulement lipschitzienne, on ne peut pas définir la trace de Neumann comme étant la trace du gradient, car l'application trace

$$\gamma_0^\pm : H^s(\Omega^\pm) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$$

n'est bien définie et continue que pour $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ (cf lemme 2.2.4).

Mais ici, on peut la définir de la manière suivante : supposons qu'il existe $u \in H_{loc}^1(\Omega^\pm)$ solution du problème de Helmholtz dans l'ouvert Ω^\pm (problème extérieur ou intérieur).

Rappelons que l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ existe, c'est le dual de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. D'autre part, il existe un relèvement continu de la trace $\eta_0^\pm : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega^\pm)$ (cf lemme 2.2.4). De plus, quitte à tronquer à l'infini par une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut choisir η_0^+ de sorte que pour tout $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\eta_0^+\Phi$ est une distribution à support compact dans \mathbb{R}^2 .

On définit $\gamma_1^\pm u$ comme étant la distribution vérifiant :

$$\langle \gamma_1^\pm u, \Phi \rangle_\Gamma = \pm \left(\int_{\Omega^\pm} \nabla u \cdot \nabla(\eta_0^\pm \Phi) - \int_{\Omega^\pm} k^2 u (\eta_0^\pm \Phi) \right), \quad \forall \Phi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

En dimension 2, la solution élémentaire du problème de Helmholtz est :

$$g_k(x) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k||x||), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

où $H_0^{(1)}$ désigne la fonction de Haenkel de première espèce d'ordre 0, c'est-à-dire que g_k vérifie :

$$\Delta g_k + k^2 g_k = \delta_0,$$

où δ_0 désigne la masse de Dirac centrée en 0.

3.1.1 Le problème de Helmholtz intérieur

Soit u_0 une donnée de Dirichlet, on cherche u solution de :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \gamma_0^- u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

On note W^- l'espace des u vérifiant l'équation de Helmholtz harmonique dans Ω^- et possédant une trace de Dirichlet sur Γ .

Théorème 3.1.1 ([36] théorème 4.12.). *Soit un ouvert Ω borné de frontière lipschitzienne $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Alors il existe $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et $\Phi_1, \Phi_2, \dots \in H^1(\Omega)$, tels que $\{\Phi_i\}$ soit un système orthonormé de $L^2(\Omega)$:*

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_j = \lambda_j \Phi_j & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_0^- \Phi_j = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \gamma_1^- \Phi_j = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Si $\Gamma = \Gamma_D$ (soit $\Gamma_N = \emptyset$), on dira que les λ_j sont des *valeurs propres du problème de Dirichlet intérieur pour le laplacien*. A l'inverse, si $\Gamma = \Gamma_N$, on dira que les λ_j sont des *valeurs propres du problème de Neumann intérieur pour le laplacien*.

Ce théorème nous permet d'affirmer que si une solution du problème de Helmholtz intérieur 3.1 existe, alors elle est unique si et seulement si k^2 n'est pas une valeur propre intérieure de $-\Delta$ (au sens du théorème 3.1.1). Il reste donc à montrer l'existence d'une solution.

Théorème 3.1.2. *Pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, le problème de Helmholtz intérieur 3.1 possède une unique solution si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour le laplacien.*

Démonstration. Notons $V = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0^- u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace V est un espace de Hilbert.

Commençons par ramener le problème à un problème posé sur V .

Il existe un relèvement continu de la trace :

$$\eta_0 : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega^-).$$

Posons $v = u - \eta_0 u_0$. Alors v est solution de :

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = f & \text{dans } \Omega^-, \\ \gamma_0^- v = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases},$$

où $f = -(\Delta + k^2 Id)\eta_0 u_0 \in H^{-1}(\Omega^-)$.

Ce problème est équivalent à chercher $v \in V$ tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \overline{\nabla w} - k^2 \int_{\Omega} v \overline{w} = \int_{\Omega} f \overline{w}, \quad \forall w \in V.$$

Posons A l'application de V dans V^* associée à cette équation :

$$\langle Av, w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \overline{\nabla w} - k^2 \int_{\Omega} v \overline{w} = \langle A_0 v, w \rangle + \langle K v, w \rangle,$$

où A_0 est coercive dans V :

$$\langle A_0 v, w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \overline{\nabla w},$$

et K est compacte de V dans V^* :

$$Ku = -k^2 u, \quad \Rightarrow \quad K : V \xrightarrow{-k^2 Id} V \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} H^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} V^*.$$

Donc l'opérateur $A : V \rightarrow V^*$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Or A est injectif si et seulement si k^2 n'est pas une valeur propre intérieure de $-\Delta$ (grâce au théorème 3.1.1), donc A est bijective de V dans V^* .

D'autre part, soit $\Psi(w) = \int_{\Omega} f \overline{w}$.

$$|\Psi(w)| \leq \|f\|_{-1} \|w\|_1,$$

donc d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $F_0 \in V^*$ tel que :

$$\Psi(w) = \int_{\Omega} f \overline{w} = \langle F_0, w \rangle, \quad \forall w \in V.$$

Il reste donc à choisir $v = A^{-1}F_0$, puis $u = v + \eta_0 u_0$.

□

3.1.2 Le problème de Helmholtz extérieur.

Le problème de Dirichlet

Soit u_0 une donnée de Dirichlet, on cherche u solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 & \text{où } r = |x|. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La dernière équation s'appelle *condition de rayonnement à l'infini*, ou *condition de Sommerfeld*. Nous allons donner sa signification à l'aide d'un exemple.

Les ondes g_k et $\overline{g_k}$ sont toutes deux solution du problème de Helmholtz extérieur

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega^+.$$

Parmi les deux, la condition de rayonnement à l'infini permet de choisir l'onde admissible (qui se dirige vers l'extérieur) g_k , dite *onde sortante*.

On note W^+ l'espace des u vérifiant l'équation de Helmholtz harmonique dans Ω^+ et la condition de rayonnement à l'infini, et possédant une trace de Dirichlet sur Γ .

Pour montrer l'unicité d'une solution au problème extérieur de Helmholtz, nous aurons besoin du lemme de Rellich :

Lemme 3.1.3 (Rellich). *Soit D un domaine borné, complémentaire d'un domaine non borné. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ une solution de l'équation de Helmholtz satisfaisant :*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 dx = 0.$$

Alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

La preuve de ce lemme se trouve par exemple dans [15], et ne fait pas intervenir la régularité de la surface Γ .

Théorème 3.1.4. *Soit $u \in H_{loc}^1(\Omega^+)$ une solution du problème de Helmholtz extérieur homogène :*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 & \text{où } r = |x|. \end{cases}$$

Alors $u = 0$ dans Ω^+ .

Démonstration. Notons B_R le disque ouvert centré en 0 et de rayon R , et C_R la frontière de ce disque.

Soit $u \in H_{loc}^1(\Omega^+)$ une solution du problème de Helmholtz extérieur homogène. Alors :

$$\int_{\Omega^+ \cap B_R} \Delta u \bar{u} = -k^2 \int_{\Omega^+ \cap B_R} |u|^2 = \int_{C_R} \partial_R u \bar{u} - \int_{\Gamma} \partial_n u \bar{u} - \int_{\Omega^+ \cap B_R} |\nabla u|^2,$$

et comme u est une solution du problème de Helmholtz extérieur homogène, $\int_{\Gamma} \partial_n u \bar{u} = 0$.

Donc

$$0 = \int_{\Omega^+ \cap B_R} |\nabla u|^2 - k^2 \int_{\Omega^+ \cap B_R} |u|^2 + \int_{C_R} \overline{\partial_R u} u. \quad (3.3)$$

D'autre part,

$$|\partial_R u - iku|^2 = |\partial_R u|^2 + 2\mathbf{Im}(ku \overline{\partial_R u}) + k^2 |u|^2,$$

où $\mathbf{Im}(z)$ représente la partie imaginaire du complexe z . D'où en multipliant par k et en prenant la partie imaginaire dans (3.3) :

$$\int_{C_R} |\partial_R u - iku|^2 = \frac{1}{2} \left(\int_{C_R} k^2 |u|^2 + |\partial_R u|^2 \right).$$

Grâce à la condition de rayonnement à l'infini, on a donc :

$$\frac{1}{2} \left(\int_{C_R} k^2 |u|^2 + |\partial_R u|^2 \right) + k \left(\int_{\Omega^+ \cap B_R} |\nabla u|^2 + k^2 |u|^2 \right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, $\int_{C_R} |u|^2 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, et le lemme de Rellich nous permet de conclure.

□

Ce théorème nous amène immédiatement au résultat suivant :

Théorème 3.1.5. *Pour tout $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, le problème de Helmholtz extérieur (3.2) avec condition de Dirichlet u_0 sur le bord Γ possède au plus une solution.*

Le problème de Neumann

Soit u_1 une donnée de Neumann, on cherche u solution de :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_1^+ u = u_1 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 & \text{où } r = |x|. \end{cases} \quad (3.4)$$

On démontre exactement de la même manière que pour le problème de Dirichlet le théorème suivant :

Théorème 3.1.6. *Pour tout $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, le problème de Helmholtz extérieur (3.4) avec condition de Neumann u_1 sur le bord Γ possède au plus une solution.*

Démonstration. En effet, le théorème 3.1.4 pour le problème de Neumann homogène, se démontre de même : avec les mêmes notations, soit $u \in H_{loc}^1(\Omega^+)$ une solution du problème de Helmholtz extérieur avec condition de Neumann homogène. Alors :

$$\int_{\Omega^+ \cap B_R} \Delta u \bar{u} = -k^2 \int_{\Omega^+ \cap B_R} |u|^2 = \int_{C_R} \partial_R u \bar{u} - \int_{\Gamma} \partial_n u \bar{u} - \int_{\Omega^+ \cap B_R} |\nabla u|^2,$$

et comme u vérifie $\gamma_1^+ u = 0$, alors $\int_{\Gamma} \partial_n u \bar{u} = 0$. La suite de la preuve est donc en tout point similaire à celle du théorème 3.1.4. □

3.1.3 Théorème de représentation

Rappelons que $g_k(x) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x|)$ est une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz. Notons :

$$\mathcal{S}u(x) = \int_{\Gamma} g_k(x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

l'opérateur simple couche et

$$\mathcal{D}u(x) = \int_{\Gamma} \partial_n g_k(x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

l'opérateur double couche.

On définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^+ : \mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}'(\Gamma) &\rightarrow W^+, & \mathcal{C}^- : \mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}'(\Gamma) &\rightarrow W^- \\ (f, g) &\longmapsto \mathcal{S}g - \mathcal{D}f & (f, g) &\longmapsto -\mathcal{S}g + \mathcal{D}f. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La présence de la pointe ne modifie pas les preuves habituelles sur les potentiels simple et double couches (en particulier, la formule de Green est encore vraie). Les deux théorèmes suivants restent donc vrais.

Théorème 3.1.7 (de représentation de Stratton-Chu). *Soit $u \in W^+$, alors*

$$\mathcal{C}^+(\gamma_0^+ u, \gamma_1^+ u) = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

Soit $u \in W^-$, alors

$$\mathcal{C}^-(\gamma_0^- u, \gamma_1^- u) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

A l'interface Γ , les potentiels simple et double couches vérifient les formules de saut suivantes :

Proposition 3.1.8. *Soient $(u, v) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, alors $\mathcal{S}u$ et $\mathcal{D}v$ sont dans W^\pm , et :*

$$\gamma_0^+ \mathcal{S}u = \gamma_0^- \mathcal{S}u, \quad \gamma_1^+ \mathcal{S}u - \gamma_1^- \mathcal{S}u = u, \quad (3.6)$$

$$-\gamma_0^+ \mathcal{D}u + \gamma_0^- \mathcal{D}u = u, \quad \gamma_1^+ \mathcal{D}u = \gamma_1^- \mathcal{D}u. \quad (3.7)$$

Pour les preuves, on se reportera à [15].

Nous pouvons donc définir sur la frontière Γ les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} S &= \gamma_0^+ \mathcal{S} = \gamma_0^- \mathcal{S}, \\ D &= \gamma_0^+ \mathcal{D} + \frac{1}{2} = \gamma_0^- \mathcal{D} - \frac{1}{2}, \\ N &= \gamma_1^+ \mathcal{D} = \gamma_1^- \mathcal{D}. \end{aligned}$$

On appelle S le *potentiel simple couche* et D le *potentiel double couche*. Enfin, remarquons que

$$\gamma_1^+ \mathcal{S} - \frac{1}{2} = \gamma_1^- \mathcal{S} + \frac{1}{2} = D^t,$$

où D^t est la transposée de l'opérateur double couche.

Notons X l'espace des traces

$$X = \mathcal{D}'(\Gamma)^2,$$

et X^\pm les sous espaces de X composés des couples de traces

$$(\gamma_0^\pm u, \gamma_1^\pm u) \in X,$$

pour $u \in W^\pm$.

Les opérateurs définis par :

$$C^\pm = \gamma_0^\pm \oplus \gamma_1^\pm (\mathcal{C}^\pm),$$

sont des projecteurs, appelés *projecteurs de Calderón* et décomposent l'espace X en $X^+ \oplus X^-$. Ils peuvent être écrits sous forme matricielle :

Théorème 3.1.9 (Projecteurs de Calderón). *Soient les opérateurs :*

$$C^+ = \begin{pmatrix} -D + \frac{1}{2}Id & S \\ -N & D^t + \frac{1}{2}Id \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} D + \frac{1}{2}Id & -S \\ N & -D^t + \frac{1}{2}Id \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

Ces opérateurs sont des projecteurs qui décomposent l'espace X en $X^+ \oplus X^-$.

On pourra trouver la preuve dans [39].

3.1.4 Caractérisation des traces

Notons X_s le sous-espace de X défini par :

$$X_s = H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma),$$

qui se décompose en $X_s = X_s^+ \oplus X_s^-$ par les projecteurs de Calderón. On peut caractériser les espaces de traces intérieures $X_{1/2}^-$ ou extérieures $X_{1/2}^+$ grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.1.10. *Pour tout $(f, g) \in X_{1/2}^+ \setminus (0, 0)$, on a :*

$$\mathbf{Im}(\langle \gamma_1^+ u, \overline{\gamma_0^+ u} \rangle) > 0.$$

D'autre part, pour tout $(f, g) \in X_{1/2}^-$, on a :

$$\mathbf{Im}(\langle \gamma_1^- u, \overline{\gamma_0^- u} \rangle) = 0.$$

La preuve, que l'on trouvera dans [31], ne fait pas intervenir la régularité de la surface. En effet, par définition de γ_1^\pm (cf l'introduction de cette section), nous pouvons écrire ces produits scalaires à l'aide des formules de Green.

3.2 Rappels sur les équations intégrales classiques sur un ouvert lisse

Le principe général des équations intégrales a été rappelé dans le chapitre 2 à la section 2.4. Dès l'instant que nous avons définis les potentiels simple et double couches \mathcal{S} et \mathcal{D} de sorte de pouvoir écrire la solution du problème extérieur sous la forme :

$$u = \mathcal{S}\gamma_1^+ u - \mathcal{D}\gamma_0^+ u$$

(théorème de représentation), le principe est toujours exactement le même. Cette écriture faisait intervenir la moyenne des potentiels simple et double couches pour le problème de Laplace, ce qui n'est plus le cas ici.

En revanche, la fréquence intervient désormais dans les potentiels \mathcal{S} et \mathcal{D} . Il apparaît un phénomène nouveau par rapport au problème de Laplace qui est la présence de fréquences de résonance (que nous avons déjà rencontrées dans l'étude de l'unicité du problème intérieur de Helmholtz).

Dans toute cette section, nous supposons la surface Γ de classe C^∞ .

3.2.1 Équation simple couche

On cherche la solution de (3.2) sous la forme $u = \mathcal{S}q$, on résout donc l'équation SLSIE (Single Layer Source Integral Equation) :

$$(SLSIE) \quad \mathcal{S}q = u_0,$$

pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Proposition 3.2.1. *L'opérateur S est injectif dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieure pour le laplacien.*

Démonstration. Soit $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $Sq = 0$. Posons $w = \mathcal{S}q$, alors w vérifie le problème de Helmholtz extérieur et intérieur, avec condition au bord nulle. Donc $w = 0$ dans Ω^+ et $w = 0$ dans Ω^- si et seulement si k^2 n'est pas une valeur propre intérieure de $-\Delta$. Par conséquent, $\gamma_1^\pm w = 0$, or

$$\gamma_1^+ w = D^t q + \frac{1}{2}q = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_1^- w = D^t q - \frac{1}{2}q = 0,$$

donc $q = 0$. □

L'opérateur simple couche peut se décomposer comme un opérateur compact dans $H^s(\Gamma)$, plus l'opérateur simple couche du problème de Laplace, que nous notons S_0 :

$$S_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |x - y| u(y) dy, \quad x \in \Gamma.$$

Cet opérateur est coercif :

Proposition 3.2.2 (Inégalité de Nédélec-Planchard, [27]). *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$,*

$$\langle S_0 u, u \rangle \geq c \|u\|_{-1/2}^2,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ autour de l'espace pivot $L^2(\Gamma)$.

L'opérateur $S - S_0$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 , donc compact dans $H^s(\Gamma)$ pour tout réel s , et la proposition 3.2.2 nous assure donc que S est un opérateur de Fredholm d'indice 0. La proposition 3.2.1 nous donne donc immédiatement :

Proposition 3.2.3. *L'équation SLSIE est bien posée dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Ainsi construite, l'équation simple couche (SLSIE) est une équation en source. De même que pour le problème de Laplace, cette équation peut être considérée comme une équation en champs. Pour cela, choisissons une onde incidente u^i (ici une onde acoustique, c'est-à-dire une solution du problème de Helmholtz avec pour second membre une dirac placée dans Ω^+ en un point dit *source*), et imposons $u_0 = -\gamma_0^+ u^i$ sur le bord Γ . Nous avons alors :

$$u^d = \bar{\mathcal{C}}^+(\gamma_0^+ u^d, \gamma_1^+ u^d) \text{ dans } \Omega^+,$$

et comme u^i est solution du problème intérieur (la source étant placée à l'extérieur),

$$0 = \bar{\mathcal{C}}^+(\gamma_0^+ u^i, \gamma_1^+ u^i) \text{ dans } \Omega^+,$$

d'où en sommant :

$$u^d = \bar{\mathcal{C}}^+(0, \gamma_1^+ u^t) \text{ dans } \Omega^+,$$

où $u^t = u^d + u^i$. Enfin en prenant la trace de Dirichlet, nous cherchons finalement $q = \gamma_1^+ u^t$ vérifiant :

$$Sq = -\gamma_0^+ u^i.$$

La variable q représente cette fois une grandeur physique (c'est la trace de Neumann du champ total).

3.2.2 Équation double couche en source

On cherche la solution de (3.2) sous la forme $u = \mathcal{D}p$, on résout donc l'équation DLSIE (Double Layer Source Integral Equation) :

$$(DLSIE) \quad Dp - \frac{1}{2}p = p_0.$$

Proposition 3.2.4. *L'opérateur $D - \frac{1}{2}Id$ est injectif dans $H^{1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Neumann intérieur du laplacien.*

Démonstration. Soit $p \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que $Dp - \frac{1}{2}p = 0$. Posons $w = \mathcal{D}p$, alors w vérifie le problème de Helmholtz intérieur, avec condition au bord $\gamma_0^- w = p$. On peut donc écrire le théorème de représentation dans Ω^- :

$$w = \mathcal{D}p - \mathcal{S}\gamma_1^- w,$$

et comme $Dp = \frac{1}{2}p$, cela implique en prenant la trace de Dirichlet de cette expression :

$$\mathcal{S}\gamma_1^- w = 0.$$

D'après la proposition 3.2.1, on a donc $\gamma_1^- w = 0$ si et seulement si k^2 n'est pas une valeur propre intérieure de $-\Delta$. Par unicité du problème de Neumann intérieur en dehors des fréquences de résonance (obtenue par application directe du théorème 3.1.1), on conclut que $w = 0$ dans Ω^- , et donc $\gamma_0^- w = p = 0$. \square

Proposition 3.2.5. *L'équation (DLSIE) est bien posée dans $H^{1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Neumann intérieur du laplacien.*

Démonstration. L'opérateur double couche D est un opérateur d'ordre -1 (on renvoie à Levadoux [31] pour la preuve), c'est donc un opérateur compact dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, l'opérateur $D - \frac{1}{2}Id$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. L'équation (DLSIE) est donc bien posée si et seulement si cet opérateur est injectif. \square

3.2.3 Équation double couche en champs

Reprenons la construction de l'équation (SLSIE) en champs faite à la fin du paragraphe 3.2.1, nous étions arrivé à l'équation :

$$u^d = \overline{\mathcal{C}}^+(0, \gamma_1^+ u^t) \text{ dans } \Omega^+,$$

où $u^t = u^d + u^i$ est le champ total, u^i le champ incident et u^d le champ diffracté.

