

Projet Map : Simulation numérique d'un affaissement visqueux

Yassine Hamdi et Hugo Serres

12 février 2019

1 Formulations variationnelles

Hugo Serres a rédigé les questions 1, 3, 4, 5 et 6 et Yassine Hamdi les questions 2, 7, 8 et 9.

Question 1 Soit V le sous-espace de $(H^1(\Omega))^d$ défini par :

$$V = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^d \mid \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } -\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \text{ sur } \Omega \} \quad (1)$$

On considère une solution \vec{u} du problème (1) que l'on suppose être dans $(H^2(\Omega))^d$. On intègre la première équation de (1). On a donc, pour tout \vec{v} dans V :

$$\int_{\Omega} -(\Delta \vec{u}) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (2)$$

Par formule de Green sur le terme $\int_{\Omega} -(\Delta \vec{u}) \cdot \vec{v} \, dx$ on obtient :

$$\int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx - \int_{\partial\Omega} ((\nabla \vec{u}) \vec{n}) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (3)$$

Puis sur le terme $-\int_{\Omega} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} \, dx$:

$$\int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx - \int_{\partial\Omega} ((\nabla \vec{u}) \vec{n}) \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{v}) \, dx + \int_{\partial\Omega} p \vec{n} \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (4)$$

Les conditions de Dirichlet $\vec{v} = \vec{0}$ sur Γ_D et la condition aux bords de Neumann où $\sigma = \sigma_1$: donnent :

$$\boxed{\int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{v}) \, dx} \quad (5)$$

On définit alors la forme bilinéaire symétrique :

$$a_1 : \begin{array}{ccc} V^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \vec{u}, \vec{v} & \mapsto & \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx \end{array} \quad (6)$$

et la forme linéaire :

$$l_1 : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \vec{v} & \mapsto & \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{v}) \, dx \end{array} \quad (7)$$

pour obtenir la formulation variationnelle (FV0) :

$$(FV0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \text{ dans } V \text{ tel que :} \\ \forall \vec{v} \in V \, a_1(\vec{u}, \vec{v}) = l_1(\vec{v}) \end{array} \right. \quad (8)$$

Le problème peut ensuite être résolu en appliquant le théorème de Lax-Milgram.

Grâce à l'hypothèse Γ_D **non vide et Ω connexe**, nous disposons de l'inégalité de Poincaré pour la norme $\|\cdot\|_V$. Ainsi, la norme associée à l'espace $H_0^1(\Omega) = \{h \in H^1(\Omega) \mid h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$, définie comme étant la norme L^2 du gradient : $h \mapsto \|\vec{\nabla} h\|_{L^2(\Omega)}$ est bien une norme sur Ω . On définit ainsi la norme $\|\cdot\|_V$ sur V par :

$$\forall \vec{u} \in V, \|\vec{u}\|_V^2 = \sum_{i=1}^d \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^d \|\vec{\nabla} u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (9)$$

Vérifions les hypothèses du théorème Lax-Milgram. :

- $(V, \|\cdot\|_V)$ est bien un espace de Hilbert car c'est un fermé dans l'espace $((H_0^1(\Omega))^d, \|\cdot\|_V)$ qui lui est hilbertien.
- a_1 est continue sur V^2 pour $\|\cdot\|_V$.
- a_1 est coercive sur V^2 pour $\|\cdot\|_V$ par un calcul direct.
- l_1 est continue sur V pour $\|\cdot\|_V$ par continuité de l'application trace sur $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\partial\Omega)$.

Question 2 On se donne un maillage T_h de $\bar{\Omega}$. Nous pouvons prendre comme espace d'approximation V_h le sous-espace des fonctions de V qui soient $\mathbb{P}1$ sur chaque élément de T_h . Néanmoins les fonctions de la base de Lagrange usuelle ne vérifient pas nécessairement la condition $\operatorname{div}(\phi) = 0$ sur Ω . Il semble difficile d'exprimer les fonctions d'une base de V_h . S'il est facile d'exprimer l'ensemble des fonctions polynômes de degré 1 qui soient de divergence nulle (ce sont les

$\phi(x, y) = (ax + by + c, ex - gy + l)$, il est plus difficile d'en construire qui soient nulles au bord d'une réunion d'un petit nombre d'éléments contigus du maillage. Peut-être cela serait-il plus simple si on considérait des polynômes de degré plus élevé qui seraient multiples de polynômes de degré 1 nuls sur les différents segments d'un tel bord.

