

Promotion 2005
Année 3
Période 1
MAP558

PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR, SIMULATION ET MODÉLISATION

Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes

Isabelle Terrasse, Toufic Abboud

Édition 2007

Avant Propos

Ce cours constitue une introduction à la modélisation, l'étude mathématique et numérique des phénomènes de propagation d'ondes.

De nombreuses applications industrielles relèvent de cette modélisation. Citons pour la propagation des ondes acoustiques la réduction des nuisances sonores des automobiles, avions, hélicoptères..., l'optimisation de l'acoustique des salles de concert. Pour la propagation des ondes électromagnétiques, le dimensionnement des antennes de télécommunications, la détection et la caractérisation de menaces (missiles, avions de combat...), la protection des équipements électroniques embarqués. Pour la propagation des ondes élastiques, la détection de fissures dans les centrales nucléaires, fuselages d'avion...

Même si les applications évoquées précédemment sont totalement indépendantes, la physique sous-jacente et donc les méthodes mathématiques et numériques permettant de les étudier ont beaucoup de points communs. L'objectif de ce cours est de mettre en valeur les principaux résultats théoriques communs ainsi que les méthodes numériques disponibles et/ou émergentes, utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

Il est bien entendu que dans le cadre de ce cours l'intégralité des résultats disponibles sur l'ensemble des physiques ne peut être présentée, le cours peut servir néanmoins de base mathématique et numérique aux ingénieurs concernés par la physique des ondes.

Ce cours concerne les niveaux M1 et M2, les paragraphes à maîtriser par les M1 seront indiqués pendant le cours. Donc si certains passages à la première lecture peuvent rebuter notamment à cause des aspects mathématiques, il nous a paru important de ne pas séparer les 2 niveaux afin de garder à ce cours une unité.

Il est difficile de prétendre à l'exhaustivité dans une introduction aux phénomènes de propagation d'ondes, le parti pris a donc été de présenter les deux approches temporelle et fréquentielle mais de n'étudier que deux méthodes numériques : la méthode des différences finies dans le domaine temporel et la méthode des équations intégrales dans le domaine fréquentiel. En effet ces deux méthodes sont largement répandues dans l'industrie.

Le premier chapitre, introductif, présente le contexte général des phénomènes de propagation d'ondes : modélisation physique, notion temporel-fréquentiel, problème de diffraction. Il est illustré par quelques applications industrielles.

La plupart des propriétés caractéristiques des phénomènes de propagation d'ondes (propagation à vitesse finie, conservation de l'énergie...) sont faciles à appréhender sur le cas le plus simple de l'étude de l'équation des ondes en une dimension d'espace. Le deuxième chapitre extrait du cours de Patrick Joly y est donc consacré.

Le troisième chapitre, après la présentation de quelques solutions explicites, contient l'analyse mathématique dans le domaine fréquentiel puis temporel d'un problème de diffraction : existence, unicité, propriétés des solutions de deux problèmes modèles.

La méthode des différences finies dans le domaine temporel (DFDT) est largement utilisée dans l'industrie pour la résolution numérique des phénomènes de propagation d'ondes. Dans le quatrième chapitre, nous présentons une approche système de premier ordre, le lecteur pourra se référer au cours d'Eliane Bécache pour l'étude exhaustive des schémas numériques de l'équation des ondes. Nous avons choisi comme problème modèle les équations de Maxwell en 3 dimensions d'espace, une séance de TP informatique illustrant ce chapitre.

Dans le domaine fréquentiel, pour la résolution numérique des problèmes de diffraction en milieu homogène, c'est la méthode des équations intégrales qui est largement utilisée. Le chapitre 5 présente ses fondements théoriques, basés sur la représentation intégrale et le chapitre 6 sa résolution numérique par une méthode d'éléments finis de frontière. Depuis quelques années, cette méthode a été très largement étendue en terme de taille de problèmes traités et donc d'applications accessibles par l'introduction de la méthode multipôle rapide (FMM : Fast Multipole Method). Une présentation succincte du principe de cette méthode conclut le chapitre 6.

Nous avons regroupé dans l'annexe les formules et théorèmes mathématiques les plus utiles pour l'étude des phénomènes de propagation d'ondes.

Nous devons beaucoup à Jean-Claude Nédélec, notre directeur de thèse, qui nous a patiemment initiés aux phénomènes de propagation d'ondes. Nous saluons sa contribution majeure au développement des équations intégrales, son cours de DEA et son livre consacré à ce sujet nous ont beaucoup inspirés.

Nous remercions Patrick Joly pour sa large contribution aux chapitres consacrés à l'étude mathématique et numérique des phénomènes de propagation d'ondes dans le domaine temporel dont il est un spécialiste plus que reconnu. Il a formé plusieurs générations d'élèves sur ce sujet.

Comment ne pas évoquer les échanges fructueux avec Eric Duceau, qui suit et soutient nos travaux de recherche depuis dix ans ? Il a contribué par ses suggestions avisées et ses connaissances approfondies dans ce domaine à l'élaboration de ce cours. Nous l'en remercions chaleureusement.

La partie consacrée aux méthodes multipôles rapides est extraite de la thèse de Guillaume Sylvand que nous remercions, ces méthodes ont révolutionné le domaine d'application des méthodes intégrales.

Ce document doit aussi à Fabien Mangeant et à Gérard-Pascal Piau la présentation des applications industrielles en Compatibilité Electromagnétique, en furtivité et antennes. Qu'ils soient remerciés ici.

Pierre Benjamin, Barbara Cochard et François Bereux nous ont fait bénéficier de leur expertise sur les méthodes numériques utilisées dans l'industrie, avec Erwann Feat qui tous les ans participe à la séance de TP informatique, ils nous ont permis de donner à ce cours un vrai aspect industriel sans compter leur support quotidien.

Il convient évidemment de souligner ce que ce cours doit au centre de recherche d'EADS, les résultats numériques présentés ici sont un exemple des travaux de recherche qui y sont effectués. Le premier auteur remercie particulièrement la direction d'EADS Innovation Works de lui avoir laissé le temps de se consacrer à cet enseignement.

Sources et co-auteurs

- **Patrick Joly** : Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes. Partie 1 Analyse mathématique. Cours de l'Ecole Polytechnique, Edition 2001.
- **Eliane Bécache, Patrick Joly** : Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes. Analyse numérique Partie 2. Cours de l'Ecole Polytechnique, Majeure SIMS, Edition 2004.
- **Eliane Bécache** : Schémas numériques pour la résolution de l'équation des ondes. MASTER Modélisation & Simulation. ENSTA, Janvier 2005.
- **Guillaume Sylvand** : La méthode multipôle rapide en électromagnétisme. Performances, parallélisation, applications. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées. Juin 2002 .

Références

La littérature disponible sur le sujet qui nous concerne est très abondante et souvent technique. Nous donnons quelques références permettant d'approfondir certains points. Cette liste est loin d'être exhaustive.

Le lecteur intéressé par les preuves mathématiques rigoureuses des différents résultats pourra consulter

- pour les notions de base sur la théorie des distributions :

J.M. Bony, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, éditions de l'École Polytechnique (2001).

- pour un cours de base sur le calcul intégral, les espaces de Hilbert, la transformée de Fourier et l'analyse à une variable complexe :

W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, Paris (1992).

Comme littérature spécialisée, nous conseillons

- pour le lecteur intéressé par plus de détails sur les équations intégrales dans le domaine fréquentiel :

J.C Nédélec, Acoustics and Electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems, Applied Mathematics Science, 144, Springer Verlag, New-York (2001)

- pour un panorama des développements récents autour de la méthode des différences finies temporelles pour la simulation des problèmes d'électromagnétisme, et des exemples d'application assez variés :

A. Taflov, and S.C. Hagness, Computation Electrodynamics : the Finite- Difference Time-Domain Method, Artech House, 3rd ed. (2005).

Table des matières

1	Introduction et Applications industrielles	9
1.1	Introduction	9
1.2	Modélisation physique	10
1.2.1	Ondes acoustiques	10
1.2.2	Ondes électromagnétiques	15
1.2.3	Ondes élastiques	18
1.3	Contexte général d'un problème de diffraction	20
1.3.1	Domaine temporel - domaine fréquentiel : définitions et convention . . .	20
1.3.2	Ondes planes et Ondes sphériques	21
1.3.3	Causalité et condition de radiation de Sommerfeld	26
1.3.4	Problème de diffraction	27
1.4	Quelques applications industrielles dans l'aéronautique	29
1.4.1	La furtivité Radar	30
1.4.2	La compatibilité électromagnétique	34
1.4.3	Les antennes	40
2	Analyse des problèmes de propagation d'ondes	45
2.1	Introduction	45
2.2	Propriétés qualitatives de la solution	45
2.2.1	La formule de D'Alembert	46
2.2.2	Propagation à vitesse finie	48
2.2.3	Régularité de la solution	50
2.2.4	Conservation de l'énergie	51
2.3	Ondes planes harmoniques et analyse de Fourier	54
2.3.1	Notion d'onde harmonique	54
2.3.2	Solutions périodiques en temps, équation de Helmholtz	57
2.3.3	Décomposition en ondes planes harmoniques	59
2.3.4	Application à la stabilité L^2 de l'équation des ondes	63
2.4	Équation avec second membre	64
2.4.1	Solution élémentaire	64
2.4.2	Expression de la solution du problème avec second membre	65
2.4.3	Régularité de la solution	66
2.5	Principe des images	70

2.5.1	Le problème de Dirichlet	72
2.5.2	Le problème de Neumann	75
3	Analyse du problème de diffraction 3D	79
3.1	Introduction	79
3.2	Solutions élémentaires	80
3.2.1	Solution élémentaire de l'équation de Helmholtz	80
3.2.2	Dipôles électriques et magnétiques - tenseur élémentaire	83
3.3	Fonctions spéciales et solutions analytiques	87
3.3.1	Harmoniques sphériques	87
3.3.2	Application à la résolution explicite de l'équation de Laplace	89
3.3.3	Fonctions de Bessel et Hankel sphériques et équation de Helmholtz	90
3.3.4	Opérateur d'impédance de la sphère	91
3.4	Étude du problème fréquentiel	93
3.4.1	Panorama	93
3.4.2	Le cas scalaire	94
3.4.3	Troncature du domaine	95
3.4.4	Formulation variationnelle - Existence et unicité	97
3.4.5	Quelques remarques sur le principe d'absorption limite	99
3.5	Étude du problème temporel	99
3.5.1	Le problème modèle	100
3.5.2	Existence et unicité pour le problème modèle	100
3.5.3	Généralisation à divers problèmes d'ondes	103
3.5.4	Identité de l'énergie - Estimations <i>a priori</i>	115
4	Méthode des différences finies en temporel pour le système de Maxwell	119
4.1	Cas continu	119
4.1.1	Introduction	119
4.1.2	Identité d'énergie	121
4.1.3	Décomposition en ondes planes harmoniques	122
4.2	Première analyse sur le cas simplifié de la dimension 1	124
4.2.1	Le système du premier ordre en dimension 1	124
4.2.2	Rappels sur les différences finies - Cadre fonctionnel	125
4.2.3	Le schéma saute-mouton pour le système d'ordre 1	130
4.2.4	Vitesse de propagation numérique- Condition nécessaire de convergence	132
4.2.5	Identité d'énergie pour le système discrétisé	137
4.2.6	Erreur de convergence, erreur de consistance et schéma de démarrage	140
4.2.7	Notion de dispersion numérique	146
4.3	Etude du schéma FDTD pour le système de Maxwell en dimension 3	149
4.3.1	Le schéma de Yee	150
4.3.2	Propriétés discrètes du schéma de Yee, analyse par méthode énergétique	155
4.3.3	Analyse de stabilité par ondes planes, dispersion numérique	161

5	Équations intégrales	167
5.1	Introduction	167
5.1.1	Conventions et notations	168
5.2	Distributions de simple et double couche	169
5.2.1	Définitions	169
5.2.2	Produit de convolution	170
5.2.3	Formule des sauts	171
5.3	Rayonnement d'une source dans l'espace libre	172
5.3.1	Rayonnement d'une source quelconque	172
5.3.2	Sources ponctuelles	173
5.3.3	Sources volumiques	176
5.3.4	Sources surfaciques - Potentiels de simple et double couche	177
5.4	Théorème de représentation intégrale	188
5.4.1	Rayonnement en présence d'un obstacle	188
5.4.2	Solutions de l'équation homogène en présence d'un obstacle	189
5.4.3	Projecteurs de Calderón	193
5.5	Équations intégrales	195
5.5.1	Choix du prolongement et de la trace	196
5.5.2	Problème de Dirichlet extérieur	196
5.5.3	Problème de Dirichlet intérieur	199
5.5.4	Problème de Neumann extérieur	199
5.5.5	Problème de Neumann intérieur	200
5.5.6	Équivalence entre problèmes aux limites et équations intégrales	201
5.6	Quelques applications de la formule de représentation	203
5.6.1	Représentation intégrale 1D	204
5.6.2	Formules de Poisson et de Cauchy	204
5.6.3	Angle solide	207
5.6.4	Propriété de la moyenne	208
5.6.5	Représentation intégrale de $\sin(k x)/(4\pi x)$	209
5.6.6	Ondes planes	210
5.6.7	Les modes intérieurs	211
5.7	Généralisation de la formule de représentation intégrale	212
5.7.1	Fonction de Green d'un problème aux limites	212
5.7.2	Fonction de Green avec condition de Dirichlet - Réciprocité	213
5.7.3	Nouvelle représentation intégrale - Formule de Poisson en 3D	215
5.8	Formulations variationnelles	216
5.8.1	Calcul formel	216
5.8.2	Normes de Sobolev dépendant de la fréquence	217
5.8.3	L'opérateur intégral de simple couche	219
5.8.4	La dérivée normale de l'opérateur intégral de double couche	221

6	Méthode des éléments finis de frontière	225
6.1	Introduction	225
6.2	Éléments finis de frontière - domaine fréquentiel	226
6.2.1	Approximation variationnelle	226
6.2.2	Remarques sur la résolution du problème discret	228
6.2.3	Principe de réciprocité	228
6.3	Méthode des multipôles rapides	229
6.3.1	Méthode mono-niveau	229
6.3.2	Méthode multi-niveau	237
A	Formulaire et rappels mathématiques	261
A.1	Opérateurs de dérivation dans \mathbb{R}^3	262
A.1.1	Coordonnées cartésiennes	262
A.1.2	Coordonnées cylindriques	263
A.1.3	Coordonnées sphériques	263
A.2	Formules de calcul vectoriel	264
A.3	Formules d'intégration par partie	265
A.4	Opérateurs différentiels surfaciques	266
A.5	Analyse fonctionnelle	269
A.5.1	Espaces de Hilbert	269
A.5.2	Espaces de Sobolev	270
A.5.3	Théorème de Lax-Milgram	272
A.5.4	Alternative de Fredholm	273
A.5.5	Lemme de Grönwall	274
A.5.6	Le théorème de Hille-Yosida	274

Chapitre 1

Introduction aux phénomènes de propagation d'ondes et applications industrielles

1.1 Introduction

Avant d'aborder l'étude mathématique et numérique des phénomènes de propagation d'ondes, il convient de rappeler le lien étroit de tout développement de méthodes numériques avec la problématique de la modélisation ; les équations que l'on cherche à résoudre, les approximations faites sur elles proviennent du savoir faire des physiciens, de l'état de l'art des numériciens et des besoins concrets des ingénieurs : il existe un compromis entre la complexité souhaitée du modèle, les contraintes temps de calcul liées au savoir-faire et à la capacité des ordinateurs existants et les exigences de précision. La modélisation des phénomènes physiques constitue une partie non négligeable de l'approximation numérique de ces phénomènes. Les problèmes de propagation d'ondes font partie des problèmes hyperboliques linéaires, la linéarité permet un traitement de la variable temps par transformée de Fourier, on parle d'étude dans le domaine fréquentiel. Nous présentons les 2 domaines d'application : le domaine temporel c'est à dire l'équation des ondes, le domaine fréquentiel c'est à dire l'équation d'Helmholtz car ces deux domaines sont utilisés dans l'industrie : le fonctionnement d'une antenne s'étudie à une fréquence donnée ou autour de celle-ci, l'étude de l'agression de la foudre se modélise plutôt en temporel. Les caractéristiques principales des phénomènes de propagation d'ondes sont la propagation à vitesse finie, la notion de causalité (qui fixe le sens du temps) dans le domaine temporel. Ceci se traduit dans le domaine fréquentiel par un certain comportement à l'infini, imposé par la condition de radiation de Sommerfeld.

Ce chapitre présente donc les différents modèles physiques (propagation des ondes acoustiques, électromagnétiques et élastiques), fixe le contexte général d'un problème de diffraction dans les domaines fréquentiel et temporel et en donne des exemples d'application industrielle. Dans les chapitres suivants, les démonstrations mathématiques porteront essentiellement sur le cas scalaire, on illustrera certains aspects autant que possible sur le système de Maxwell, les

ondes élastiques nous amèneraient à plus de calculs techniques qui cacheraient les notions fondamentales pour un cours introductif.