En prenant la trace de Neumann, on arrive à l'équation intégrale DLFIE (Double Layer Field Integral Equation) :

$$(DLFIE) \quad D^t q - \frac{1}{2}q = -\gamma_1^+ u^i =: q_0.$$

Proposition 3.2.6. *L'opérateur $D^t - \frac{1}{2}Id$ est injectif dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur du laplacien, ni du problème de Neumann intérieur.*

Démonstration. Soit $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $D^t q + \frac{1}{2}q = 0$. Posons $w = \mathcal{S}q$, alors w vérifie le problème de Helmholtz intérieur, avec condition de Neumann homogène. Donc $w = 0$ dans Ω^- si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Neumann intérieur du laplacien.

Par conséquent, $\gamma_0^- w = \mathcal{S}q = 0$, d'où $q = 0$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur du laplacien. \square

Proposition 3.2.7. *L'équation (DLFIE) est bien posée dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur du laplacien.*

Démonstration. Il s'agit de la même preuve que pour l'équation (DLSIE). L'opérateur double couche D est un opérateur d'ordre -1 , donc son transposée D' aussi, c'est donc un opérateur compact dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, l'opérateur $D^t + \frac{1}{2}Id$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. L'équation (DLFIE) est donc bien posée si et seulement si cet opérateur est injectif. \square

3.2.4 Équation combinée en champs

Les équations (SLSIE) et (DLSIE) sont toutes deux des équations en champs qui possèdent des fréquences de résonance différentes. En combinant les deux équations, on obtient une équation bien posée à toute fréquence [10].

Soit α un complexe vérifiant :

$$\mathbf{Im}(\alpha) \neq 0,$$

on pose alors l'équation intégrale en champ combiné (CFIE) (Combined Field Integral Equation) :

$$(CFIE) \quad \mathcal{S}q + \alpha \left(D^t q - \frac{1}{2}q \right) = -\gamma_0^+ u^i - \alpha \gamma_1^+ u^i,$$

où u^i le champ incident, la solution $q = u^t = u^d + u^i$ est le champ total et u^d le champ diffracté.

Proposition 3.2.8. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbf{Im}(\alpha) \neq 0$. Alors l'opérateur sous-jacent à la (CFIE) :*

$$\mathcal{S} + \alpha \left(D^t - \frac{1}{2}Id \right)$$

est injectif dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ pour tout nombre d'onde k réel.

Démonstration. Soit $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $\mathcal{S}q + \alpha(D^t q - \frac{1}{2}q) = 0$. Posons $w = \mathcal{S}q$, alors w vérifie le problème de Helmholtz intérieur avec la condition au bord :

$$\gamma_0^- w + \alpha \gamma_1^- w = 0.$$

La formule de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega^-} \Delta w \bar{w} + k^2 |w|^2 = 0 = \int_{\Omega^-} -|\nabla w|^2 + k^2 |w|^2 + \int_{\Gamma} \gamma_0^- w \overline{\gamma_1^- w},$$

donc

$$\int_{\Gamma} (\gamma_0^- w \overline{\gamma_1^- w} - \overline{\gamma_0^- w \gamma_1^- w}) = 0 = 2i \mathbf{Im}(\alpha) \int_{\Gamma} |\gamma_1^- w|^2,$$

et comme $\mathbf{Im}(\alpha) \neq 0$, la trace de Neumann intérieure vérifie $\gamma_1^- w = 0$. Or comme $\gamma_0^- w + \alpha \gamma_1^- w = 0$, on a aussi $\gamma_0^- w = 0$. D'autre part, comme $w = \mathcal{S}q$, le saut de la trace de Dirichlet est nul : $\gamma_0^+ w = \gamma_0^- w = 0$, donc $w = 0$ dans Ω^+ (car w vérifie la condition de rayonnement à l'infini), d'où $\gamma_1^+ w = 0$:

$$D^t q + \frac{1}{2} q = 0, \quad D^t q - \frac{1}{2} q = 0,$$

d'où finalement $q = 0$ quel que soit k . □

3.2.5 Introduction à la GCSIE

Nous avons introduit la GCSIE dans le chapitre 2, section 2.4.4. Rappelons ici que sa construction repose sur l'égalité :

$$SY^+ - D + \frac{1}{2} Id = Id, \tag{3.9}$$

où Y^+ désigne l'opérateur Dirichlet-to-Neumann extérieur à la surface Γ . En acoustique (comme en électromagnétisme), on appelle cet opérateur *l'admittance extérieure*.

On découpe la surface Γ en sous-surface ouvertes $(\mathcal{U}_n)_{1 \leq n \leq N}$ à l'aide d'une partition quadratique $(\chi_n)_{1 \leq n \leq N}$ associée à ce découpage :

$$\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = 1, \quad \text{et} \quad \text{Supp} \chi_n \subset \mathcal{U}_n.$$

Chaque sous-surface \mathcal{U}_n est assimilable en première approximation à sa tangente. On écrit l'opérateur sous-jacent à la GCSIE :

$$(\text{GCSIE}) : \quad S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2} Id,$$

où \tilde{Y}^+ est une approximation de l'admittance construite comme :

$$\tilde{Y}^+ = -2 \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n. \tag{3.10}$$

Théorème 3.2.9. *L'équation GCSIE construite avec l'opérateur de couplage (3.10) est bien posée dans $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. • On renvoie à Levadoux [31] pour calculer les symboles principaux de S , D et N :

$$\sigma_\psi(S) = \frac{-1}{2\|\xi\|}, \quad \sigma_\psi(N) = \frac{\|\xi\|}{2},$$

et $D \in S^{-3}$: son symbole à l'ordre -1 est nul. Or comme $\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = 1$, on a :

$$\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id = Id + K,$$

où K est un opérateur d'ordre au plus -1 , donc est compact dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, $\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Il reste donc à montrer que cet opérateur est injectif dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

• Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u \neq 0$. Alors

$$\mathbf{Im} \langle \tilde{Y}^+ u, u \rangle = -2 \sum_n \mathbf{Im} \langle N\chi_n u, \chi_n u \rangle. \quad (3.11)$$

En effet, notons $u_n = \chi_n u$, alors $Nu_n = \gamma_1^+ \mathcal{D}u_n$, et $u_n = \gamma_0^- \mathcal{D}u_n - \gamma_0^+ \mathcal{D}u_n$, d'après (3.7). Donc d'après la proposition 3.1.10, pour tout n ,

$$\mathbf{Im} \langle N\chi_n u, \chi_n u \rangle = -\mathbf{Im} \langle \gamma_1^+ \mathcal{D}u_n, \gamma_0^+ \mathcal{D}u_n \rangle \leq 0.$$

Supposons que $\mathbf{Im} \langle N\chi_n u, \chi_n u \rangle = 0$, alors $\gamma_0^- \mathcal{D}u_n = 0$, donc $\mathcal{D}u_n = 0$ dans Ω^+ . Or u_n est à support dans \mathcal{U}_n , donc $\mathcal{D}u_n$ est analytique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_n$. Comme \mathcal{U}_n est une surface ouverte, par le théorème des zéros isolés, $\mathcal{D}u_n = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_n$, c'est-à-dire entre autre dans Ω^- . Par conséquent, $\gamma_0^- \mathcal{D}u_n = 0$, d'où $u_n = 0$. Or $u \neq 0$, donc il existe au moins un n tel que $u_n \neq 0$. Cela nous donne (3.11).

Donc toujours grâce à la proposition 3.1.10, $(u, \tilde{Y}^+ u) \notin X^-$, ce qui implique que

$$\gamma_0^+ \mathcal{C}^+(u, \tilde{Y}^+ u) \neq 0,$$

pour tout $u \neq 0$. D'où l'injectivité de $\overline{S}\tilde{Y}^+ - \overline{D} + \frac{1}{2}Id$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. \square

Le même problème que pour le problème de Laplace apparait avec la présence de pointe : l'opérateur double couche n'est plus compact car la normale à la surface Γ est discontinue en la pointe. Mais rappelons que la GCSIE a été écrite en approchant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur chaque sous-surface par celui de sa tangente. Exactement comme pour le problème de Laplace, nous allons approcher l'opérateur Dirichlet-to-Neumann près de la pointe par celui d'un cône infini.

En effet, l'égalité (3.9) nous assure que quelque chose dans l'opérateur Y^+ supprime la singularité qui apparaît dans le double couche. Il est naturel de penser que c'est le comportement de Y^+ près de la pointe qui possède cette propriété.

C'est pourquoi nous allons tout d'abord nous intéresser à la résolution du problème de Helmholtz sur un cône infini, ce qui nous permettra de calculer explicitement l'opérateur admittance du cône infini.

3.3 Résolution du problème de Helmholtz dans un cône infini

La méthode présentée par Cessenat [12] et [11], permet de calculer la solution du problème de Helmholtz avec second membre, et condition de Dirichlet nulle au bord d'un cône infini. Nous commençons donc par présenter cette méthode de résolution, puis ensuite nous calculerons l'opérateur admittance pour le cône infini en se ramenant à ce premier problème.

3.3.1 Résolution du problème de Helmholtz avec second membre et condition de Dirichlet homogène

Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons dans la configuration suivante. Le résultat ne dépendant que de l'angle extérieur, il est naturel de choisir la configuration simplifiant le changement de variable polaire. Nous posons $\phi_0 = \frac{\theta_0}{2}$.

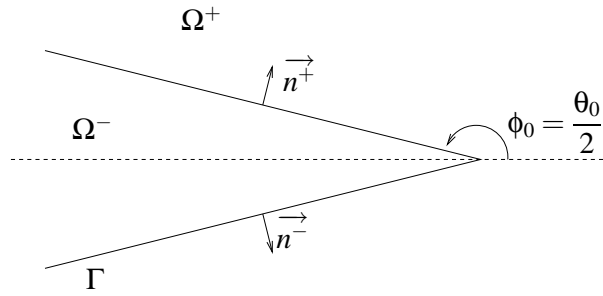


FIG. 3.2 – Notations

Nous considérons le problème de Helmholtz suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = o(1) & r = |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.12)$$

où $f \in H^1(\Omega^+)$.

Changement de variables

Après être passé en coordonnées polaires, posons le changement de variable suivant :

$$U(r, \theta) = \sqrt{\frac{k}{r}} u\left(\frac{r}{k}, \theta\right), \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -\left(\frac{r}{k}\right)^{3/2} f\left(\frac{r}{k}, \theta\right). \quad (3.13)$$

Alors le problème (3.12) se réécrit :

$$\begin{cases} \mathcal{A}U - \mathcal{B}U = F & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ U = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \left(\frac{1}{2} - ir\right)U + r\partial_r U = o(1) & r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

où

$$\mathcal{A} = -r^2 \partial_r^2 - 2r \partial_r - \left(r^2 + \frac{1}{4} \right)$$

et

$$\mathcal{B} = \partial_\theta^2.$$

Soient les opérateurs A et B définis par leur domaine :

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^+) \mid \mathcal{A}u \in L^2(\mathbb{R}^+), \lim_{r \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2} - ir)u + r \partial_r u = 0\} \\ \forall u \in D(A), \quad Au = \mathcal{A}u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in L^2([-\phi_0, \phi_0]) \mid \mathcal{B}u \in L^2([-\phi_0, \phi_0]), u(\phi_0) = u(-\phi_0) = 0\} \\ \forall u \in D(B), \quad Bu = \mathcal{B}u. \end{cases}$$

L'opérateur A dépend uniquement de la variable r tandis que l'opérateur B ne dépend que de la variable θ .

Nous allons étudier chacun de ces opérateurs.

Etude de l'opérateur A

Proposition 3.3.1. *Le spectre de l'opérateur A est $\sigma(A) = \mathbb{R}^+$.*

Nous renvoyons à [12] pour la preuve.

Proposition 3.3.2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, la résolvante $(A + \lambda Id)^{-1}$ est un opérateur intégral de noyau*

$$K_\lambda(s, t) = \begin{cases} \frac{i\pi}{2} \frac{J_{\sqrt{\lambda}}(s)}{\sqrt{s}} \frac{H_{\sqrt{\lambda}}^{(1)}(t)}{\sqrt{t}}, & s < t, \\ \frac{i\pi}{2} \frac{H_{\sqrt{\lambda}}^{(1)}(s)}{\sqrt{s}} \frac{J_{\sqrt{\lambda}}(t)}{\sqrt{t}}, & t < s, \end{cases}$$

où $\operatorname{Re}(\sqrt{\lambda}) > 0$, et J_ν et H_ν^1 désignent respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel de première espèce, d'ordre ν .

Démonstration.

Lemme 3.3.3. *Les fonctions $\frac{J_\nu(t)}{\sqrt{t}}$ et $\frac{H_\nu^1(t)}{\sqrt{t}}$ sont solutions de l'équation différentielle*

$$(A + \nu^2 Id)U = 0.$$

Démonstration. En effet, par le changement de variable 3.13, on se ramène à l'équation de Bessel. \square

Pour montrer cette proposition, il suffit de vérifier, à l'aide du lemme 3.3.3 et des propriétés des fonctions de Bessel, que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega^+)$,

$$\begin{aligned} & (A + \lambda Id) \left(\frac{J_{\sqrt{\lambda}}(s)}{\sqrt{s}} \int_s^{+\infty} \frac{H_{\sqrt{\lambda}}^{(1)}(t)}{\sqrt{t}} u(t) dt + \frac{H_{\sqrt{\lambda}}^{(1)}(s)}{\sqrt{s}} \int_0^s \frac{J_{\sqrt{\lambda}}(t)}{\sqrt{t}} u(t) dt \right) \\ &= t \left(H_{\nu}^{(1)}(t) J_{\nu}'(t) - J_{\nu}(t) H_{\nu}^{(1)'}(t) \right) u(t). \end{aligned}$$

Le lemme suivant permet de conclure :

Lemme 3.3.4. *Pour tout $t > 0$, on a : $t \left(H_{\nu}^{(1)}(t) J_{\nu}'(t) - J_{\nu}(t) H_{\nu}^{(1)'}(t) \right) = \frac{2}{i\pi}$.*

Démonstration. Il suffit pour cela de dériver l'expression en t puis de calculer la limite en 0. □

□

Etude de l'opérateur B

Proposition 3.3.5. *L'opérateur B est auto-adjoint. Le spectre de B est :*

$$\sigma(B) = \left\{ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2\phi_0} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Les vecteurs propres associés sont $\zeta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\phi_0}} \sin \sqrt{\lambda_n}(\theta + \phi_0)$.

La preuve de cette proposition est immédiate, B étant l'opérateur ∂_{θ}^2 sur un segment.

Résolution du problème de Dirichlet

Nous pouvons maintenant écrire explicitement la solution du problème de Dirichlet homogène, dans les variables (r, θ) .

Proposition 3.3.6. *Avec les même notations que précédemment, on pose*

$$F_n(r, \theta) = \int_{-\phi_0}^{\phi_0} F(r, \phi) \zeta_n(\phi) d\phi \zeta_n(\theta).$$

La solution de (3.14) est donnée par :

$$U = \sum_{n \in \mathbb{N}/2} (A + \lambda_n Id)^{-1} F_n.$$

Démonstration. Soit U la solution de (3.14). Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $U(r, \cdot) \in D(B)$. Donc U s'écrit :

$$U(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}/2} U_n(r) \zeta_n(\theta), \quad U_n(r) = \int_{-\phi_0}^{\phi_0} U(r, \phi) \zeta_n(\phi) d\phi.$$

Donc

$$(A + B)U = \sum_{n \in \mathbb{N}/2} (AU_n + \lambda_n U_n) \zeta_n = F,$$

d'où en projetant sur ζ_p ,

$$U_p(r) = (A + \lambda_p Id)^{-1} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} F(r, \phi) \zeta_p(\phi) d\phi.$$

□

La solution du problème de Helmholtz (3.14) s'écrit donc :

$$U(r, \theta) = \frac{i\pi}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}/2} \zeta_n(\theta) \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \zeta_n(\phi) \left[\int_0^{+\infty} K_{\lambda_n}(r, t) F(t, \phi) dt \right] d\phi.$$

Par le changement de variable inverse, on peut donc écrire la solution du problème (3.12). Pour cela, notons

$$\tilde{K}_n(s, t) = \begin{cases} \frac{i\pi}{2} J_{\sqrt{\lambda_n}}(ks) H_{\sqrt{\lambda_n}}^{(1)}(kt), & s < t, \\ \frac{i\pi}{2} H_{\sqrt{\lambda_n}}^{(1)}(ks) J_{\sqrt{\lambda_n}}(kt), & t < s, \end{cases}$$

La solution du problème de (3.12) s'écrit en coordonnées polaires :

$$u(s, \theta) = - \sum_{n \in \mathbb{N}/2} \zeta_n(\theta) \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \zeta_n(\phi) \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) f(t, \theta) t dt d\phi,$$

pour tous $s > 0$, $\frac{-\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2}$

3.3.2 Admittance du problème de Helmholtz sur un cône infini

On considère maintenant le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = o(1) & r = |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.15)$$

Il suffit de se ramener au problème (3.12) pour avoir une solution explicite du problème (3.15). Pour cela, il faut relever u_0 dans Ω^+ . On suppose que $u_0 \in C_0^\infty(\Gamma)$ est à support compact. On peut écrire u_0 sous la forme

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_0^+ \\ u_0^- \end{pmatrix},$$

où $u_0^\pm(r) = u_0(r, \pm\phi_0)$. On note $[u_0]^+ = \frac{u_0^+ + u_0^-}{2}$ et $[u_0]^- = \frac{u_0^+ - u_0^-}{2}$.

Soit $v(t, \theta) = [u_0]^+ + \frac{\theta}{\phi_0}[u_0]^-$ un relèvement de u_0 dans Ω^+ . La fonction v est à support compact.

On pose $w = u - v$, alors w est solution du problème de Helmholtz :

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = -\Delta v - k^2 v & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_0^+ w = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sqrt{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - i k w \right) = o(1) & r = |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.16)$$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$w(s, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}/2} \zeta_n(\theta) \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \zeta_n(\phi) \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) f(t, \phi) t dt d\phi,$$

où $f = \Delta v + k^2 v = \partial_t^2 v + \frac{1}{t} \partial_t v + \frac{1}{t^2} \partial_\theta^2 v + k^2 v$ et $\partial_\theta^2 v = 0$, donc $t f(t) = t \partial_t^2 v + \partial_t v + t k^2 v$.

Par intégration par parties, et grâce au lemme 3.3.4 :

$$\int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) (t \partial_t^2 v(t, \phi) + \partial_t v(t, \phi)) dt = -v(s, \phi) + \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) \frac{\lambda_n - k^2 t^2}{t} v(t, \phi) dt,$$

ce qui nous donne :

$$w(s, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n(\theta) \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \zeta_n(\phi) \left[-v(s, \phi) + \lambda_n \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) \left([u_0(t)]^+ + \frac{\phi}{\phi_0} [u_0(t)]^- \right) \frac{dt}{t} \right] d\phi.$$

Or dans $L^2([-\phi_0, \phi_0])$,

$$v(t, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n(\theta) \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \zeta_n(\phi) v(s, \phi) d\phi,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \sin \frac{n\pi(\phi + \phi_0)}{2\phi_0} d\phi &= \frac{-2\phi_0}{n\pi} ((-1)^n - 1), \\ \frac{1}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \phi \sin \frac{n\pi(\phi + \phi_0)}{2\phi_0} d\phi &= \frac{-2\phi_0}{n\pi} ((-1)^n + 1), \end{aligned}$$

donc :

$$u(s, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{\phi_0^2} \sin \frac{n\pi(\theta + \phi_0)}{2\phi_0} \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) \left(\frac{u_0^+(t) + (-1)^{n+1} u_0^-(t)}{2} \right) \frac{dt}{t}. \quad (3.17)$$

Le calcul précédent est formel, il nous faut à présent vérifier que la somme est convergente. Pour cela, notons :

$$l_n^{(0)}(s, t) = \frac{\phi_0}{n\pi} \left[\left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s < t}(s, t) + \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{t < s}(s, t) \right],$$

$$\begin{aligned}
l_n^{(1)}(s, t) &= \frac{2\phi_0^2 k^2}{n\pi(2\phi_0 + n\pi)} \left[s^2 \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s < t}(s, t) + t^2 \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{t < s}(s, t) \right] \\
&+ \frac{2\phi_0^2 k^2}{n\pi(2\phi_0 - n\pi)} \left[s^2 \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0} - 2} \mathbf{1}_{s < t}(s, t) + t^2 \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0} - 2} \mathbf{1}_{t < s}(s, t) \right].
\end{aligned}$$

Certains des lemmes qui suivent sont très calculatoires, et d'un intérêt limité pour notre exposé. Afin d'alléger cette section, nous renvoyons donc à l'annexe A pour les preuves.

Lemme 3.3.7. *Lorsque n tend vers l'infini,*

$$\tilde{K}_n(s, t) = l_n^{(0)}(s, t) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + l_n^{(1)}(s, t),$$

uniformément sur tout compact de $(\mathbb{R}^+)^2$.

