

Projet MAP431 : *Écoulements visqueux*

WANG Guillaume
JALLET Wilson

Pour le : 4 avril 2018

1 Formulations variationnelles

Question 1 Définissons le sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\tilde{V} := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \gamma_0(v)|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } \operatorname{div}(v) = 0 \text{ sur } \Omega\},$$

où $\gamma_0 : H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ est l'application trace canonique.

Pour toutes fonctions $v \in \tilde{V}$, on a

$$\begin{aligned} -\Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v &= f \cdot v \\ -\operatorname{div}(u) w &= 0 \end{aligned}$$

donc en intégrant sur Ω et en appliquant la formule de Green-Riemann

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\nabla u n) \cdot v - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) + \int_{\partial\Omega} p n \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Le second terme du membre de gauche vaut

$$- \int_{\Gamma_N} p(x) n(x) \cdot v(x) dx$$

puisque $v \in \tilde{V}$ donc $v = 0$ sur Γ_D (au sens de la trace) et la condition de Neumann homogène $\sigma n = (\nabla u - pI) n = 0$ d'où $\nabla u n = pn$. Le dernier terme étant $-\int_{\Omega} p \operatorname{div}(v)$, on en déduit finalement la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (\text{FV})$$

La forme bilinéaire $a(u, v)$ sur $\tilde{V} \times \tilde{V}$ définie par le membre de gauche est continue coercive. En effet, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2$$

d'une part, et d'autre part l'inégalité de Poincaré permet d'écrire

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u = \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)}^2 \geq \frac{1}{C_P} \sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2}^2 = \frac{1}{C_P} \|u\|_{L^2}^2$$

puis

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u \geq K \|u\|_{H^1} \quad \text{où } K > 0$$

La forme linéaire du membre de droite est continue : l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit $\int_{\Omega} f \cdot v \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$, donc la continuité L^2 , donc la continuité H^1 puisque la norme H^1 est plus fine.

Enfin, \tilde{V} est bien un sous-espace de Hilbert de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ puisque $\gamma_0(v)|_{\Gamma_D}$ et $v \rightarrow \operatorname{div}(v)$ sont des applications linéaires continues.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram à (FV), et en déduire qu'il existe un unique $u \in \tilde{V}$ vérifiant cette équation.

Question 2 On prend un maillage de triangles $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$ dont les barycentres sont les $x_i \in \overset{\circ}{K}_i$, et la vitesse u s'écrirait

$$u = \sum_{k=1}^N u(x_i) \phi_i$$

où les ϕ_i sont les éléments finis \mathbb{P}_1 sur l'espace V , vérifiant $\phi_i(x_i) = 1$, $\phi_i = 0$ en dehors de K_i et $\operatorname{div}(\phi_i) = 0$.

Une description explicite de ces éléments finis sous-entend de résoudre $\operatorname{div}(v) = 0$ avec les contraintes précédentes sur les ϕ_i , ce qui est un problème difficile.

Question 3 On a déjà calculé à la question 1 la formulation variationnelle de la première équation :

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) - \int_{\partial\Omega} (\sigma_1 n) \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Pour la deuxième équation, on obtient tout simplement :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q = 0$$

En sommant les deux équations (on a enlevé le terme de bord en $(\sigma_1 n) \cdot v$, nul par hypothèse)

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) + q \operatorname{div}(u) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (\text{FV1})$$

Dans cette formulation variationnelle, (u, p) et (v, q) sont dans l'espace produit $V := V_0 \times V_1$ où

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \gamma_0(v)|_{\Gamma_D} = 0\} \text{ et } V_1 = L^2(\Omega, \mathbb{R})$$

sont des espaces de Hilbert : ainsi V est également un espace de Hilbert.

La forme bilinéaire

$$a((u, p), (v, q)) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) + q \operatorname{div}(u) \, dx$$

associée à (FV1) est clairement symétrique.