1.2 Modélisation physique

Nous allons passer en revue trois modèles de propagation d'ondes afin d'une part de donner une idée de la richesse des domaines de la physique qui font intervenir des ondes, d'autre part d'identifier la nature et les points communs de ces modèles mathématiques :

- les équations de l'acoustique pour la propagation des ondes sonores dans un fluide,
- les équations de Maxwell pour la modélisation des ondes électromagnétiques,
- les équations de l'élastodynamique pour la propagation des ondes élastiques dans un solide.

Il n'est pas question ici de présenter en détail la manière dont sont établies ces équations ou la physique sous-jacente.

1.2.1 Ondes acoustiques

Les équations de l'acoustique s'obtiennent par linéarisation des équations d'Euler caractérisant les fluides.

Conservation de la masse :

$$\frac{d\rho_T}{dt} + \text{div}(\rho_T \vec{U}_T) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\rho_T \vec{U}_T) + \overrightarrow{\text{grad}} p_T = 0$$

Conservation de l'entropie pour les fluides parfaits :

$$p_T \rho_T^{-\gamma} = Cste$$

avec ρ_T la masse volumique, \vec{U}_T la vitesse, p_T la pression, γ la constante caractéristique des fluides parfaits. La dérivée $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulaire donnée par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}_T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$$

Les ondes acoustiques sont caractérisées par la masse volumique acoustique ρ , la pression acoustique p , la vitesse acoustique \vec{U} perturbation à l'ordre 1 des masse volumique, pression et vitesse du fluide. On note avec l'indice 0 les caractéristiques à l'ordre 0 du fluide. Soit :

$$\rho_T = \rho_0 + \rho$$

$$\vec{U}_T = \vec{U}_0 + \vec{U}$$

$$p_T = p_0 + p$$

et on note $\frac{d}{dt_0}$ la dérivée particulaire à l'ordre 0.

$$\frac{d}{dt_0} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$$

On linéarise ensuite les équations d'Euler. A l'ordre 0, on résout les équations de la mécanique des fluides qui permettent de déterminer l'écoulement principal ou porteur que l'on supposera stationnaire. A l'ordre 1, les équations deviennent :

Conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt_0} + (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho_0 + \text{div}(\rho_0 \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U}_0) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_0 \frac{d\vec{U}}{dt_0} + \frac{d\rho}{dt_0} \vec{U}_0 + (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\rho_0 \vec{U}_0) + \overrightarrow{\text{grad}} p = 0$$

Conservation de l'entropie :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, cette relation devient :

$$\frac{p}{\rho} = \gamma R_s T = c^2$$

avec $R_s = R/M$ la constante spécifique du gaz, R la constante universelle des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz. c est la vitesse du son dans le fluide. Par exemple dans l'air, $R_s = 287 \text{ J kg K}^{-1}$, $\gamma = 1,4$, à 15°C , la vitesse du son vaut approximativement 340 m s^{-1} .

On peut donc éliminer la masse volumique acoustique puisqu'elle est directement proportionnelle à la pression acoustique. Les ondes acoustiques sont donc déterminées par un système d'équations en pression-vitesse provenant de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Supposons le fluide au repos : $\vec{U}_0 = 0$, ρ_0 et p_0 sont des constantes et $\frac{d}{dt_0} = \frac{\partial}{\partial t}$.

Le système devient :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} p = 0 \end{cases}$$

En prenant $\frac{\partial}{\partial t}$ de la première équation et div de la deuxième, on peut éliminer \vec{U} :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \operatorname{div} \vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \operatorname{div} \vec{U}) + \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p &= 0 \end{cases}$$

En remarquant que $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} = \Delta$, on constate que la pression vérifie l'équation des ondes (scalaire).

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0$$

Prenons le rotationnel de la deuxième équation du système (1.1), opérateur $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{U}) = 0$$

en utilisant la propriété $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} = 0$.

On constate donc que la vitesse des ondes acoustiques reste irrotationnelle si elle l'était à l'origine des temps.

Cherchons maintenant à éliminer la pression acoustique, on prend $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ de la première équation et $\frac{\partial}{\partial t}$ de la deuxième du système acoustique (1.1) et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \right) + \rho_0 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{U} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} p) &= 0 \end{cases}$$

La vitesse acoustique vérifie l'équation (vectorielle) suivante :

$$(1.2) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{U} = 0$$

S'agit-il d'une équation des ondes ? Nous rappelons la formule reliant les opérateurs de dérivation au laplacien vectoriel :

$$(1.3) \quad \vec{\Delta} \vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u}$$

Sous l'hypothèse d'irrotationnalité de la vitesse acoustique à l'origine des temps, alors $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{U} = \vec{\Delta} \vec{U}$, l'équation (1.2) devient :

$$(1.4) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \vec{U} = 0$$

qui est l'équation des ondes vectorielle. Attention, il n'y a pas équivalence entre les deux équations puisque dans l'équation (1.4) l'information $\vec{\text{rot}} \vec{U} = 0$ a disparu.

Cas d'un écoulement porteur uniforme supposé suivant l'axe Oz , ρ_0 et p_0 sont des constantes et

$$\vec{U}_0(x, t) = U_0 \vec{e}_z$$

et

$$\frac{d}{dt_0} = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Les équations deviennent :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt_0} + \rho_0 \text{div} \vec{U} + \frac{U_0}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \rho_0 \frac{d\vec{U}}{dt_0} + \frac{U_0}{c^2} \frac{dp}{dt_0} \vec{e}_z + \overrightarrow{\text{grad}} p = 0 \end{cases}$$

En prenant $\frac{d}{dt_0}$ de la première équation et div de la deuxième, on peut à nouveau éliminer \vec{U} :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt_0^2} + \frac{d}{dt_0} (\rho_0 \text{div} \vec{U}) + \frac{U_0}{c^2} \frac{d}{dt_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \rho_0 \text{div} \left(\frac{d\vec{U}}{dt_0} \right) + \frac{U_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dp}{dt_0} + \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} p = 0 \end{cases}$$

Les opérateurs commutant dans le cas de l'écoulement uniforme, on obtient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt_0^2} - \Delta p = 0$$

qui ressemble à une équation des ondes écrite sous cette forme. On introduit le nombre de Mach $M_0 = \frac{U_0}{c}$, rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son, l'opérateur $\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt_0^2}$ s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt_0^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{M_0}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + M_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Le dernier terme du développement intervient aussi dans le Laplacien. Par un changement de variable adéquat, on peut néanmoins se ramener à l'équation des ondes scalaire usuelle. Le changement de variable correspond à une dilatation des structures dans la direction de l'écoulement et à un décalage sur la vitesse du son effective. Dans le cadre de ce cours nous nous limiterons à la propagation des ondes acoustiques sans écoulement. Les domaines de la modélisation acoustique et aéro-acoustique sont en pleine expansion dans l'industrie aéronautique et spatiale.

Que manque-t'il dans le modèle précédent pour qu'il conduise à un problème bien posé ? Des conditions initiales à $t = 0$, souvent la nullité des champs pression vitesse puisqu'en général on commence la modélisation quand une onde acoustique incidente est générée par des sources de bruit.

En présence d'une structure diffractante (moteur d'avion, lanceur spatial..), il convient de rajouter des conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine de propagation (qui est le complémentaire de la structure).

D'un point de vue mathématique, les conditions aux limites usuellement rencontrées pour l'équation des ondes scalaire sont :

- La condition de Dirichlet :

$$(1.7) \quad p|_{\Gamma} = 0.$$

- La condition de Neumann :

$$(1.8) \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma} = \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0$$

Pour définir les conditions aux limites appropriées, il faut revenir à la physique du problème considéré, en effet la détermination des conditions aux limites fait partie intégrante de l'étape de modélisation comme pour les équations posées dans les domaines. La condition de Dirichlet correspond à des obstacles dits mous (ou *soft*) et celle de Neumann à des obstacles dits rigides (ou *hard*), laquelle est la plus pertinente ? Dans le monde physique dans lequel nous vivons, le fluide ne pénètre pas à l'intérieur des obstacles, les déplacements normaux des particules et donc leurs vitesses normales sont donc nuls aux parois. C'est donc la condition de **Neumann** (car $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} p$) qui est utilisée dans l'ensemble des modèles.

Signalons qu'en fait il y a un couplage entre le fluide et la structure au niveau de l'interface, les ondes acoustiques peuvent donc mettre en vibration la structure et transmettre à l'intérieur des cavités (comme l'étage où est déposé le satellite pendant son lancement) une onde acoustique. Le domaine de la vibro-acoustique est un domaine en pleine expansion au niveau des méthodes de simulation.

Certains matériaux comme les matériaux absorbants acoustiques par exemple possèdent des propriétés de dissipation de l'énergie, la modélisation fine de ce matériau est inaccessible avec les moyens informatiques et les techniques numériques actuelles à l'échelle des structures, on utilise alors un modèle équivalent pour traduire de façon macroscopique ses propriétés absorbantes. Fréquemment on introduit une impédance équivalente et la condition aux limites utilisée est alors celle de **Robin** dite aussi d'impédance.

$$(1.9) \quad \frac{\partial p}{\partial n} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0$$

L'impédance α peut être un scalaire mais aussi de façon plus générale un opérateur dépendant des variables d'espace et/ou du temps.

1.2.2 Ondes électromagnétiques

Les équations de Maxwell concernent la propagation des champs électromagnétiques, le cadre est celui de la physique classique (pas de notion de relativité générale ou de théorie générale des champs). Ces champs (\vec{E} , \vec{H}) sont reliés aux forces électromagnétiques de Coulomb et de Lorentz. Les inconnues du problème sont dans ce cas :

- le champ électrique $\vec{E}(x, t) \in \mathbb{R}^3$
- le champ magnétique $\vec{H}(x, t) \in \mathbb{R}^3$
- l'induction électrique $\vec{D}(x, t) \in \mathbb{R}^3$
- l'induction magnétique $\vec{B}(x, t) \in \mathbb{R}^3$

Ces champs obéissent, en l'absence de charges et de courants, aux équations de Maxwell qui regroupent diverses lois comme la loi de Gauss, celle de Faraday, celle d'Ampère établies chacune avant le système général suivant :

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{H} \\ \text{div } \vec{D} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

et sont par ailleurs reliés par les lois de comportement :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \vec{B}(x, t) = \mu(x) \vec{H}(x, t) \\ \vec{D}(x, t) = \varepsilon(x) \vec{E}(x, t) \end{cases}$$

où $\mu(x)$ est la perméabilité magnétique et $\varepsilon(x)$ la permittivité électrique du milieu. Nous nous limiterons au cas où $\mu(x)$ et $\varepsilon(x)$ sont des scalaires positifs. Dans le cas le plus général ce sont des opérateurs 3x3 pouvant dépendre du temps (nous ne considérerons pas non plus dans le cadre de ce cours d'éventuelles non-linéarités). Ils caractérisent le comportement électromagnétique du matériau dans lequel l'onde se propage. Les variations en x décrivent l'éventuelle hétérogénéité du milieu.

Avec les hypothèses précédentes, nous pouvons éliminer \vec{B} et \vec{D} dans les équations de Maxwell en utilisant les lois de comportement, le système obtenu en \vec{E} et \vec{H} est le suivant :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \text{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0 \\ \text{div}(\mu \vec{H}) = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que les équations ne sont pas indépendantes, en effet nous disposons de 8 équations pour 6 inconnues (en dimension 3). En prenant la div des deux premières équations, comme $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{rot}} = 0$, on obtient :

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\mu \vec{H}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0 \end{array} \right.$$

Donc si à l'origine des temps les champs $\mu \vec{H}$ et $\varepsilon \vec{E}$ étaient à divergence nulle, ils le restent à tout temps ultérieur, ce qui donne les deux dernières équations du système (1.12). Nous pouvons éliminer \vec{H} (resp. \vec{E}) du système (1.12) réduit aux deux premières équations en prenant le $\mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}}$ (resp. $\varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}}$) de la première (resp. deuxième) équation et $\frac{\partial}{\partial t}$ de la deuxième (resp. première) et obtenons comme équations :

$$(1.14) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{rot}}(\mu^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = 0.$$

$$(1.15) \quad \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{rot}}(\varepsilon^{-1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = 0.$$

Cas particulier : milieu homogène isotrope Plaçons nous dans le cas particulier d'un milieu homogène isotrope, μ et ε sont alors des constantes. Les équations précédentes deviennent :

$$(1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0 \\ \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

On voit alors apparaître la quantité $\varepsilon \mu$ qui est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On introduit donc c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

qui représente la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu diélectrique. Dans le vide, on a c très proche de $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ qui correspond à la vitesse de la lumière.

En utilisant l'expression (1.3) et en remarquant que les champs \vec{E} et \vec{H} sont à divergence nulle, on obtient sans difficulté les équations suivantes

$$(1.17) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \vec{E} = 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \vec{H} = 0 \end{cases}$$

ce qui justifie que les champs électromagnétiques (\vec{E}, \vec{H}) vérifient l'équation des ondes vectorielle. De même que précédemment pour la vitesse acoustique, il convient de remarquer que ce nouveau système n'est pas équivalent au système (1.16) puisque les conditions de divergence nulle ont disparu du système (1.17).

Comme pour l'acoustique, il convient de déterminer les conditions aux limites au bord des structures pour achever la modélisation.

La plupart des structures métalliques se modélisent par le modèle dit du conducteur parfait, les champs électromagnétiques ne pénètrent pas à l'intérieur de la structure et il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} et de la composante normale du champ magnétique \vec{H} . Les conditions aux limites sont donc :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} |_{\Gamma} = 0$$

et

$$\vec{H} \cdot \vec{n} |_{\Gamma} = 0$$

Il faut noter que cette notion de conducteur parfait n'est qu'un modèle, valable sous certaines hypothèses. En particulier à certaines fréquences, l'hypothèse de non pénétration des champs électromagnétiques devient fausse, il y a une distance dite "épaisseur de peau" le long de laquelle les champs s'atténuent progressivement. Il faut alors adapter la condition aux limites à ce phénomène physique.

De même que pour l'acoustique, des conditions d'impédances existent permettant de prendre en compte différents matériaux : par exemple une fine couche de diélectrique revêtant un métal peut se modéliser *sous certaines hypothèses* par une condition aux limites dite d'impédance :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} - Z \vec{n} \wedge \vec{H} \wedge \vec{n} |_{\Gamma} = 0$$

où l'impédance Z peut être un scalaire mais aussi un opérateur dans le cas le plus général.

1.2.3 Ondes élastiques

L'inconnue du problème est le champ de déplacements dans le milieu solide qui occupe le domaine Ω :

$$\vec{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

représente le vecteur déplacement à l'instant t d'une particule matérielle occupant la position x .

Remarque 1. *On se place dans l'hypothèse des petits mouvements et des petites déformations (hypothèse réaliste pour beaucoup d'applications : prospection sismique, ondes ultra-sonores...) de telle sorte que les représentations lagrangiennes et eulériennes du mouvement du milieu continu sont confondues et que l'on travaille avec les équations linéarisées.*

Les variations de ce champ sont régies par les équations de la mécanique qui, en l'absence de forces extérieures, s'écrivent :

$$(1.18) \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

où $\sigma(\vec{u})$ désigne le tenseur (en l'occurrence une matrice symétrique) des contraintes associé au champ de déplacements $\vec{u}(x, t)$ et $\rho = \rho(x)$ désigne la densité du matériau. Il faut adjoindre aux équations d'équilibre (1.18) la loi de comportement du matériau. Dans le cas d'un matériau linéaire isotrope, cette loi est la loi de Hooke (δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker) :

$$(1.19) \quad \sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u})$$

où $\varepsilon(\vec{u}) = \langle\langle \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \rangle\rangle$ désigne le tenseur des déformations (linéarisé) associé au champ de déplacements \vec{u} :

$$(1.20) \quad \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et où $\lambda = \lambda(x)$, $\mu = \mu(x)$ désignent les constantes de Lamé (ou coefficients de Lamé). Les fonctions ρ , λ , μ sont strictement positives et caractérisent le comportement élastique du matériau. Leur variation en fonction de x décrit l'éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation.

A partir des équations (1.19), il est facile d'obtenir la formulation en déplacements du problème :

$$(1.21) \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div} \vec{u}) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Supposons le matériau homogène, soit λ et μ indépendant de x , les équations précédentes deviennent :

$$(1.22) \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

que nous réécrivons sous la forme vectorielle suivante :

$$(1.23) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - \mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} - \mu \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = 0,$$

qui devient en utilisant la relation (1.3) :

$$(1.24) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = 0,$$

Nous reconnaissons dans l'équation (1.24) les termes vectoriels rencontrés d'une part pour la vitesse acoustique d'autre part pour les champs électromagnétiques, ce qui nous amène à considérer deux types de solutions, celles à div nulle et celles à rot nul.

– on suppose $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = 0$, l'équation (1.24) devient :

$$(1.25) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\Delta} \vec{u} = 0,$$

qui est l'équation des ondes vectorielles avec pour vitesse c_P donnée par

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

De telles solutions sont appelées Ondes de Pression ou Ondes P.