Démonstration. cf Annexe A. □

Lemme 3.3.8. *Pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,*

$$\langle l_n^{(1)}(s, t), \frac{\Psi(t)}{t} \rangle = O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

Démonstration. cf Annexe A. □

Lemme 3.3.9. *Pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,*

$$\int_0^{+\infty} l_n^{(0)}(s, t) \Psi(t) \frac{dt}{t} = \frac{4\phi_0^2}{n^2\pi^2} \Psi(s) + \frac{2\phi_0^2}{n^2\pi^2} \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s < t} - \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{t < s} \right) \Psi'(t) dt,$$

Démonstration. Immédiat par intégration par parties. □

Comme on a, dans $L^2(-\phi_0, \phi_0)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi(\theta + \phi_0)}{2\phi_0} \left(\frac{u_0^+(s) + (-1)^{n+1}u_0^-(s)}{2} \right) = [u_0(s)]^+ + \frac{\theta}{\phi_0} [u_0(s)]^-,$$

on peut écrire :

$$\boxed{
\begin{aligned}
u(s, \theta) &= [u_0(s)]^+ + \frac{\theta}{2\theta_0} [u_0(s)]^- \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}4n\pi}{\theta_0^2} \sin \frac{n\pi(2\theta + \theta_0)}{2\theta_0} R_n \left(\frac{u_0^+(t) + (-1)^{n+1}u_0^-(t)}{2} \right),
\end{aligned}
} \quad (3.18)$$

où

$$R_n u(s) = \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(s, t) u(t) \frac{dt}{t} - \frac{4\phi_0^2}{n^2\pi^2} u(s) = O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

Nous voulons calculer $Y^+u_0 = \gamma_1^+u = \frac{1}{s}(-1, 1)^t \partial_\theta u$.

La série n'est pas dérivable en θ telle qu'elle car le terme général dérivé de la série est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Notons

$$u_N(s, \theta) = [u_0(s)]^+ + \frac{\theta}{\phi_0} [u_0(s)]^- + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1} n \pi}{\phi_0^2} \sin \frac{n \pi (\theta + \phi_0)}{2 \phi_0} R_n u_0(s),$$

alors

$$Y_N^+ u = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \partial_\theta u_N = \frac{1}{2s\phi_0} \begin{pmatrix} -1 + \sum_{n=1}^N \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} R_n & 1 - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} R_n \\ 1 - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} R_n & -1 + \sum_{n=1}^N \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^+ \\ u_0^- \end{pmatrix}.$$

On va calculer le noyau de cet opérateur. Pour cela, supposons que $u_0^+ = \delta_{t_0}$ et $u_0^- = 0$.

Alors :

$$Y_N^+ u = \frac{1}{2s\phi_0} \begin{pmatrix} -\delta_{t_0} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{t_0} r_n(s, t_0) + \frac{1}{t_0} \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} l_n^{(0)}(s, t_0) - 2\delta_{t_0} \right) \\ \delta_{t_0} - \sum_{n=1}^N (-1)^n \left(\frac{1}{t_0} r_n(s, t_0) + \frac{1}{t_0} \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} l_n^{(0)}(s, t_0) - 2\delta_{t_0} \right) \end{pmatrix}.$$

où

$$r_n(s, t_0) = \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} (\tilde{K}_n(s, t_0) - l_n^{(0)}(s, t_0))$$

vérifie

$$\langle r_n, \Psi \rangle = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N > 0$, soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ à support dans $\mathbb{R}^+ \setminus (]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[)$,

$$\langle \frac{1}{t_0} \frac{n^2 \pi^2}{2\phi_0^2} l_n^{(0)}(s, t_0) - 2\delta_{t_0}, \frac{\Psi}{s} \rangle = \langle f_n, \Psi' \rangle,$$

$$\text{où } f_n(s) = -\left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s < t_0} + \left(\frac{t_0}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s > t_0}.$$

Lemme 3.3.10. Soit $f_n(s) = -\left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s < t_0} + \left(\frac{t_0}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\phi_0}} \mathbf{1}_{s > t_0}$, défini pour tout réel $s > 0$, pour tout $n > 0$. Alors pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle \sum_{n=1}^N f_n(s), \Psi' \rangle = \langle \delta_{t_0} - \frac{\pi}{2\phi_0} t_0^{\frac{\pi}{2\phi_0}} \text{Pf}\left(\frac{s^{\frac{\pi}{2\phi_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\phi_0}} - s^{\frac{\pi}{2\phi_0}})^2}\right), \Psi \rangle,$$

et

$$\langle \sum_{n=1}^N (-1)^n f_n(s), \Psi' \rangle = \langle -\delta_{t_0} + \frac{\pi}{2\phi_0} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\phi_0}} s^{\frac{\pi}{2\phi_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\phi_0}} + s^{\frac{\pi}{2\phi_0}})^2}, \Psi \rangle.$$

Démonstration. cf Annexe A. □

D'où finalement, en utilisant que $2\phi_0 = \theta_0$:

$$\langle Y^+ \begin{pmatrix} \delta_{t_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi \rangle = \frac{\pi}{\theta_0^2} \left(\text{Pf} \left(\frac{t_0^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \right) + \frac{1}{st_0} R_1 \frac{t_0^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} + \frac{1}{st_0} R_2 \right) \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix},$$

où

$$R_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n, \quad R_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n r_n.$$

Pour conclure (on peut refaire le même calcul sur l'autre face du cône : $u_0^+ = 0$ et $u_0^- = \delta_{t_0}$ et on obtient donc le noyau de l'opérateur Y^+) :

$$Y^+ u_0 = \frac{\pi}{\theta_0^2} \begin{pmatrix} \text{Pf} \left(\frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \right) + \frac{1}{st} R_1 & \frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} + \frac{1}{st} R_2 \\ \frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} + \frac{1}{st} R_2 & \text{Pf} \left(\frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \right) + \frac{1}{st} R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^+ \\ u_0^- \end{pmatrix},$$

où

$$R_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \pi}{\theta_0} \tilde{r}_n, \quad R_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 \pi}{\theta_0} \tilde{r}_n, \quad (3.19)$$

$$\tilde{r}_n(s, t) = 2(\tilde{K}_n(s, t) - l_n^{(0)}(s, t)) = \begin{cases} i\pi J_{n\pi/\theta_0}(ks) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(kt) - \frac{\theta_0}{n\pi} \left(\frac{s}{t}\right)^{n\pi/\theta_0}, & s < t \\ i\pi J_{n\pi/\theta_0}(kt) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(ks) - \frac{\theta_0}{n\pi} \left(\frac{t}{s}\right)^{n\pi/\theta_0}, & s > t \end{cases} \quad (3.20)$$

vérifie

$$\langle \tilde{r}_n, \Psi \rangle = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+),$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

Lemme 3.3.11. *Pour tout entier $n \geq 1$, le noyau $\frac{1}{st} \tilde{r}_n$ est de classe $C^\infty((\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{s = t\})$ et de classe $C^1((\mathbb{R}^+)^2)$.*

Démonstration. Le noyau $\frac{1}{st} \tilde{r}_n$ est clairement continue dans $(\mathbb{R}^+)^2$, et de classe $C^\infty((\mathbb{R}^*)^2 \setminus \{s = t\})$. Vérifions que sa dérivée est continue sur la diagonale. Remarquons tout d'abord que \tilde{r}_n est symétrique.

On pose $\nu = \frac{n\pi}{\theta_0}$.

$$\partial_s \tilde{r}_n(s, t) = \begin{cases} \frac{ki\pi}{2} J_\nu(ks) H_\nu^{(1)'}(kt) + \frac{1}{2t} \left(\frac{s}{t}\right)^n u & s < t \\ \frac{ki\pi}{2} J_\nu'(kt) H_\nu^{(1)}(ks) - \frac{1}{2t} \left(\frac{t}{s}\right)^n u & s > t \end{cases}$$

est continue d'après le lemme 3.3.4.

Il reste à vérifier ce qu'il se passe près de zéro. Les fonctions de Bessel sont développables en série entière autour de zéro, et :

$$J_\nu(ks) = \left(\frac{ks}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{ks}{2}\right)^n \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{ks}{2}\right)^\nu,$$

et comme $\nu \notin \mathbb{Z}$ et $\nu > 0$,

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(kt) &= \left(1 + \frac{i}{\tan(\pi\nu)}\right) \left(\frac{kt}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{kt}{2}\right)^n \\ &\quad - \frac{i}{\sin(\pi\nu)} \left(\frac{2}{kt}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)} \left(\frac{kt}{2}\right)^n \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left(\frac{2}{kt}\right)^\nu = -\Gamma(\nu) \frac{i}{\pi} \left(\frac{2}{kt}\right)^\nu, \end{aligned}$$

grâce aux propriétés de la fonction Γ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{i\pi}{2} J_\nu(ks) H_\nu^{(1)}(kt) \underset{s, t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\nu} \left(\frac{s}{t}\right)^\nu$$

□

La partie singulière est exactement égale à l'admittance du cône infini d'angle extérieur θ_0 pour le problème de Laplace (cf section 2.5). D'où :

$$Y^+ u_0 = Y_{Laplacien}^+ u_0 + \frac{1}{st} \frac{\pi}{\theta_0^2} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^+ \\ u_0^- \end{pmatrix},$$

où les restes $R_1 u_0$ et $R_2 u_0$ sont de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$ pour tout $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, et $\langle R_1 u_0, \Psi \rangle$ et $\langle R_2 u_0, \Psi \rangle$ sont des séries convergentes pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$.

3.4 Construction de la GCSIE prenant en compte la présence de pointes

Avant toute chose, commençons par étudier l'opérateur simple couche sur la demi-droite \mathbb{R}^+ . En effet, nous avons vu avec le problème de Laplace que cet opérateur était

fondamental à étudier pour montrer le caractère bien posé de la GCSIE : de même qu'il nous a été nécessaire de connaître le symbole principal des opérateurs en jeu pour étudier la GCSIE sur un ouvert lisse (cf 3.2.5 et [31]), nous avons besoin des symboles conormaux de ces opérateurs près de la pointe.

3.4.1 Préliminaires : étude de la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par la fonction de Bessel.

Soit l'opérateur :

$$Au(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} u(t) H_0^{(1)}(k|t-s|) dt, \quad s > 0.$$

On voit que $A = r^+ op(a) e^+ = op_\psi(a)$ est la restriction à \mathbb{R}_+ de la convolution par la fonction de Bessel. Il nous faut tout d'abord connaître le symbole classique de l'opérateur pseudo-différentielle $op(a)$.

Il s'agit en fait d'un potentiel de Poisson (trace d'un opérateur pseudo-différentiel), son symbole classique est donc connu [31] :

$$a(\xi) = \frac{-1}{2|\xi|} - \frac{k^2}{4|\xi|^3} \bmod S^{-5}.$$

La section 1.5 nous permet de calculer les premiers termes du développement de Mellin de l'opérateur A :

$$A = s (op_M^\gamma h_1 + s^2 op_M^\gamma h_3) + F + G,$$

où γ sera à choisir correctement (tel que $\gamma > \frac{-1}{2}$ et $\gamma \neq \frac{1}{2} \bmod(\mathbb{Z})$), l'opérateur F est plat à l'ordre 3 et G est un opérateur de Green,

$$h_1(z) = \frac{1}{2(z-1)\tan(\pi z)}, \quad h_2(z) = \frac{k^2}{4(z-1)(z-2)(z-3)\tan(\pi z)}.$$

Nous allons maintenant construire la GCSIE sur l'ouvert à pointe défini précédemment $\Gamma = \omega\Gamma_1 + (1-\omega)\Gamma_2$, où Γ_1 est un cône infini, et Γ_2 un ouvert de classe C^∞ . Nous noterons S la pointe de cette surface, et $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ l'angle extérieur.

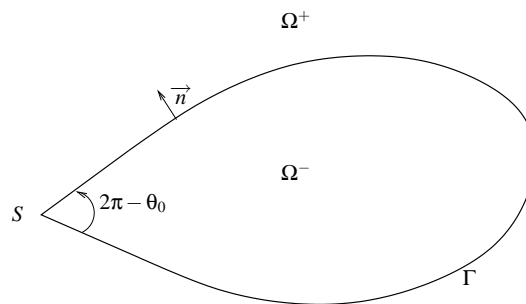


FIG. 3.3 – La frontière Γ .

Notons $\tilde{\omega}$ une fonction à support compact dans \mathbb{R}^2 telle que $\tilde{\omega} = 1$ sur Γ . Par abus de langage, nous désignerons par $\tilde{\omega}$ la fonction $\tilde{\omega}$ restreinte à Γ_1 .

3.4.2 Présentation de la nouvelle GCSIE

De même que pour construire la GCSIE sur un ouvert lisse [5], découpons la surface Γ en sous-surfaces $\{\mathcal{U}_n\}_{n \leq 0 \leq N}$, associées à une partition quadratique $\{\chi_n\}_{n \leq 0 \leq N}$:

$$\sum_{n=0}^N \chi_n^2 = 1, \quad \text{et} \quad \text{Supp} \chi_n \subset \mathcal{U}_n.$$

Comme pour le problème de Laplace, nous imposons une condition supplémentaire :

$$\forall n \neq 0, S_0 \notin \mathcal{U}_n, \quad \text{et} \quad \text{Supp} \chi_0 \subset \text{Supp} \omega.$$

On pose

$$\tilde{Y}^+ u = \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - 2 \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n,$$

et

$$(\text{GCSIE}) : \quad S \tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2} Id.$$

3.4.3 Existence et unicité d'une solution

Le théorème 3.2.9 nous assure que

$$-2S \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n - D(1 - \chi_0^2) + \frac{1}{2} Id(1 - \chi_0^2) = (1 - \chi_0^2) Id + K,$$

où K est compact dans $H^{1/2}(\Gamma_2)$.

Concentrons nous donc sur l'opérateur

$$\tilde{\omega} \left(S \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - D \chi_0^2 + \frac{1}{2} Id \chi_0^2 \right),$$

sur $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$. Pour simplifier les notations, nous oublierons le $\tilde{\omega}$ par la suite, en sachant que les fonctions que nous manipulons sont à support dans $K_\omega = \text{Supp} \tilde{\omega}$. Par conséquent, nous nous autoriserons à parler directement d'injection compacte dans les espaces $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$. Ceci est a priori abusif car ce sont des espaces de Fréchet. Mais c'est justifié par le fait que les fonctions sont à support dans K_ω . Par conséquent il s'agira en fait toujours des espaces de Hilbert $\mathcal{K}_{K_\omega}^{s,\gamma}$.

Rappelons que par définition de $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$, nous notons

$$u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$$

un élément de $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$, avec $u^\pm \in \mathcal{K}^{1/2}(\mathbb{R}^+)$.

Nous allons commencer par étudier séparément les opérateurs mis en jeu.

L'opérateur admittance

L'opérateur $Y_{\theta_0}^+$ a été calculé dans la section 3.3 :

$$Y_{\theta_0}^+ = \begin{pmatrix} \text{op}_M \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} \\ \text{op}_M \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} \end{pmatrix} \frac{1}{t} + \frac{1}{s} R \frac{1}{t},$$

où $R = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$ est un opérateur à noyau r de classe $C^1([0, +\infty[^2]$ (les termes r_n de la série sont définis en (3.19) et (3.20)) :

$$r_n(s, t) = \frac{n^2 \pi^2}{\theta_0^2} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n \\ (-1)^n & 1 \end{pmatrix} 2(\tilde{K}_n(s, t) - l_n^{(0)}(s, t)),$$

où

$$2(\tilde{K}_n(s, t) - l_n^{(0)}(s, t)) = \begin{cases} i\pi J_{n\pi/\theta_0}(ks) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(kt) - \frac{\theta_0}{n\pi} \left(\frac{s}{t}\right)^{n\pi/\theta_0}, & s < t \\ i\pi J_{n\pi/\theta_0}(kt) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(ks) - \frac{\theta_0}{n\pi} \left(\frac{t}{s}\right)^{n\pi/\theta_0}, & s > t. \end{cases}$$

Comme l'objectif de ce travail est numérique, nous allons choisir comme approximation de l'admittance près du cône la série tronquée suivante : nous choisissons $N_T \geq 1$ le nombre de terme de la série tronquée, et

$$Y_{\theta_0}^+ = \begin{pmatrix} \text{op}_M \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} \\ \text{op}_M \frac{z-1}{\sin(\theta_0(z-1))} & \text{op}_M \frac{-(z-1)}{\tan(\theta_0(z-1))} \end{pmatrix} \frac{1}{t} + \frac{1}{s} R_{N_T} \frac{1}{t},$$

où $R_{N_T} = \sum_{n=1}^{N_T} r_n$.

Soit $u \in \mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1)$, alors $R_{N_T} \frac{1}{t} u \in C^1(\Gamma_1)$. En effet, si l'on écrit les termes r_n , en posant $\nu = \frac{n\pi}{\theta_0}$:

$$J_{\nu}(ks) = \left(\frac{ks}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu + j + 1)} \left(\frac{ks}{2}\right)^j,$$

et comme $\nu \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(kt) &= \left(1 + \frac{i}{\tan(\pi\nu)}\right) \left(\frac{kt}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu + j + 1)} \left(\frac{kt}{2}\right)^j \\ &\quad - \frac{i}{\sin(\pi\nu)} \left(\frac{2}{kt}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(-\nu + j + 1)} \left(\frac{kt}{2}\right)^j, \end{aligned}$$

on vérifie facilement que

$$|r_n(s, t)| \leq C(t^{\pi/\theta})$$

pour s dans tout compact de $[0, +\infty[$, donc comme $t \mapsto t^{\pi/\theta-1} \in L^2([0, 1])$, les résultats sur les intégrales à paramètre nous assurent que $R_{N_T} \frac{1}{t} u$ est de classe C^1 sur chaque côté du cône assimilé à \mathbb{R}^+ , et jusqu'à la pointe (c'est-à-dire que les fonctions associées sur \mathbb{R}^+ sont prolongeables autour de zéro de façon C^1). En se rappelant de la définition équivalente de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^+)$ donnée dans la remarque 1.2.5, on en conclut que pour tout entier $N_T \geq 1$:

$$\chi_0 \frac{1}{s} R_{N_T} \frac{1}{t} \chi_0 : L^2(\Gamma_1) = \mathcal{K}^0(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{1,-1}(\Gamma_1).$$

En effet, si $u \in C_0^1([0, +\infty[)$, alors $u, (-t\partial_t)u \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Enfin, concernant l'asymptotique près de zéro, on observe sur le noyau r que l'asymptotique de $\frac{1}{s} R \frac{1}{t}$ est en $O(s^{\pi/\theta_0-1})$, ce qui nous permet d'être plus précis quant à l'espace d'arrivée :

$$\chi_0 \frac{1}{s} R_{N_T} \frac{1}{t} \chi_0 : L^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{1,\pi/\theta_0-1}(\Gamma_1).$$

Cet ajustement est important car il nous permettra de montrer la compacité de l'opérateur $S \chi_0 \frac{1}{s} R \frac{1}{t} \chi_0$ dans $\mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1)$.

Remarque 3.4.1. La série R convergeant uniformément sur tout compact de $(\mathbb{R}^+)^2$, le noyau $\omega(s)R(s, t)\omega(t)$ vérifie les mêmes propriétés que $\omega(s)R_{N_T}(s, t)\omega(t)$, et donc :

$$\chi_0 \frac{1}{s} R \frac{1}{t} \chi_0 : L^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{1,\pi/\theta_0-1}(\Gamma_1).$$

L'opérateur simple couche

L'opérateur simple couche sur le cône infini Γ_1 s'écrit :

$$S \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(k|s-t|)u^+(t) + H_0^{(1)}(k|s-te^{i\theta_0}|)u^-(t)dt \\ \int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(k|se^{i\theta_0}-t|)u^+(t) + H_0^{(1)}(k|s-t|)u^-(t)dt \end{pmatrix}.$$

L'opérateur simple couche s'écrit donc comme une matrice d'opérateurs :

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & S_\theta \\ S_\theta & S_0 \end{pmatrix}.$$

Le terme sur la diagonale se traite facilement : il s'agit de la restriction d'un opérateur pseudo-différentiel à \mathbb{R}^+ . De plus, cet opérateur a déjà été étudié dans la section 3.4.1 :

$$S_0 = \text{sop}_M^\gamma \left(\frac{1}{2(z-1)\tan(\pi z)} \right) + F + G,$$

où γ vérifie $\gamma > \frac{-1}{2}$ et $\gamma \neq \frac{1}{2} \bmod(\mathbb{Z})$, l'opérateur F est plat à l'ordre 2 et G est un opérateur de Green. Remarquons que cela peut s'écrire :

$$S_0 = S_{lap} + F + \tilde{G}.$$

où S_{lap} est l'opérateur simple couche du problème de Laplace sur une demi-droite.

Dans l'étude de l'opérateur simple couche pour le problème de Laplace, section 2.7, nous avons pu calculer le développement de Mellin du terme extra-diagonal, puisque nous avons affaire à un opérateur de convolution multiplicatif. Ce n'est plus le cas pour le problème de Helmholtz. Cependant, nous pouvons utiliser la relation suivante :

$$\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(k|x|) = \frac{1}{2\pi} \log |x| + c_1 + r_S(x), \quad (3.21)$$

où $r_S \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ vérifie $r_S(x) = O(|x|^2 \log |x|)$ quand x tend vers zéro. Nous notons \widetilde{G}_1 l'opérateur

$$\widetilde{G}_1 u = c_1 \int_0^{+\infty} u(t) dt.$$

Il est clair que \widetilde{G}_1 est un opérateur de Green sur $\mathcal{K}^s(\Gamma_1)$.