Coercivité : La forme bilinéaire a n'est pas coercive dans le cas général. En effet, soient $\Omega =]0, 1[^2$ le carré unité en dimension $d = 2$ et $\Gamma_D = \{0\} \times]0, 1[\cup \{1\} \times]0, 1[$ les côtés ouest et est, et posons

$$u(x, y) = (x(1 - y), y(1 - x))$$

de sorte que

$$\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ -y & 1-x \end{pmatrix}$$

donc

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u = \int_{\Omega} (1-y)^2 + y^2 + x^2 + (1-x)^2 dx dy = 4 \int_0^1 t^2 dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) = \int_{\Omega} 2 - x - y dx dy = 2 - 2 \int_0^1 t dt = 1$$

Il suffit donc de choisir pour p la fonction constante égale à 2 et on obtient

$$a((u, 2), (u, 2)) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3} < 0.$$

Question 4 Calculons $-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij}$.

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \nabla u + \nabla^T u - p \operatorname{Id} \\ \sigma_{2,ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - p \delta_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \\ -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} &= -\Delta u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(u) + \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Comme on a supposé $\operatorname{div}(u) = 0$, on trouve bien

$$-\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = -\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Question 5 Multiplions scalairement par v et intégrons la première équation. D'après la question précédente et la formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot v &= \int_{\Omega} (-\Delta u + \nabla p) \cdot v = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left(-\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) v_i \\ &= -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} \right) v_i = -\sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} \right) v_i \\ &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{2,ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\partial \Omega} \sigma_{2,ij} v_i n_j \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{2,ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\partial \Omega} \sum_{i,j} \sigma_{2,ij} n_j v_i \\ &= \int_{\Omega} \sigma_2 : \nabla v - \int_{\partial \Omega} (\sigma_2 n) \cdot v = \int_{\Omega} \sigma_2 : \nabla v \end{aligned}$$

Le deuxième terme est nul puisque sur Γ_D , $v = 0$ et sur Γ_N , $\sigma_2 n = 0$.
Finalement, en explicitant de nouveau σ_2 , l'expression s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla u + \nabla^T u) : \nabla v - p \operatorname{Id} : \nabla v \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u + \nabla^T u) : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx \end{aligned}$$

Faisons de même sur la deuxième équation :

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(u) \, dx = 0$$

En soustrayant, on aboutit à la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} (\nabla u + \nabla^T u) : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) + q \operatorname{div}(u) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v$$

La symétrie de la forme bilinéaire associée (le membre de gauche) n'est pas immédiate : il faudrait peut-être trouver une reformulation.

Question 6 A symétrique et B antisymétrique.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} &= \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} + \sum_{j,i=1}^d A_{ji} B_{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} - \sum_{j,i=1}^d A_{ij} B_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Utilisons ceci pour simplifier le premier terme du membre de gauche de la formulation variationnelle trouvée à la question précédente. (On peut voir ∇u et ∇v comme des matrices.)

$$\begin{aligned} (\nabla u + \nabla u^T) : \nabla v &= (\nabla u + \nabla^T u) : \frac{(\nabla v + \nabla v^T) + (\nabla v - \nabla v^T)}{2} \\ &= (\nabla u + \nabla u^T) : \frac{\nabla v + \nabla v^T}{2} \end{aligned}$$

puisque $\nabla u + \nabla u^T$ est symétrique et $\nabla v - \nabla v^T$ est antisymétrique.

On obtient la formulation variationnelle (strictement équivalente à celle donnée dans la question précédente) :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) : (\nabla v + \nabla v^T) - p \operatorname{div}(v) - q \operatorname{div}(u) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (\text{FV2})$$

ou encore, avec les notations du cours

$$2 \int_{\Omega} e(u) : e(v) \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u) + p \operatorname{div}(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad (1)$$

On voit qu'en fait la forme bilinéaire est effectivement symétrique entre (u, p) et (v, q) .