– on suppose $\text{div } \vec{u} = 0$, l'équation (1.24) devient :

$$(1.26) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} = 0,$$

qui est l'équation des ondes vectorielles avec pour vitesse c_S donnée par

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

De telles solutions sont appelées Ondes de Cisaillement (*Shear* en anglais) ou Ondes S. On remarque que les ondes de pression ont une vitesse supérieure aux ondes de cisaillement. Les ondes de pression “ressemblent” aux ondes acoustiques, les ondes de cisaillement aux ondes électromagnétiques, c'est pour cela que les problèmes acoustique (équation des ondes scalaire pour la pression, équation des ondes vectorielle à $\overrightarrow{\text{rot}}$ nul pour la vitesse), électromagnétisme (équation des ondes vectorielle à div nulle) et élasticité (équation des ondes vectorielle à $\overrightarrow{\text{rot}}$ ou div nuls) sont de complexité croissante.

Considérons maintenant les conditions aux limites pour achever la modélisation. Sur l'éventuelle frontière Γ du domaine Ω , on pourra considérer deux types de conditions aux limites :

– la condition de bord encastré

$$(1.27) \quad \vec{u}|_{\Gamma} = 0.$$

– la condition de surface libre

$$(1.28) \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad i = 1, 2, 3.$$

qui s'écrit aussi sous la forme vectorielle :

$$(1.29) \quad \sigma(\vec{u}) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma$$

La condition (1.27) n'est autre que la condition de Dirichlet homogène : elle exprime le fait que les points du bord Γ sont immobiles. La condition (1.29) peut être vue comme une condition de Neumann homogène généralisée : elle exprime le fait qu'aucune force de surface extérieure n'est appliquée sur la surface Γ .

1.3 Contexte général d'un problème de diffraction

Les différentes équations introduites précédemment ne faisaient apparaître ni terme source, ni données initiales ni conditions aux limites. Il existe des solutions non nulles à ces différents problèmes (homogènes) se propageant dans l'espace libre. Le problème que cherche à résoudre l'ingénieur est de déterminer la perturbation générée par un obstacle lorsque de telles ondes (dites ondes incidentes) le rencontre (ce qui fixe les conditions initiales), on parlera d'ondes diffractées. Les équations étant linéaires, on peut décomposer tout signal incident en somme de sinus, c'est la notion de domaine fréquentiel très utilisé par les ingénieurs. Ce paragraphe présente les conventions et la problématique associée à un problème de diffraction.

1.3.1 Domaine temporel - domaine fréquentiel : définitions et convention

Comme les équations sont linéaires, la transformée de Fourier par rapport à la variable temps permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel de la manière suivante :

$$(1.30) \quad (\mathcal{F}p)(\omega) = \hat{p}(\omega) = \hat{p}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} p(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi f t} p(t) dt$$

La transformée de Fourier inverse est alors :

$$(1.31) \quad (\mathcal{F}^{-1}\hat{p})(t) = p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \hat{p}(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi f t} \hat{p}(f) df$$

Remarque 2. Nous avons choisi la convention de dépendance en temps en $e^{-i\omega t}$. Le choix de la convention est arbitraire mais doit être définitif une fois pris et rappelé chaque fois que l'on présente des résultats (théoriques ou numériques) dans le domaine fréquentiel.

Listons les propriétés opératoires les plus utiles de la transformée de Fourier :

$$(1.32) \quad \mathcal{F} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -i\omega \hat{p}(\omega)$$

$$(1.33) \quad \mathcal{F} (p(t - \tau)) = e^{i\omega\tau} \hat{p}(\omega)$$

$$(1.34) \quad \mathcal{F} (p * q) = \hat{p}(\omega) \hat{q}(\omega)$$

$$(1.35) \quad \mathcal{F} (p(t)q(t)) = \frac{1}{2\pi} (\hat{p} * \hat{q})(\omega) = (\hat{p} * \hat{q})(f)$$

$$(1.36) \quad \mathcal{F} (1) = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$$

$$(1.37) \quad \mathcal{F} (e^{-i\omega_0 t}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) = \delta(f - f_0)$$

$$(1.38) \quad \mathcal{F} (\delta(t)) = 1$$

$$(1.39) \quad \mathcal{F} (\delta(t - \tau)) = e^{i\omega\tau}$$

$$(1.40) \quad \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} \quad \text{si } f(t) \in \mathbb{R}$$

Par exemple, en utilisant (1.32), avec la convention précédente, l'équation des ondes scalaire devient l'équation de **Helmholtz** scalaire,

$$-\Delta \hat{u} - \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u} = -\Delta \hat{u} - k^2 \hat{u} = 0$$

l'équation des ondes vectorielles devient l'équation de Helmholtz vectorielle,

$$-\vec{\Delta} \vec{V} - k^2 \vec{V} = \vec{0}$$

le système de Maxwell temporel devient

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} - i\omega\mu_0 \vec{H} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0 \vec{E} = 0 \end{cases}$$

pour les inconnues ou champs “transformées de Fourier” et où l'on a évité d'écrire les chapeaux au dessus des flèches pour ne pas alourdir l'écriture et parce qu'il n'y a pas d'ambiguïté compte tenu de la présence explicite de ω .

1.3.2 Ondes planes et Ondes sphériques

Les ondes planes

On s'intéresse ici à certaines solutions non triviales du système homogène de Maxwell (sans terme source) (1.41) posé dans tout l'espace.

$$(1.41) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases}$$

Nous cherchons dans ce paragraphe une solution sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, t) &= \vec{E}_0 g(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) \\ \vec{H}(x, t) &= \vec{H}_0 g(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) \end{cases}$$

où \vec{v} est un vecteur unitaire. Exprimons que la divergence de \vec{E} est nulle :

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{c} \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{v} \right) g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) = 0$$

d'où

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{v} = 0$$

De même,

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{v} = 0$$

Calculons le rotationnel

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{1}{c} \left(\vec{v} \wedge \vec{E}_0 \right) g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c)$$

La première équation du système (1.41) implique :

$$-\frac{1}{c} \left(\vec{v} \wedge \vec{E}_0 \right) g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) + \mu_0 \vec{H}_0 g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) = \vec{0}$$

d'où

$$(1.42) \quad \vec{H}_0 = \frac{1}{Z_0} \left(\vec{v} \wedge \vec{E}_0 \right)$$

avec

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Par une analyse dimensionnelle, on remarquera que Z_0 est homogène à une impédance (\vec{H} est en $A m^{-1}$ et \vec{E} est en $V m^{-1}$). Z_0 est appelée impédance du vide et vaut environ 120π en Ωm . L'onde est maintenant complètement déterminée, il nous reste à vérifier la deuxième équation du système (1.41).

$$-\frac{1}{c} \left(\vec{v} \wedge \vec{H}_0 \right) g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) - \varepsilon_0 \vec{E}_0 g'(t - \vec{v} \cdot \vec{x}/c) \stackrel{?}{=} \vec{0}$$

ce qui revient à vérifier que la relation

$$(1.43) \quad \vec{E}_0 = Z_0 \left(\vec{H}_0 \wedge \vec{v} \right)$$

est vraie. La réponse est oui, puisque $\vec{E} \cdot \vec{v} = 0$. En effet, comme $|\vec{v}| = 1$, on a

$$\vec{E}_0 = \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{v} \right) \vec{v} + \left(\vec{v} \wedge \vec{E}_0 \right) \wedge \vec{v}$$

ce qui permet de conclure.

Le triplet $(\vec{\nu}, \vec{E}_0, \vec{H}_0)$ forme donc un trièdre direct. Les isovaleurs de \vec{E} et \vec{H} sont déterminées par l'équation :

$$t - \vec{\nu} \cdot \vec{x} / c = \text{Constante}$$

A un temps t fixé, le lieu en espace des isovaleurs des champs est déterminé par :

$$\vec{\nu} \cdot \vec{x} = \text{Constante}$$

ce qui correspond à l'équation d'un plan perpendiculaire à $\vec{\nu}$ direction de propagation en dimension 3. La dénomination d'ondes planes provient de là et par extension on l'adopte aussi en dimension inférieure même si les isovaleurs sont des droites en dimension 2 ou des points en dimension 1.

La transformée de Fourier, et en particulier la relation (1.33), nous donne des solutions non triviales au système fréquentiel de Maxwell homogène (1.44) posé dans tout l'espace :

$$(1.44) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} - i\omega\mu_0\vec{H} = \vec{0} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(x, \omega) = \hat{g}(\omega)\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{H}(x, \omega) = \hat{g}(\omega)\vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{cases}$$

où

$$\vec{k} = k\vec{\nu} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

\vec{E}_0 et \vec{H}_0 vérifiant les relations (1.42) et (1.43). Le vecteur \vec{k} est appelé **vecteur d'onde**, il a pour module le nombre d'onde k et sa direction correspond à la direction de propagation. Remarquons qu'à fréquence fixée, $\hat{g}(\omega)$ est juste une constante multiplicative.

On aurait pu chercher directement une solution du système (1.44) sans passer par le calcul temporel précédent. Posons

$$\begin{cases} \vec{E}(x, \omega) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{H}(x, \omega) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{cases}$$

C'est un couple solution de (1.44) si et seulement si :

$$\begin{cases} i\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - i\omega\mu_0\vec{H}_0 = \vec{0} \\ i\vec{k} \wedge \vec{H}_0 + i\omega\varepsilon_0\vec{E}_0 = \vec{0} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent aux relations (1.42) et (1.43).

Les plans d'équation $\vec{k} \cdot \vec{x} = C^{\text{te}}$ correspondent aux équiphases des champs, en d'autres termes l'ensemble des points d'espace atteignant leur maximum en même temps sont dits en phase et sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation, les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{H} sont orthogonaux entre eux et à la direction de propagation.

Changeons de physique pour introduire les ondes planes en acoustique, nous le ferons en fréquentiel, l'expression générale en temporel s'en déduit aisément. Le système acoustique fréquentiel posé dans tout l'espace et sans terme source s'écrit de la manière suivante avec la convention en temps $e^{-i\omega t}$

$$(1.45) \quad \begin{cases} \frac{-i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div} \vec{U} &= 0 \\ -i\omega \rho_0 \vec{U} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} p &= 0 \end{cases}$$

que l'on réécrit en introduisant k le nombre d'onde et $Z_0 = \rho_0 c$ l'impédance acoustique :

$$(1.46) \quad \begin{cases} -ikp + Z_0 \operatorname{div} \vec{U} &= 0 \\ -ikZ_0 \vec{U} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} p &= 0 \end{cases}$$

Les pression et vitesse acoustiques p et \vec{U} données par

$$\begin{cases} p(x) &= p_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{U}(x) &= \vec{U}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{cases}$$

sont solutions de (1.46) si et seulement si :

$$\begin{cases} -ikp_0 + iZ_0 \vec{k} \cdot \vec{U}_0 &= 0 \\ -ikZ_0 \vec{U}_0 + i\vec{k} p_0 &= 0 \end{cases}$$

En éliminant l'un ou l'autre des champs, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 \\ \vec{U}_0 \text{ est colinéaire à } \vec{k} \end{cases}$$

Les équiphasés sont de même que précédemment des plans perpendiculaires au vecteur d'onde qui est de module le nombre d'onde et la vitesse acoustique est colinéaire au vecteur d'onde.

Considérons désormais un champ vectoriel \vec{V} général vérifiant l'équation de Helmholtz vectorielle (1.48) et cherchons-le sous la forme front d'onde plan :

$$(1.47) \quad \vec{V}(x) = \vec{V}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$(1.48) \quad -\Delta \vec{V} - k^2 \vec{V} = \vec{0}$$

il est immédiat alors que $\vec{V}(x)$ donné par (1.47) est solution de l'équation (1.48) si et seulement si

$$-(-\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{V}_0 - k^2 \vec{V}_0 = 0$$

on retrouve que le vecteur d'onde \vec{k} a pour module le nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c}$. En utilisant la relation fondamentale (1.49)

$$(1.49) \quad \vec{\Delta} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}$$

on obtient

$$-k^2 \vec{V}_0 = -\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{V}_0) + \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{V}_0)$$

Après normalisation, on constate que la relation vectorielle obtenue (1.50) en notant $\vec{\nu} = \frac{\vec{k}}{k}$ le vecteur unitaire correspondant à la direction de propagation

$$(1.50) \quad \vec{V}_0 = \vec{\nu} (\vec{\nu} \cdot \vec{V}_0) + (\vec{\nu} \wedge \vec{V}_0) \wedge \vec{\nu}$$

permet de décomposer toute onde plane vectorielle en somme d'onde plane à rotationnel nul et d'onde plane à divergence nulle. La vitesse acoustique est un exemple du premier cas, les champs électromagnétiques du second cas. Dans le système de l'élasticité, les ondes dites de pression correspondent à des déplacements colinéaires à la direction de propagation, les ondes dites de cisaillement à des déplacements orthogonaux à la direction de propagation.

Les définitions et notations suivantes sont classiquement adoptées :

$$\begin{aligned} \omega &: \text{la pulsation (rad. s}^{-1}\text{)} \\ f = \frac{\omega}{2\pi} &: \text{la fréquence (Hz)} \\ T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} &: \text{la période (temporelle)(s)} \\ k = \frac{\omega}{c} &: \text{le nombre d'onde (rad. m}^{-1}\text{)} \\ \lambda = cT = \frac{2\pi}{k} &: \text{la longueur d'onde (période spatiale) (m)} \end{aligned}$$

Les ondes sphériques

Nous nous plaçons dans cette section dans le cas particulier de la dimension 3 d'espace et nous nous limiterons à l'équation de Helmholtz scalaire (1.51) homogène posée dans tout l'espace.

$$(1.51) \quad -\Delta u - k^2 u = 0$$

Il existe des solutions non triviales à cette équation différentes des ondes planes. Soit par exemple

$$u(x) = \frac{\sin(kr)}{r}, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Notons que cette fonction est régulière même à l'origine et à décroissance lente à l'infini. En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, on obtient :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sin(kr)) = -k^2 u$$

Par un calcul analogue, on vérifie que la fonction

$$u(x) = \frac{\cos(kr)}{r}$$

est solution des équations de Helmholtz en dehors de l'origine. Il en est de même par linéarité pour

$$u^\pm(x) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

Les équiphasés sont des sphères. Quand $r \rightarrow +\infty$, celles-ci deviennent localement planes. Plaçons-nous au voisinage d'un point $X = R\vec{v}$ loin de l'origine ($R \gg 1$). On a pour un point courant x dans ce voisinage :

$$\begin{aligned} r &= |x| = |X + (x - X)| = (|X|^2 + 2X \cdot (x - X) + |x - X|^2)^{1/2} \\ &= R \left(1 + \frac{2}{R} \vec{v} \cdot x' + \frac{|x'|^2}{R^2} \right)^{1/2} \\ &= R + \vec{v} \cdot x' + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

avec $x' = x - X$ et ainsi

$$\frac{e^{ikr}}{r} \simeq \frac{e^{ikR}}{R} e^{\vec{k} \cdot x'} \quad \vec{k} = k \vec{v}$$

L'onde se comporte donc localement comme une onde plane se propageant le long du vecteur directeur \vec{v} , une fois mis en facteur le facteur d'atténuation $\frac{e^{ikR}}{R}$. Ceci explique pourquoi le modèle d'onde plane est fréquemment utilisé pour décrire des sources incidentes sphériques venant de loin.

1.3.3 Causalité et condition de radiation de Sommerfeld

Pour que le problème d'onde en temporel soit bien posé, il faut rajouter des conditions initiales. Ces conditions permettent de fixer le sens du temps. On appellera **solutions causales** les solutions nulles aux temps négatifs et anti-causales celles nulles aux temps positifs. L'équation des ondes étant réversible en temps (le changement de variable $t \rightarrow -t$ laisse inchangée l'équation), il est indispensable pour avoir l'unicité d'une solution d'imposer la causalité, ce qui correspond bien à la réalité physique : soudain il se passe quelque chose (conditions initiales) et on s'intéresse à déterminer l'onde qui en résulte.

Examinons, par exemple, maintenant le problème de Maxwell posé en fréquentiel (1.44). On ne

peut pas définir de conditions initiales puisque la variable temps a disparu après transformation de Fourier. Pour obtenir l'unicité de la solution physique fréquentielle, il importe de retrouver le sens du temps. On doit donc pour fermer le système imposer une condition supplémentaire.

La **condition de radiation** de Sommerfeld introduite à partir de considérations énergétiques

$$(1.52) \quad r \left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

permet de choisir la solution physique. Nous verrons dans le chapitre 3, lors du choix de la «bonne» solution élémentaire, le lien entre causalité et condition de radiation.

Remarque 3. *Attention, l'expression de la condition de radiation dépend du choix de la convention en temps !!! En effet, le lecteur ne doit pas oublier que toutes les quantités dépendant de ik deviennent opposées quand on change de convention. L'expression ci-dessus (1.52) est valable pour la convention en $e^{-i\omega t}$.*

Remarquons déjà que les ondes planes ne vérifient pas cette condition. Soit $u(\vec{x}) = u_0 e^{ik\vec{v}\cdot\vec{x}}$ une onde plane se propageant dans la direction \vec{v} , on a :

$$\frac{\partial u}{\partial r} - ik u = ik u_0 (\vec{v} \cdot \vec{e}_r - 1) e^{ik\vec{v}\cdot\vec{x}}$$

La condition de radiation n'est vérifiée que dans la direction $\vec{e}_r = \vec{v}$, dans toutes les autres directions $r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Dans le domaine temporel, les ondes planes ne sont pas physiques car elles ne sont pas causales et sont donc éliminées par le choix de conditions initiales. De même nous voyons dans le domaine fréquentiel que la condition de radiation les élimine comme solutions non physiques.