La relation (3.21) semble nous indiquer que la partie principale du développement asymptotique de l'opérateur S_θ sera portée par le terme extra-diagonal du simple couche pour le problème de Laplace. Notons cet opérateur $S_{\theta,lap}$:

$$S_{\theta,lap} u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \log |se^{i\theta} - t| u(t) dt.$$

Enfin, notons R l'opérateur de noyau $\omega(s)r(|se^{i\theta} - t|)\omega(t)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$S_\theta = S_{\theta,lap} + \widetilde{G}_1 + R_S.$$

La fonction r_S est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$, et $(s, t) \rightarrow |se^{i\theta} - t|$ est de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Etant donné le comportement de r en zéro :

$$r_S(t) = O(t^2 \log |t|),$$

on conclue facilement que le noyau $\omega(s)r_S(|se^{i\theta} - t|)\omega(t)$ vérifie les hypothèses de la réciproque de la proposition 1.3.15, donc le symbole associé à cet opérateur est de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, S^{-\infty})$.

De plus, comme le noyau est de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ en la variable s (pour tout $t > 0$), par un développement de Taylor, on peut écrire :

$$\omega(s)r_S(|se^{i\theta} - t|)\omega(t) = r_0(t) + sr_1(s, t),$$

où r_0 et r_1 vérifient les mêmes hypothèses que r . On conclue ainsi que :

$$S_{\theta_0} = S_{\theta_0,lap} + F_{\theta_0} + G_{\theta_0}$$

où F_{θ_0} est un opérateur d'ordre $-\infty$ plat à l'ordre 1 et G_{θ_0} est un opérateur de Green (de noyau $c_1 + r_0(t)$).

On peut donc écrire l'opérateur simple couche :

$$S = S_{lap} + \widetilde{F}_1 + \widetilde{G}_1,$$

où S_{lap} est l'opérateur simple couche pour le problème de Laplace, \widetilde{F}_1 est un opérateur d'ordre -1 plat à l'ordre 1, et \widetilde{G}_1 est un opérateur de Green.

L'opérateur de Green \widetilde{G}_1 possède une asymptotique de Taylor. Or pour montrer l'unicité d'une solution il faudrait que l'on ait un raccordement meilleur qu'une constante (cf la preuve du théorème 2.7.7). Mais la décomposition (3.21) nous permet de savoir que le noyau de l'opérateur $F + G$ est en fait égal à $\omega(s)r(|s - t|)\omega(t)$. Ce noyau ne vérifie plus les hypothèses du théorème 1.3.15 (en effet, nous savons l'opérateur F être d'ordre -1 et non $-\infty$). En revanche, nous savons qu'il s'agit du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^+ , et qu'il peut donc être décomposé comme le noyau \widetilde{r}_1 d'un opérateur plat contenant l'ordre de l'opérateur, et le noyau \widetilde{r}_2 d'un opérateur d'ordre $-\infty$ contenant l'asymptotique :

$$\omega(s)r(|s - t|)\omega(t) = \widetilde{r}_1(s, t) + \widetilde{r}_2(s, t).$$

Nécessairement, $\widetilde{r}_1(0, t) = \widetilde{R}_1\delta_t(0) = 0$ car $\widetilde{R}_1\delta_t$ est plat en zéro. Donc $\widetilde{r}_2(0, t) = r(t)\omega(t) = r_0(t)$. Or le noyau \widetilde{r}_2 est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ en s pour tout $t > 0$, d'où par développement de Taylor :

$$\omega(s)r(|s - t|)\omega(t) = r_0(t) + sr_2(s, t) + \widetilde{r}_1(s, t).$$

Par conséquent,

$$\boxed{S = S_{lap} + F_1 + G_1,}$$

où S_{lap} est l'opérateur simple couche pour le problème de Laplace, F_1 est un opérateur d'ordre -1 plat à l'ordre 1, et G_1 est l'opérateur de Green :

$$G_1u(t) = \omega(s) \int_0^{+\infty} \omega(t)(c_1 + r_0(t))(u^+(t) + u^-(t))dt,$$

ce qui donne clairement la continuité :

$$G_1 : \mathcal{K}^s(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma). \quad (3.22)$$

D'autre part, on sait (cf [31]) que l'opérateur $S - S_{lap}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -2 (leur symbole principal se compensent). Donc l'opérateur F_1 est un opérateur d'ordre -2 plat à l'ordre 1.

L'opérateur double couche

Rappelons tout d'abord l'expression de l'opérateur double couche :

$$Du(x) = \frac{k}{4i} \int_{\Gamma} \frac{(x - y) \cdot n(y)}{|x - y|} H_0^{(1)'}(k|x - y|).$$

Sur le cône infini Γ_1 , l'opérateur double couche s'écrit donc :

$$D \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix} = \frac{k}{4i} \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} \frac{-s \sin \theta}{|s - te^{i\theta_0}|} H_0^{(1)'}(k|s - te^{i\theta_0}|) u^-(t) dt \\ \int_0^{+\infty} \frac{-s \sin \theta}{|s - te^{-i\theta_0}|} H_0^{(1)'}(k|s - te^{-i\theta_0}|) u^+(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_{\theta_0} \\ D_{\theta_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons refaire le même travail que pour l'opérateur simple couche, c'est à dire montrer que

$$D = D_{lap} + F_2 + G_2,$$

où D_{lap} est l'opérateur double couche pour le problème de Laplace, F_2 est un opérateur d'ordre $-\infty$ plat à l'ordre 1, et G_2 est un opérateur de Green. En effet, par dérivation de (3.21), on a :

$$\frac{k}{4i} \frac{x}{|x|} H_0^{(1)'}(k|x|) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} + r_D(x), \quad (3.23)$$

où $r_D \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ vérifie $r_D(x) = O(|x| \log |x|)$ quand x tend vers zéro, d'où :

$$\frac{k}{4i} \frac{-s \sin \theta}{|se^{i\theta} - t|} H_0^{(1)'}(k|se^{i\theta} - t|) = \frac{1}{2\pi} \frac{-s \sin \theta}{|se^{i\theta} - t|^2} + r_D(|se^{i\theta} - t|) \cdot \mathbf{n}(t), \quad (3.24)$$

où $\mathbf{n}(t)$ est la normale à Γ_1 en t .

Or la relation (3.21) est aussi vérifiée sur \mathbb{R}^+ , on peut donc la dériver sur \mathbb{R}^+ :

$$\frac{k}{4i} H_0^{(1)'}(ks) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s} + O(s \log(s)).$$

En appliquant ce résultat à (3.24) pour $s = |se^{i\theta} - t|$, on obtient près de zéro :

$$r_D(|se^{i\theta} - t|) \cdot \mathbf{n}(t) = s\tilde{r}(|se^{i\theta} - t|),$$

où $\tilde{r}(|se^{i\theta} - t|) = O(\log |se^{i\theta} - t|)$ et \tilde{r} est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Par conséquent, $(s, t) \rightarrow \omega(s)\tilde{r}(|se^{i\theta} - t|)\omega(t)$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.3.15. Donc finalement, par les mêmes arguments que pour l'opérateur simple couche,

$$\boxed{D = D_{lap} + F_2},$$

où D_{lap} est l'opérateur double couche pour le problème de Laplace et F_2 est un opérateur d'ordre $-\infty$ plat à l'ordre 1.

Conclusion

Pour résumer, rappelons l'écriture des trois opérateurs en jeu :

$$\begin{aligned} S &= S_{lap} + F_1 + G_1, \\ Y_{\theta_0, N} &= Y_{\theta_0, lap} + \widetilde{R}_N, \\ D &= D_{lap} + F_2, \end{aligned}$$

où F_1, F_2 sont des opérateurs respectivement d'ordre -2 et l'infini, plats à l'ordre 1, G_1 est un opérateur de Green vérifiant de plus

$$G_1 : \mathcal{K}^s(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

et \widetilde{R}_N vérifie la continuité :

$$\chi_0 \widetilde{R}_N \chi_0 : \mathcal{K}^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{1, \pi/\theta_0 - 1}(\Gamma_1).$$

Finalement, en rassemblant tout cela,

$$S\chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - D\chi_0^2 + \frac{1}{2} Id \chi_0^2 \quad (3.25)$$

$$= S_{lap} \chi_0 Y_{\theta_0, lap} \chi_0 - D_{lap} \chi_0^2 + \frac{1}{2} Id \chi_0^2 \quad (3.26)$$

$$+ (S_{lap} + F_1 + G_1) \widetilde{R}_M + (F_1 + G_1) \chi_0 (Y_{\theta_0, lap} + \widetilde{R}_M) \chi_0 - F_2. \quad (3.27)$$

Notons A l'opérateur (3.26). Cet opérateur est exactement l'opérateur sous-jacent à la GCSIE du problème de Laplace. D'après la section 2.7 du chapitre 2, nous savons donc que

$$A = \chi_0^2 Id + K$$

où K est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$ pour tout réel s , et pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

L'opérateur F_2 est un opérateur d'ordre infini plat à l'ordre 1, donc :

$$F_2 : \mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{\infty,\varepsilon+1}(\Gamma_1)$$

est un opérateur compact dans $\mathcal{K}^{s,\varepsilon}(\Gamma_1)$.

D'autre part,

$$(S_{lap} + F_1 + G_1)\widetilde{R}_N : L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1) \xrightarrow{L^2} (\Gamma_1) \xrightarrow{\widetilde{R}_N} \mathcal{K}^{1,\pi/\theta_0-1}(\Gamma_1) \xrightarrow{S} \mathcal{K}^{2,\pi/\theta_0}(\Gamma_1) \xrightarrow{\text{compact}} L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1),$$

car $\varepsilon < \frac{1}{2}$, donc $\frac{\pi}{\theta} > \varepsilon$.

De même que pour le problème de Laplace, le terme $(F_1 + G_1)\chi_0(Y_{\theta_0,lap} + \widetilde{R}_M)\chi_0$ est plus délicat à traiter, le produit ne pouvant a priori pas être effectué (à cause de leur continuités semble-t-il incompatibles). Nous allons utiliser le théorème de représentation pour traiter ce terme :

$$\begin{aligned} Id &= SY^+ - D + \frac{1}{2}Id \\ &= (S_{lap} + F_1 + G_1)(Y_{lap} + R) - (D_{lap} + F_2) + \frac{1}{2}Id \\ &= Id + (F_1 + G_1)(Y_{lap} + R) + S_{lap}R - F_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (F_1 + G_1)(Y_{lap} + R_{N_T}) &= F_2 - S_{lap}R + (F_1 + G_1)(R_{N_T} - R) \\ &: L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{2,\pi/\theta_0}(\Gamma_1) + \mathcal{D}_T(\Gamma_1) \xrightarrow{\text{compact}} L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1) \end{aligned}$$

Enfin,

$$(F_1 + G_1)(1 - \chi_0)(Y_{lap} + R_{N_T}) : L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}_0^{-1}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{K}^{1,1}(\Gamma_1) + \mathcal{D}_T(\Gamma_1) \xrightarrow{\text{compact}} L^{2,\varepsilon}(\Gamma_1).$$

Théorème d'existence et d'unicité

Commençons par montrer l'unicité d'une solution de la nouvelle GCSIE dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

Proposition 3.4.2. *Avec les mêmes notations que précédemment, l'opérateur*

$$S\widetilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id$$

est injectif dans $H^{1/2}(\Gamma) \subset \mathcal{K}^{1/2}(\Gamma)$.

Démonstration. Soit $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u \neq 0$. Alors

Lemme 3.4.3. *Pour tout $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ non nul, alors $\mathbf{Im} \langle \tilde{Y}^+ u, \bar{u} \rangle > 0$.*

Démonstration. Pour tout $u \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$\langle \tilde{Y}^+ u, \bar{u} \rangle = \langle Y_{\theta_0}^+ \chi_0 u, \overline{\chi_0 u} \rangle - 2 \sum_{n=1}^N \langle N \chi_n u, \overline{\chi_n u} \rangle.$$

Notons $u_n = \chi_n u$ pour tout $1 \leq n \leq N$, et d'après la relation (3.7) sur les sauts des traces du double couche :

$$\langle N \chi_n u, \overline{\chi_n u} \rangle = \langle \gamma_1^\pm \mathcal{D}u_n, \overline{\gamma_0^- \mathcal{D}u_n - \gamma_0^+ \mathcal{D}u_n} \rangle = \langle \gamma_1^- \mathcal{D}u_n, \overline{\gamma_0^- \mathcal{D}u_n} \rangle - \langle \gamma_1^+ \mathcal{D}u_n, \overline{\gamma_0^+ \mathcal{D}u_n} \rangle,$$

donc d'après la proposition 3.1.10,

$$-2\mathbf{Im} \langle N \chi_n u, \overline{\chi_n u} \rangle = 2\mathbf{Im} \langle \gamma_1^+ \mathcal{D}u_n, \overline{\gamma_0^+ \mathcal{D}u_n} \rangle \geq 0.$$

Supposons que $\mathbf{Im} \langle N \chi_n u, \overline{\chi_n u} \rangle = 0$, alors $\gamma_0^+ \mathcal{D}u_n = 0$ donc $\mathcal{D}u_n = 0$ dans Ω^+ . Or u_n est à support dans \mathcal{U}_n , donc $\mathcal{D}u_n$ est analytique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_n$. Comme \mathcal{U}_n est une surface ouverte, par le théorème des zéros isolés, $\mathcal{D}u_n = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_n$, c'est-à-dire entre autre dans Ω^- . Par conséquent, $\gamma_0^- \mathcal{D}u_n = 0$, d'où $u_n = 0$. Comme u est non nul, il existe au moins un n tel que $u_n \neq 0$, donc

$$-2 \sum_{n=1}^N \langle N \chi_n u, \overline{\chi_n u} \rangle > 0.$$

Il reste à montrer que $\mathbf{Im} \langle Y_{\theta_0}^+ \chi_0 u, \overline{\chi_0 u} \rangle \geq 0$. Soit $(s, t) \mapsto r(s, t)$ un noyau réel et symétrique. Alors l'opérateur R de noyau r vérifie :

$$\mathbf{Im} \langle Ru, \bar{u} \rangle = 0.$$

En effet, il est facile de vérifier que :

$$\overline{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} r(s, t) u(t) \overline{u(s)} ds dt} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} r(s, t) u(t) \overline{u(s)} ds dt.$$

Or le noyau de $Y_{\theta_0, lap}^+$ étant symétrique et réel, comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{Im}(\tilde{K}_n(s, t) - l_n^{(0)}(s, t)) &= \frac{\pi}{2} \mathbf{Re}(J_{n\pi/\theta_0}(ks) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(kt) 1_{s < t} + J_{n\pi/\theta_0}(kt) H_{n\pi/\theta_0}^{(1)}(ks) 1_{s > t}) \\ &= \frac{\pi}{2} J_{n\pi/\theta_0}(ks) J_{n\pi/\theta_0}(kt), \end{aligned}$$

on en conclut que :

$$\begin{aligned} \mathbf{Im} \langle Y_{\theta_0}^+ \chi_0 u, \overline{\chi_0 u} \rangle &= \frac{\pi^3}{2\theta^2} \sum_{n=1}^M \left[\left| \int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) u^+(s) ds \right|^2 + \left| \int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) u^-(s) ds \right|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\mathbf{Re} \left(\int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) u^+(s) ds \int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) \overline{u^-(s)} ds \right) \right] \\ &= \left| \int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) u^+(s) ds - \int_0^{+\infty} J_{n\pi/\theta_0}(ks) u^-(s) ds \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

D'après le lemme précédent,

$$\mathbf{Im} \langle \tilde{Y}^+ u, \bar{u} \rangle > 0.$$

$$\mathbf{Im} \langle \tilde{Y}^+ u, u \rangle = \langle \tilde{Y}_{\theta_0}^+ \chi_0 u, \chi_0 u \rangle + \sum_{i=1}^N \langle Y_i \chi_i p, \chi_i p \rangle.$$

Donc d'après la proposition 3.1.10, $(u, \tilde{Y}^+ u) \notin X^-$, ce qui implique que $\gamma_0^+ \mathcal{C}^+(u, \tilde{Y}^+ u) \neq 0$, pour tout $u \neq 0$. \square

Théorème 3.4.4. *L'équation GCSIE, d'opérateur sous-jacent*

$$S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id,$$

avec

$$\tilde{Y}^+ u = \chi_0 Y_{\theta_0}^+ \chi_0 - 2 \sum_{n=1}^N \chi_n N \chi_n,$$

est bien posée dans $L^{2,\varepsilon}(\Gamma)$, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Nous avons démontré précédemment que

$$S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id = Id + K,$$

où K est un opérateur compact de $L^{2,\varepsilon}(\Gamma)$. L'opérateur sous-jacent à la GCSIE est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0. Il nous reste à montrer qu'il est injectif dans $L^{2,\varepsilon}(\Gamma)$.

Soit $u \in L^{2,\varepsilon}(\Gamma)$ tel que

$$\left(S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id \right) u = 0,$$

nous allons montrer que nécessairement $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, la proposition 3.4.2 nous permettant alors de conclure.

Pour cela, nous voulons connaître le comportement de u près de la pointe, afin de pouvoir utiliser le théorème 2.7.6. Cela revient donc à connaître le comportement asymptotique de Ku près de la pointe. En effet, si u est dans le noyau de la GCSIE, alors

$$0 = u + Ku \Rightarrow u = -Ku.$$

Rappelons-nous la construction de l'opérateur compact K :

$$K = K_1 + K_2 + K_3,$$

où

- l'opérateur K_1 est compact dans $H^s(\Gamma)$ pour tout réel s ;
- l'opérateur K_2 est issu de la partie "Laplace" de la décomposition de la GCSIE, il a donc déjà été montré que pour tout $u \in \mathcal{K}^{\infty,\varepsilon}(\Gamma)$, $K_2 u \in H^{1/2}(\Gamma)$ (cf théorème 2.7.7) ;

- l'opérateur K_3 est constitué d'opérateur plat et de l'opérateur de Green G_1 qui est à valeur constante sur tout Γ .

Enfin d'un point de vue de la régularité en dehors de la pointe :

$$K : L^{2,\epsilon}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}^{1,1+\epsilon}(\Gamma)$$

pour tout réel s , d'après tout ce qui précède. Or si $u = -Ku$, donc $u \in \mathcal{K}^{1,1+\epsilon}(\Gamma)$. Rappelons que d'après la proposition 1.2.18,

$$\mathcal{K}^{1,1}(\mathbb{R}^+) \subset H^1(\mathbb{R}^+) \subset H^{1/2}(\mathbb{R}^+).$$

Les comportements asymptotiques près de la pointe nous assure que le raccordement de la fonction u en la pointe vérifie la condition d'intégrabilité du théorème 2.7.6, ce qui nous permet donc de conclure que $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, et d'après la proposition 2.7.4, $u = 0$. \square

Chapitre 4

Résultats numériques

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.1 | Etude de la précision de la nouvelle GCSIE | 140 |
| 4.1.1 | Approximation de l'admittance | 140 |
| 4.1.2 | Précision de la solution | 141 |
| 4.2 | Etude de la vitesse de convergence | 145 |
| 4.2.1 | Influence de la fréquence | 146 |
| 4.2.2 | Influence de l'angle de la pointe | 147 |
| 4.2.3 | Influence de l'angle de l'onde incidente | 148 |
| 4.3 | Un autre choix d'approximation de l'admittance | 149 |
| 4.3.1 | Etude de la précision | 149 |
| 4.3.2 | Etude de la vitesse de convergence | 151 |

4.1 Etude de la précision de la nouvelle GCSIE

4.1.1 Approximation de l'admittance

La GCSIE a été construite en remarquant que si Y^+ est l'opérateur admittance (ou Dirichlet-to-Neumann) de l'objet diffractant pour le problème de Helmholtz, alors :

$$SY^+ - D + \frac{1}{2}Id = Id.$$

Nous avons alors construit un opérateur \tilde{Y}^+ approchant l'admittance exacte Y^+ , et nous avons montré qu'ainsi, $S\tilde{Y}^+ - D + \frac{1}{2}Id$ est une perturbation compacte de l'identité. Nous allons vérifier que nous avons effectivement approché l'opérateur Y^+ de sorte que l'opérateur sous-jacent à la GCSIE soit presque l'identité. Pour cela, nous faisons le test suivant.

Sur le disque-pointe de la figure 4.1, nous envoyons une onde incidente u_0 avec un angle d'incidence nul (donc face à la pointe). Cette surface possède 750 degrés de liberté. La longueur d'onde λ de l'onde incidente vérifie $h = \frac{\lambda}{25}$, où h est la longueur des segments de la surface 4.1 (moyenne fréquence). Pour ce cas, la fréquence n'est pas choisie plus haute, afin d'avoir des graphiques plus lisibles.

