Theorem. *Pour tout $x, y \in [-1,1]$, on a*

$$\ln|x-y| = -\ln(2) - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n(x)T_n(y)}{n} \tag{0.1}$$

Proof. On sait que, pour tout $x \in (-1,1)$.

$$\int_{-1}^{1} -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \frac{T_n(y)}{\omega(y)} dy = \lambda_n T_n(x), \tag{0.2}$$

avec

$$\lambda_n = \left| \begin{array}{ll} \frac{\ln(2)}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2n} & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right. \tag{0.3}$$

Soit $f \in L^2(-1,1)$, on écrit $f(y) = \frac{\alpha(y)}{\omega(y)}$ Et, comme $\alpha(y)$ est dans $L^2(-1,1,\omega(x)^2dx) \subset L^2(-1,1,\omega(x)dx)$, on peut écrire

$$\alpha(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T_n(y)$$

avec

$$\alpha_n = \mu_n \int_{-1}^{1} \alpha(y) \frac{T_n(y)}{\omega(y)} dy = \mu_n \int_{-1}^{1} f(y) T_n(y) dy$$

où

$$\mu_n = \left| \begin{array}{ll} 1/\pi & \text{si } n = 0 \\ 2/\pi & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right. \tag{0.4}$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \ln(|x-y|) f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \alpha_n T_n(x)$$

En échangeant l'ordre de sommation, on obtient

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \ln(|x-y|) f(y) = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \mu_n T_n(x) T_n(y) \right] f(y) dy.$$

D'où le résultat en identifiant le noyau des opérateurs de gauche et de droite, puisque leur action coïncide point par point sur les fonctions de $L^2(-1,1)$. ☐

Par la suite, on pose

$$\ln|x-y| = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n T_n(x) T_n(y)$$

Où, d'après le théorème précédent,

$$s_n = \left| \begin{array}{ll} -\ln(2) & \text{si } n = 0 \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right. .$$

D'autre part, remarquons que les polynômes de Tchebitchev vérifient

$$[-\omega(x)D_x]^2 T_n = n^2 T_n.$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur $-[\omega(x)D_x]^2$ dans la formule (

Pour $x, y \in (1,1)$, on pose $L(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{Tn(x)T_n(y)}{\omega(x)\omega(y)}$, avec

$$h_n = \frac{1}{s_n \mu_n^2} = \left| \begin{array}{ll} -\frac{\pi^2}{\ln(2)} & \text{si } n = 0 \\ -\frac{n\pi^2}{8} & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$L(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\left(-\frac{\pi^2}{\ln(2)} - \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} nT_n(x)T_n(y)\right) \tag{0.5}$$

$$= \frac{\pi^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\left(-\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1-xy}{16|x-y|^2}\right) \tag{0.6}$$

Corollary. *Les opérateurs S et H de noyaux respectifs $K(x,y) = \ln(|x-y|)$ et $L(x,y)$ sont inverses l'un de l'autre.*

Proof. Pour que les deux opérateurs soient mutuellement inverses, il suffit de vérifier que pour tout n, on a

$$HS\frac{T_n}{\omega} = \frac{T_n}{\omega} \tag{0.7}$$

Or,

$$S\frac{T_n}{\omega} = s_n\mu_n T_n,$$

et

$$HT_n = \frac{1}{s_n\mu_n^2}\mu_n\frac{T_n}{\omega}$$

ce qui conclut la démonstration. □