Question 3 L'inconnue devient le couple (\vec{u}, p) . L'espace associé W devient alors :

$$W = \{(\vec{v}, q) \in (H^1(\Omega))^{d+1} \mid \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (10)$$

Soit donc (\vec{v}, q) dans W . En partant de (1) on obtient sur Ω :

$$-\Delta \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (11)$$

$$-q \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad (12)$$

Puis, en intégrant la somme de ces deux équations :

$$\int_{\Omega} (-\Delta \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} - q \operatorname{div}(\vec{u})) \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (13)$$

D'après la question 1 :

$$\boxed{\int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{u} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx} \quad (14)$$

On définit alors la forme bilinéaire **symétrique** :

$$a_2 : \begin{array}{ccc} W^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (\vec{u}, p), (\vec{v}, q) & \mapsto & \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{u} \, dx \end{array} \quad (15)$$

et la forme linéaire (indépendante de la pression) :

$$l : \begin{array}{ccc} W & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (\vec{v}, q) & \mapsto & \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \end{array} \quad (16)$$

pour obtenir la formulation variationnelle (FV1) :

$$\boxed{(FV1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \text{ dans } W \text{ tels que :} \\ \forall (\vec{v}, q) \in W \quad a_2((\vec{u}, p), (\vec{v}, q)) = l((\vec{v}, q)) \end{array} \right.} \quad (17)$$

Afin de définir complètement l'espace de Hilbert de (FV1) il faut le munir d'une norme :

$$\|(\vec{u}, p)\|_V^2 = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \|\vec{\nabla} u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (18)$$

La forme bilinéaire a_2 est symétrique. Ainsi le problème de l'affaissement visqueux pour des contraintes du type $\sigma = \sigma_1$ admet une **interprétation énergétique** : il revient au problème de minimisation de l'énergie

$$E_2 : (\vec{u}, p) \in W \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) : (\nabla \vec{u}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{u} \, dx - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} \, dx \quad (19)$$

Question 4 Soit \vec{u} dans $C^2(\Omega, \mathbf{R}^d)$ un champ de vecteurs à divergence nulle, p dans $C^1(\Omega, \mathbf{R})$ et i dans $\llbracket 1, d \rrbracket$. Au vu de la régularité de \vec{u} et p , la quantité $-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij}$ existe et vaut :

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - p \delta_{ij} \right) \quad (20)$$

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (21)$$

Or, par théorème de Schwarz, \vec{u} étant de classe C^2 , on a : $\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$.
Ainsi :

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \Delta u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(\vec{u}) \quad (22)$$

Et donc :

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \Delta u_i \quad (23)$$

Question 5 Soit u, p des solutions suffisamment régulières du problème.

$$\int_{\Omega} f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} -\Delta \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \sigma_2) \vec{n} \cdot \vec{v} \, dx \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \sigma_2 : \nabla \vec{v} \, dx - \int_{\partial \Omega} (\sigma_2 \vec{n}) \cdot \vec{v} \, dx \quad (25)$$

$v = 0$ sur Γ_D et $\sigma_2 \cdot n = 0$ sur Γ_N :

$$\int_{\Omega} f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \sigma_2 : \nabla \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\vec{u}) \, dx \quad (26)$$

La forme linéaire est inchangée. Toutefois, la forme bilinéaire devient :

$$a_3^* : \begin{array}{ccc} W^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (\vec{u}, p), (\vec{v}, q) & \mapsto & \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \, \text{div} \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \, \text{div} \vec{u} \, dx \end{array} \quad (27)$$

Ce qui donne la formulation variationnelle intermédiaire (FV2*) :

$$(FV2*) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \text{ dans } W \text{ tels que :} \\ \forall (\vec{v}, q) \in W \, a_3^*((\vec{u}, p), (\vec{v}, q)) = l((\vec{v}, q)) \end{array} \right. \quad (28)$$