1.3.4 Problème de diffraction

Nous allons désormais nous intéresser au problème de diffraction d'ondes par un obstacle. En effet résoudre les équations dans l'espace libre ne sert qu'à déterminer les champs incidents, ce qui intéresse les industriels c'est la perturbation créée par un obstacle et réémise dans toutes les directions de l'espace. Le cas des problèmes intérieurs est différent puisque l'énergie ne peut pas s'évacuer à l'infini et l'on voit apparaître des ondes stationnaires au lieu d'ondes progressives. Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons aux problèmes extérieurs qui concernent beaucoup d'applications. Nous nous intéressons à la résolution d'un problème posé dans un domaine extérieur Ω , c'est à dire le complémentaire d'un ouvert borné Ω_i représentant l'obstacle. Pour poser correctement le problème, il faut rajouter des conditions aux limites à la surface de l'objet. Rappelons que l'obtention de ces conditions aux limites fait partie intégrale du processus de modélisation ayant permis d'obtenir les équations dans le milieu. Nous ne considérerons ici que celles liées au modèle de conducteur parfait :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} |_{\Gamma} = 0$$

et

$$\vec{H} \cdot \vec{n} |_{\Gamma} = 0$$

avec Γ la frontière de Ω et \vec{n} la normale extérieure à Ω . Soit le problème général de diffraction avec termes sources situés en dehors de l'obstacle :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{m}_s \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_s \\ \vec{E} \wedge \vec{n} = 0 \\ \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}) \\ \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma \times \mathbb{R}) \end{matrix}$$

Nous allons décomposer les champs (dits totaux) comme superposition de champs dits incidents et de champs dits diffractés. Définissons d'abord les champs incidents : ce sont les champs créés par les termes sources qui existeraient s'il n'y avait pas d'obstacle, c'est à dire comme si l'on remplissait le domaine initialement occupé par l'obstacle par un matériau de mêmes caractéristiques que le domaine extérieur. Les champs incidents sont donc solutions de :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}^{inc} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}^{inc}}{\partial t} = -\vec{m}_s \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}^{inc} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^{inc}}{\partial t} = \vec{j}_s \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$$

En définissant les champs diffractés (\vec{E}^D, \vec{H}^D) par

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^D \\ \vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^D \end{cases}$$

nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}^D + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}^D}{\partial t} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}^D - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^D}{\partial t} = 0 \\ \vec{E}^D \wedge \vec{n} = -\vec{E}^{inc} \wedge \vec{n} \\ \vec{H}^D \cdot \vec{n} = -\vec{H}^{inc} \cdot \vec{n} \\ \vec{E}^D = \vec{H}^D = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^+) \\ \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma \times \mathbb{R}^+) \\ \text{à } t = 0 \end{matrix}$$

en notant $t = 0$ un instant avant que le champ incident n'arrive sur l'obstacle. Nous n'avons donc mis la causalité que sur le champ diffracté, ce qui nous autorise à utiliser comme modèle les ondes planes comme ondes incidentes puisque nous avons vu que suffisamment loin des sources tout champ se propageant en domaine infini se comporte ainsi. Nous pouvons de même

écrire le problème de diffraction dans le domaine fréquentiel en utilisant la convention $e^{-i\omega t}$.

$$\begin{cases} \begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} - i\omega\mu_0\vec{H} &= -\vec{m}_s \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0\vec{E} &= \vec{j}_s \end{aligned} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \begin{aligned} \vec{E} \wedge \vec{n} &= 0 \\ \vec{H} \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \end{cases}$$

On introduit de même les champs incidents solutions de :

$$\begin{cases} \begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E}^{inc} - i\omega\mu_0\vec{H}^{inc} &= -\vec{m}_s \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}^{inc} + i\omega\varepsilon_0\vec{E}^{inc} &= \vec{j}_s \end{aligned} & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

et en définissant les champs diffractés (\vec{E}^D, \vec{H}^D) par :

$$\begin{cases} \vec{E} &= \vec{E}^{inc} + \vec{E}^D \\ \vec{H} &= \vec{H}^{inc} + \vec{H}^D \end{cases}$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} \begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E}^D - i\omega\mu_0\vec{H}^D &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}^D + i\omega\varepsilon_0\vec{E}^D &= 0 \end{aligned} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \begin{aligned} \vec{E}^D \wedge \vec{n} &= -\vec{E}^{inc} \wedge \vec{n} \\ \vec{H}^D \cdot \vec{n} &= -\vec{H}^{inc} \cdot \vec{n} \end{aligned} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \\ r(\vec{E}^D - Z_0\vec{H}^D \wedge \vec{e}_r) \rightarrow 0 & \text{quand } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Il est important de noter que la condition de radiation est indispensable sur les champs diffractés pour obtenir un problème bien posé et physique. De même que dans le domaine temporel, le problème de diffraction posé comme un problème aux limites sans terme source est adapté aussi à un champ incident de type onde plane.

1.4 Quelques applications industrielles dans l'aéronautique

Avant de détailler dans les chapitres suivants les fondements mathématiques de la résolution des phénomènes de propagation, nous allons présenter leurs principales applications dans le domaine de l'aéronautique mais aussi de l'industrie de défense et spatiale.

La modélisation des équations de Maxwell régissant la propagation des ondes électromagnétiques a suscité un grand nombre de recherches à partir des années 1980. Plusieurs raisons expliquent cet engouement : des besoins et donc un sponsor (le ministère de la défense), la maturité de méthodes numériques disposant d'un solide cadre mathématique, l'explosion des calculateurs scientifiques rendant accessible la montée en taille des problèmes traités.

1.4.1 La furtivité Radar

La furtivité Radar concerne la détection de cibles (agressantes) par un radar. Un radar émet une onde électromagnétique qui se propage dans le vide, si cette onde rencontre un objet - métallique par exemple- elle se réfléchit et est diffractée dans les diverses directions de l'espace. Ces ondes diffractées permettent une fois analysées de déterminer l'objet diffractant : on parle alors de sa signature radar. Une direction d'intérêt privilégié est la direction d'où vient l'onde incidente, en effet le même radar souvent émet et détecte du même endroit. En pratique, le fonctionnement d'un radar est régi par la théorie du signal sous l'hypothèse que la cible est réduite à un point et qu'elle réémet le signal incident à l'identique (avec un effet Doppler si elle est en mouvement) fois un coefficient d'atténuation caractéristique de sa géométrie et un retard dépendant de sa distance.



FIG. 1.1 – Radar MASTER S (www.thalesraytheon.com) fonctionnant en bande $S=[2,6\text{GHz};4\text{GHz}]$

La problématique de la furtivité est double :

- le radariste cherche à déterminer la signature des menaces potentielles afin d'évaluer son dispositif de détection
- le missile ou autre agresseur cherche à diminuer sa signature afin d'être détecté si ce n'est jamais, au moins le plus tard possible, c'est à dire après réussite de la mission. Il dispose de plusieurs solutions pour minimiser la signature radar de son objet :
 - soit concevoir sa plateforme en minimisant la SER dans des secteurs privilégiés au détriment de secteur à forte SER mais dont la probabilité d'être éclairé par l'onde incidente reste très faible,
 - soit en envisageant des formes "appropriées", l'avion furtif américain F117 en est l'exemple type.

Lorsque les limites géométriques sont atteintes, le concepteur peut alors mettre en oeuvre des solutions matériaux pour recouvrir ou réaliser des structures absorbantes. Il s'agit alors

de matériaux passifs dont les paramètres radioélectriques sont adaptés soit à la menace présente, soit à une large bande de fréquence mais avec des performances moindres. En dernier recours, des solutions dites actives (la cible émet une onde venant "détruire" l'onde incidente par interférence) sont utilisées pour décaractériser la plateforme.

Dans les deux cas, le problème se ramène à caractériser la signature des différentes menaces (missiles, porte-avion, avion de chasse...).

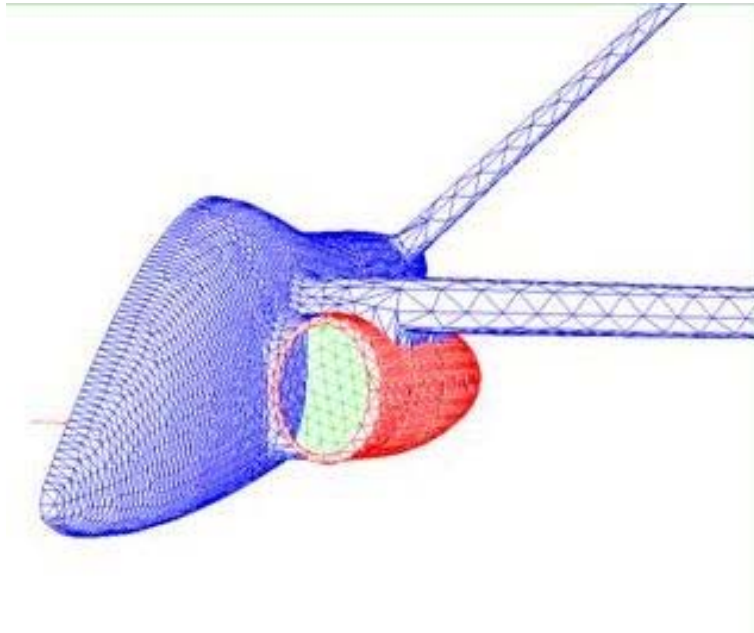


FIG. 1.2 – Maillage d'un avion pour étude de furtivité : influence de l'entrée d'air

Le problème a d'abord été posé dans le domaine fréquentiel : les radars travaillant en général sur une bande de fréquence relativement étroite.

Dans le cadre de la modélisation de certains missiles, la signature est très faible et on cherche donc des résultats précis pour des niveaux bas. On privilégiera donc une méthode numérique fréquentielle et très précise. Lorsque les objets sont grands devant la longueur d'onde, on peut utiliser une approximation dite haute fréquence des équations de Maxwell et ramener l'étude des différentes interactions onde-structure à des phénomènes géométriques comme pour les rayons lumineux.

Les différentes méthodes dites asymptotiques utilisées dans l'industrie (Geometrical Theory of Diffraction GTD, Uniform Theory of Diffraction UTD, Physical Theory of Diffraction PTD) n'entrent pas dans le cadre de ce cours qui se limite uniquement aux méthodes dites numériques résolvant les équations de Maxwell sans approximation.

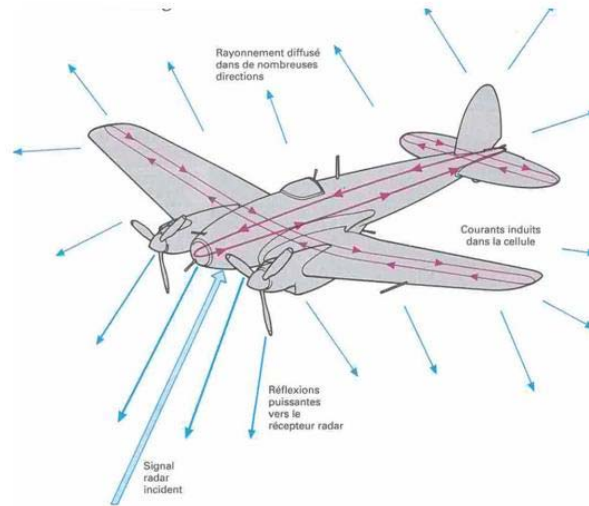


FIG. 1.3 – Principaux phénomènes de diffraction

Supposons une onde plane incidente d'amplitude E^{inc} arrivant sur la cible, notons $E^{diff}(R, \theta, \phi)$ le champ rétrodiffusé dans la direction (θ, ϕ) à la distance R de la cible, on note $\sigma(\theta, \phi)$ la SER (Section Efficace Radar ou Surface Equivalente Radar) définie par

$$\sigma(\theta, \phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left| \frac{E^{diff}(R, \theta, \phi)}{E^{inc}} \right|^2$$

Cette quantité est homogène à une surface et correspond à la surface dont il faudrait disposer si elle diffusait de façon isotrope dans tout l'espace pour renvoyer un écho de même puissance que celui effectivement reçu par le récepteur.

Au début des années 80, la méthode des Equations Intégrales est apparue et s'est imposée dans la gamme des basses à moyennes fréquences pour le calcul de la SER de différents objets.

La méthode des Equations Intégrales sera présentée en détail au chapitre 5, nous nous contenterons ici d'en présenter les principales propriétés.

Le problème de diffraction précédent est un problème posé dans un domaine extérieur, au sens du complémentaire d'un domaine borné (la cible), ce domaine est donc infini et se pose alors automatiquement pour toute méthode numérique le problème de la troncature du domaine de calcul (on ne va pas mailler jusqu'à l'infini). Nous verrons chapitre 2 qu'une condition aux limites de champ nul revient à générer un mur parfaitement réfléchissant, soit donc par **le principe des images** une onde de même amplitude revenant dans le domaine de calcul.

En utilisant la fonction de Green (solution élémentaire des équations de Maxwell), on peut par produit de convolution représenter la solution de tout problème de diffraction posé en **milieu homogène** par une intégrale définie sur la surface de l'objet diffractant et fonction uniquement de traces (ou limites) des champs solutions sur l'objet. Cette *représentation intégrale* permet de prendre en compte directement le comportement à l'infini de la solution, ce qui permet de lever le problème de troncature précédent. La détermination des traces des champs solutions se fait en résolvant un problème aux limites posé sur la surface de l'objet diffractant, c'est l'**équation**

intégrale. On peut mettre cette équation sous forme variationnelle en suivant les techniques habituelles utilisées pour les problèmes elliptiques et utiliser une méthode d'éléments finis pour obtenir un système linéaire à résoudre.

Par conservation des ennuis (il n'y a pas de miracle ! !), si on s'est certes ramené à un problème posé sur des surfaces et non plus des volumes donc générant moins d'inconnues, le système linéaire obtenu n'est plus creux comme pour une EDP résolue par une méthode d'éléments finis usuelle mais complètement plein. La limitation en terme de taille de problème traité provient de cette caractéristique : si on choisit une méthode de résolution directe comme une méthode de Gauss il faut stocker la matrice (ce qui n'est plus trop un problème dorénavant vu le faible prix des disques) et surtout l'algorithme de résolution est en *nombre d'inconnues au cube*.

Calculons l'ordre de grandeur des problèmes. La taille d'un problème dépend de la surface de l'objet considéré en terme de longueurs d'onde. En effet, la solution fréquentielle est oscillante et s'exprime en terme de e^{ikx} avec k le nombre d'onde fonction de la fréquence. Pour décrire une fonction sinusoidale, il faut au minimum disposer de 5 points par longueur d'onde. Supposons que nous maillons la surface S de l'objet en triangle rectangle isocèle de côté h , le nombre d'éléments triangulaires N_{el} est donné par

$$S = N_{el} * \frac{h^2}{2}$$

La taille maximum des arêtes étant $\sqrt{2}h$, nous avons la relation :

$$2h^2 = \frac{\lambda^2}{25}$$

où λ est la longueur d'onde. En électromagnétisme, pour un objet métallique les inconnues sont positionnées au milieu des arêtes, nous avons alors asymptotiquement la dépendance suivante :

$$N_{inc} = \frac{3}{2} N_{el}$$

donc

$$N_{inc} = 150 \frac{S}{\lambda^2}$$

La longueur d'onde étant inversement proportionnelle à la fréquence du calcul, on voit immédiatement que le coût en temps de calcul de la résolution est proportionnel à la puissance sixième de la fréquence. Donc multiplier par 2 la fréquence induit une multiplication par 64 du temps de calcul pour une fréquence ! ! !

Quelques chiffres permettent de mesurer l'ampleur du potentiel de la méthode intégrale et de ses évolutions récentes (en particulier l'introduction des méthodes multipôles que nous présenterons au chapitre 6) :

- Méthode intégrale sur station de travail : taille des problèmes traités : 10 000 inconnues années 80
- Méthode intégrale parallèle sur super calculateurs : taille des problèmes traités : 100 000 inconnues années 90

- Méthode intégrale + Fast Multipole Method (FMM) : taille des problèmes traités : 1 000 000 inconnues fin des années 90
- Méthode intégrale + FMM + parallélisme : taille des problèmes traités : 40 000 000 inconnues années 2000

15 000 inconnues correspond à des surfaces de l'ordre de $100\lambda^2$ donc des objets n'excédant par 10λ d'envergure. 1 500 000 inconnues correspond à des surfaces de l'ordre de $10\,000\lambda^2$ donc des objets n'excédant par 100λ d'envergure. A 300MHz , la longueur d'onde est d' 1m , les objets accessibles pour la méthode intégrale classique non parallèle sont de l'ordre de 10m^2 et passent avec la méthode FMM à 100m^2 . Pour fixer les idées, un missile de croisière a par exemple une surface de l'ordre de 10m^2 . On peut donc parler de véritable révolution puisque l'on a gagné au moins un facteur 10 soit sur la dimension caractéristique des objets traités à fréquence fixe soit sur la fréquence maximum possible pour des objets de taille fixe. Nous aborderons au chapitre 6 la méthode FMM et les perspectives actuelles des méthodes numériques, en particulier l'utilisation de méthodes intégrales temporelles qui peuvent permettre d'obtenir le calcul de la SER sur toute la bande de fréquence. Les figures (1.4) et (1.5) présentent les traces des champs électromagnétiques, pour une structure diffractante représentant une entrée d'air sur un fuselage, issues d'un calcul FMM comportant plus d'1 million d'inconnues, les oscillations sont caractéristiques de la longueur d'onde (le fuselage à une longueur d'environ 70λ) ce qui illustre l'apport de la méthode FMM.