On calcule, pour $(u, p) \in V$:

$$a((u, p), (u, p)) = 2 \int_{\Omega} e(u) : e(u) \, dx - 2 \int_{\Omega} p \operatorname{div}(u) \, dx$$

Coercivité : Le contre exemple utilisé à la question 3 fonctionne encore. On a ici

$$e(u) = \begin{pmatrix} 1-y & -\frac{x+y}{2} \\ -\frac{x+y}{2} & 1-x \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} e(u) : e(u) &= 4 \int_0^1 t^2 \, dt + 2 \int_0^1 \int_0^1 2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{4}{3} + \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x+y)^3 \right]_0^1 \, dy \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \int_0^1 (1+y)^3 \, dy \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{12} [(1+y)^4]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{16}{12} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

et il suffit de considérer $p := 3$ pour avoir

$$a((u, 4), (u, 4)) = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3} < 0.$$

Question 7 Dans le cas général, (FV1) et (1) traitent des problèmes avec des conditions aux limites différentes $\sigma \cdot n = \sigma_1 \cdot n = 0$ et $\sigma \cdot n = \sigma_2 \cdot n = 0$.

Si $\Gamma_N = \emptyset$, les conditions aux limites de Neumann sont vides et les formulations (FV1) et (1) sont strictement équivalentes et ont les mêmes solutions.

2 Implémentation numérique

Question 8 Le code source FreeFem++ se trouve dans le fichier `simulation-projet.edp`.

```

1 // Nombre de triangles.
2 // On n'utilise pas N car N est une variable globale freefem !
3 int num=20;
4
5 border gamma1(t=0,1){ x=t; y=0; label=1; }
6
7 border gamma2(t=0,1){ x=1; y=t; label=2; }
8
9 border gamma3(t=0,1){ x=1-t; y=1; label=3; }
10
11 border gamma4(t=0,1){ x=0; y=1-t; label=4; }
12
13 // on maille le carre unite
14 mesh Th = buildmesh(gamma1(num) + gamma2(num) + gamma3(num) + gamma4(num));
15 plot(Th,wait=1, cmm="Initial mesh on unit square");
16
17 // Definition de l'espace elements finis
18 fespace Vh(Th, [P2,P2,P1]);
19
20 // éléments finis P1 pour chacune des composante de u et P0 pour p.
```

```

21 | Vh [u1,u2,ph], [v1,v2,qh];
22 |
23 | // terme source
24 | func f1 = 0;
25 | func f2 = -y;
26 |
27 | // (FV1)
28 |
29 | problem FV1([u1, u2, ph],[v1,v2,qh]) =
30 |   int2d(Th)(
31 |     dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1) + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2)
32 |     - ph*(dx(v1)+dy(v2)) - qh*(dx(u1)+dy(u2)) )
33 |   - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
34 |   + on(gamma1,u1=0,u2=0);
35 |
36 | problem FV2([u1,u2,ph],[v1,v2,qh]) =
37 |   int2d(Th)( dx(u1)*dx(v1) + dy(u2)*dy(v2) + 0.5*(dx(u2)+dy(u1))*(dx(v2) + dy(v1)
38 |     ) )
39 |   - int2d(Th)( ph*(dx(v1)+dy(v2)) + qh*(dx(u1)+dy(u2)) )
40 |   - int2d(Th)( f1*v1 + f2*v2 )
41 |   + on(gamma1,u1=0,u2=0);

```

Question 9

Question 10 Pour le terme source la gravité

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sur le domaine $\Omega =]0,1[^2$ avec une condition de Dirichlet sur le bord $\Gamma_D =]0,1[\times \{0\}$

```

1 | // *****
2 | // QUESTION 10
3 | // *****
4 |
5 | // visualiser la donnée initiale
6 | func int plotF(real f1, real f2, bool wait) {
7 |   fespace Vh2D(Th, [P2,P2]);
8 |   Vh2D [fh1,fh2] = [f1,f2];
9 |   plot([fh1,fh2], wait=wait,fill=true);
10 | }
11 | plotF(f1,f2,true);
12 |
13 | FV1;
14 |
15 | int i = 1;
16 | plot([u1,u2], ps="fv"+i+"-stream.eps",cmm="Velocity_field",wait=true,fill=true,
17 |   value=true);
18 | plot(ph,ps="fv"+i+"-pressure.eps",cmm="Pressure_field",wait=true,fill=true,value
19 |   =10);
20 |
21 | FV2;
22 |
23 | i = 2;
24 | plot([u1,u2], ps="fv"+i+"-stream.eps",cmm="Velocity_field",wait=true,fill=true,
25 |   value=true);
26 | plot(ph,ps="fv"+i+"-pressure.eps",cmm="Pressure_field",wait=true,fill=true,value
27 |   =10);