La forme bilinéaire a_3^* ne semble pas être symétrique en apparence. Il n'y donc a priori pas d'interprétation énergétique associée à la contrainte $\sigma = \sigma_2$. Par ailleurs, **a_3^* n'est pas coercive**. En effet il est possible d'annuler la quantité $a_3^*((\vec{u}, p), (\vec{u}, p))$ en choisissant convenablement la pression p tout en ayant fixé la vitesse \vec{u} de divergence non nulle. On aurait alors $\|(\vec{u}, p)\|_V$ non nulle. Il n'est donc pas possible d'appliquer directement le théorème de Lax-Milgram.

Question 6 Soient A et B , deux matrices carrées $d \times d$ respectivement symétrique et antisymétrique. On a alors :

$$2 \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} B_{ij} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ji} B_{ji} \quad (29)$$

$$2 \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} B_{ij} - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} B_{ij} = 0 \quad (30)$$

d'où

$$A : B = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} = 0 \quad (31)$$

Ainsi, pour tout \vec{u} et \vec{v} dans $H^1(\Omega)^d$ on a :

$$(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : \nabla \vec{v} = (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : \left(\frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} - \nabla^T \vec{v}) \right) \quad (32)$$

$$(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : \nabla \vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v} - \nabla^T \vec{v}) \quad (33)$$

Or, les matrices $(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u})$ et $(\nabla \vec{v} - \nabla^T \vec{v})$ sont respectivement symétrique et anti-symétrique. En appliquant le résultat précédent on obtient :

$$(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : \nabla \vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) \quad (34)$$

D'où la formulation variationnelle :

$$\boxed{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{u} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx} \quad (35)$$

Et donc la forme bilinéaire a_3^* est **symétrique** :

$$a_3 : \begin{array}{ccc} W^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (\vec{u}, p), (\vec{v}, q) & \mapsto & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{u} \, dx \end{array} \quad (36)$$

Ce qui donne la formulation variationnelle (FV2) :

$$\boxed{(FV2) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \text{ dans } W \text{ tels que :} \\ \forall (\vec{v}, q) \in W \quad a_3((\vec{u}, p), (\vec{v}, q)) = l((\vec{v}, q)) \end{array} \right.} \quad (37)$$

La forme a_3 n'est toujours pas coercive, d'après le raisonnement effectué en question 5. Elle est cependant symétrique, ce qui nous permet d'interpréter le problème en terme de minimisation énergétique sur W :

$$\boxed{E_3 : (\vec{u}, p) \in W \mapsto \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) : (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{u} \, dx - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} \, dx} \quad (38)$$

Question 7 Soit $v \in (H_0^1(\Omega))^d$ et i dans $\llbracket 1, d \rrbracket$. Alors, si on note L_i la i -ème ligne de $\nabla^T \vec{u}$, on a d'après la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^T \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} L_i \cdot \nabla v_i \, dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} -\operatorname{div}(L_i) v_i \, dx. \end{aligned} \quad (39)$$

Or pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a d'après le théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(L_i) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div}(\vec{u})) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Ainsi afin que les formulations (FV1) et (FV2) donnassent la même vitesse, il faudrait que l'on trouve 0 même si v n'est pas nulle sur Γ_N , donc que le terme additionnel venant de la formule de Green soit nul :

$\int_{\Gamma_N} (L_i \cdot \vec{n}) v_i dx = 0$ (pour tout i puisque \vec{v} peut n'avoir qu'une seule composante non nulle)

donc comme l'image de la trace contient toutes les fonctions de $C_c^\infty(\Gamma_N)$, qui est dense dans $L^2(\Gamma_N)$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(FV1) et (FV2) sont équivalentes} \iff \\ \text{La solution } \vec{u}_1 \text{ de (FV1) vérifie } (\nabla^T \vec{u}_1) \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_N \end{array}} \quad (41)$$

En particulier, pour $\Gamma_N = \emptyset$, les formulations variationnelles (FV1) et (FV2) sont équivalentes.