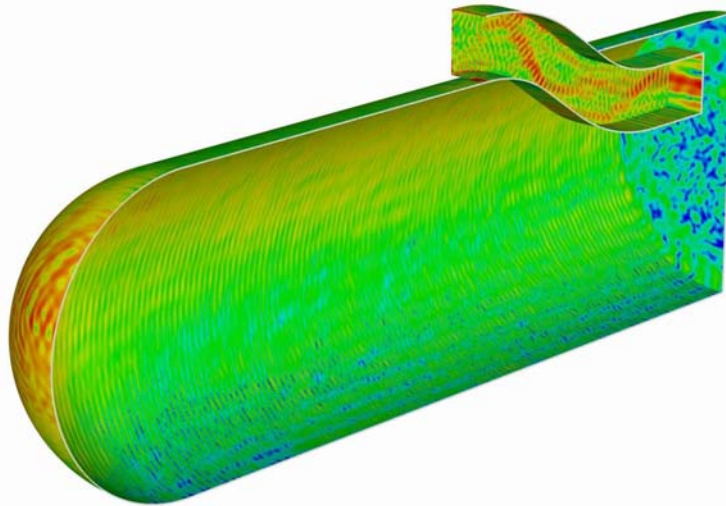


FIG. 1.4 – Entrée d'air sur fuselage

1.4.2 La compatibilité électromagnétique

La Compatibilité ElectroMagnétique caractérise « l'aptitude d'un dispositif, d'un appareil ou d'un système à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante

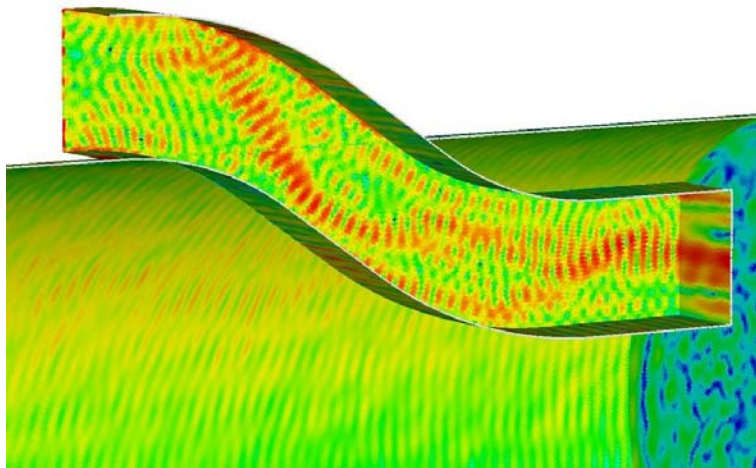


FIG. 1.5 – Entrée d'air sur fuselage : détail

sans produire lui-même de perturbations électromagnétiques de nature à créer des troubles graves dans le fonctionnement des appareils ou des systèmes situés dans son environnement».

Des expériences de la vie courante qui nous rapprochent des effets corrigés par cette discipline sont les suivantes : grésillements dûs à la proximité d'un téléphone portable à côté d'un téléviseur, "fritures" sur une ligne téléphonique.

Ces effets sont dûs à la présence de sources de bruit électromagnétiques dans l'environnement des systèmes électriques et électroniques. Différentes sources de bruit sont classiquement identifiées : bruit dit industriel (environnement aéroportuaire, urbain, autoroutier, effets des radars, appareils électroniques embarqués par les passagers d'un avion), bruit naturel (foudre), décharge électrostatique (chargements atmosphériques, effets triboélectriques), IEMN (Impulsion Electro-Magnétique d'origine Nucléaire).

Suivant les secteurs industriels (aéronautique, automobile, télécommunications, industrie des jouets, ...), les préoccupations liées à la maîtrise de la CEM sont de différents ordres : sécurité, confort, respect d'une norme, impact sur les personnes...

Dans le secteur de l'aéronautique, du spatial et de la défense, plusieurs besoins ont permis de développer cette discipline et les outils/méthodologies qui lui sont associées. Tout d'abord, il a fallu protéger les missiles et autres lanceurs (fusées) contre des menaces de type foudre ou IEMN (effets indirects de la foudre, illumination par l'onde électromagnétique provoquée par l'explosion d'une bombe nucléaire (IEMN)). Dans le domaine de l'aviation, il a fallu permettre l'emploi de plus en plus massif de calculateurs de vol électroniques et assurer le positionnement des câbles pour qu'ils communiquent.

Actuellement, plusieurs tendances de fond "challengent" à nouveau ce métier et amènent au développement de nouveaux outils et méthodologies : utilisation de matériaux composites dans les structures avion afin de diminuer le poids (du coup perte de l'"effet Faraday" à basses fréquences), respect de normes environnementales pour assurer le bien-être des personnes (distances de sécurité à respecter à côté des antennes de télécommunication), utilisation de plus en

plus fréquente d'équipements électroniques dans les avions (suppression de commandes de vol hydrauliques) et les automobiles (la peugeot 307 contient autant d'électronique qu'un A320 du début des années 1980...), utilisation non contrôlée des appareils électroniques par les passagers d'un avion, développement d'un grand nombre de normes (norme CE pour le domaine civil grand public créée dans les années 1990).

Les solutions pour se prémunir des inconvénients associés à une non-maîtrise de la CEM existent : blindage des structures/câbles par des matériaux métalliques (effet cage de Faraday), protection hardware (filtrage ou écrêtage des signaux en entrée de carte électronique par un composant électronique), protection software (traitement logiciel du signal), ... L'enjeu industriel est de maîtriser le dimensionnement de ces protections pour aboutir au meilleur compromis coût - poids - risque consenti. Ce compromis doit être évalué le plus tôt possible dans un cycle de conception afin d'offrir la meilleure solution.

Pour les grands systèmes, on distingue classiquement plusieurs types d'analyses de compatibilité électromagnétique :

- Compatibilité antennaire (fonctionnement simultané de différentes antennes)
- Compatibilité intra système (fonctionnement simultané d'équipements électriques/électroniques)
- Compatibilité inter système (arrivée d'un avion sur un aéroport, passage d'une voiture sous une ligne de courant)

Dans tous ces cas, pour effectuer une analyse globale sur un grand système, on distingue dans le problème trois notions qui correspondent au découpage du problème physique global :

- **Source** : Elle doit être caractérisée par ses propriétés d'émission (niveaux de champs électromagnétiques, énergie transmise, fréquence de transmission, ...)
- **Mode de couplage** : Les modes de couplage entre une source de perturbation et une victime peuvent être classifiés selon le type de perturbation et son support de propagation :
 - **Couplage par conduction** : propagation d'une tension ou d'un courant sur des conducteurs,
 - **Couplage par champ** : propagation d'un champ électromagnétique dans un milieu non-conducteur (air, autre type de matériau isolant) ou conducteur (blindage métallique).

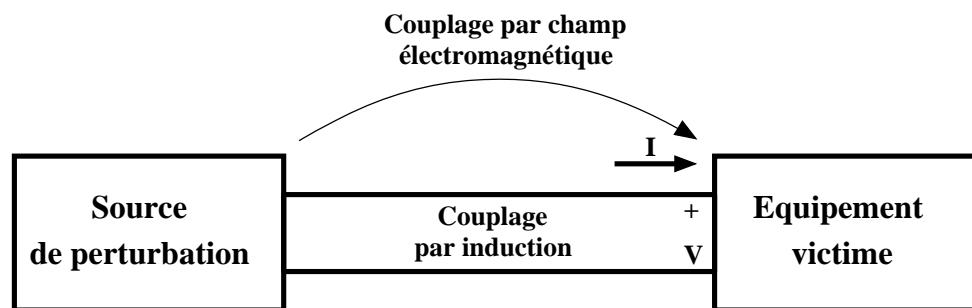


FIG. 1.6 – Les différents modes de couplage

- **Victime** : Il s'agit de déterminer le mode de défaillance dû à la perturbation (brouillage du signal, propagation de signaux erronés, destruction de composants électroniques, ...). La victime en CEM est l'analogie de l'oreille en acoustique, c'est elle seule qui juge du degré

de perturbation. La complexité de la CEM provient en grande partie de la multiplicité des types de victime (équipements électroniques de générations différentes, signaux ayant des caractéristiques très variées (analogiques, numériques, large spectre/spectre étroit,...)).



FIG. 1.7 – Carte électronique

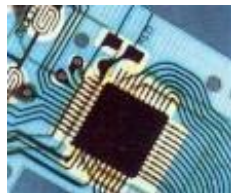


FIG. 1.8 – Composant électronique

Les problèmes actuels de Compatibilité Electromagnétique sur grands systèmes sont caractérisés par :

- Un spectre de fréquence très large bande [0 Hz - 20 GHz],
- Niveau de précision requis pas excessif (des marges et des scénarii cas-pires sont couramment utilisés pour définir les dimensionnements),
- Plusieurs types d'observables suivant le mode de défaillance de l'équipement victime (tension, courant, champ E, champ H, énergie ElectroMagnétique, puissance P, taux d'erreurs...),
- Lien avec des composants électroniques non linéaires (diodes, transistors),
- Diversité des milieux de propagation : milieu ouvert (espace libre, chambre anéchoïque), milieu guidé/cavité (cabine avion, capot moteur, guides d'onde, chambre réverbérante).

Modélisation en CEM

Différents types de modèles sont couramment utilisés en CEM. On se limitera ici à ceux résolvant les équations de Maxwell linéaires. Pour certains composants, des modèles de type Maxwell-Lorentz ou mécanique quantique sont aussi utilisés. Pour simplifier la classification, on peut distinguer différents régimes harmoniques (Basse Fréquence, Moyenne Fréquence, Haute Fréquence). Les modèles que nous présentons seront alors plus ou moins adaptés (critère d'adéquation par rapport à la réalité physique) et performants (critère de vitesse de convergence de l'algorithme associé) suivant la bande de fréquence.

Séparation de la bande de fréquence

En **Basse Fréquence** (dimensions du système « λ_{min} »), on peut considérer un régime quasi-statique. Ce modèle ne tient pas compte d'effets géométriques liés à la propagation (dimensions

du système, distance). Le modèle utilisé est un modèle de Kirchhoff, le système peut alors être représenté par des éléments électriques. La résolution du problème revient à chercher les solutions d'un circuit électrique.

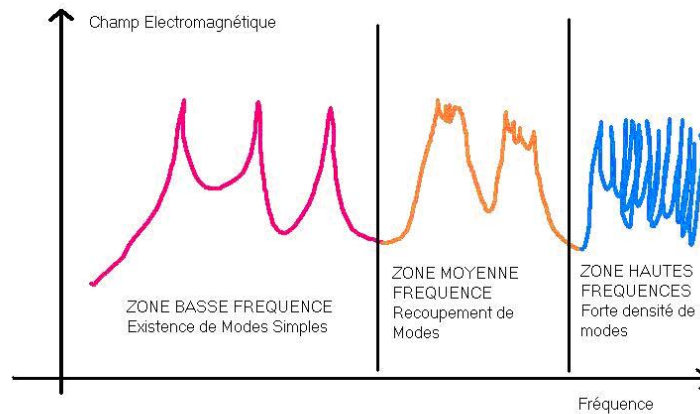


FIG. 1.9 – Différents régimes sur la bande de fréquence

Pour les problèmes de câblage en **Basse Fréquence** et en **Moyenne Fréquence**, on considère la théorie des lignes de transmission (mode guidé, ondes TM - TEM, dimensions transversales « λ_{min} »). On représente alors une propagation longitudinale dans le câblage.

Pour des structures quelconques, il n'existe pas de méthode générale efficace à très basse et très haute fréquence en même temps. Dans le domaine aéronautique, pour représenter les effets dus à la foudre et aux agressions radar, la principale méthode utilisée au niveau des structures est la méthode FDTD (Finite Difference in Time Domain) que nous présenterons en détail au chapitre 4. Elle permet en effet de couvrir un large spectre de fréquence (de quelques kHz à plusieurs centaines de MHz) pour un coût de calcul relativement faible (une journée/un week-end sur une machine parallèle). Rappelons ici ses principales caractéristiques.

On utilise la méthode des Différences Finies en temps et en espace sur le système de Maxwell écrit dans le domaine temporel. Le schéma numérique utilisé le plus fréquemment est un schéma explicite décalé en temps et en espace pour les champs \vec{E} et \vec{H} . La discrétisation des opérateurs est centrée en temps et en espace ce qui permet d'obtenir l'ordre 2 en temps et en espace. Le schéma numérique conserve la propriété de conservation de l'énergie comme pour le problème continu. On subdivise donc le domaine de calcul en cubes réguliers ce qui présente l'intérêt de ne pas avoir à stocker le maillage mais qui a l'inconvénient d'approcher les domaines courbes par des marches d'escalier. Le schéma en temps est explicite, il n'y a aucune inversion de système linéaire à effectuer, en revanche comme souvent la stabilité n'est assurée que sous une condition dite CFL reliant le pas de discrétisation en temps au pas de discrétisation en espace. La méthode se parallélise facilement et la figure (1.10) illustre les progrès effectués en moins de 15 ans :

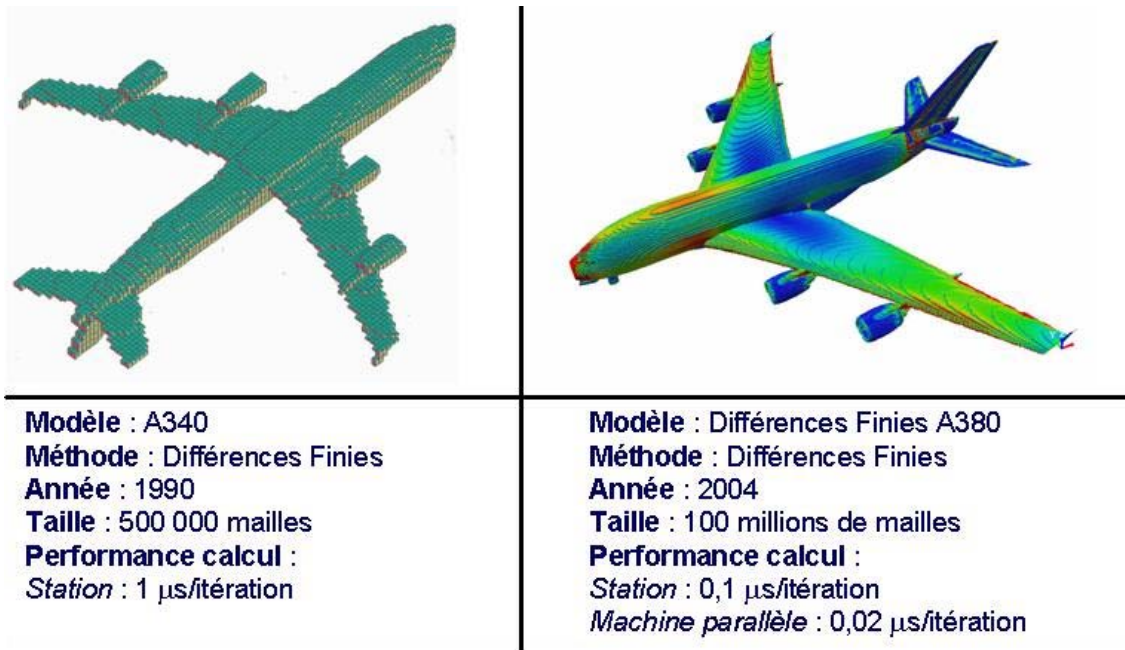


FIG. 1.10 – Evolution des modèles différences finies

Pour décrire des phénomènes très Haute Fréquence, on doit prendre un pas de temps très petit, pour décrire des phénomènes très Basse Fréquence on doit effectuer une durée de simulation longue. Donc un petit pas de temps pour une grande durée de simulation signifie beaucoup d'itérations (donc c'est très coûteux en terme de temps de calcul) et nous verrons au chapitre 4 que la dispersion numérique présente dans les principales méthodes numériques temporelles utilisées dans le monde industriel génère des erreurs de plus en plus fortes à mesure que la durée de simulation augmente.

Les méthodes Haute Fréquence ne sont pas encore développées d'un point de vue industriel pour les applications CEM car si le besoin est apparu dans les années 90, une approche macro-modèle est encore utilisée. Les modèles classiques, qui ne seront pas développés dans ce cours font appel aux résultats asymptotiques (optique géométrique, optique physique, ...). Cependant, les équipements fonctionnant avec des fréquences toujours plus hautes amènent à penser que c'est une voie d'avenir de la modélisation en CEM.