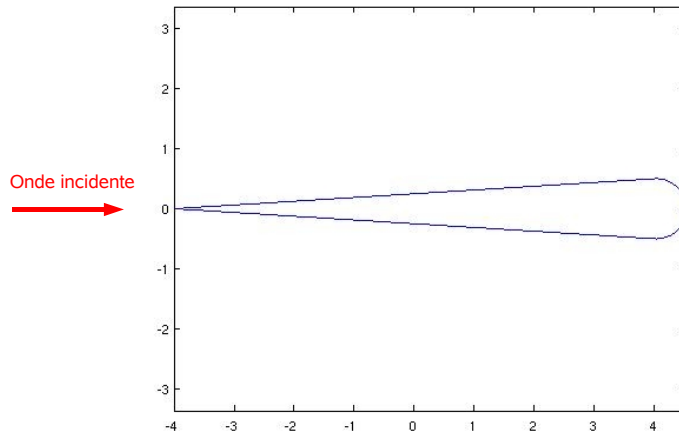


FIG. 4.1 – *Disque-pointe, 750 inconnues.*

Sur cette surface, nous calculons la solution de la GCSIE classique que nous noterons (*GCSIEcl*) par la suite, et celle de la GCSIE prenant en compte la pointe (que nous noterons (*GCSIEpte*)). Nous calculons :

$$(GCSIEcl)u_1 = -\gamma_0^+ u_0, \quad (GCSIEpte)u_2 = -\gamma_0^+ u_0,$$

et nous représentons sur les graphiques suivants 4.2 et 4.3 les valeurs de u_1 et u_2 aux degrés de libertés sur la surface 4.1 (graphiques de droite), que nous comparons à ceux de $-\gamma_0^+ u_0$ (graphiques de gauche). Le degré de liberté correspondant à la pointe est le premier : les éléments proche de la pointe sont donc aux bords des graphiques qui suivent.

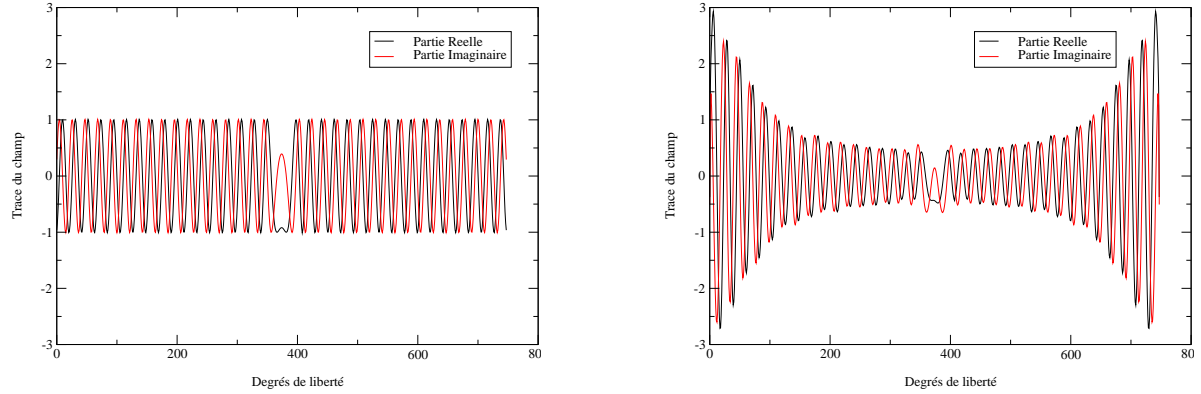


FIG. 4.2 – Vérification de la précision de l'approximation de l'admittance, ($GCSIE_{cl}$) : sans traitement près de la pointe.

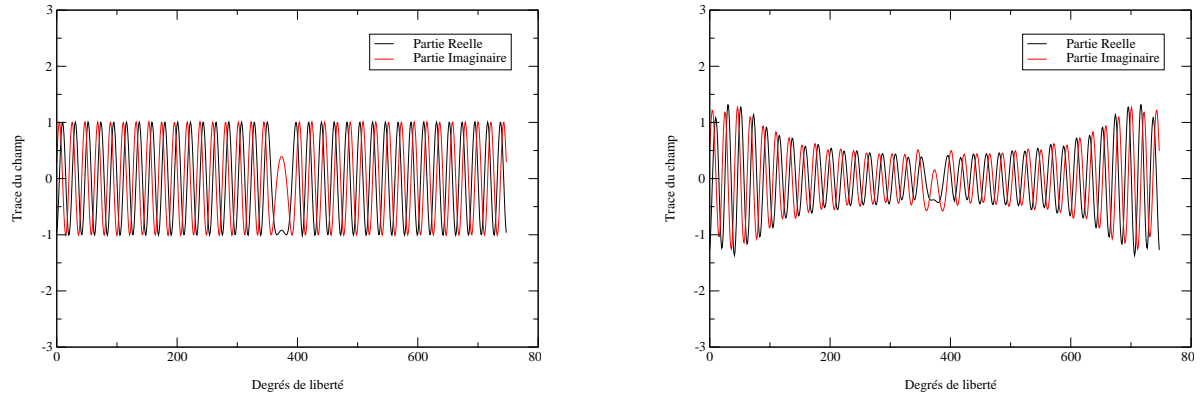


FIG. 4.3 – Vérification de la précision de l'approximation de l'admittance, ($GCSIE_{pte}$) : traitement près de la pointe.

Sans traitement particulier (figure 4.2), nous pouvons voir que la pointe détériore nettement la précision de l'approximation.

Après traitement (figure 4.3), nous observons une très forte amélioration au voisinage de la pointe : l'opérateur sous-jacent à la $GCSIE_{pte}$ est très proche de l'identité à cet endroit. Le milieu du graphique correspond au côté opposé à la pointe : si la surface est lisse, elle possède néanmoins un très petit rayon de courbure, ce qui rend l'approximation moins bonne. La solution est en effet plus éloigné du second membre à cet endroit.

4.1.2 Précision de la solution

Surface Equivalente Radar

Les équations ne peuvent pas toutes être directement comparées, dans le sens où le résultat des systèmes linéaires ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple, avec la formulation du simple couche (SLSIE), nous approchons la donnée de Cauchy $\gamma_1^+ u$, tandis que la trace calculée par la GCSIE n'est pas de nature physique. Il serait trop coûteux de calculer le champ sur une grille de l'espace. La grandeur qui sert de critère de comparaison est alors la *Surface Equivalente Radar*, c'est-à-dire la valeur du

champ extérieur sur un cercle de rayon infini. . Ce champ est appelé *champ lointain*. Si l'on note u le champ reconstitué dans l'espace après résolution par équation intégrale, calculer le champ lointain u^∞ revient à calculer :

$$u^\infty(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} u(rx), \text{ où } |x| = 1.$$

Une fois ce champ calculé, les diagrammes de SER représentent par convention :

$$x \mapsto 10 \log_{10} |u^\infty(x)|^2,$$

le complexe x de module 1 étant assimilé à son argument (en degré sur les diagrammes). Il correspond en fait à l'angle de réception : on observe la valeur à l'infini du champ dans la direction d'angle x .

D'un point de vue physique, la SER représente le rapport entre l'onde réfléchiée par l'objet détecté, et l'onde incidente (de module constant lorsqu'il s'agit d'une onde plane). Plus la SER est faible, plus l'objet est furtif.

A titre d'exemples, observons la SER de l'objet suivant (fig. 4.4).

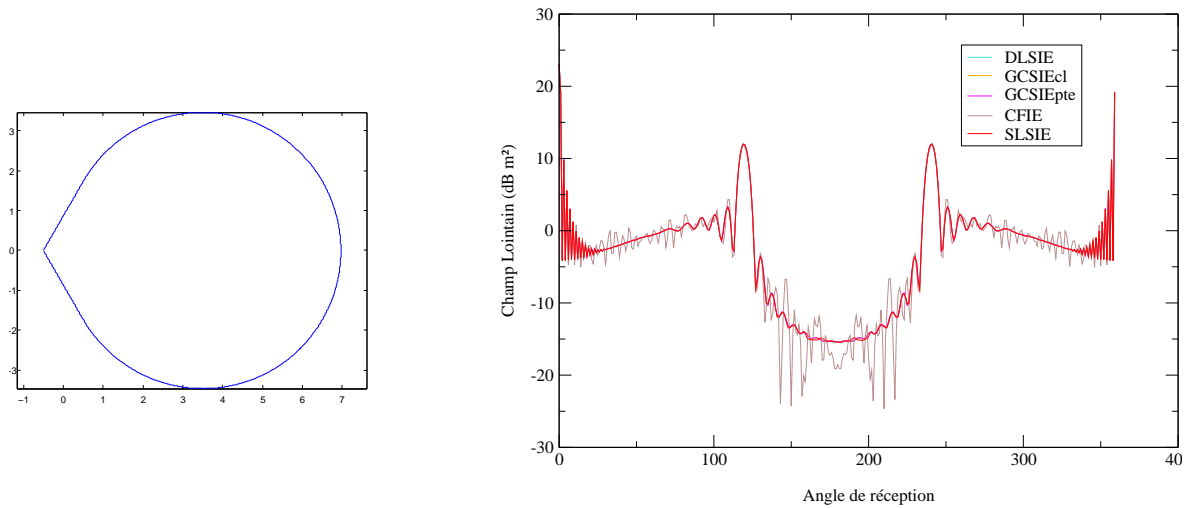


FIG. 4.4 – *Surface Equivalente Radar*, $f = 4$

Cet exemple est intéressant car il nous permet de repérer les phénomènes physiques. L'angle intérieur de l'objet mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad, ce qui permet d'observer trois pics de SER : deux pour la réflexion (à environ 120° et 240°), et un pour la zone d'ombre (0°). Les angles de réception sont repérés par rapport au zéro habituel du cercle trigonométrique, c'est-à-dire à l'opposé de la pointe. Rappelons que le champ lointain correspond au champ diffracté, et non au champ total. C'est ce qui explique la présence du pic au niveau de la zone d'ombre : le champ diffracté doit annuler le champ incident dans cette zone. Enfin, on remarque un résultat connu, à savoir que la formulation CFIE est moins précise que les autres formulations. De plus, les formulations DLE et CFIE voient leur précision se dégrader nettement en présence de pointes, surtout à haute fréquence. On parlera de haute fréquence à partir de $f = 5$, c'est-à-dire $\lambda = 10h$, h étant la taille des segments du maillage. Dans ce premier exemple, la fréquence est $f = 4$.

Pour pouvoir monter en fréquence, avec des pointes aiguës, nous ne représentons que la SER des équations SLE, GCSIEcl et GCSIEpte. Avec l'objet utilisé précédemment

(figure 4.1), nous n'observons plus que la zone d'ombre (figure 4.5). En effet, l'onde incidente est rasante sur la surface de l'objet, et a donc une réflexion très petite.

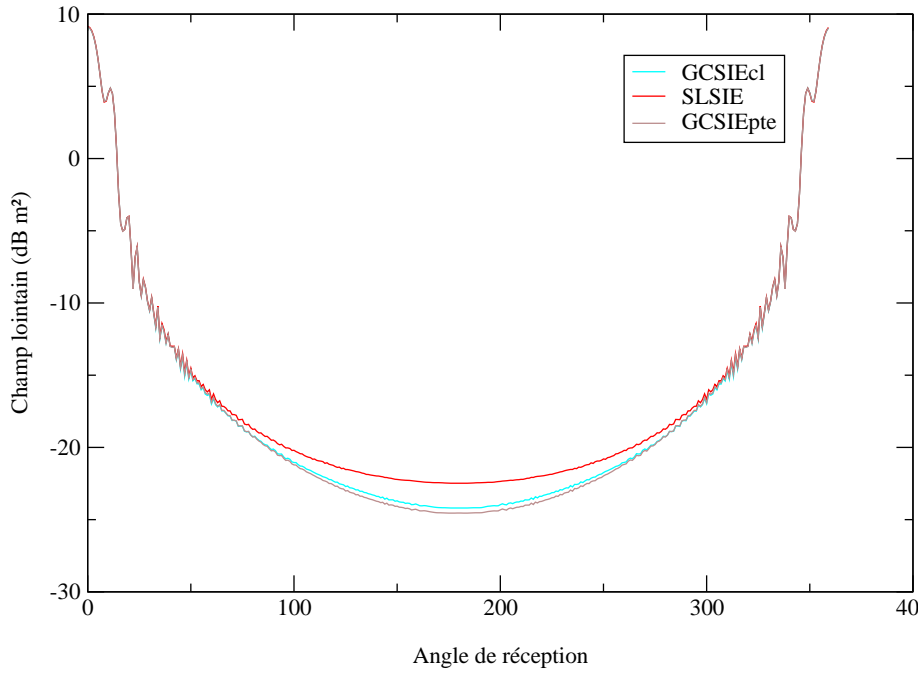


FIG. 4.5 – *Surface Equivalente Radar*, $f = 5$

Ce diagramme de SER ne nous permet pas d'évaluer la précision des formulations, car en présence de pointes, nous ne savons pas qui, de la SLE, GCSIEcl ou GCSIEpte est la plus précise. Nous remarquons seulement qu'il y a un écart de quelques dB au niveau de la pointe de l'objet (mais dans une zone de plus très furtive).

Résultats pour un point source situé à l'intérieur de l'objet diffractant

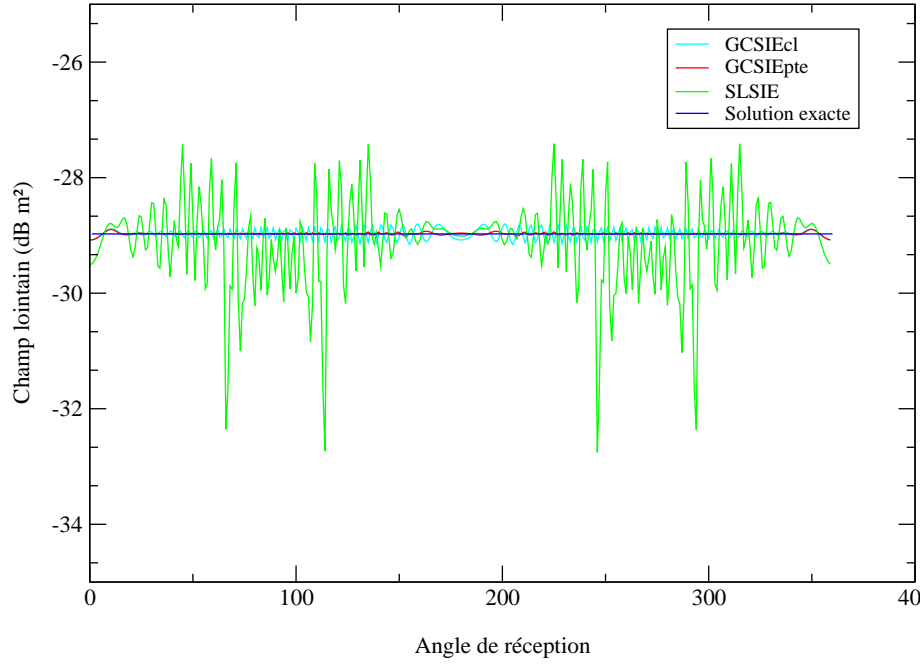
Nous envisageons donc une nouvelle expérience, pour évaluer la précision du calcul. Pour tout x_0 (point source) placé à l'intérieur de l'objet diffractant,

$$u(x) = H_0^{(1)}(k|x - x_0|)$$

est solution du problème de Helmholtz extérieur avec condition de rayonnement à l'infini. Donc en résolvant le problème de Helmholtz extérieur avec donnée de Dirichlet égale à la trace de u sur l'objet diffractant, nous savons devoir trouver exactement u comme solution. Ce sera donc notre référence (la solution exacte). Le module du champ lointain u_{ref}^∞ correspondant au champ u est constant dans toutes les directions :

$$\sqrt{r}u(rx) = \frac{1+i}{\sqrt{k\pi}}e^{-ikr}e^{ikx \cdot x_0} \Rightarrow |u_{\text{ref}}^\infty(x)| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{k\pi}}.$$

Nous représentons sur la figure 4.6 la SER calculée par les formulations SLSIE, GCSIEcl et GCSIEpte.

FIG. 4.6 – *Surface Equivalente Radar, $f = 5$*

Nous remarquons que la formulation simple couche (SLSIE) est peu précise. Le tableau 4.1 représente l'erreur en norme L^2 :

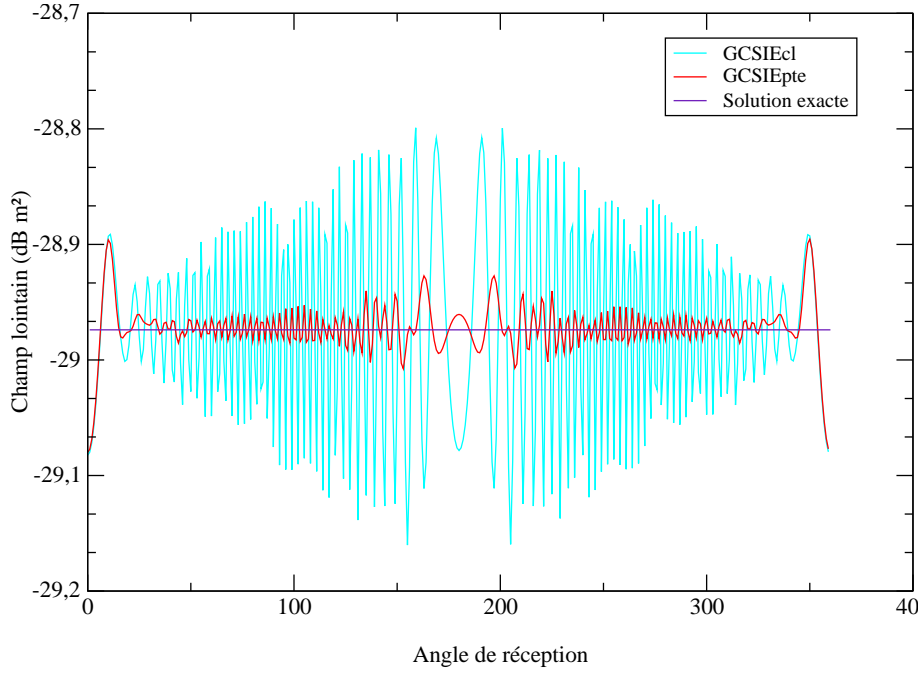
$$E = \frac{\|u^\infty - u_{\text{ref}}^\infty\|}{\|u_{\text{ref}}^\infty\|}.$$

| Formulation | Erreur en norme L^2 |
|-------------|-----------------------|
| SLSIE | 8,24% |
| GCSIEcl | 0,96% |
| GCSIEpte | 0,25% |

TAB. 4.1 – *Erreur dans le calcul de la SER*

En terme de précision, nous obtenons donc un gain de facteur 4 avec la nouvelle formulation GCSIEpte, par rapport à la formulation classique GCSIEcl. Afin de mieux voir la différence de précision, nous représentons sur la figure 4.7 le même diagramme que sur la figure 4.6, mais zoomé autour des SER des deux formulations GCSIE.

Nous remarquons que le gain en précision est très fort partout, sauf au bord. Cela correspond à un angle de réception nul, c'est-à-dire que le récepteur est dirigé vers le disque du maillage 4.1. De même que dans la section précédente, nous soupçonnons le faible rayon de convergence de la frontière à cet endroit, d'être responsable de cette perte de précision. En effet, à cet endroit, l'approximation de l'admittance est la même que celle de la GCSIE classique, c'est-à-dire que localement, la surface est approchée par son plan tangent. Cela explique que l'approximation soit moins bonne pour un petit rayon de courbure.

FIG. 4.7 – *Surface Equivalente Radar*, $f = 5$

4.2 Etude de la vitesse de convergence

Après avoir observé un gain de facteur 4 en terme de précision, nous souhaitons vérifier que la régularisation fonctionnelle nous donne également un gain en terme de nombre d'itération. Notre objectif étant d'améliorer la vitesse de convergence sur des surfaces à singularités géométriques, et à haute fréquence, commençons par une première expérience. Sur la surface représentée figure 4.1, nous envoyons une onde plane d'angle d'incidence nulle (dirigée vers la pointe de l'objet), à la fréquence $f = 5$ (donc la longueur des segments du maillage vérifie $h = \frac{\lambda}{10}$, et l'objet mesure 40λ , où λ est la longueur d'onde de l'onde incidente). Sur la figure 4.8, nous comparons les nombres d'itérations des formulations intégrales classiques, en fonction du résidu du système linéaire : si le système linéaire est $Ax = B$, le résidu à chaque itération correspond donc à

$$r_n = \frac{\|Ax_n - B\|}{\|B\|}.$$

Nous obtenons donc un gain de facteur 2 en terme de convergence (nombre d'itérations).

Il serait maintenant intéressant d'étudier l'influence d'un certain nombre de paramètre sur la vitesse de convergence : l'angle de la pointe extérieur de l'objet diffractant, la fréquence et l'angle de l'onde incidente. Les formulations classiques SLSIE, DLSIE et CFIE convergent mal à haute fréquence sur un objet à pointe, comme nous allons le voir ci-dessous. Par conséquent, nous comparerons par la suite les deux formulations GCSIEcl et GCSIEpte.