2 Implémentation numérique

Question 8 // Constante de discrétisation

```
int N = 10;
```

```
// Le maillage
```

```
int dirichlet = 1;
```

```
int neumann = 0;
```

```
int[int] labs = [dirichlet, dirichlet, neumann, neumann];
```

```
mesh Ch = square(N, N, [x, y], label = labs);
```

```
// Espaces d'approximation et fonctions
```

```
fespace Vh(Ch, P1);
```

```
Vh uh1, uh2, vh1, vh2, ph, qh;
```

```
func f1 = 1;
```

```
func f2 = 2;
```

```
macro Grad(u) [dx(u), dy(u)] //EOM
```

```
problem FV1(uh1, uh2, ph, vh1, vh2, qh)
```

```
= int2d(Ch)(Grad(uh1)*Grad(vh1) + Grad(uh2)*Grad(vh2))
```

```
- int2d(Ch)( ph*(dx(vh1)+dy(vh2)) + qh*(dx(uh1)+dy(uh2)) )
```

```
- int2d(Ch)(f1*vh1 + f2*vh2)
```

```
+ on(dirichlet, uh1=0) + on(dirichlet, uh2 = 0);
```

```
FV1;
```

```
plot([uh1, uh2], wait =1, fill = 1, dim = 3, value = 10);
```

```
problem FV2(uh1, uh2, ph, vh1, vh2, qh)
```

```
= int2d(Ch)(Grad(uh1)*Grad(vh1) + Grad(uh2)*Grad(vh2))
```

```
+ int2d(Ch)( dx(uh1)*dx(vh1) + dx(uh2)*dy(vh1) + dy(uh1)*dx(vh2) +  
dy(uh2)*dy(vh2) )
```

```

- int2d(Ch)( ph*(dx(vh1)+dy(vh2)) + qh*(dx(uh1)+dy(uh2)) )
- int2d(Ch)(f1*vh1 + f2*vh2)
+ on(dirichlet, uh1=0) + on(dirichlet, uh2 = 0);
FV2;
plot([uh1, uh2], wait =1, fill = 1, dim = 3, value = 10);

```

Question 9 Nous avons choisi comme cas-test :

$$\Omega =]0, 1[^2$$

$$u(x, y) = (\cos(2\pi x + \pi/2)\sin(2\pi y), \cos(2\pi x + \pi/2)\sin(2\pi y))$$