Réalisations concrètes et utilisations actuelles de la Modélisation dans le secteur aéronautique

Voici quelques illustrations de l'utilisation des méthodes numériques en CEM :

- Définition d'essais foudre de certification d'un avion (figure 1.11)
- Gestion de la diversité dans le milieu automobile
- Conception d'une carte électronique pour respecter des niveaux d'émission (figure 1.12)

Perspectives

L'enjeu actuel de la modélisation ne concerne plus désormais le développement et l'amélioration des méthodes mais leur industrialisation (temps passé par l'ingénieur pour réaliser son modèle numérique, le valider, positionner ses cables, ses fentes, ergonomie pour visualiser 100

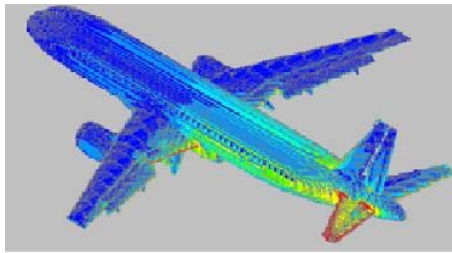


FIG. 1.11 – Modélisation des effets foudre sur A320

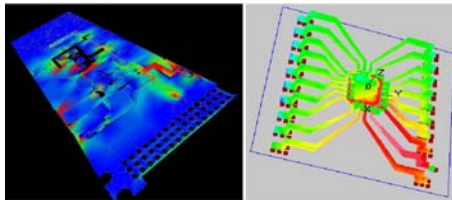


FIG. 1.12 – Modélisation par éléments finis de carte et composant électroniques

millions de maille, etc..) et le couplage multi-échelles. En effet il est illusoire de décrire les structures tridimensionnelles avec le pas caractéristique des équipements et des composants. La prise en compte des incertitudes sur les données d'entrée, les modèles ... dans la chaîne de modélisation est l'enjeu qui permettra en calculant mieux les probabilités de défaillance de diminuer les coûts par la diminution des marges de sécurité. Il faut toutefois garder les macro-modèles pour conserver un lien avec les échelles usuelles pour permettre l'analyse des résultats.

1.4.3 Les antennes

L'antenne est l'élément final de la chaîne de fonctionnement des systèmes qui permet la communication avec le monde extérieur, qu'elle soit en émission ou en réception. Plusieurs problématiques essentielles nécessitent un besoin en simulation numérique :

- La conception et le dimensionnement de l'élément rayonnant en fonction des différentes missions : antenne d'émission très directive et à bande de fréquence étroite (poursuite radar), antenne de réception à diagramme très ouvert pour assurer la communication sol ou avec satellite (navigation, aide à l'atterrissage).

Les principaux critères à assurer concernent :

- un faible niveau des lobes secondaires, porteurs d'informations qui peuvent induire en erreur le calculateur associé s'ils sont trop élevés,
- le gain de l'antenne qui caractérise le bilan de liaison, c'est à dire la puissance effectivement rayonnée par l'antenne dans la direction d'intérêt par rapport à la puissance fournie,

- le radome qui doit assurer simultanément une protection mécanique de l'antenne et être transparent aux fréquences de travail pour assurer les performances nominales de l'antenne (minimiser le Taux d'Ondes Stationnaires caractérisant les ondes réfléchies par le radôme, ne pas modifier le diagramme de rayonnement)
- l'impédance d'antenne qui doit être la plus proche possible de l'impédance du circuit électronique qui lui est raccordé pour éviter la désadaptation

- L'implantation d'antennes sur porteur dont la mission est
 - de s'assurer dans un premier temps que l'antenne implantée sur structure ne sera pas perturbée par d'autres éléments de structure (nacelles moteur, train d'atterrissage...) et que la fonction demandée (diagramme omnidirectionnel par exemple) est correctement réalisée
 - et dans un second temps d'optimiser ces implantations pour minimiser l'espace ou les surfaces utilisées, ou pour ajouter de nouvelles antennes.

- Le "couplage" ou plus exactement le "découplage" entre antennes qu'il est nécessaire d'assurer pour ne pas brouiller les communications ou le transfert d'informations entre différents récepteurs. Dans ce cas particulier, il est important de s'assurer que l'antenne est insensible aux perturbations générées par les antennes proches qui fonctionnent dans la même bande de fréquence, mais aussi à des fréquences différentes dont les harmoniques seraient proches de la fréquence concernée (par exemple harmonique 13 d'une antenne à 120MHz (VHF) avec une antenne à 1560 MHz (GPS)). La difficulté réside dans le fait qu'il faut modéliser les antennes hors de leur bande de fonctionnement.

En ce qui concerne la conception d'antennes, dès le milieu des années 80, la méthode intégrale a été très utilisée, en particulier la taille des éléments rayonnants étant de l'ordre de la longueur d'onde, les modèles restaient très raisonnables en terme de taille et temps de calcul. Ce domaine a bénéficié directement du développement des méthodes intégrales pour la furtivité.

L'implantation d'antennes sur porteur reste limitée à quelques centaines de MHz par méthodes exactes, on utilisera une méthode asymptotique comme la GTD pour évaluer à partir de la description fine de l'antenne dans son environnement proche la perturbation apportée par la structure porteuse. Les figures (1.13) et (1.14) illustrent la modélisation fine par méthode intégrale.

La figure (1.16) illustre la mise en oeuvre d'une méthode asymptotique à base de rayons travaillant directement sur la CAO (1.15) et non pas sur un maillage de la structure.

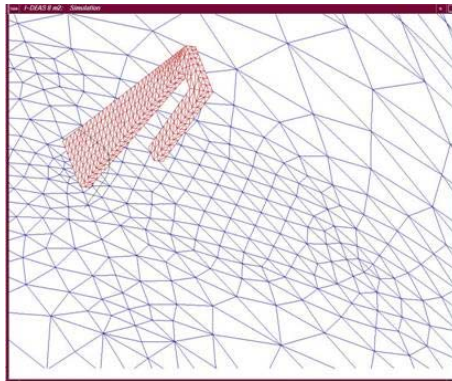


FIG. 1.13 – Modélisation par éléments finis d'une antenne VHF et son environnement proche

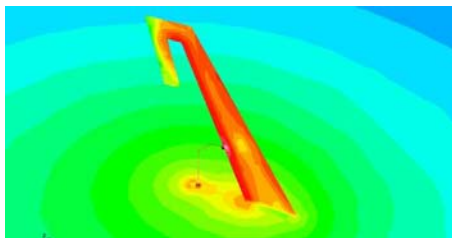


FIG. 1.14 – Visualisation des champs sur l'antenne VHF

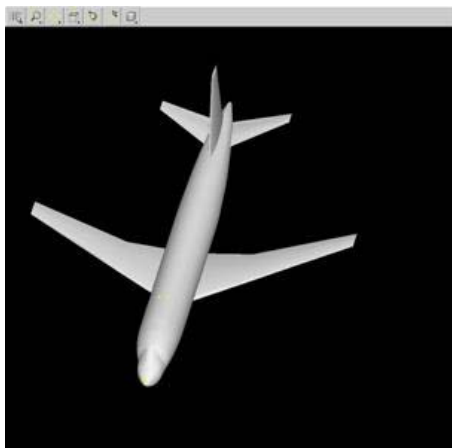


FIG. 1.15 – CAO de structure type avion

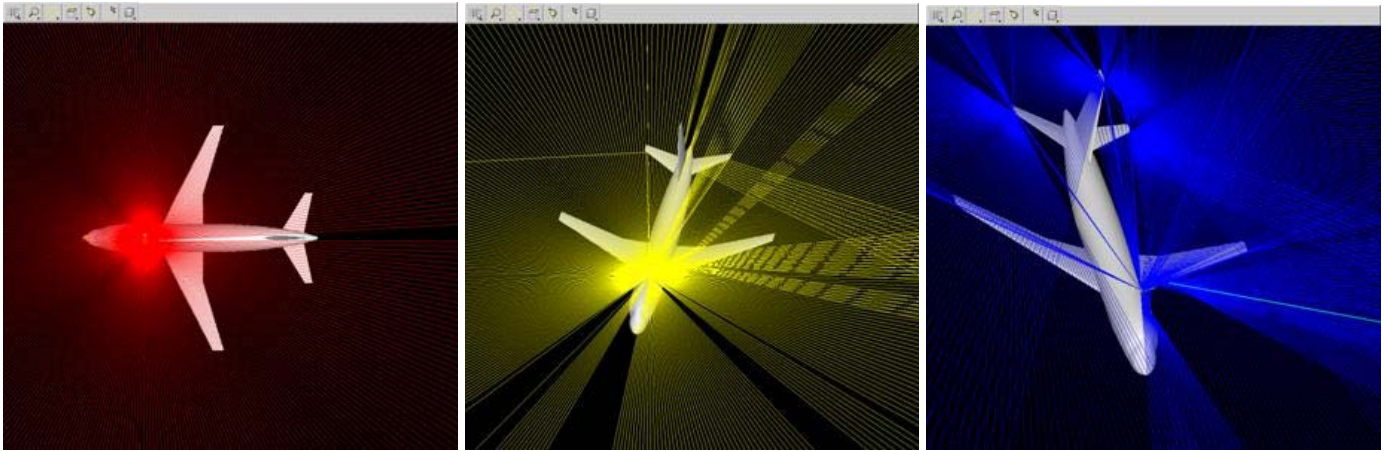


FIG. 1.16 – rayons directs, rayons réfléchis par les surfaces, rayons diffractés par les arêtes

Ce couplage faible de méthodes numériques (faible car on ne prend pas en compte les effets de la structure dans le fonctionnement propre de l'antenne) se révèle souvent efficace : en effet, la donnée observée est le diagramme de rayonnement de l'antenne, ce champ dit lointain est plus régulier que celui au voisinage très proche de l'antenne et donc ne nécessite pas une description trop fine pour être précis. La méthode FMM a permis dans ce domaine aussi de gagner un ordre de grandeur dans la taille des problèmes considérés.

En revanche, la problématique du couplage entre antennes est plus difficile car la donnée observée (le coefficient de couplage) est une donnée non moyennée et peu régulière. Actuellement avec la puissance informatique à disposition seule une méthodologie de couplage ou décomposition de domaines peut permettre d'augmenter les fréquences étudiables.

Signalons pour conclure l'importance et la difficulté de la validation des méthodes numériques. Les essais expérimentaux restent le seul moyen de validation en particulier dans la zone des moyennes fréquences où peu de méthodes exactes sont disponibles et où les méthodes asymptotiques ne sont pas encore valides.

Chapitre 2

Analyse des problèmes de propagation d'ondes en dimension 1 d'espace

2.1 Introduction

Dans le cas monodimensionnel, l'équation des ondes sans terme source sous sa forme générale non dispersive tenant compte d'hétérogénéité s'écrit simplement :

$$(2.1) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

Cette équation est notamment utilisée pour modéliser la propagation des ondes le long d'une corde : elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes ou équation du télégraphiste. Sans entrer dans les détails de la modélisation, mentionnons simplement que les mouvements des points de la corde, supposée rectiligne au repos, sont supposés unidimensionnels et transverses. Le scalaire $u(x, t)$ représente alors le déplacement (avec son signe !) du point de la corde d'abscisse x à l'instant t . La présence des coefficients ρ et μ permet de prendre en compte les propriétés de la corde (section, densité,...) qui peuvent éventuellement varier d'un point à un autre.

Nous allons voir que, sans utiliser des outils mathématiques sophistiqués, on peut dire beaucoup de choses sur cette équation et ainsi appréhender facilement les principales propriétés de l'équation des ondes. Ceci confèrera à ce chapitre un caractère très élémentaire sur le plan technique. En outre, nous ne nous préoccupons pas toujours de la justification rigoureuse des calculs que nous mènerons (celle-ci est notamment possible à la lumière des chapitres qui suivront) et insisterons plutôt sur les résultats et les idées associés à cette modélisation.

2.2 Propriétés qualitatives de la solution du problème de Cauchy

Nous considérons ici le cas où les fonctions $\rho(x) = \rho$ et $\mu(x) = \mu$ sont constantes, ce qui nous amène à l'équation des ondes 1D sur la droite réelle avec vitesse de propagation constante

égale à

$$(2.2) \quad c = \sqrt{\mu/\rho}.$$

Nous nous intéressons à la solution du problème de Cauchy :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il se trouve que ce problème peut se résoudre analytiquement.

2.2.1 La formule de D'Alembert

Théorème 1. *La solution u du problème (2.3) est donnée par la formule de D'Alembert :*

$$(2.4) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)\} \\ \quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Démonstration. Nous utiliserons le changement de variable :

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct,$$

et introduisons la fonction :

$$U(\xi, \eta) = u(x, t),$$

dont il est facile de vérifier qu'elle satisfait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Nous en déduisons qu'il existe deux fonctions d'une variable $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ telles que :

$$U(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi).$$

En revenant à l'inconnue originale u , nous obtenons :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Pour obtenir f et g nous utilisons les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) & \implies f(x) + g(x) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \implies -c\{f'(x) - g'(x)\} = u_1(x). \end{cases}$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante A telle que :

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = \frac{-1}{c} \int_0^x u_1(t) dt + A, \\ f(x) + g(x) = u_0(x), \end{cases}$$

d'où nous tirons les identités :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(t)dt + \frac{A}{2}, \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(t)dt - \frac{A}{2}, \end{cases}$$

expressions dont le résultat annoncé se déduit aisément. Le lecteur notera que, contrairement aux fonctions f et g , la quantité $f(x - ct) + g(x + ct)$ est indépendante de A . \square

Remarque 4. Nous avons établi ci-dessus un résultat intermédiaire important qui exprime que toute solution de l'équation des ondes homogènes

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se décompose sous la forme :

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t)$$

où :

- $u^+(x, t) = f(x - ct)$ est une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction $x > 0$:

$$u^+(x + L, t) = u^+(x, t - \frac{L}{c})$$

(le graphe de $x \rightarrow u(x, t + T)$ se déduit de celui de $x \rightarrow u(x, t)$ par une simple translation de $L = cT$ vers la droite). Une telle solution est constante sur les droites $x - ct = Cte$. Cette famille de droites constitue ce que l'on appelle la première famille de courbes caractéristiques associée à l'équation des ondes (2.5).

- $u^-(x, t) = g(x + ct)$ est une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction $x < 0$:

$$u^-(x - L, t) = u^-(x, t - \frac{L}{c})$$

(le graphe de $x \rightarrow u(x, t + T)$ se déduit de celui de $x \rightarrow u(x, t)$ par une simple translation de $L = cT$ vers la gauche). Une telle solution est constante le long des droites $x + ct = Cte$ qui constituent la seconde famille de caractéristiques de l'équation des ondes.

La formule de d'Alembert permet d'établir un certain nombre de propriétés qualitatives de la solution dont nous verrons que la plupart ne sont pas limitées au problème (2.3) (les propriétés spécifiques à la dimension 1 seront signalées). La première est la propagation à vitesse finie.

2.2.2 Propagation à vitesse finie

La formule (2.4) montre que la valeur de la solution u au point x à l'instant t ne dépend que des valeurs des données initiales dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$ qui est aussi la base du cône caractéristique (ou cône de dépendance) $D(x, t)$ issu du point (x, t) c'est à dire le cône délimité par les deux droites caractéristiques de l'équation des ondes qui passent par le point (x, t) (voir figure 2.1) :

$$(2.6) \quad D(x, t) = \{(y, s) / 0 \leq s \leq t, |y - x| \leq c(t - s)\}.$$

On en déduit que la solution se propage à vitesse finie au sens où, si on part de données à support compact, la solution reste à support compact à tout instant. Plus précisément : (voir aussi figure 2.2) :

$$(2.7) \quad \text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset [a, b] \implies \text{supp } u(\cdot, t) \subset [a - ct, b + ct]$$

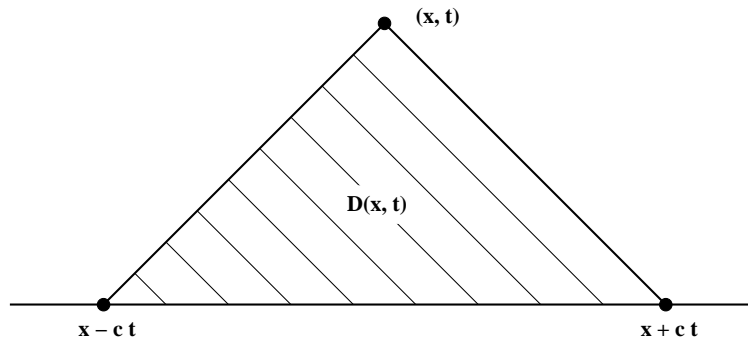


FIG. 2.1 – Le cône de dépendance

On voit aussi que dans le domaine

$$\{(x, t) / t > \frac{b - a}{2c}, b - ct < x < a + ct\}$$

la solution est constante égale à :

$$(2.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} u_1(y) dy.$$

On en déduit qu'en tout point de l'espace, pour t assez grand, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est constante. Plus précisément :

$$(2.9) \quad t > T(x) = \frac{b - a}{2c} + \frac{1}{c} \left| x - \frac{a + b}{2} \right| \implies u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}} u_1(y) dy.$$

En particulier, la solution ne revient pas nécessairement à 0 (sauf si l'intégrale de u_1 est nulle) : comme on le verra, ceci est spécifique à la dimension 1.

