Exercices opérateurs pseudo-différentiels

Martin AVERSENG

October 10, 2016

1 Introduction

Exercice 1.1 a) La fonction p_m est continue (c'est un polynôme) et non nulle (on la suppose elliptique) sur la sphère unité. Sa valeur absolue est donc également continue et atteint par conséquent un minimum $\nu > 0$ sur la sphère. En appliquant le fait que p_m est homogène de degré m, on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$p_m(\xi) > \nu\,|\xi|^m$$

Comme le polynôme $p - p_m$ est de degré au plus $m-1$, il existe $R > 0$ pour lequel

$$\forall\,|\xi| > R, \quad |(p-p_m)(\xi)| < \frac{|p_m(\xi)|}{2}$$

D'où l'on tire que

$$\forall\,|\xi| > R, \quad |p(\xi)| > ||p_m(\xi)| - |(p-p_m)(\xi)|| = |p_m(\xi)| - |(p-p_m)(\xi)| > \frac{|p_m(\xi)|}{2} > \frac{\nu}{2^m}\,|\xi|^m$$

On considère donc une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est identiquement égale à 1 dans un voisinnage de $B(0,R)$, et dans ce cas, la fonction

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)},$$

est bien définie. Comme c'est une fonction de classe C^∞ et bornée, c'est une distribution tempérée. On a alors

$$\widehat{p(D)E} = 1 - \chi(\xi),$$

ce qui implique que $p(D)E = \delta + w$ où w est la transformée de Fourier de $-\chi$. Comme χ est dans l'espace de Schwartz (puisqu'elle est C_0^∞), w l'est aussi.

b) Nous allons montrer le résultat suivant

Proposition 1.1. *Pour tout α, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que*

$$|\partial_\xi^\alpha \hat{E}| \leq C_\alpha\,(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|}$$

Proof. Etant donné que $\hat{E}$ est nulle dans un voisinnage de 0, il suffit de montrer que pour de grands $|\xi|$,

$$|\partial_\xi^\alpha \hat{E}| \leq C_\alpha |\xi|^{-m-|\alpha|} \tag{1}$$

D'après la formule de Leibniz, la fonction $\partial_\xi^\alpha \hat{E}$ s'exprime comme une combinaison linaire de termes de la forme

$$\partial^{\beta_1}\xi(1-\chi)\partial_\xi^{\beta_2}\left(\frac{1}{p}\right)$$

Où $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, ce que nous notons par la suite

$$\partial_\xi^\alpha \hat{E} = \mathrm{CL}\left(\left\{\partial^{\beta_1}\xi(1-\chi)\partial_\xi^{\beta_2}\left(\frac{1}{p}\right)\,\middle|\,\beta_1+\beta_2=\alpha\right\}\right)$$

Lorsque $\beta_1 \neq 0$, le terme correspondant est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie donc évidemment l'estimation (1). Le seul terme qui n'obéit pas à cette condition est de la forme

$$(1-\chi)\partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{p}\right)$$

Exprimons $\partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{p}\right)$ à l'aide de la formule de Fàa di Bruno :

$$\frac{1}{p} = \mathrm{CL}\left(\left\{\frac{1}{p^{K+1}}\prod_{i=1}^{K}\partial_\xi^{\alpha_i}p \;\middle|\; \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_K=\alpha\right\}\right)$$

Or puisque p est un polynôme de degré m, pour tout β, il existe une constante C_β vérifiant

$$\partial^\beta p \leq C_\beta|\xi|^{m-|\beta|}$$

D'autre part, on a montré en a) que

$$\frac{1}{p} > \nu\frac{1}{|\xi|^m}$$

On en déduit que tous les termes dans la formule de Fàa di Bruno sont majorés par une quantité de la forme $\dfrac{C}{|\xi|^{m+|\alpha|}}$ □

Corollary 1.1. *Pour tout α tel que $|\alpha| \geq n-m+1$ et pour tout β, on a*

$$D^\beta(x^{\alpha+\beta}E) \in L^\infty$$

Proof. La transformée de Fourier de $D^\beta(x^{\alpha+\beta}E)$ est proportionnelle à $\xi^\beta\partial_\xi^{\alpha+\beta}\hat{E}$ qui est intégrable sous les conditions de l'énoncé, grâce au résultat de la proposition précédente. □

Corollary 1.2. *E est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Proof. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que E est de classe C^k en dehors de 0. Soit α_k tel que

$$|\beta| \leq k \implies \beta \leq \alpha_k \text{ et } |\alpha_k - \beta| \geq n+1-m$$

Nous allons montrer que $x^{\alpha_k}E$ est de classe C^{k-1}. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout multi-indice β de longueur inférieure à k, $\partial^\beta(x^{\alpha_k}E)$ est bornée. Soit β un tel multi-indice, on peut vérifier que le couple $(\alpha_k-\beta,\beta)$ vérifie les hypothèses du corollaire précédent ce qui fournit le résultat. □

c) La transformée de Fourier de $D^\beta E$ s'écrit $\xi^\beta\hat{E}$. Les réponses aux questions précédentes nous ont permis de voir que $\hat{E} \in S^{-m}$ et $\xi^\beta \in S^{|\beta|}$ donc $\xi^\beta\hat{E} \in S^{|\beta|-m}$. Sous l'hypothèse $|\beta| \leq m-n-1$, $\xi^\beta\hat{E} \in S^{-n-1}$. C'est donc une fonction intégrable, ce qui prouve que $D^\beta E$ est bornée, donc en particulier intégrable en 0. D'autre part, on a

$$x^\alpha D^\beta E \propto \int e^{ix\xi}\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta\hat{E})d\xi$$

Le second membre est toujours intégrable (la dérivation a même accéléré la décroissance à l'infini du spectre). On en déduit que $D^\beta E$ est intégrable. Soit α tel que $|\alpha| \leq m-n-1$. On sait que, étant donné que $p(D)$ et D^α commutent,

$$D^\alpha u = (D^\alpha E * p(D)u) + S^{-\infty}$$

Or la quantité du membre de droite est bornée à cause de l'inégalité de Young et du fait que $D^\alpha E \in L^1$ et $p(D)u \in L^\infty$