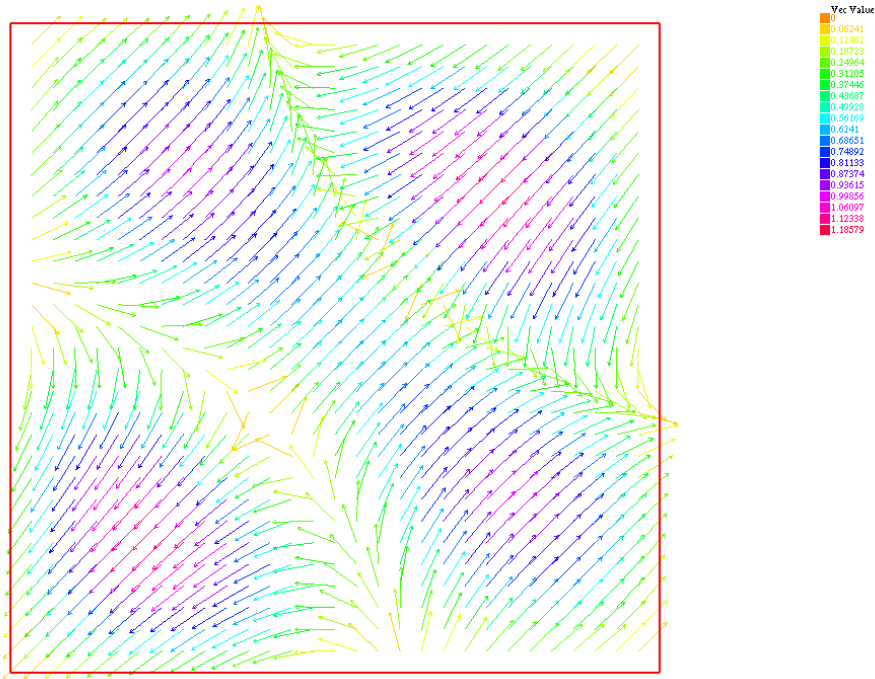
$$p(x, y) = \sin(x + 2y)$$

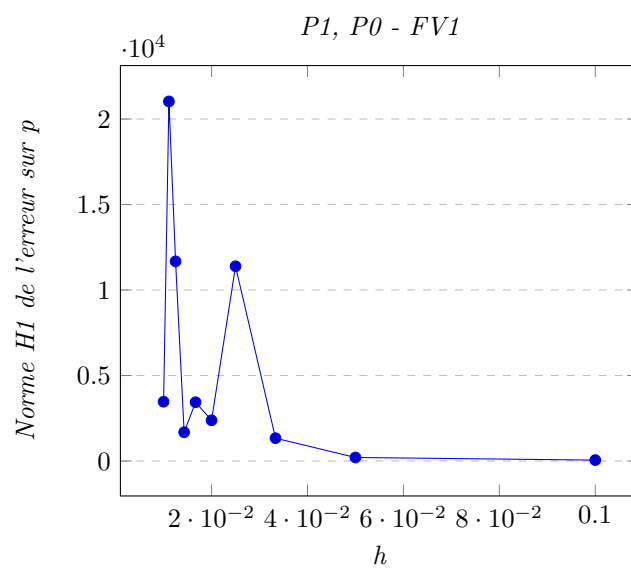
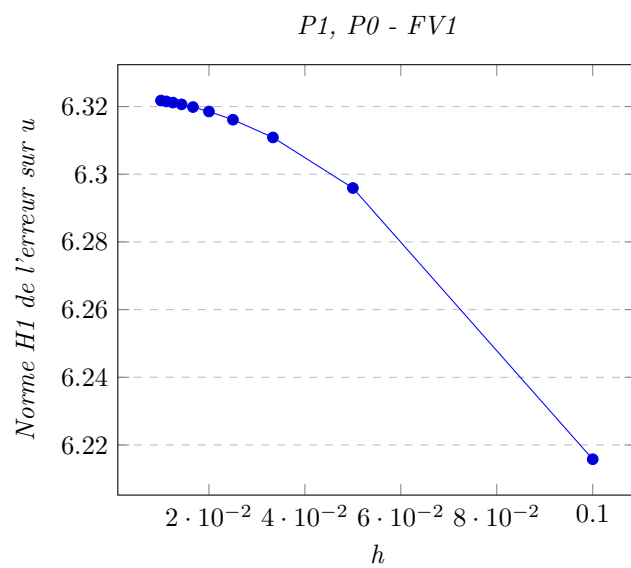
$$f1(x, y) = \cos(x + 2y) + 8\pi^2 \cos(2\pi x + \pi/2)\sin(2\pi y)$$