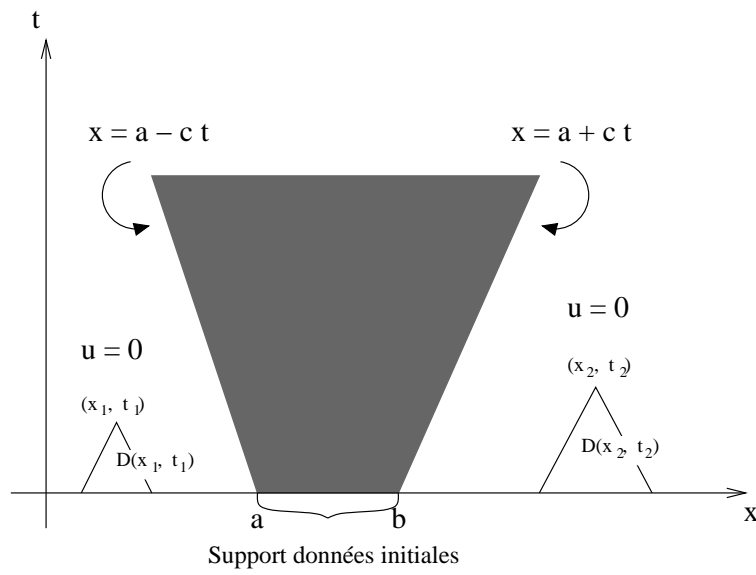


FIG. 2.2 – Propagation à vitesse finie

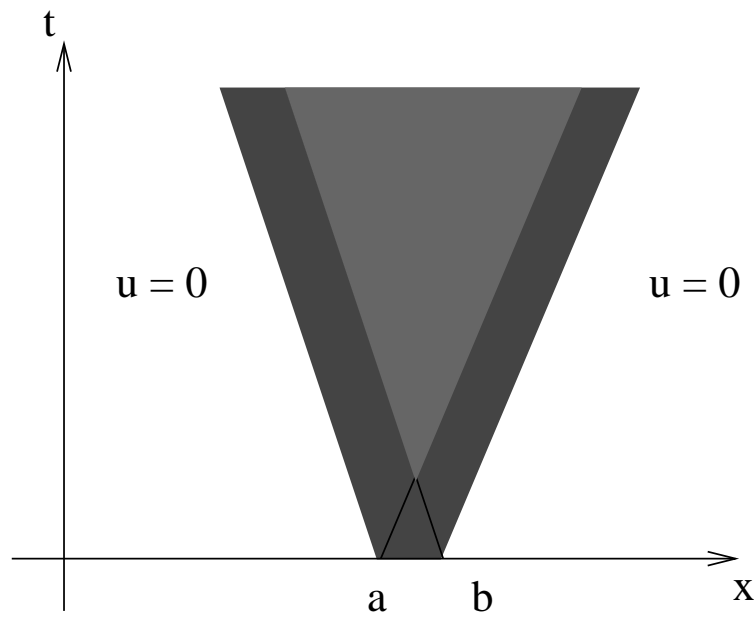


FIG. 2.3 – Structure de la solution du problème de Cauchy.

Pour mieux illustrer ces propriétés, nous représentons sur les figures 2.4 et 2.5 les solutions du problème (2.3) pour les deux jeux de données suivants :

$$(2.10) \quad \begin{cases} u_0(x) = \varphi(x), & u_1(x) = 0, \\ u_0(x) = 0, & u_1(x) = \varphi(x), \end{cases}$$

où :

$$(2.11) \quad \varphi(x) = (1 - x^2)^2 \text{ si } |x| < 1, \quad \varphi(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Le mode de représentation est le suivant : sur chaque droite $t = k, k \in \mathbb{N}$ (ici $k \leq 8$) nous représentons le graphe de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

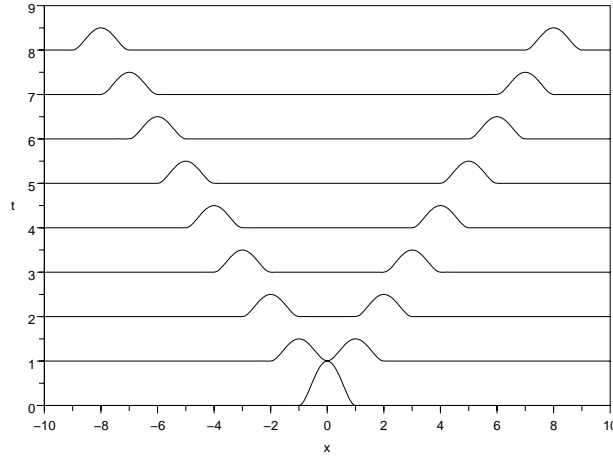


FIG. 2.4 – Solution du problème de Cauchy - $u_0 = \varphi, u_1 = 0$

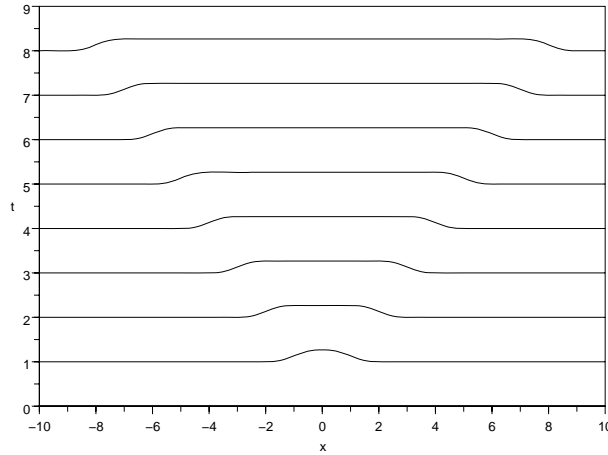
2.2.3 Régularité de la solution

La formule de d'Alembert permet de lire très facilement la régularité spatiale de la solution : on voit que la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est composée de la somme d'une fonction qui a la même régularité que u_0 et d'une fonction qui est "une fois plus régulière" que u_1 . Ainsi, pour $k \geq 0$ entier :

$$(2.12) \quad \begin{cases} (u_0, u_1) \in C^{k+1}(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R}) \implies u(., t) \in C^{k+1}(\mathbb{R}), \\ (u_0, u_1) \in H^{k+1}(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R}) \implies u(., t) \in H^{k+1}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

On dit que l'équation des ondes conserve la régularité dans la mesure où les formules suivantes, tirées de la formule de d'Alembert :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{c}{2}(u'_0(x + ct) - u'_0(x - ct)) + \frac{1}{2}(u_1(x + ct) + u_1(x - ct)), \\ c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{c}{2}(u'_0(x + ct) + u'_0(x - ct)) + \frac{1}{2}(u_1(x + ct) - u_1(x - ct)), \end{cases}$$


 FIG. 2.5 – Solution du problème de Cauchy - $u_0 = 0, u_1 = \varphi$

montrent que :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, 0) \right) \in C^k(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R}) \implies \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \right) \in C^k(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R}), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, 0) \right) \in H^k(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R}) \implies \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \right) \in H^k(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Ce type de propriété est assez caractéristique de la famille des équations hyperboliques linéaires à laquelle appartient l'équation des ondes. Elle situe ce type d'équation dans une position intermédiaire entre :

- Les équations paraboliques linéaires qui ont un effet régularisant : même pour des données initiales non régulières, la solution devient très régulière pour $t > 0$. Le prototype d'une telle équation est l'équation de la chaleur.
- Les équations hyperboliques non linéaires qui peuvent introduire des singularités : même pour des données initiales régulières, la solution peut devenir singulière en temps fini. Le prototype d'une telle équation est l'équation de Burgers.

2.2.4 Conservation de l'énergie

Il est naturel d'associer à toute solution u de (2.5) la densité d'énergie :

$$(2.14) \quad e(x, t) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2(x, t) + c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2(x, t) \right).$$

On dit que la solution u est d'énergie finie (les solutions qui ont un sens physique sont en général d'énergie finie) dès que :

$$(2.15) \quad E(t) = \int_{\mathbb{R}} e(x, t) \, dx < +\infty,$$

où $E(t)$ est par définition l'énergie totale de la solution. De la remarque 4, on déduit que toute solution d'énergie finie de l'équation des ondes (2.5) est nécessairement de la forme :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (f, g) \in H^1(\mathbb{R})^2.$$

Après avoir remarqué que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c\{g'(x + ct) - f'(x - ct)\}, \\ c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = c\{g'(x + ct) + f'(x - ct)\}, \end{cases}$$

on observe que (le point-clé est la disparition des doubles produits) :

$$(2.16) \quad e(x, t) = c^2\{f'(x - ct)^2 + g'(x + ct)^2\}.$$

Autrement dit, à l'instar de la solution $u(x, t)$, la fonction $e(x, t)$ est une quantité quadratique en u qui, contrairement à une quantité quadratique quelconque apparaît comme la somme d'une onde se propageant vers la droite et d'une onde se propageant vers la gauche. En particulier, on en déduit que (invariance de l'intégrale par translation) :

$$(2.17) \quad E(t) = c^2 \int_{\mathbb{R}} \{f'(x)^2 + g'(x)^2\} dx \quad (\text{indépendant de } t).$$

Il y a donc conservation de l'énergie au cours du temps. Ce résultat peut se retrouver de manière directe en procédant comme suit. Partant de (2.5) nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Nous observons ensuite que :

$$(2.18) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} (|\frac{\partial u}{\partial t}|^2) dx, \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx \right\}, \end{cases}$$

alors que, moyennant une intégration par parties

$$(2.19) \quad \begin{cases} -c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ \quad \quad \quad = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} (|\frac{\partial u}{\partial x}|^2) dx, \\ \quad \quad \quad = \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx \right\}. \end{cases}$$

Ainsi en ajoutant (2.18) et (2.19), on obtient :

$$(2.20) \quad \frac{d}{dt} \{E(t)\} = 0.$$

Remarque 5. Une conséquence de la conservation de l'énergie est un résultat d'unicité : le problème (2.3) admet au plus une solution d'énergie finie. En effet, s'il y avait deux solutions d'énergie finie, par linéarité de l'équation des ondes, la différence entre les deux solutions serait une solution u d'énergie finie associée à des données initiales nulles. La conservation de l'énergie entraîne alors que l'énergie de u est identiquement nulle à tout instant. On en déduit aisément que u est constante en temps et en espace et par conséquent nulle (puisque nulle à $t = 0$).

Remarque 6. La formule (2.16) montre que la densité d'énergie vérifie l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0,$$

propriété qu'il est difficile d'établir directement à partir de la seule équation des ondes vérifiée par u . Cette propriété est du reste spécifique au cas de la dimension 1, contrairement à la conservation de l'énergie totale. Comme un petit calcul montre que :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x, 0) = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)(x, 0),$$

il s'ensuit que si les données initiales u_0 et u_1 sont à support dans l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial e}{\partial t}(x, 0) dx = 0,$$

ce qui permet de retrouver le fait que $e(x, t)$ est nulle dans la région :

$$\{(x, t) / t > \frac{b-a}{2c}, b-ct < x < a+ct\}$$

région dans laquelle $u(x, t)$ est constante (voir (2.8) et (2.9)).

Pour terminer avec l'énergie, montrons comment on peut retrouver le résultat de propagation à vitesse finie à partir de considérations énergétiques. Repartons de l'identité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

que nous écrivons à l'instant t et intégrons en espace entre $b+ct$ et $+\infty$ où b désigne la borne supérieure du support des données initiales. Nous avons tout d'abord :

$$\int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (|\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)|^2) dx \right\},$$

alors que par ailleurs une intégration par parties donne :

$$\left| \begin{aligned} -c^2 \int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \frac{c^2}{2} \int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)|^2) dx \\ &+ c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(b+ct, t) \frac{\partial u}{\partial x}(b+ct, t). \end{aligned} \right.$$

Après sommation, nous obtenons :

$$(2.21) \quad \int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(b+ct, t) \frac{\partial u}{\partial x}(b+ct, t) = 0.$$

Or, on a la formule bien connue :

$$\int_{b+ct}^{+\infty} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{b+ct}^{+\infty} e(x, t) dx + c e(b+ct, t),$$

qui, combinée avec (2.21), nous donne :

$$\left| \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{b+ct}^{+\infty} e(x, t) dx &= -c \left(e(b+ct, t) + c \frac{\partial u}{\partial t}(b+ct, t) \frac{\partial u}{\partial x}(b+ct, t) \right) \\ &= -c \left| \frac{\partial u}{\partial t}(b+ct, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(b+ct, t) \right|^2. \end{aligned} \right|$$

Il s'ensuit que la fonction positive :

$$t \mapsto F(t) = \int_{b+ct}^{+\infty} e(x, t) dx$$

est décroissante. Or, comme les données initiales sont à support dans $[a, b]$,

$$F(0) = \int_b^{+\infty} e(x, 0) dx = 0,$$

ce qui entraîne que $F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, et donc que :

$$e(x, t) = 0 \quad \text{pour } x > b + ct.$$

On en déduit que la fonction $u(x, t)$ est constante dans la région $x > b + ct$, et donc nulle puisque u_0 l'est pour $x > b$. De façon analogue, on peut établir que $u(x, t)$ est nulle dans la région $x < a - ct$. La propriété de propagation à vitesse finie est alors démontrée.

2.3 Ondes planes harmoniques et analyse de Fourier

2.3.1 Notion d'onde harmonique

Introduisons tout d'abord la notion d'onde plane harmonique (cette terminologie a surtout du sens en dimension supérieure ; en dimension 1, le terme onde plane est superflu - onde harmonique suffirait). Par définition, c'est une fonction de la forme :

$$(2.22) \quad u(x, t) = \exp i(\omega t - kx), \quad (k, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque 7. Contrairement à ce que nous avons implicitement fait jusqu'ici nous avons introduit une solution à valeurs complexes. L'équation des ondes étant à coefficients réels, il est clair qu'à partir d'une solution u à valeurs complexes, on obtient des solutions à valeurs réelles en considérant $\operatorname{Re} u$ ou $\operatorname{Im} u$.

Remarque 8. On constate que, en tout point :

$$|u(x, t)| = 1.$$

On dit que $u(x, t)$ est une onde d'amplitude 1. Bien sûr, si la fonction u donnée par (2.22) est solution de l'équation des ondes, par linéarité de celle-ci, il en sera de même de la fonction :

$$u(x, t) = A \exp i(\omega t - kx)$$

où A désigne un nombre complexe quelconque. On dit qu'on a affaire à une onde d'amplitude A . En particulier :

$$|u(x, t)| = |A|.$$

La fonction définie par (2.22) est oscillante en temps et en espace (voir figure 2.6) et on définit :

- k est le nombre d'onde. La solution est périodique en espace de période $\lambda = 2\pi/|k|$: la longueur d'onde.
- ω est la pulsation (souvent abusivement appelée fréquence, la fréquence étant f (ou ν) = $\omega/2\pi$). La solution est périodique en temps de période $T = 2\pi/\omega = 1/f$

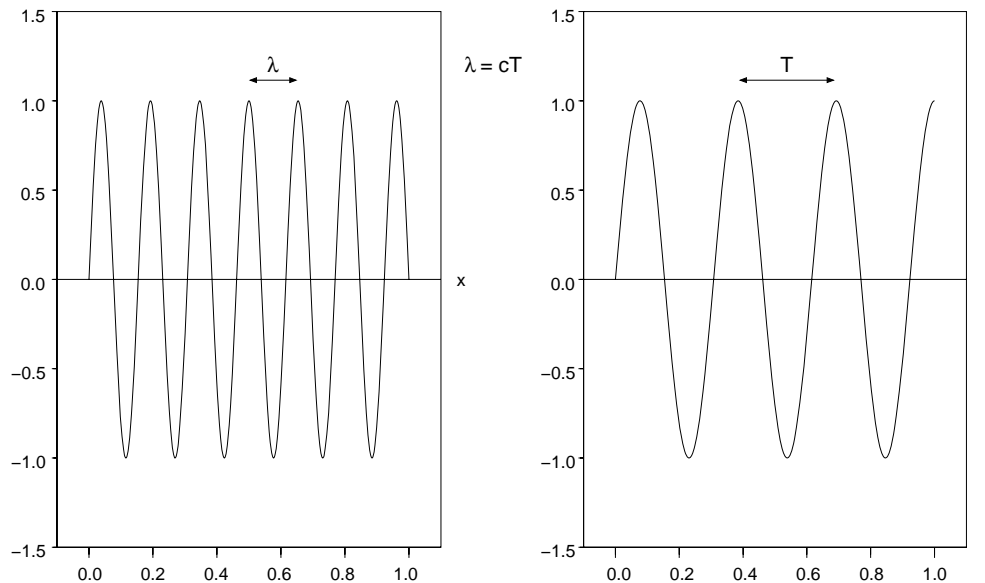


FIG. 2.6 – Longueur d'onde et période

En écrivant que :

$$u(x, t) = \exp i\omega \left(t - \frac{x}{V}\right), \quad V = \frac{\omega}{k}$$

on voit qu'il s'agit d'une "onde" se propageant à la vitesse (dite vitesse de phase) :

$$V = \frac{\omega}{k}.$$

Pour que (2.22) soit solution de l'équation des ondes (2.5), on voit que ω et k doivent satisfaire la relation de dispersion :

$$(2.23) \quad \omega^2 - c^2 k^2 = 0.$$

Considérant cette relation comme une équation en ω où k joue le rôle de paramètre, on voit que cette équation admet deux solutions réelles :

$$(2.24) \quad \omega = \pm ck.$$

La vitesse de phase des ondes harmoniques est donc donnée par :

$$(2.25) \quad V = \pm c,$$

ce qui se traduit aussi par le fait qu'oscillations spatiales et temporelles sont reliées par :

$$(2.26) \quad \lambda = cT.$$

On constate que la vitesse V ne dépend pas de k . En d'autres termes, toutes les longueurs d'onde λ se propagent à la même vitesse : on dira que l'équation des ondes est non dispersive. C'est ce qui fait qu'un signal de forme quelconque, que l'on peut voir via la transformation de Fourier - nous y revenons un peu plus loin - comme la superposition de signaux harmoniques de longueurs d'onde différentes, se propagera sans déformation (cf remarque 4).