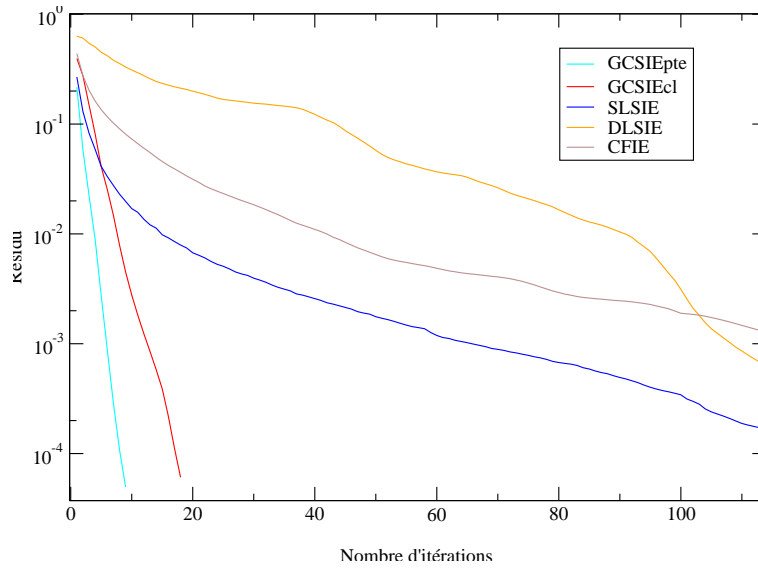


FIG. 4.8 – *Courbes de convergence pour le Disque Pointe à 750 inconnues, pour $f = 5$*

4.2.1 Influence de la fréquence

Nous effectuons la même expérience que ci-dessus (maillage de la figure 4.1, onde incidente plane d'angle nul), nous faisons simplement varier la fréquence entre 1 (basse fréquence) et 8 (haute fréquence).

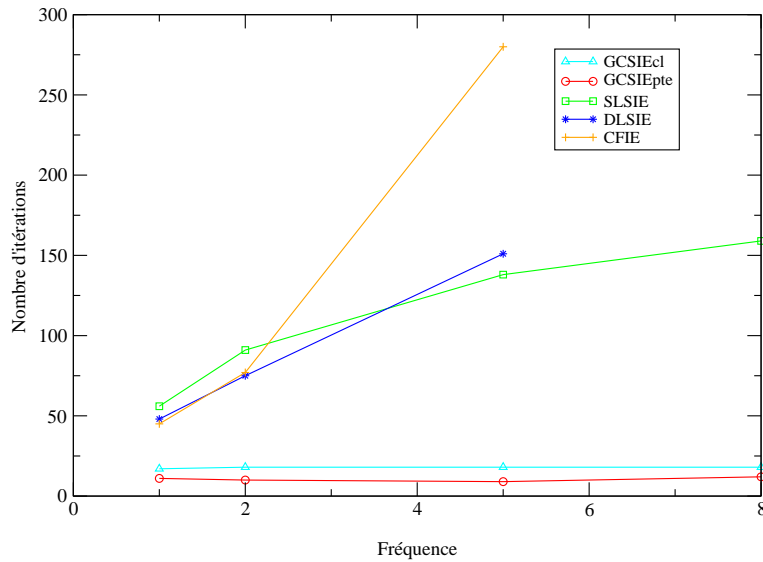


FIG. 4.9 – *Influence de la fréquence sur le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un résidu de 10^{-4} sur le Disque Pointe à 750 inconnues*

Nous remarquons que les formulations GCSIE restent stables avec la montée en fréquence. Ce résultat était connu pour la formulation classique GCSIEcl [5], et reste vrai suite à notre modification dans la GCSIEpte. Notamment, à toute fréquence, la prise en compte de la pointe dans la construction de la GCSIE améliore de façon notable la vitesse de convergence par rapport à la GCSIEcl.

4.2.2 Influence de l'angle de la pointe

Nous allons utiliser six maillages différents pour étudier l'influence de l'angle de la pointe. Ces maillages sont représentés figure 4.10. Les angles indiqués correspondent à l'angle extérieur. Les maillages font à peu près la même taille (même diamètre, même longueur de segments). Les angles sont tous aigus : d'un point de vue fonctionnel, nous savons [25] qu'un angle obtus ne pose pas de problème. Par contre, d'un point de vue numérique, cela rajoute le problème des cavités, qui n'est pas traité dans notre travail, et est indépendant de la présence de singularités géométriques. C'est pourquoi nous n'utiliserons pas ici de tels maillages.

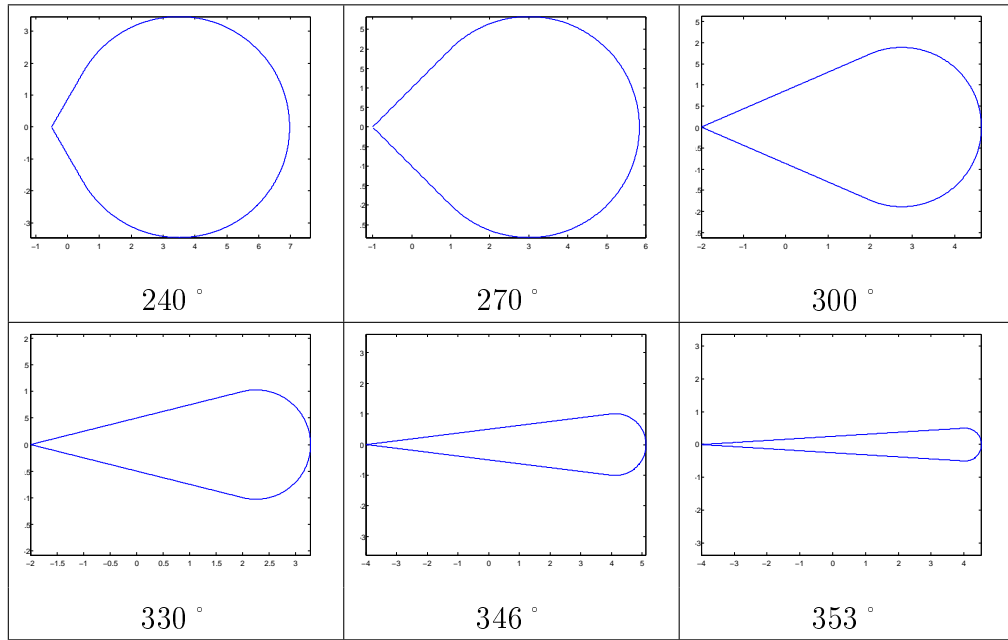


FIG. 4.10 – Maillages avec différents angles

Le tableau 4.2 donne le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un résidu de 10^{-4} . Nous remarquons que celui-ci est stable pour la GCSIEpte, et croissante pour la GCSIEcl.

| Formulation | 240 ° | 270 ° | 300 ° | 330 ° | 346 ° | 353 ° |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| GCSIEcl | 7 | 7 | 8 | 10 | 15 | 18 |
| GCSIEpte | 9 | 10 | 9 | 8 | 11 | 9 |

TAB. 4.2 – Nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résidu de 10^{-4} , à $f = 5$

Afin de mieux se rendre compte de l'influence de l'angle de l'objet diffractant, traçons le graphique correspondant au tableau 4.2 (figure 4.11). Lorsque l'angle n'est pas trop pointu, les deux formulations sont à peu près équivalentes. En revanche, lorsque la pointe intérieure devient vraiment petite, la formulation classique converge de moins en moins vite, alors que la nouvelle formulation reste stable. Ceci s'explique assez simplement. En effet, la nouvelle formulation prend en compte exactement l'angle de la pointe, par conséquent il est normal de ne pas détériorer la convergence par une diminution de l'angle. A l'inverse, la formulation classique approche l'admittance comme si la surface

était proche d'une droite tangente, ce qui est une approximation de plus en plus mauvaise avec la diminution de l'angle intérieur.

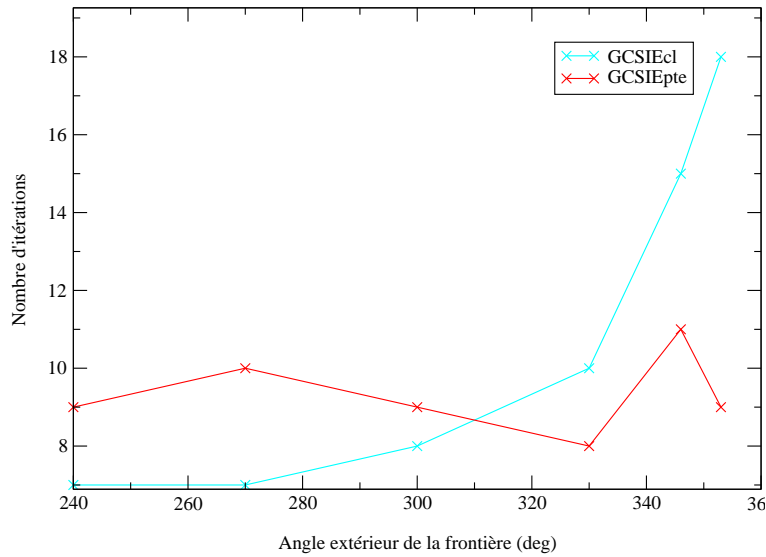


FIG. 4.11 – Influence de l'angle de l'objet sur le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résidu de 10^{-4} , pour le Disque Pointe à 750 inconnues, pour $f = 5$.

4.2.3 Influence de l'angle de l'onde incidente

Enfin, nous allons étudier l'influence de l'angle de l'onde incidente avec la surface de l'objet diffractant. La figure 4.12 donne le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résidu de 10^{-4} , à haute fréquence ($f = 5$). L'objet étant symétrique, nous choisissons un angle d'incidence compris entre 0° et 180° .

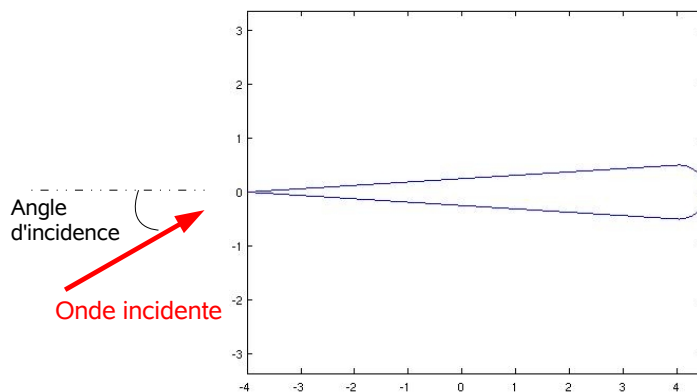


FIG. 4.12 – Angle de l'onde incidente sur l'objet diffractant disque-pointe.

Nous aurions pu nous attendre à ce que la direction de l'onde incidente influe sur la vitesse de convergence : plus l'onde est dirigée vers la pointe, plus elle "la voit". Nous constatons que cela influence peu la vitesse de convergence, et influence de la même façon

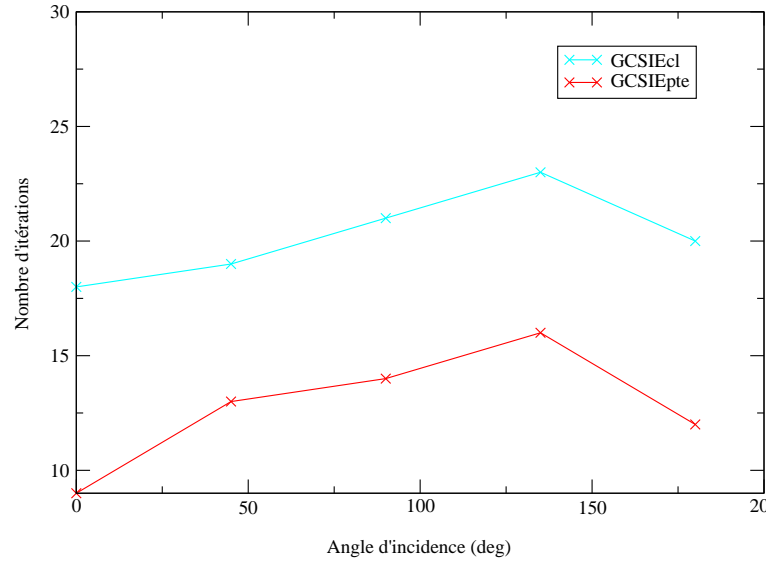


FIG. 4.13 – Influence de l'angle de l'onde incidente sur le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résidu de 10^{-4} , pour le Disque Pointe à 750 inconnues, pour $f = 5$.

les deux formulations GCSIE (les courbes sont presque parallèles). Nous en déduisons que l'influence est plus en rapport avec la forme de l'objet, qui se présente plus ou moins perpendiculairement par rapport à l'onde, qu'à la présence d'une pointe.

4.3 Un autre choix d'approximation de l'admittance

Fonctionnellement, l'admittance d'un cône infini pour le problème de Laplace est localement une bonne approximation, dans le sens où la différence $Y_{lap}^+ - Y_{helm}^+$ est un opérateur compact dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Nous allons donc remplacer dans la GCSIEpte l'admittance du cône infini de Helmholtz par celui de Laplace. Nous appellerons cette nouvelle équation GCSIEpteLap.

4.3.1 Etude de la précision

Approximation de l'admittance

En ce qui concerne la précision, nous refaisons ici l'expérience de la section 4.1.1, sur le même maillage. Rappelons que l'objectif est de comparer l'opérateur sous-jacent à la GCSIEpteLap à l'identité. Nous calculons :

$$(GCSIEpteLap)u = -\gamma_0^+ u_0,$$

et nous représentons sur les graphiques suivants 4.14 les valeurs de u aux degrés de libertés sur la surface 4.1 (graphiques de droite), que nous comparons à ceux de $-\gamma_0^+ u_0$ (graphiques de gauche), où u_0 est une onde incidence avec un angle d'incidence nul.

Nous constatons que l'approximation est nettement moins bonne que la GCSIEpte. Il semble même manquer de l'information par rapport à la formulation classique GC-

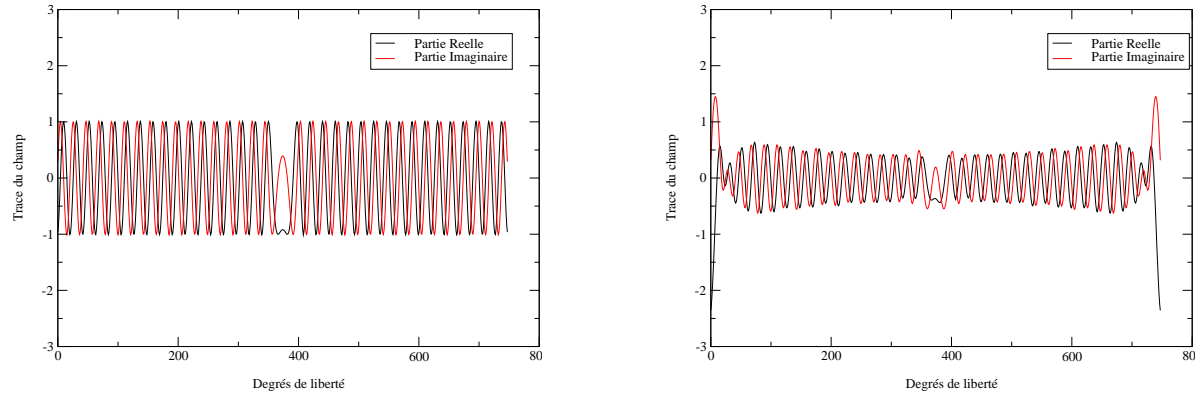


FIG. 4.14 – Vérification de la précision de l'approximation de l'admittance, formulation (GCSIEpteLap).

SIEcl. En effet, en choisissant une telle approximation de l'admittance, nous oublions la fréquence au voisinage de la pointe. Nous risquons donc de perdre en approximation ce que nous avons gagné fonctionnellement, surtout à haute fréquence. C'est ce que nous allons voir par la suite.

Précision de la solution

Pour évaluer le gain en précision de cette nouvelle formulation, refaisons l'expérience de la section 4.1.2 : pour la même surface diffractante, plaçons un point source à l'intérieur de l'objet, et calculons la Surface Equivalente Radar obtenue :

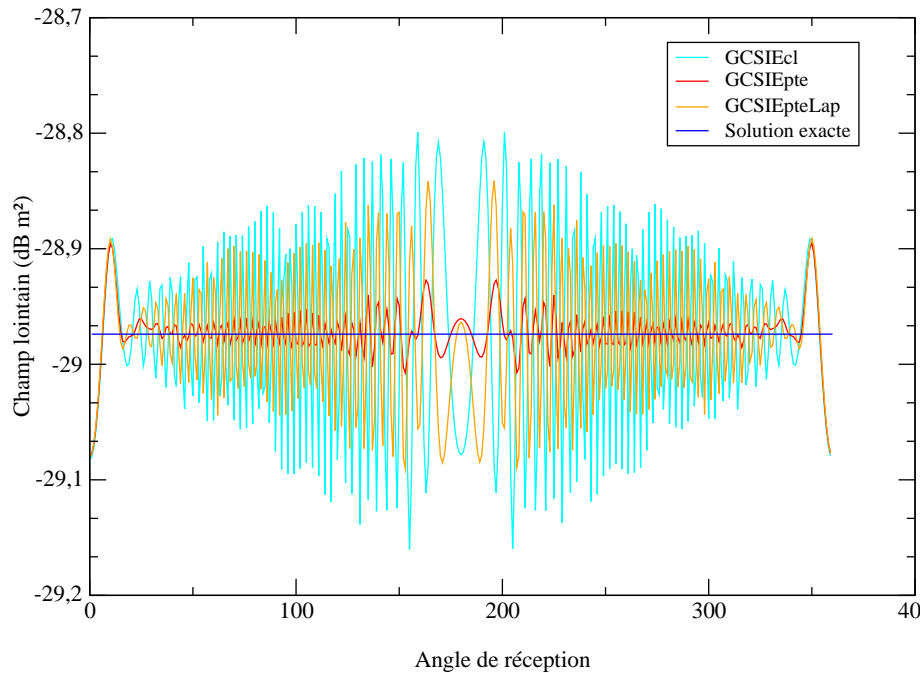


FIG. 4.15 – Surface Equivalente Radar, $f = 5$

Nous constatons un léger gain (quantifié en norme L^2 dans le tableau 4.3), ce qui

tend à confirmer notre hypothèse selon laquelle nous perdons en précision, tout en régularisant fonctionnellement : au total, nous ne gagnons donc presque rien, surtout à haute fréquence (ici, $f = 5$).

| Formulation | Erreur en norme L^2 |
|-------------|-----------------------|
| SLSIE | 8,24% |
| GCSIEcl | 0,96% |
| GCSIEpte | 0,25% |
| GCSIEpteLap | 0,67% |

TAB. 4.3 – Erreur dans le calcul de la SER

4.3.2 Etude de la vitesse de convergence

Enfin en ce qui concerne la vitesse de convergence, nous constatons un léger gain (de l'ordre de 20%) avec la régularisation par l'admittance du problème de Laplace au voisinage de la pointe. Cette expérience a été faite à l'aide du même maillage que dans la section 4.2, pour une onde incidente d'angle nul, à fréquence $f = 5$.

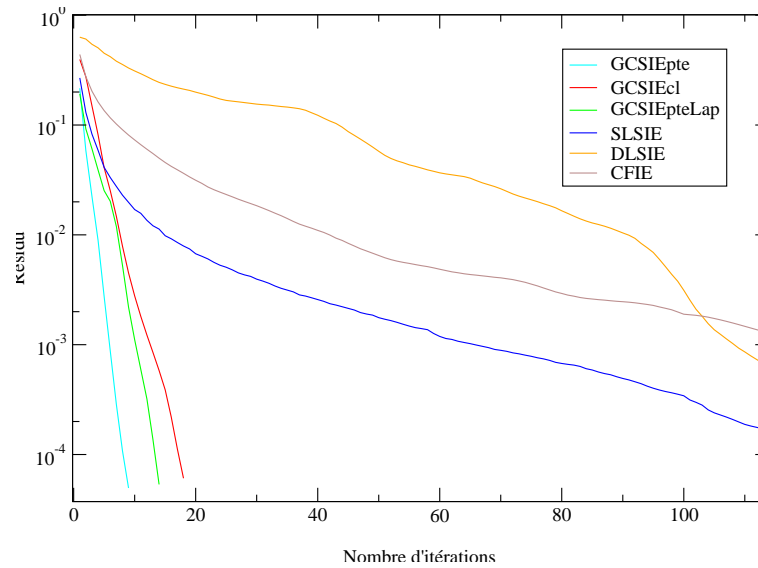


FIG. 4.16 – Courbes de convergence pour le Disque Pointe à 750 inconnues, pour $f = 5$

Conclusion

La première régularisation au voisinage de la pointe est donc finalement bien plus efficace que la seconde. D'un point de vue temps de calcul, la première solution n'est pas beaucoup plus coûteuse que la seconde. En effet, il faut ajouter les termes d'une série (nous avons choisi $N_T = 15$ pour approcher la série R), mais localement sur un petit nombre d'éléments autour de la pointe.

L'équation régularisée au voisinage de la pointe GCSIEpte, nous permet d'obtenir un gain de facteur 4 en terme de précision et 2 en terme de vitesse de convergence (nombre d'itérations), par rapport à l'équation GCSIEcl, sur une pointe importante (153 ° ici), à toute fréquence.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons répondu à l'objectif de créer une équation GCSIE qui tienne compte de la présence de pointes. Pour cela, nous avons appliqué la théorie pseudo-différentielle de Kondrat'ev, ce qui est, à notre connaissance, très rarement fait dans ce domaine de recherche qu'est l'analyse numérique des équations intégrales. Outre nos résultats concernant la construction d'une équation bien conditionnée sur des surfaces singulières, l'utilisation efficace de cet outil théorique est en lui-même un point important de notre travail.