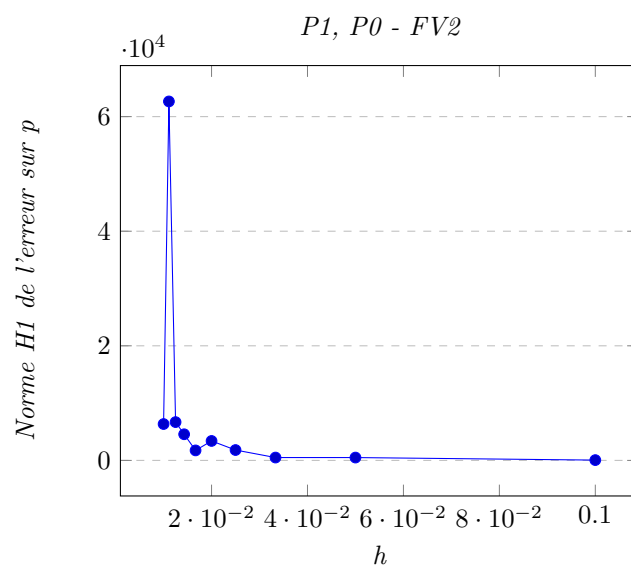
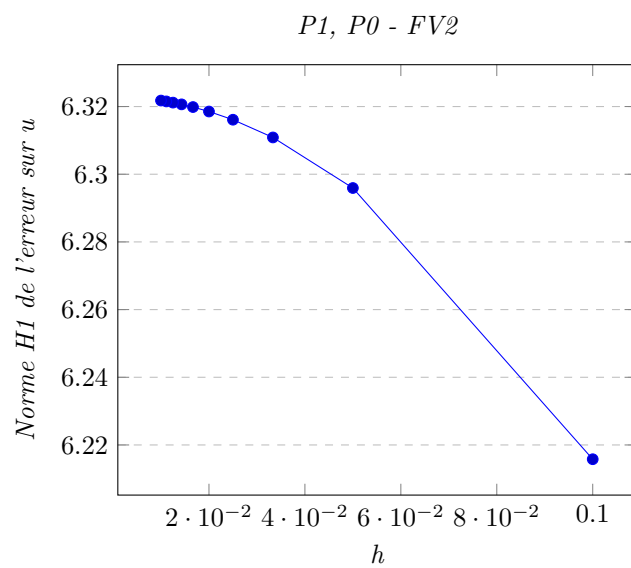
$$f2(x, y) = 2\cos(x + 2y) + 8\pi^2 \cos(2\pi x + \pi/2)\sin(2\pi y)$$

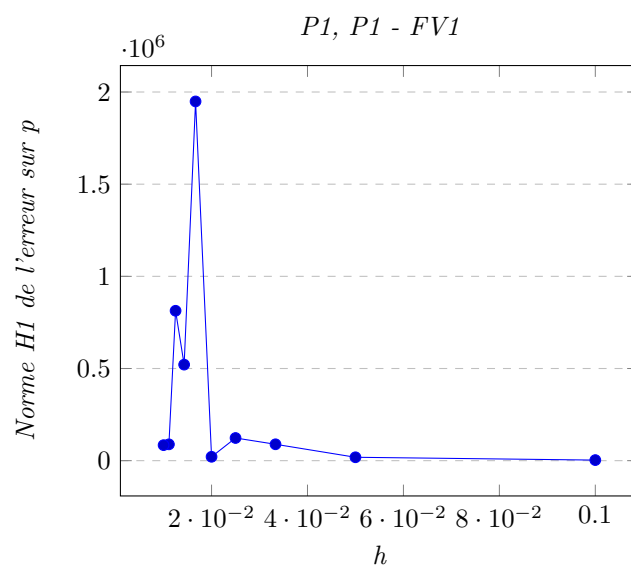
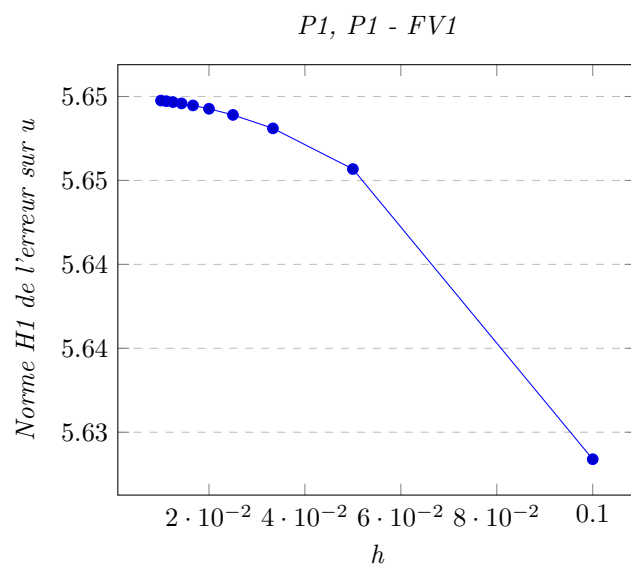
u s'annule bien sur le bord de Ω et sa divergence est nulle puisque ses composantes sont identiques et qu'un signe moins apparaît dans la dérivée par rapport à x .