```

On trouvera les résultats pour le champ de pression $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ à la figure 1 et pour le champ de vitesse $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ à la figure 2.

Question 11 On trouvera des animations GIF de la déformation dans les dossiers `deformation-FV*` où `*` désigne 1 ou 2. Les fichiers source `.eps` sont générés par le code `FreeFem++` et sont convertis en GIF par un outil dans la ligne de commande (ImageMagick).

On remarquera que le comportement des deux formulations variationnelles est différent. En effet dans la deuxième partie, les flux aux bords du domaine dépendent seulement de la partie *symétrique* du gradient du champ de vitesse.

Remarque Le domaine se déforme en s'étendant sur les côtés, mais le rendu ne reflète pas cela (`FreeFem++` dézoome la fenêtre quand le domaine grandit...).

Le code est comme suit :

```

1 // *****
2 // QUESTIONS 11 ET 12
3 // *****
4
5 string baseAnimTitle = "Deformation_Step_";
6 string filenumber;
7
8 // Déformation avec FV1
9 func int evolve1(int numsteps, real coef) {
10     string baseAnimFile = "deformation-FV1/evol_deform_";
11
12     for (int j = 0; j < numsteps; j++) {
13         Th = movemesh(Th, [x+u1*coef, y+u2*coef]);
14         FV1;
15
16         if (j < 10) { filenumber = "0"+j; }
17         else { filenumber = j; }
18
19         plot(Th, wait=1, cmm="Evolution_Step_" + j, ps=baseAnimFile + filenumber + ".
20             eps");
21         // plot([u1,u2], wait=1, cmm="Evolution step " + j);
22     }
23 }
24
25 // evolve1(100, 0.06);
26
27 // Déformation avec FV2
28 func int evolve2(int numsteps, real coef) {
29     string baseAnimFile = "deformation-FV2/evol_deform_";
30
31     for (int j = 0; j < numsteps; j++) {
32
33         Th = movemesh(Th, [x+u1*coef, y+u2*coef]);
34         FV2;
35
36         if (j < 10) { filenumber = "0"+j; }
37         else { filenumber = j; }
38
39         plot(Th, wait=1, cmm="Evolution_Step_" + j, ps=baseAnimFile + filenumber + ".
40             eps");
41         // plot([u1,u2], wait=1, cmm="Evolution step " + j);
42     }
43 }
44
45 evolve2(100, 0.06);