Par ailleurs, la construction de la nouvelle GCSIE nous a amené à trouver une expression explicite, et facilement programmable de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur un cône infini. Dans la littérature, on rencontre plus fréquemment des expressions intéressantes d'un point de vue théorique, mais difficiles à programmer.

Les résultats numériques que nous avons obtenus avec la nouvelle GCSIE sont encourageants. En effet, nous avons amélioré la vitesse de convergence de 50% par rapport à la GCSIE classique, et la précision de 75%. Ils laissent penser qu'il serait bien de poursuivre ces travaux dans cette voie. Cela peut-être fait suivant plusieurs axes.

Tout d'abord, nous avons constaté dans le dernier chapitre qu'un faible rayon de courbure détériorait les résultats. Or en pratique, les surfaces sont rarement exactement singulières, mais plutôt lisses avec un très faible rayon de courbure (par exemple, l'arête d'une aile d'avion). Par conséquent, il serait bien de savoir traiter ces cas, en prenant en compte non plus une surface singulière approchant la sous-surface contenant la singularité, mais plutôt une courbe tangente à l'ordre 2 (donc contenant le rayon de courbure).

D'autre part, dans ces travaux nous n'avons étudié que des surfaces telles qu'au voisinage de la pointe, elles sont assimilables à un cône droit. Egalement dans le but de se rapprocher au mieux des cas pratiques, il faudrait envisager la possibilité d'avoir des cônes courbes, et donc d'effectuer un changement de carte dans la théorie pseudo-différentielle sur \mathbb{R}^+ .

Enfin, pour appliquer nos travaux à des cas pratiques et les intégrer au code industriel utilisé par l'Onera, il est nécessaire de passer en dimension 3, et à l'électromagnétisme. La méthode du calcul de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur un cône en dimension 2 doit sans doute pouvoir s'appliquer à celui d'un cône en dimension 3. En ce qui concerne les arêtes, le problème de Maxwell peut être décomposé à l'aide de problèmes de Helmholtz sur un cône de dimension 2. Nous pensons donc que nos travaux pourront être étendus au problème de l'électromagnétisme.

Annexes

Annexe A

Preuve des lemmes permettant le calcul de l'admittance du cône infini pour le problème de Helmholtz

Sommaire

| | | |
|-----|----------------------------------|-----|
| A.1 | Preuve du lemme 3.3.7 | 160 |
| A.2 | Preuve du lemme 3.3.8 | 160 |
| A.3 | Preuve du lemme 3.3.10 | 161 |

Afin d'alléger le contenu du chapitre 3, nous démontrons dans cette annexe les lemmes utilisés pour calculer l'admittance du cône infini pour le problème de Helmholtz.

A.1 Preuve du lemme 3.3.7

Lemme A.1.1. *Lorsque n tend vers l'infini,*

$$\tilde{K}_n(s, t) = l_n^{(0)}(s, t) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + l_n^{(1)}(s, t),$$

uniformément sur tout compact de $(\mathbb{R}^+)^2$.

Démonstration. Le noyau \tilde{K}_n s'écrit :

$$\tilde{K}_n = \frac{i\pi}{2} (J_\nu(ks)H_\nu^{(1)}(kt)\mathbf{1}_{s<t} + J_\nu(kt)H_\nu^{(1)}(ks)\mathbf{1}_{s>t}),$$

où $\nu = \frac{n\pi}{2\theta_0}$. D'autre part,

$$J_\nu(s)H_\nu^{(1)}(t) = \frac{1}{i\pi\nu} \left(\frac{s}{t}\right)^\nu \left(1 + \frac{s^2}{4(1+\nu)} + \frac{t^2}{4(1-\nu)} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right).$$

□

A.2 Preuve du lemme 3.3.8

Lemme A.2.1. *Pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,*

$$\langle l_n^{(1)}(s, t), \frac{\Phi(t)}{t} \rangle = O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

Démonstration. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} & \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi(t) \frac{dt}{t} + \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi(t) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{4\theta_0 s^2 \Phi(s)(n\pi + 2\theta_0)}{n\pi(n\pi + 4\theta_0)} - \frac{2\theta_0}{n\pi + 4\theta_0} \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt + \frac{2\theta_0}{n\pi} \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}-2} \Phi(t) \frac{dt}{t} + \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}-2} \Phi(t) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{4\theta_0 s^2 \Phi(s)(n\pi - 2\theta_0)}{n\pi(n\pi - 4\theta_0)} - \frac{2\theta_0}{n\pi - 4\theta_0} \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt + \frac{2\theta_0}{n\pi} \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & \langle l_n^{(1)}(s, t), \frac{\Phi(t)}{t} \rangle \\
 &= \frac{8\theta_0^3}{n\pi(n\pi + 2\theta_0)} \left(\frac{-1}{n\pi + 4\theta_0} \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt + \frac{1}{n\pi} \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(t) dt \right) \\
 &- \frac{8\theta_0^3}{n\pi(n\pi - 2\theta_0)} \left(\frac{1}{n\pi} \int_0^s t^2 \left(\frac{t}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}-2} \Phi'(t) dt - \frac{1}{n\pi - 4\theta_0} \int_s^{+\infty} s^2 \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}-2} \Phi'(t) dt \right),
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \left| \langle l_n^{(1)}(s, t), \frac{\Phi(t)}{t} \rangle \right| \\
 &\leq \frac{16s^3\theta_0^4 \|\Phi'\|_\infty}{n\pi} \left(\frac{1}{(n\pi + 2\theta_0)(n\pi + 4\theta_0)(n\pi + 6\theta_0)} + \frac{1}{n\pi(n\pi + 2\theta_0)(n\pi - 6\theta_0)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n\pi(n^2\pi^2 - 4\theta_0^2)} + \frac{1}{(n\pi - 2\theta_0)(n\pi - 4\theta_0)(n\pi - 10\theta_0)} \right) \\
 &= O\left(\frac{1}{n^4}\right).
 \end{aligned}$$

□

A.3 Preuve du lemme 3.3.10

Lemme A.3.1. Soit $f_n(s) = -\left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \mathbf{1}_{s < t_0} + \left(\frac{t_0}{s}\right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \mathbf{1}_{s > t_0}$, défini pour tout réel $s > 0$, pour tout $n > 0$. Alors pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$,

$$\left\langle \sum_{n=1}^N f_n(s), \Phi' \right\rangle = \left\langle \delta_{t_0} - \frac{\pi}{2\theta_0} t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} Pf\left(\frac{s^{\frac{\pi}{2\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}})^2}\right), \Phi \right\rangle,$$

et

$$\left\langle \sum_{n=1}^N (-1)^n f_n(s), \Phi' \right\rangle = \left\langle -\delta_{t_0} + \frac{\pi}{2\theta_0} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} s^{\frac{\pi}{2\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}})^2}, \Phi \right\rangle.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{n=1}^N f(s), \Phi' \rangle &= - \sum_{n=1}^N \left(\int_0^{t_0-\epsilon} \left(\frac{s}{t_0} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(s) \frac{ds}{s} - \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} \left(\frac{t_0}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(s) ds \right) \\
&= - \int_0^{t_0-\epsilon} s^{\frac{\pi}{2\theta_0}} \frac{1 - \left(\frac{s}{t_0} \right)^{\frac{N\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds - \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} \frac{1 - \left(\frac{t_0}{s} \right)^{\frac{N\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \int_0^{t_0-\epsilon} \frac{s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds - \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&= \int_0^{t_0} \Phi'(s) ds - \int_0^{+\infty} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(t_0) - t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} < vp \left(\frac{1}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \right), \Phi' \rangle \\
&= < \delta_{t_0} - \frac{\pi}{2\theta_0} t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} Pf \left(\frac{s^{\frac{\pi}{2\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}})^2} \right), \Phi \rangle,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{n=1}^N (-1)^n f(s), \Phi' \rangle &= \sum_{n=1}^N \left(\int_0^{t_0-\epsilon} \left(\frac{s}{t_0} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(s) \frac{ds}{s} + \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} \left(\frac{t_0}{s} \right)^{\frac{n\pi}{2\theta_0}} \Phi'(s) ds \right) \\
&= \int_0^{t_0-\epsilon} s^{\frac{\pi}{2\theta_0}} \frac{1 - (-1)^N \left(\frac{s}{t_0} \right)^{\frac{N\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&\quad + \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} \frac{1 - (-1)^N \left(\frac{t_0}{s} \right)^{\frac{N\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{t_0-\epsilon} \frac{s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds + \int_{t_0+\epsilon}^{+\infty} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&= - \int_0^{t_0} \Phi'(s) ds + \int_0^{+\infty} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}}}{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}}} \Phi'(s) ds \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} < -\delta_{t_0} + \frac{\pi}{2\theta_0} \frac{t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} s^{\frac{\pi}{2\theta_0}-1}}{(t_0^{\frac{\pi}{2\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{2\theta_0}})^2}, \Phi \rangle,
\end{aligned}$$

□

Annexe B

Implémentation de l'hypersingulier

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| B.1 | Notations et formules classiques d'intégration | 164 |
| B.2 | Matrice de Galerkin de l'opérateur hypersingulier | 164 |
| B.2.1 | Première configuration | 165 |
| B.2.2 | Deuxième configuration | 166 |
| B.2.3 | Troisième configuration | 167 |
| B.3 | Calcul de la matrice d'amplitude | 168 |
| B.4 | Implémentation de l'opérateur D-to-N du cône infini | 170 |
| B.4.1 | Les deux éléments sont confondus | 171 |
| B.4.2 | Éléments adjacents sur la même face | 172 |
| B.4.3 | Éléments adjacents autour de la pointe | 172 |
| B.4.4 | Éléments lointains dont l'un touche la pointe | 172 |
| B.4.5 | Éléments lointains, loin de la pointe | 172 |

La méthode utilisée est celle présentée par M. Diligenti et G. Monegato [21].

B.1 Notations et formules classiques d'intégration

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La méthode d'intégration approchée que nous utiliserons pour intégrer f est la méthode de Gauss-Legendre :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_1^n \lambda_k f(x_k),$$

où les x_k sont les zéros du $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre P_n et

$$\lambda_k = \frac{-2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)}.$$

Comme le segment de référence que nous utiliserons est $[0, 1]$, nous aurons la formule d'intégration suivante :

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_1^n \omega_k f(g_k),$$

où $g_k = \frac{1+x_k}{2}$, et $\omega_k = \frac{\lambda_k}{2}$.

Pour garder les notations utilisées par M. Diligenti et G. Monegato [21], nous noterons \oint l'intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy, et $\rlap{-}\int$ l'intégrale au sens de la partie finie.

Nous approcherons la partie finie par :

$$\rlap{-}\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx \approx \sum_1^n \omega_k \frac{f(g_k) - f(0)}{g_k}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 Matrice de Galerkin de l'opérateur hypersingulier

Notons $\Gamma_h = \cup \Gamma_i$ une surface polygonale approchant Γ , et $\{\Phi_i\}$ les fonctions de bases $P1$ associée : $\text{Supp}(\Phi_i) \subset [x_{i-1}, x_{i+1}]$ et $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, où $\Gamma_i = [x_{i-1}, x_i]$. On veut donc calculer :

$$\langle N\Phi_j, \Phi_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_h} \oint_{\Gamma_h} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x-y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \frac{n(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x),$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure à Γ_h en x .

Les termes posant problèmes sont les intégrales sur le même segment Γ_i , ou bien sur deux segments ayant un sommet en commun.

B.2.1 Première configuration



FIG. B.1 – Première configuration.

Nous nous plaçons sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$. Cela revient donc à calculer

$$\begin{aligned} & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x-y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x-y)n(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \overline{\Phi_i}(s) \frac{\Phi_j(t)}{(t-s)^2} dt ds, \end{aligned}$$

où $\overline{\Phi_i}(s) = \Phi_i(x_k + s(x_{k+1} - x_k))$. Pour simplifier les notations, nous noterons $\overline{\Phi_i}$ encore Φ_i .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(s) \frac{\Phi_j(t)}{(t-s)^2} dt ds &= \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(s) \frac{\Phi_j(t) - \Phi_j(s)}{(t-s)^2} dt ds \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\Phi_i(s)\Phi_j(s)}{s} ds - \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s)\Phi_j(1-s)}{s} ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(s) \frac{\Phi_j(t) - \Phi_j(s)}{(t-s)^2} dt ds - \int_0^1 \frac{\Phi_i(s)\Phi_j(s) - \Phi_i(0)\Phi_j(0)}{s} ds \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s)\Phi_j(1-s) - \Phi_i(1)\Phi_j(1)}{s} ds. \end{aligned}$$

- $i = k, j = k$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{st}{(t-s)^2} dt ds &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{s}{t-s} dt ds - \int_0^1 s ds - \int_0^1 \frac{(1-s)^2 - 1}{s} ds \\ &= \int_0^1 (s \log(1-s) - s \log s) - \frac{1}{2} - \int_0^1 (-2 + s) ds \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- $i = k, j = k+1$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s(1-t)}{(t-s)^2} dt ds = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{s}{t-s} dt ds - 2 \int_0^1 (1-s) ds = -\frac{1}{2}.$$

- $i = k-1, j = k$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-s)t}{(t-s)^2} dt ds = \int_0^1 \int_0^1 \frac{s(1-t)}{(s-t)^2} dt ds = -\frac{1}{2}.$$

- $i = k-1, j = k$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-s)(1-t)}{(t-s)^2} dt ds = \int_0^1 \int_0^1 \frac{st}{(s-t)^2} dt ds = \frac{1}{2}.$$

B.2.2 Deuxième configuration

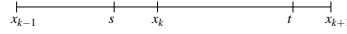


FIG. B.2 – Deuxième configuration.

Nous calculons donc :

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x-y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x-y) n(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x) dx dy \\ &= \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(t)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds, \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta_k = \frac{h_k}{h_{k+1}} = \frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k+1} - x_k|}.$$

$$\begin{aligned} \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(1-s) \frac{\Phi_j(t)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds &= \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(1-s) \frac{\Phi_j(t) - \Phi_j(-\delta_k s)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds \\ &+ \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(-\delta_k s)}{s} ds - \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(-\delta_k s)}{s + \frac{1}{\delta_k}} ds \\ &= \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(1-s) \frac{\Phi_j(t) - \Phi_j(-\delta_k s)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds \\ &+ \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(-\delta_k s) - \Phi_i(1) \Phi_j(0)}{s} ds \\ &- \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(-\delta_k s)}{s + \frac{1}{\delta_k}} ds. \end{aligned}$$

• $i = k, j = k$:

$$\begin{aligned} \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-s)t}{(t + \delta_k s)^2} dt ds &= \delta_k \int_0^1 (1-s) \int_0^1 \frac{1}{(t + \delta_k s)} dt ds - \delta_k \int_0^1 (1-s) ds + \delta_k^2 \int_0^1 \frac{s(1-s)}{\delta_k s + 1} ds \\ &= \frac{(1 + \delta_k)^2}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) - \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1 + \delta_k}{\delta_k} \log(1 + \delta_k) \\ &= \frac{-(1 + \delta_k)(1 - \delta_k)}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) - \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• $i = k, j = k + 1$:

$$\begin{aligned} \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-s)(1-t)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds &= \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{-(1-s)}{(t + \delta_k s)} dt ds + \int_0^1 \frac{(1-s)(1 + \delta_k s) - 1}{s} ds - \delta_k \int_0^1 (1-s) ds \\ &= -\frac{(1 + \delta_k)^2}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) + \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k + \frac{1}{2} - 1 \\ &= -\frac{(1 + \delta_k)^2}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) + \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• $i = k - 1, j = k$:

$$\begin{aligned}
 \delta_k \oint_0^1 \oint_0^1 \frac{st}{(t + \delta_k s)^2} dt ds &= \delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{s}{(t + \delta_k s)} dt ds - \delta_k \int_0^1 s ds + \delta_k^2 \int_0^1 \frac{s^2}{\delta_k s + 1} ds \\
 &= -\frac{(1 + \delta_k)(1 - \delta_k)}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) - \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k + \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta_k} \log(1 + \delta_k) - 1 \\
 &= \left(\frac{(1 + \delta_k)^2}{2\delta_k} - 1 \right) \log(1 + \delta_k) - \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

• $i = k - 1, j = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 \delta_k \oint_0^1 \oint_0^1 \frac{s(1-t)}{(t + \delta_k s)^2} dt ds &= -\delta_k \int_0^1 \int_0^1 \frac{s}{(t + \delta_k s)} dt ds + \int_0^1 (1 + \delta_k s) ds - \delta_k \int_0^1 s ds \\
 &= \frac{(1 + \delta_k)(1 - \delta_k)}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) + \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k - \frac{1}{2} + 1 \\
 &= \frac{(1 + \delta_k)(1 - \delta_k)}{2\delta_k} \log(1 + \delta_k) + \frac{\delta_k}{2} \log \delta_k + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

B.2.3 Troisième configuration

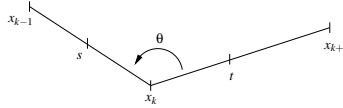


FIG. B.3 – Troisième configuration.

Nous calculons donc :

$$\begin{aligned}
 &\oint_{x_{k-1}}^{x_k} \oint_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x - y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} \frac{n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x) dx dy \\
 &= -\delta_k \cos \theta \oint_0^1 \oint_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(t)}{t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2} dt ds + 2\delta_k^2 \sin^2 \theta \oint_0^1 \oint_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) \Phi_j(t) st}{(t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2)^2} dt ds
 \end{aligned}$$

Notons :

$$A_\theta(s) = \frac{1}{\sin \theta} \left(\arctan\left(\frac{1}{\tan \theta}\right) + \arctan\left(\frac{1 - \delta_k \cos \theta s}{\delta_k \sin \theta s}\right) \right).$$

$$n(x) \cdot n(y) = -\cos \theta,$$

$$n(x) \cdot (x - y) \quad n(y) \cdot (x - y) = -st.h_k h_{k+1} \sin^2 \theta,$$

$$\Phi_j(t) = \Phi_j(0) + t\Phi_j'(0).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 &\oint_{x_{k-1}}^{x_k} \oint_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x - y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} \frac{n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x) dx dy \\
 &= -\delta_k \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s)(\Phi_j(t) - \Phi_j(0))}{t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2} dt ds - \cos \theta \Phi_j(0) \oint_0^1 \frac{\Phi_i(1-s)}{s} A_\theta(s) ds \\
 &+ 2\delta_k^2 \sin^2 \theta \left(\oint_0^1 \frac{\Phi_i(1-s)}{s} \int_0^1 \frac{s^2 t \Phi_j(0)}{(t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2)^2} dt ds + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) st^2 \Phi_j'(0)}{(t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2)^2} dt ds \right)
 \end{aligned}$$

Soient

$$f_\theta(s) = \int_0^1 \frac{s^2 t}{(t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2)^2} dt = \cos \theta A_\theta(s) + \frac{1 - s\delta_k \cos \theta}{1 - 2s\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2},$$

$$g_\theta(s) = \int_0^1 \frac{st^2}{(t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2)^2} dt = \delta_k(A_\theta(s) + \cos \theta) + 2\delta_k^2 \sin^2 \theta \frac{s(2\cos^2 \theta - 1 - s\delta_k \cos \theta)}{2\sin^2 \theta(1 - 2s\delta_k \cos \theta + s^2\delta_k^2)},$$

$$h_\theta(s) = \int_0^1 \frac{t}{t^2 - 2ts\delta_k \cos \theta + \delta_k^2 s^2} dt = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + s^2\delta_k^2 - 2s\delta_k \cos \theta}{s^2\delta_k^2} \right) + \cos \theta A_\theta(s).$$

On peut donc ré-écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{n(x) \cdot n(y)}{|x-y|^2} - 2 \frac{n(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \frac{n(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^4} \right) \Phi_j(y) \Phi_i(x) dx dy \\ &= -\delta_k \cos \theta \Phi_j'(0) \int_0^1 \Phi_i(s) h_\theta(s) ds - \cos \theta \Phi_j(0) \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) A_\theta(s) - \Phi_i(1) A_\theta(0)}{s} ds \\ &+ \Phi_j(0) \int_0^1 \frac{\Phi_i(1-s) f_\theta(s) - \Phi_i(1) f_\theta(0)}{s} ds + \Phi_j'(0) \int_0^1 \Phi_i(1-s) h_\theta(s) ds. \end{aligned}$$

B.3 Calcul de la matrice d'amplitude

Lors de l'implémentation de la GCSIE, il faut calculer la matrice de Galerkin de l'opérateur $S\tilde{Y}$, où S est le simple couche et \tilde{Y} l'approximation de l'opérateur admissibilité.

Notons $\{\Phi_j\}_{1 \leq j \leq N+1}$ l'ensemble des fonctions de base P^1 d'éléments finis sur la surface $\cup_{j=1}^N [x_j, x_{j+1}]$.