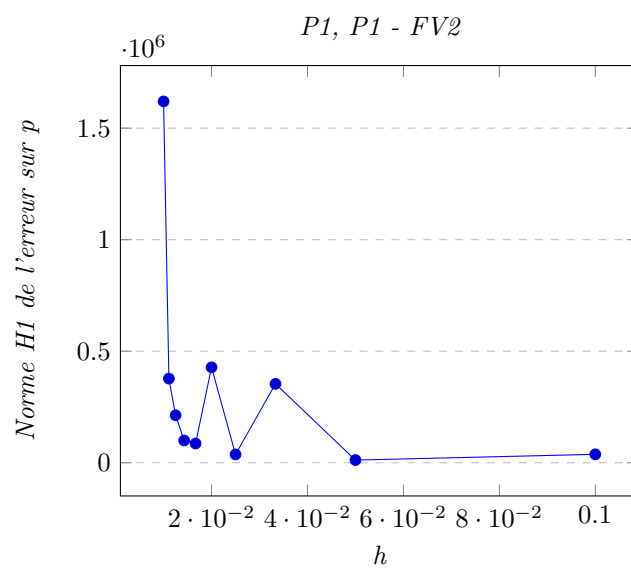
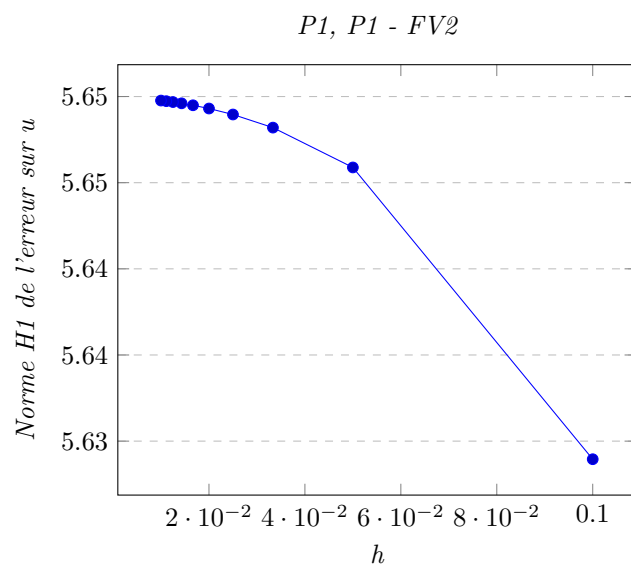
Malheureusement on ne constate pas de convergence vers la solution exacte, comme on peut le voir dans les graphiques ci-dessous. Nous ne comprenons pas où est notre erreur. Avec la meilleure approximation, l'erreur est le champ de vecteurs ci-dessous :