```

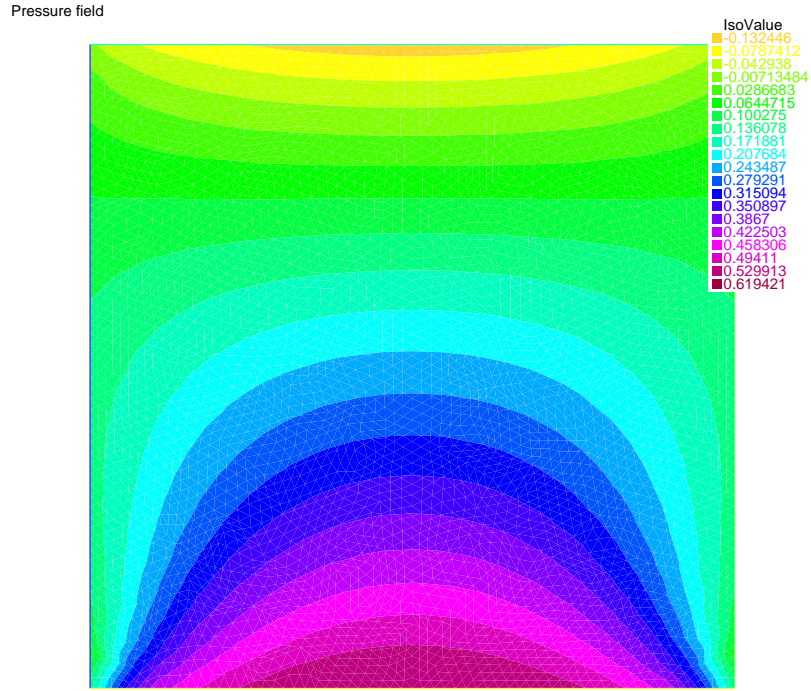
Question 12 En essayant d'itérer 100 fois pour un coefficient $\delta = 0.06$, `FreeFem++` refuse d'aller plus loin que l'itération $j = 80$ et plante.

Le compilateur FreeFem++ renvoie l'erreur suivante

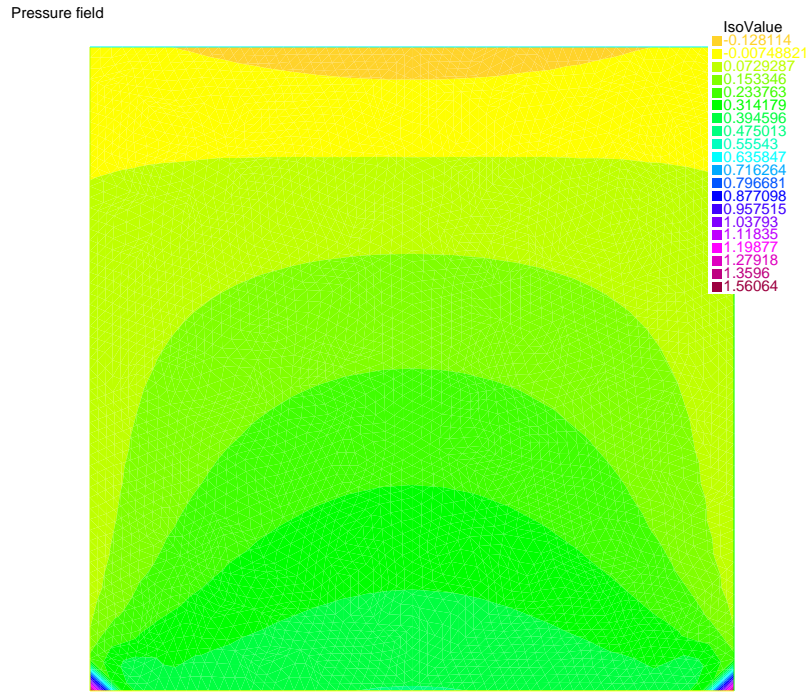
```
u min -0.284417 max 1.28446
v min -0.00724354 max 0.680117
  current line = 81
Exec error : Error move mesh triangles was reverse
  -- number :1
Exec error : Error move mesh triangles was reverse
  -- number :1
err code 7 , mpirank 0
```

c'est-à-dire qu'un des triangles du maillage s'est écrasé au cours d'une opération `movemesh`.

Malheureusement, la documentation de FreeFem++ (<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>) ne donne pas de méthode pour reconstruire le maillage de façon dynamique... Mais qu'une telle méthode existe pour des maillages en dimension 3 !