Alors pour presque tout x , $\tilde{Y}\Phi_j(x)$ est approché par la fonction affine par morceaux :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}\Phi_j &\approx \sum_{k=0}^N \tilde{Y}\Phi_j(x_k) \Phi_k \\ \langle S\tilde{Y}\Phi_j, \Phi_i \rangle &\approx \sum_{k=0}^N \langle S\Phi_k, \Phi_i \rangle \tilde{Y}\Phi_j(x_k), \end{aligned}$$

on va donc approcher $[S\tilde{Y}]$ par :

$$[S\tilde{Y}] = [S][\tilde{Y}\Phi_j(x_i)].$$

Sur chaque couple d'éléments $[x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$, on calcule la matrice de Galerkin :

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}, \Phi_{i-1} \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j, \Phi_{i-1} \rangle \\ \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}, \Phi_i \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j, \Phi_i \rangle \end{bmatrix},$$

mais on souhaite calculer la matrice :

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}(x_{i-1}) \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j(x_{i-1}) \rangle \\ \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}(x_i) \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j(x_i) \rangle \end{bmatrix}$$

sur chaque couple de segments, afin d'éviter une inversion coûteuse par la matrice masse.

Nous allons utiliser le résultat suivant :

Sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, définissons

$$\begin{cases} q_i &= -2\Phi_{i-1} + 4\Phi_i \\ p_i &= 4\Phi_{i-1} - 2\Phi_i \end{cases}$$

Proposition B.3.1. *Pour tout polynôme P du premier degré sur $[x_{i-1}, x_i]$,*

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x) q_i(x) dx = P(x_{i-1}),$$

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x) p_i(x) dx = P(x_i),$$

où $h_i = |x_i - x_{i-1}|$.

Démonstration. Effectuons le changement de variable $s = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \Psi_i(x)$ qui transforme $[x_{i-1}, x_i]$ en $[0, 1]$. Alors :

$$q(\Psi_i^{-1}(s)) = -2(1 - s) + 4s = 6s - 2 \quad p(\Psi_i^{-1}(s)) = 4(1 - s) - 2s = 4 - 6s,$$

et un calcul simple montre que pour tous réels a et b ,

$$\int_0^1 (ax + b)(6x - 2) dx = a + b \quad \text{et} \quad \int_0^1 (ax + b)(4 - 6x) dx = b.$$

□

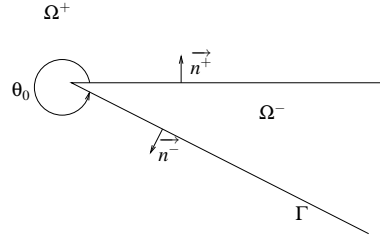
On déduit immédiatement de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire B.3.2. *Pour toute fonction affine par morceaux P sur $\cup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$,*

$$P(x_i) = \frac{1}{2h_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x) p_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) q_{i+1}(x) dx \right).$$

Or sur chaque segments $[x_{i-1}, x_i]$, $\tilde{Y}\Phi_j$ est approché par un polynôme du premier degré, d'où en ne considérant que les contributions sur chaque couple de segments $[x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$,

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}(x_{i-1}) \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j(x_{i-1}) \rangle \\ \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}(x_i) \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j(x_i) \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}, \Phi_{i-1} \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j, \Phi_{i-1} \rangle \\ \langle \tilde{Y}\Phi_{j-1}, \Phi_i \rangle & \langle \tilde{Y}\Phi_j, \Phi_i \rangle \end{bmatrix}.$$

FIG. B.4 – *Cône infini.*

B.4 Implémentation de l'opérateur D-to-N du cône infini pour le problème de Laplace.

On considère le cône infini suivant :

On a montré que le noyau de la capacité (ou opérateur Dirichlet-to-Neumann) du problème de Laplace est de la forme :

$$Y^+(s, t) = \frac{\pi}{\theta_0^2} \begin{pmatrix} Pf \left(\frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \right) & \frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \\ \frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} + s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} & Pf \left(\frac{t^{\frac{\pi}{\theta_0}-1} s^{\frac{\pi}{\theta_0}-1}}{(t^{\frac{\pi}{\theta_0}} - s^{\frac{\pi}{\theta_0}})^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Supposons la pointe droite (polygonale). Sur chaque couple de segments $[x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$, il y a a priori sept configurations possibles :

- Les deux éléments sont confondus et touchent la pointe ;
- Les deux éléments sont confondus et loin de la pointe ;
- Les deux éléments sont adjacents et l'un des éléments touche la pointe ;
- Les deux éléments sont adjacents autour de la pointe ;
- Les deux éléments sont adjacents et loin de la pointe ;
- Les deux éléments sont loin mais l'un des éléments touche la pointe ;
- Les deux éléments sont loin entre eux et de la pointe.

Nous allons voir par les calculs qu'on peut en fait se ramener à cinq configurations : les techniques employées pour traiter les intégrales singulières effacent la singularité en la pointe. On se ramène donc à :

- Les deux éléments sont confondus ;
- Les deux éléments sont adjacents sur la même face ;
- Les deux éléments sont adjacents autour de la pointe ;
- Les deux éléments sont loin mais l'un des éléments touche la pointe ;
- Les deux éléments sont loin entre eux et de la pointe.

Commençons par écrire les intégrales qu'il faut implémenter :

- Sur la même face :

$$\langle Y^+ \Phi_l, \Phi_k \rangle = \frac{\pi}{\theta_0^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(|x - x_0| |y - y_0|)^{\pi/\theta_0 - 1}}{(|x - x_0|^{\pi/\theta_0} - |y - x_0|^{\pi/\theta_0})^2} \Phi_l(y) \Phi_k(x) dx dy,$$

dont le noyau est une partie finie seulement si les éléments sont identiques ou adjacents. On peut écrire cette intégrale à l'aide des abscisses curvilignes :

Posons $a_i = |x_i - x_0|$, on a donc :

$$\langle Y^+ \Phi_l, \Phi_k \rangle = \frac{\pi}{\theta_0^2} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{(st)^{\pi/\theta_0 - 1}}{(s^{\pi/\theta_0} - t^{\pi/\theta_0})^2} \tilde{\Phi}_l(t) \tilde{\Phi}_k(s) ds dt,$$

et pour simplifier les notations, nous noterons $\tilde{\Phi}_k$ encore Φ_k .

- Sur deux faces distinctes :

$$\langle Y^+ \Phi_l, \Phi_k \rangle = \frac{\pi}{\theta_0^2} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{(st)^{\pi/\theta_0 - 1}}{(s^{\pi/\theta_0} + t^{\pi/\theta_0})^2} \Phi_l(t) \Phi_k(s) ds dt.$$

Enfin, nous utilisons des éléments P^1 , les fonctions de base sont donc linéaires par morceaux. Sur chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$, les dérivées des fonctions de base sont donc constantes, et notées Φ'_k .

B.4.1 Les deux éléments sont confondus

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{\theta^2} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{s^{\pi/\theta - 1} t^{\pi/\theta - 1}}{(s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta})^2} \Phi_k(s) \Phi_l(t) ds dt \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{a_{i-1}}^{a_i} s^{\pi/\theta - 1} \Phi_k(s) \left\langle vp \left(\frac{1}{s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}} \right)', \Phi_l \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\theta} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} s^{\pi/\theta - 1} \Phi_k(s) \left(\frac{\Phi_l(a_i)}{s^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}} - \frac{\Phi_l(a_{i-1})}{s^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}} \right) ds - \frac{\Phi'_l}{\theta} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \Phi_k(s) \frac{s^{\pi/\theta - 1}}{s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}} ds dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\Phi_l(a_i) \langle \log |s^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}|', \Phi_k \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]} \rangle - \Phi_l(a_{i-1}) \langle \log |s^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}|', \Phi_k \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]} \rangle \right) \\ &\quad - \frac{\Phi'_l}{\pi} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle \log |s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}|', \Phi_k \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \Phi'_k \Phi'_l \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \log |s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}| ds dt - \frac{1}{\pi} (\Phi_k(a_{i-1}) \Phi_l(a_i) + \Phi_k(a_i) \Phi_l(a_{i-1})) \log |a_i^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}| \\ &\quad - \frac{1}{\pi} (\Phi'_k \Phi_l(a_i) + \Phi'_l \Phi_k(a_i)) \int_{a_{i-1}}^{a_i} \log |s^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}| ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi} (\Phi'_k \Phi_l(a_{i-1}) + \Phi'_l \Phi_k(a_{i-1})) \int_{a_{i-1}}^{a_i} \log |s^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}| ds. \end{aligned}$$

B.4.2 Éléments adjacents sur la même face

Par des calculs similaires :

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\theta^2} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{s^{\pi/\theta-1} t^{\pi/\theta-1}}{(s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta})^2} \Phi_k(s) \Phi_l(t) ds dt \\
= & \frac{1}{\pi} \Phi'_k \Phi'_l \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \log |s^{\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}| ds dt + \frac{1}{\pi} \Phi_l(a_{i+1}) \Phi_k(a_i) \log |a_{i+1}^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}| \\
& - \frac{1}{\pi} \Phi_l(a_{i+1}) \Phi_k(a_{i-1}) \log |a_{i+1}^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}| + \frac{1}{\pi} \Phi_l(a_i) \Phi_k(a_{i-1}) \log |a_i^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}| \\
& - \frac{1}{\pi} \Phi'_k \Phi_l(a_{i+1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} \log |s^{\pi/\theta} - a_{i+1}^{\pi/\theta}| ds + \frac{1}{\pi} \Phi'_k \Phi_l(a_i) \int_{a_i}^{a_{i+1}} \log |s^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}| ds \\
& - \frac{1}{\pi} \Phi'_l \Phi_k(a_i) \int_{a_i}^{a_{i+1}} \log |t^{\pi/\theta} - a_i^{\pi/\theta}| dt + \frac{1}{\pi} \Phi'_l \Phi_k(a_{i-1}) \int_{a_i}^{a_{i+1}} \log |t^{\pi/\theta} - a_{i-1}^{\pi/\theta}| dt
\end{aligned}$$

B.4.3 Éléments adjacents autour de la pointe

Par des calculs similaires :

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\theta^2} \int_0^{a_{i-1}} \int_0^{a_{i+1}} \frac{s^{\pi/\theta-1} t^{\pi/\theta-1}}{(s^{\pi/\theta} + t^{\pi/\theta})^2} \Phi_k(s) \Phi_l(t) ds dt \\
= & \frac{-1}{\pi} \Phi'_k \Phi'_l \int_0^{a_{i-1}} \int_0^{a_{i+1}} \log |s^{\pi/\theta} + t^{\pi/\theta}| ds dt + \frac{1}{\theta} \Phi_l(a_{i+1}) \Phi_k(0) \log |a_{i+1}| + \frac{1}{\theta} \Phi_l(0) \Phi_k(0) \log |a_{i-1}| \\
& - \frac{1}{\theta} \Phi'_l \Phi_k(0) a_{i+1} (\log |a_{i+1}| - 1) + \frac{1}{\theta} a_{i-1} \Phi'_k \Phi_l(0) - \frac{1}{\pi} \Phi_l(a_{i+1}) \Phi_k(a_{i-1}) \log |a_{i+1}^{\pi/\theta} + a_{i-1}^{\pi/\theta}| \\
& + \frac{1}{\pi} \Phi'_l \Phi_k(a_{i-1}) \int_0^{a_{i+1}} \log |t^{\pi/\theta} + a_{i-1}^{\pi/\theta}| dt + \frac{1}{\pi} \Phi'_k \Phi_l(a_{i+1}) \int_0^{a_{i-1}} \log |s^{\pi/\theta} + a_{i+1}^{\pi/\theta}| ds
\end{aligned}$$

B.4.4 Éléments lointains dont l'un touche la pointe

Soit $\epsilon = 1$ si les deux éléments sont sur deux faces opposées, et $\epsilon = -1$ si les deux éléments sont sur la même face.

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\theta^2} \int_0^{a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{s^{\pi/\theta-1} t^{\pi/\theta-1}}{(s^{\pi/\theta} + \epsilon t^{\pi/\theta})^2} \Phi_k(s) \Phi_l(t) ds dt \\
= & \frac{1}{\theta} \left(\Phi'_k \int_0^{a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{t^{\pi/\theta-1}}{s^{\pi/\theta} + \epsilon t^{\pi/\theta}} \Phi_l(t) dt ds - \Phi_k(a_i) \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{t^{\pi/\theta-1}}{a_i^{\pi/\theta} + \epsilon t^{\pi/\theta}} \Phi_l(t) dt \right) \\
& + \frac{\epsilon}{\theta} \Phi_k(0) \left((a_j - a_{j-1}) \Phi'_l + (\Phi_l(a_{j-1}) - a_{j-1} \Phi'_l) \log \left(\frac{a_j}{a_{j-1}} \right) \right).
\end{aligned}$$

B.4.5 Éléments lointains, loin de la pointe

L'intégrale est alors bien définie, aucun traitement n'est nécessaire.

Index

- A -excision, 23
- $H^{s,\gamma}(\mathbb{R})$, 12
 - $H^{s,\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R})$, 20
- $L^{2,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, 13
- ML^m , 32
- $P(\gamma)$, 23
- S^m , 29
 - $S^m(\mathbb{R}^+)$, 30
 - $S^{m,\gamma}$, 29
- S_0^m , 29
 - S_P^m , 29
- W^+ , 107
- W^- , 106
- Γ_β , 11
- Im**, partie imaginaire, 108
- \mathbf{L}_{F+G}^m , 37
- $\mathbf{L}^{m,(k)}$, 43
- Re**, partie réelle, 5
- $\lfloor x \rfloor$, partie entière de x , 15
- $\mathcal{A}(\Omega)$, 16
- $\mathcal{D}(P, \gamma)$, 24
- \mathcal{D}_P , 26
- $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^+)$, 11
 - $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, 11
- $\mathcal{K}^s(\mathbb{R}^+)$, 14
 - $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^+)$, 15
- $\mathcal{K}_0^s(\mathbb{R}^+)$, 25
- \mathcal{K}_K^s
 - $\mathcal{K}_K^{s,\gamma}$, 15
- \mathcal{R} , 23
 - \mathcal{R}^γ , 23
- \mathcal{T} , 23
 - $\mathcal{T}(\gamma)$, 23
- $\text{op}_M^\gamma h$, 39
- op_ψ , 33
- $\pi_{\mathbb{C}}$, 23
- e^{γ_1,γ_2} , 20
- $\text{op}_M h$, 30
- Admittance, 115
- Asymptotiques conormales, 23
- Développement de Mellin, $\mathbf{L}^{m,(k)}$, 43
- Excision, 23
- GCSIE, 80, 115
- GCSIE sur un ouvert à pointe, 91, 127
- Opérateur à support propre, 32
- Opérateur de Fuchs, 26
- Opérateur de Green, \mathbf{L}_G , 35
- Opérateur elliptique, 43
- Opérateur pseudo-différentiel de Mellin, 30
- Opérateurs de Mellin, 41
- Opérateurs plats, \mathbf{L}_F^m , 36
 - à l'ordre k , 37
- Paramétrix, 43
- Potentiel double couche du laplacien, 71
- Potentiel double couche, Helmholtz, 110
- Potentiel simple couche du laplacien, 71
- Potentiel simple couche, Helmholtz, 110
- Produit de convolution multiplicatif, 6
- Projecteurs de Calderón, 70, 110
- SER, Surface Equivalente Radar, 142
- Symboles classiques, 29
- Symboles d'ordre m , S^m , 28
- Symboles de Mellin d'ordre m , 29
- Transformée de Mellin, 4
- Type d'asymptotique discret, 23
 - Asymptotique de Taylor, 23
- Valeurs propres du problème intérieur de Laplace, 106

Bibliographie

- [1] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs actuels : Interéditions / éditions du CNRS, 1991, Paris.
- [2] F. Alouges, S. Borel, and D. P. Levadoux. A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering. *J. Comp. Appl. Math*, 2006, accepted.
- [3] X. Antoine, A. Bendali, and M. Darbas. Analytic preconditioners for the electric field integral equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :1310–1331, 2004.
- [4] F. Bayen and C. Margeria. *Distributions, Analyse de Fourier, Transformation de Laplace*. Problèmes de mathématiques appliquées T.3, Ellipse, 1988.
- [5] S. Borel. *Étude d’une équation intégrale stabilisée pour la résolution itérative de problèmes de diffractions d’ondes harmoniques en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Paris XI, 2006.
- [6] L. Boutet de Monvel. Boundary problems for pseudo-differential operators. *Acta Math.*, 126 :11–51, 1971.
- [7] A. Brakhage and P. Werner. Über das dirichletsche aussenraumproblem für die Helmholtzsche schwingungsgleichung. *Archive für Mathematik*, 16 :325–329, 1965.
- [8] A. Buffa and R. Hiptmair. A coercive combined field integral equation for electromagnetic scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2) :621–640, 2004.
- [9] A. Buffa and S. Sauter. On the acoustic single layer potential : stabilization and fourier analysis. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(5) :1974–1999, 2006.
- [10] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of the exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, 323 :201–210, 1971.
- [11] M. Cessenat. *Résolution des problèmes de Helmholtz par séparation des variables en coordonnées polaires*. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309(1) :105–109, 1989.
- [12] M. Cessenat. *Sur quelques opérateurs liés à l’équation de Helmholtz en coordonnées polaires, transformation H.K.L. (Hankel-Kantorovich-Lebedev)*. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309(1) :25–30, 1989.
- [13] C. Chniti. *Version unifiée de traitement des singularités en décomposition de domaine*. PhD thesis, École polytechnique, 2005.
- [14] S. H. Christiansen and J.-C. Nédélec. A preconditioner for the electric field integral equation based on Calderón formulas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(3) :1100–1135, 2002.
- [15] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons, 1983.

- [16] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [17] M. Costabel. *Boundary integral operators on lipschitz domains : elementary results*. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3) :613–626, 1988.
- [18] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 106 :367–413, 1985.
- [19] M. Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional maxwell equations. *Applied Mathematics Letters*, 19(8) :834–839, August 2006.
- [20] M. Dauge. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains - Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, springer-verlag, berlin edition, 1988.
- [21] M. Diligenti and G. Monegato. Integral evaluation in the bem solution of (hyper)singular integral equations. 2d problems on polygonal domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 81(1) :29–57, 1997.
- [22] M. Jodeit E. B. Fabes and J. E. Lewis. Double layer potential for domains with corners and edges. *Indiana University Mathematics Journal*, 26(1) :95–114, 1977.
- [23] G.I. Eskin. *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.
- [24] J. Garsoux. *Espaces vectoriels topologiques et distributions*. Dunod Paris, 1963.
- [25] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Masson, Springer Verlag, 1992.
- [26] L. Hörmander. Pseudo-differential operators. *Communications on pure and applied mathematics*, XVII :501–517, 1965.
- [27] J.-C. Nédélec, J. Planchard. Une méthode variationnelle d’éléments finis pour la résolution numérique d’un problème extérieur dans \mathbb{R}^3 . *RAIRO Sér. Rouge*, 7(R-3) :105–129, 1973.
- [28] V. A. Kondrat’ev. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Transactions of the Moscow mathematical society*, 16 :227–313, 1967.
- [29] M. N. Le Roux. Méthode d’éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2. *RAIRO Analyse Numérique*, 11(1) :27–60, 1977.
- [30] D. P. Levadoux. Some dedicated preconditioners for the CFIE equation of electromagnetism. *Math. Meth. Appl. Sci.*
- [31] D. P. Levadoux. *Étude d’une équation intégrale adaptée à la résolution hautes fréquences de l’équation de Helmholtz*. PhD thesis, Université Paris VI, 2001.
- [32] D. P. Levadoux. Proposition de préconditionneurs pseudo-différentiels pour l’équation CFIE de l’électromagnétisme. *Math. Model. Num. Anal.*, 39(1) :147–155, 2005.
- [33] D. P. Levadoux and B. L. Michielsen. A new class of integral equations for scattering problems. *6th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, Jyväskylä, Finland, June 30–July 4, 2003.
- [34] P. Levy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, Paris, 2003.

- [35] E. Stephan M. Costabel and W.L. Wendland. On boundary integral equations of the first kind for the bi-laplacian in a polygonal plane domain. *Annali della scuola normale superiore di pisa, Classe di Scienze 4e série*, 10(2) :197–241, 1983.
- [36] W. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [37] R. B. Melrose. Pseudodifferential operators, corners and singular limits. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), Tokyo, Math. Soc. Japan*, pages 217–234, 1991.
- [38] B. L. Michielsen and D. P. Levadoux. Application de méthodes topologiques pour la réalisation de modèles CEM prédictifs dans le domaine hyperfréquence. Technical Report RF 2/03038 DEMR/DR, ONERA, Décembre 2002.
- [39] J.-C. Nedelec. *Acoustic and Electromagnetic Equations, integral representations for harmonic problems*. Springer, 2001.
- [40] P. Ola and L. Päiväranta. Mellin operators and pseudodifferential operators on graphs. *Waves Random Media*, 14 :S129–S142, 2004.
- [41] O. I. Panich. On the question of the solvability of the exterior boundary problem for the wave equation and Maxwell’s equation. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 20(1) :221–226, 1965.
- [42] S. Rempel and B.-W. Schulze. *Asymptotics for elliptic mixed boundary problems*. Akademie-Verlag Berlin Vol 50, 1989.
- [43] B.-W. Schulze. *Pseudo-differential operators on manifolds with singularities*. Studies in mathematics and its applications, vol. 24,, 1991.
- [44] J. Simon. *Extension de méthodes multipôles rapides : résolution pour des seconds membres multiples et application aux objets diélectriques*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2003.
- [45] O. Steinbach and W. L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, 9 :191–216, 1998.