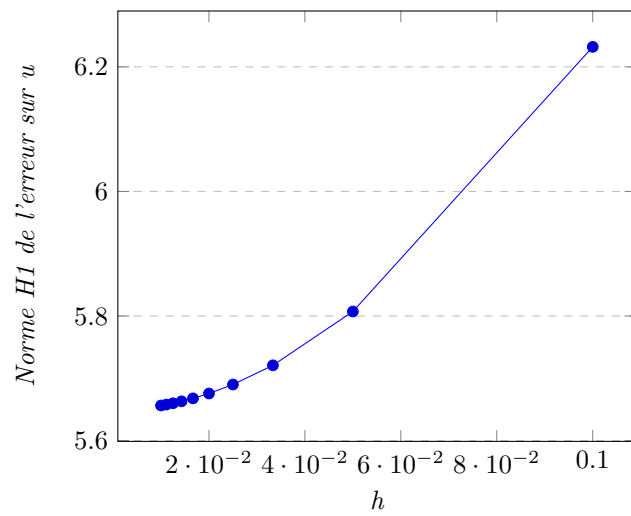




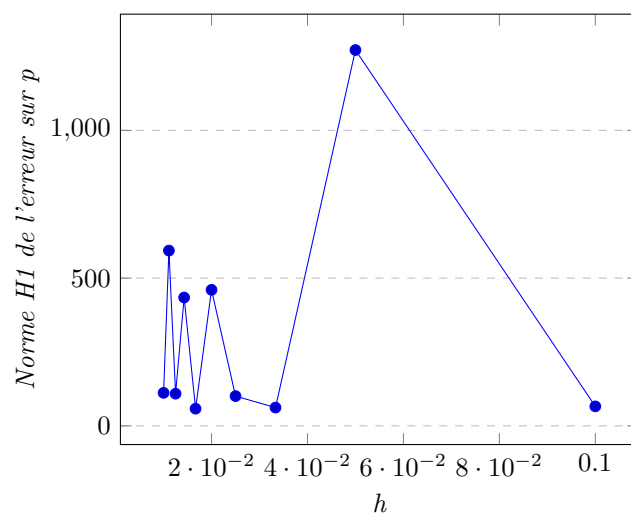




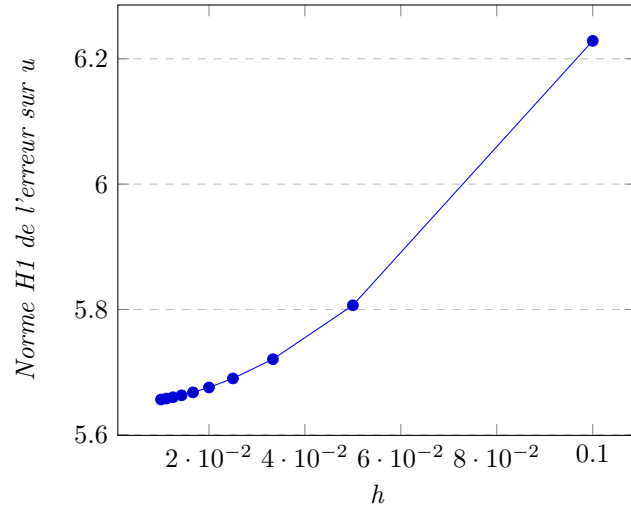
P1b, P1 - FV1



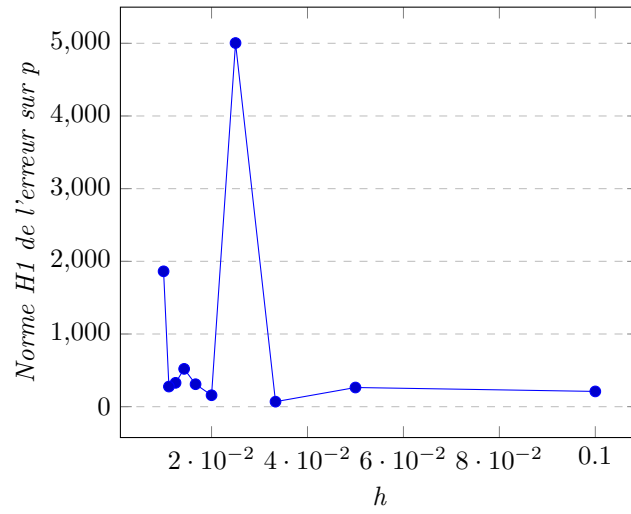
P1b, P1 - FV1



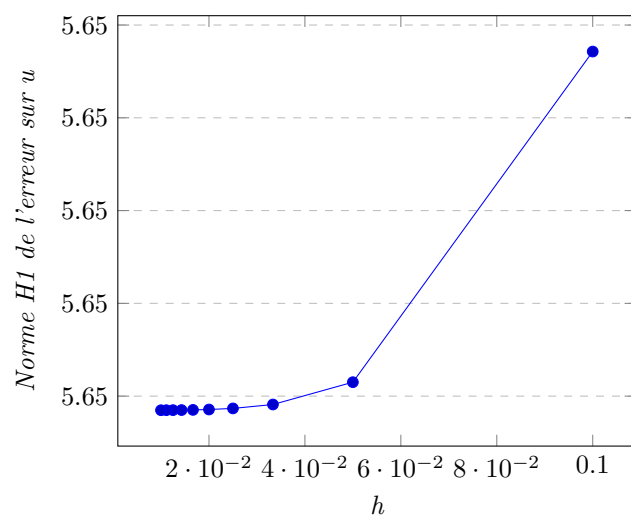
P1b, P1 - FV2



P1b, P1 - FV2



$P2, P1 - FV1$



$P2, P1 - FV1$