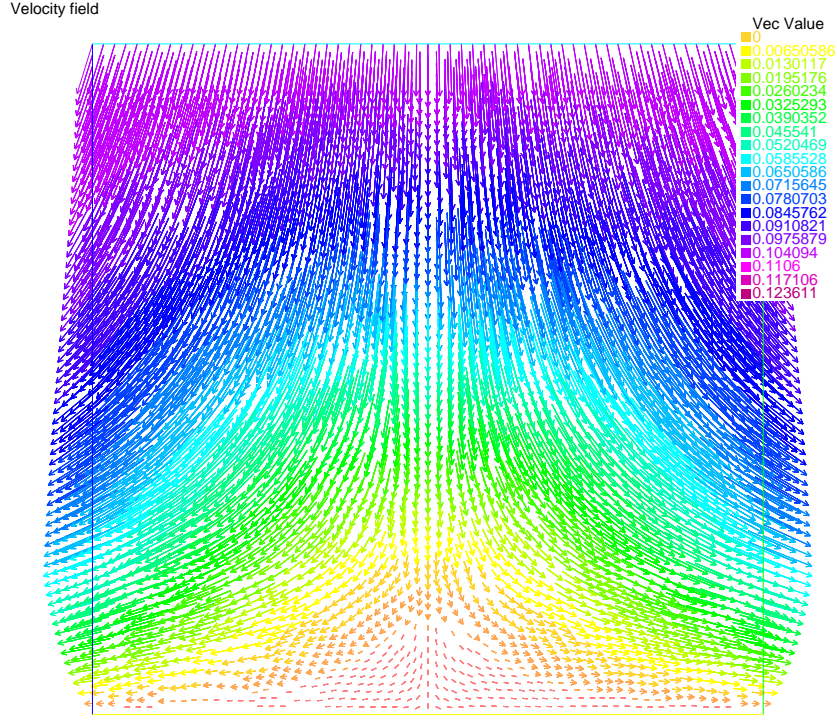


(a) Champ de pression p pour la formulation variationnelle (FV1).

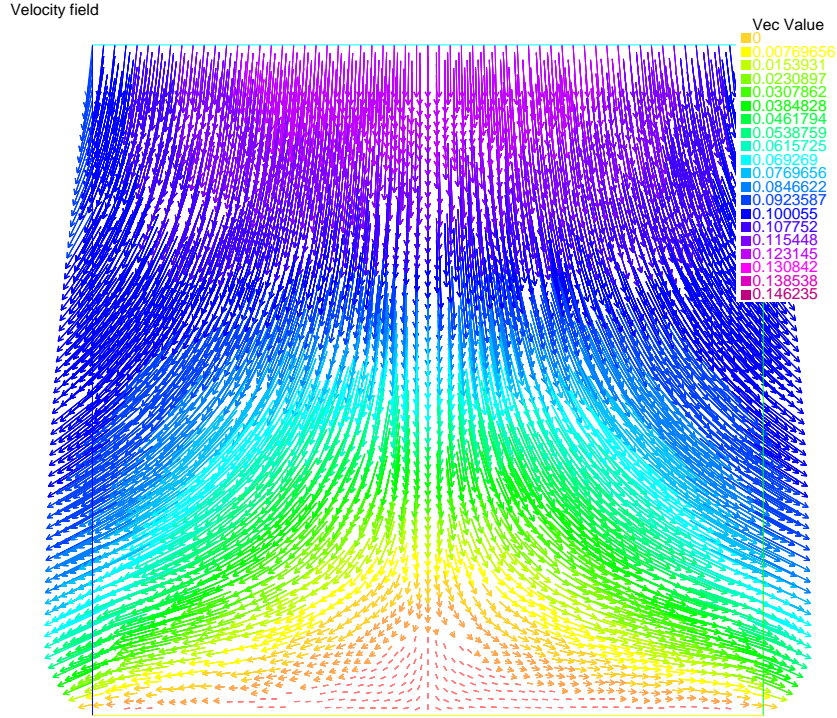


(b) Formulation variationnelle (1)

FIG. 1: Résultats du champ de pression pour les deux formulations variationnelles.



(a) Le champ de vitesse pour la formulation variationnelle (FV1).



(b) Pour la formulation variationnelle (1).

FIG. 2: Champs de vitesse $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ pour les deux formulations variationnelles. Éléments finis \mathbb{P}^2 .