Remarque 9. De façon générale, si on s'intéresse à une équation aux dérivées partielles linéaire de la forme :

$$(2.27) \quad L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

où $L(., .)$ est un polynôme de deux variable dont on désignera par N_t le degré par rapport à la première variable on peut toujours chercher des solutions de la forme (2.22) avec cette fois :

$$k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

On aboutit à la relation de dispersion

$$L(i\omega, -ik) = 0,$$

qui est une équation polynômiale en ω de degré N_t dont les racines (répétées avec leur multiplicité) sont notées :

$$\{\omega_j(k), 1 \leq j \leq N_t\}.$$

Par définition, on dira que l'équation (2.27) est hyperbolique si et seulement si

$$\omega_j(k) \in \mathbb{R}, \quad \forall 1 \leq j \leq N_t, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Ceci assure que le problème de Cauchy associé à (2.27) est bien posé. Si en outre les vitesses de phase $k \mapsto V_j(k) = \omega_j(k)/k$ sont constantes, on dit que l'équation (2.27) est non dispersive. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est dispersive. Nous retrouverons ces notions lorsque nous étudierons les schémas de discrétisation de l'équation des ondes.

2.3.2 Solutions périodiques en temps, équation de Helmholtz

De manière plus générale, on recherche les solutions périodiques en temps. En effet, dès qu'il y a présence d'une structure diffractante les ondes planes ne sont plus solutions de l'équation des ondes. De plus, les applications industrielles (détection radar, rayonnement de moteur) amènent à privilégier un comportement en temps à fréquence fixe. Lorsqu'il n'y a pas de non-linéarité dans les domaines (absence de composant électronique de type diode), l'équation des ondes est linéaire pour la variable temps. On peut alors effectuer une transformation de Fourier ce qui revient à considérer tout signal en temps comme somme (intégrale, voir chapitre 2) de cosinus et sinus. On cherche donc les solutions de la forme :

$$u(x, t) = u_0(x) \cos(-\omega t + \varphi(x))$$

Il est naturel alors d'utiliser la représentation complexe, $u_0(x)$ et $\varphi(x)$ représentant respectivement l'amplitude et la phase de l'onde. On recherche donc u sous la forme :

$$u(x, t) = \mathcal{R}e(\hat{u}(x)e^{-i\omega t})$$

avec

$$\hat{u}(x) = u_0(x) e^{i\varphi(x)} \quad \text{avec } u_0, \varphi \text{ fonctions réelles}$$

Un calcul élémentaire

$$\mathcal{I}m(\hat{u}(x)e^{-i\omega t}) = -\mathcal{R}e(\hat{u}(x)e^{-i\omega t} * i) = \mathcal{R}e(\hat{u}(x)e^{-i\omega t - i\frac{\pi}{2}}) = u(x, t + \frac{\pi}{2\omega})$$

montre que la partie imaginaire de $\hat{u}(x)e^{-i\omega t}$ correspond à la solution $u(x, t)$ initiale soumise à une simple translation dans l'origine des temps, donc la partie réelle et la partie imaginaire de $\hat{u}(x)e^{-i\omega t}$ vérifient l'équation des ondes. Il est immédiat alors que \hat{u} vérifie l'équation suivante :

$$(2.28) \quad -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x) - \Delta \hat{u}(x) = 0$$

En utilisant le nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c}$, on obtient l'équation suivante appelée **équation de Helmholtz** :

$$(2.29) \quad -\Delta \hat{u}(x) - k^2 \hat{u}(x) = 0$$

Considérons l'équation des ondes avec second membre :

$$(2.30) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t)$$

Si on suppose que la source $f(x, t)$ a un comportement sinusoïdal en temps :

$$f(x, t) = \hat{f}(x) \cos(\omega t)$$

en lui associant la source translatée en temps $\hat{f}(x) \sin(-\omega t)$ on obtient pour \hat{u} l'équation de Helmholtz avec second membre :

$$(2.31) \quad -\Delta \hat{u}(x) - k^2 \hat{u}(x) = \hat{f}(x)$$

$\mathcal{Re}(\hat{u}(x)e^{-i\omega t})$ correspond à la solution réelle de l'équation des ondes associée à la source $\hat{f}(x)\cos(\omega t)$ et $\mathcal{Im}(\hat{u}(x)e^{-i\omega t})$ correspond à la solution réelle de l'équation des ondes associée à $\hat{f}(x)\sin(-\omega t)$ (qui est simplement décalée dans le temps par rapport à la précédente).

Interprétons la solution de l'équation de Helmholtz (2.31) :

Soient u_0 et φ fonctions réelles de la variable d'espace telles que $\hat{u}(x) = u_0 e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in]-\pi, \pi]$. La solution $u(x, t)$ s'écrit :

$$u(x, t) = u_0 \cos(-\omega t + \varphi)$$

u_0 représente donc l'amplitude de l'onde et φ son déphasage qui correspond à un retard du point de vue algébrique ($\varphi > 0$, $u(x, t)$ est en retard sur $f(x, t)$, $\varphi < 0$, $u(x, t)$ est en avance sur $f(x, t)$)

Remarque 10. Le choix de la convention en temps $e^{-i\omega t}$ ou $e^{i\omega t}$ dans la définition de \hat{u} ne change pas l'équation homogène (c'est à dire sans second membre) (2.29) vérifiée par \hat{u} , mais change seulement l'interprétation de la phase du résultat. Pour la convention $e^{i\omega t}$, un déphasage positif correspond à une avance comme le montre la formule :

$$u(x, t) = u_0 \cos(+\omega t + \varphi)$$

En général, les mathématiciens utilisent la convention $e^{-i\omega t}$ et les physiciens $e^{i\omega t}$ souvent notée $e^{j\omega t}$ car i représente le courant électrique. Les solutions complexes obtenues \hat{u} entre les deux conventions sont conjuguées l'une de l'autre, donc on pourrait penser que l'arbitraire du choix de la convention importe peu.

Il convient de se préoccuper pour tout résultat fréquentiel du choix de la convention en temps quand :

- on le compare avec des mesures fréquentielles (qui sont dans la convention $e^{j\omega t}$)
- on couple deux méthodes numériques fréquentielles (si elles ne sont pas dans les mêmes conventions, il convient de conjuguer un des résultats)
- on veut l'exploiter par Fourier inverse pour obtenir des résultats temporels

Remarque 11. Lorsque l'on est passé dans le domaine fréquentiel, on a perdu la notion de conditions initiales, or elles permettaient de fixer le sens du temps. L'équation des ondes est réversible en temps (le changement de variable $t \rightarrow -t$ donne la même équation), imposer des conditions initiales revient à dire qu'on cherche la solution suivant les temps croissants comme dans la vraie vie. Dans l'équation de Helmholtz, prendre k ou $-k$ revient au même, donc si une solution existe $\hat{u}(x, k)$, $\hat{u}(x, -k)$ sera aussi solution. Il faudra donc ajouter une condition supplémentaire à l'équation d'Helmholtz qui jouera un rôle identique à celui des conditions initiales pour l'équation des ondes pour obtenir l'unicité d'une solution. Ce sera **la condition de radiation** que nous présenterons chapitre 2.

Remarque 12. Si nous mettons l'équation de Helmholtz sous forme variationnelle, nous obtenons le problème suivant :

$$(2.32) \quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v - k^2 \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram qui donne un résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes variationnels elliptiques ne peut s'appliquer pour le problème (2.32) puisqu'il n'y a pas coercivité (stricte positivité) de la forme bilinéaire $\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v - k^2 \int_{\Omega} u v$. Il faudra donc d'autres théorèmes pour obtenir un tel résultat indispensable avant la mise en oeuvre de toute méthode numérique. En effet, résoudre un système linéaire provenant d'une équation où l'on n'est pas assuré de l'existence ou unicité conduit dans le meilleur des cas à des NaN (Not a Number) ou à un crash brutal du programme (floating exception). Le chapitre 2 présentera les résultats mathématiques spécifiques à l'équation de Helmholtz.

2.3.3 Décomposition en ondes planes harmoniques

Venons en maintenant au lien entre les ondes planes harmoniques (2.22) et le problème de Cauchy (2.3). Ce lien apparaît aisément lorsque l'on cherche à résoudre l'équation (2.3) par transformation de Fourier partielle en espace. On va ainsi montrer que la solution $u(x, t)$ peut se réécrire comme une superposition (infinie non dénombrable) d'ondes planes harmoniques. Nous utiliserons ici la transformation de Fourier en espace \mathcal{F} comme un outil de calcul. Celle que nous choisissons est définie dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ par :

$$(2.33) \quad u(x) \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{u}(k) = \mathcal{F}u(k) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ikx} dx \in C^0(\mathbb{R}).$$

Rappelons simplement ici que cette transformation est inversible et que, lorsque \hat{u} est dans $L^1(\mathbb{R})$ (transformation de Fourier inverse) :

$$(2.34) \quad u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k) e^{ikx} dk.$$

A la fonction $u(x, t)$ solution de (2.3) nous associons donc sa transformée de Fourier en x :

$$(2.35) \quad \hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pour éviter des difficultés purement techniques on se limitera au cas où les données u_0 et u_1 sont régulières à support compact et où :

$$(2.36) \quad \int_{\mathbb{R}} u_1(y) dy = 0.$$

On pourra donc reconstruire u à partir de \hat{u} à l'aide de la formule :

$$(2.37) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk.$$

A partir de la définition (2.35) et de l'équation (2.3) on voit facilement que, pour chaque $k \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \hat{u}(k, t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(2.38) \quad \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + c^2 k^2 \hat{u} = 0,$$

à laquelle il convient d'adjoindre les conditions initiales :

$$(2.39) \quad \begin{cases} \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(k, 0) = \hat{u}_1(k). \end{cases}$$

La solution de ((2.38, 2.39)) s'obtient très aisément :

$$(2.40) \quad \hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck}.$$

Par transformation de Fourier inverse nous obtenons :

$$(2.41) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck} \right) e^{ikx} dk.$$

Pour faire le lien avec les ondes planes, nous pouvons réécrire (2.40) sous la forme :

$$(2.42) \quad \begin{cases} \hat{u}(k, t) = \hat{u}^+(k, t) + \hat{u}^-(k, t), \\ \hat{u}^+(k, t) = a^+(k) \exp(-ickt), \\ \hat{u}^-(k, t) = a^-(k) \exp(ickt), \end{cases}$$

où les fonctions complexes $a^+(k)$ et $a^-(k)$ sont données par :

$$(2.43) \quad \begin{cases} a^+(k) = \frac{1}{2} \left(\hat{u}_0(k) + i \frac{\hat{u}_1(k)}{ck} \right), \\ a^-(k) = \frac{1}{2} \left(\hat{u}_0(k) - i \frac{\hat{u}_1(k)}{ck} \right). \end{cases}$$

Remarque 13. Lorsque u_0 et u_1 sont à support compact, les fonctions \hat{u}_0 et \hat{u}_1 sont très régulières et, grâce à l'hypothèse (2.36), $\hat{u}_1(0) = 0$. Il s'ensuit que les fonctions $a^+(k)$ et $a^-(k)$ sont bien définies et régulières.

Remarque 14. Si nous désignons par \mathcal{A} l'opérateur défini formellement par :

$$\mathcal{A} = -c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

alors l'équation des ondes se réécrit formellement :

$$\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{A}u = 0.$$

La transformation de Fourier diagonalise l'opérateur \mathcal{A} au sens où l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{F} \mathcal{A} \mathcal{F}^{-1},$$

est un simple opérateur de multiplication :

$$\hat{\mathcal{A}}\hat{u}(k) = \hat{\mathcal{A}}(k) \hat{u}(k), \hat{\mathcal{A}}(k) = c^2 k^2.$$

On dit encore que la fonction $\hat{\mathcal{A}}(k)$ est le symbole de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}$. Ainsi, en passant de l'équation des ondes (2.5) à la famille d'équations différentielles (2.38), nous avons en quelque sorte diagonalisé l'équation des ondes.

La formule (2.41) fait apparaître, à chaque instant, la solution comme une superposition (infinie et non dénombrable) de fonctions proportionnelles à :

$$w(k, x) = e^{ikx}.$$

On parle généralement de décomposition en modes propres (ou fonctions propres) généralisés. En effet la fonction $w(k, \cdot)$ est un mode propre de l'opérateur \mathcal{A} au sens où :

$$\hat{\mathcal{A}} w(k, \cdot) = c^2 k^2 w(k, \cdot).$$

Toutefois, on parle de mode propre généralisé dans la mesure où ce mode n'est pas d'énergie finie :

$$\int_{\mathbb{R}} |w(k; x)|^2 dx = \infty.$$

A partir de (2.37) et (2.42), nous obtenons alors

$$\begin{cases} u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) \\ u^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a^+(k) \exp(ik(x - ct)) dk \\ u^-(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a^-(k) \exp(ik(x + ct)) dk \end{cases}$$

Autrement dit la solution u s'écrit comme la somme de deux ondes (u^+ et u^- , voir également la remarque 4), chacune d'entre elles apparaissant comme la superposition (sur tous les nombres d'onde réels k) d'ondes planes harmoniques dont les amplitudes (respectivement $a^+(k)/2\pi$ et $a^-(k)/2\pi$) varient avec k et sont déterminées par les données initiales (cf (2.43)). Il faut essentiellement retenir de cette observation que les ondes planes harmoniques (2.22) constituent dans le cas d'un milieu homogène infini un système fondamental de solutions (en quelque sorte une base de solutions) à partir desquelles on peut reconstruire "n'importe quelle" solution par simple "superposition".

Remarque 15. On peut retrouver la formule de d'Alembert à partir de la formule (2.40). En effet, nous pouvons écrire :

$$u(x, t) = u^0(x, t) + u^1(x, t)$$

avec

$$\begin{cases} u^0(., t) = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}^0(., t) \\ u^1(., t) = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}^1(., t) \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$(2.44) \quad \begin{cases} \hat{u}^0(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(ckt), \\ \hat{u}^1(k, t) = \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck}. \end{cases}$$

Pour calculer $u^0(x, t)$, nous réécrivons :

$$(2.45) \quad \hat{u}^0(k, t) = \frac{1}{2} (\hat{u}_0(k) \exp(i(ct)k) + \hat{u}_0(k) \exp(-i(ct)k)).$$

Rappelons ici la propriété bien connue de la transformation de Fourier vis-à-vis des opérateurs de translation ($a \in \mathbb{R}$) :

$$(2.46) \quad u_a(x) = u(x - a) \implies \hat{u}_a(k) = \hat{u}(k) \exp(-ika).$$

Nous utilisons alors (2.46) pour appliquer la transformation de Fourier inverse à l'égalité (2.45) et obtenons :

$$u^0(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)).$$

Pour calculer $u^1(x, t)$ nous observons que, en posant :

$$v_1(x) = \int_{-\infty}^x u_1(\xi) d\xi,$$

nous avons

$$u_1(x) = \frac{dv_1}{dx}(x),$$

ce qui se traduit après transformation de Fourier par :

$$\hat{u}_1(k) = ik\hat{v}_1(k),$$

et on peut écrire :

$$\hat{u}^1(k, t) = \frac{1}{2c} (\hat{v}_1(k) \exp(i(ck)t) - \hat{v}_1(k) \exp(-i(ck)t)).$$

En utilisant à nouveau la propriété (2.46), nous obtenons finalement :

$$u^1(x, t) = \frac{1}{2c} (v_1(x + ct) - v_1(x - ct)) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi.$$

Nous terminons ce paragraphe en proposant deux exercices qui permettent de retrouver d'autres propriétés de la solution du problème de Cauchy en utilisant des résultats sur la transformation de Fourier.

Exercice 1. En utilisant le théorème de Plancherel, retrouver le résultat de conservation de l'énergie directement à partir de la formule (2.40).

Exercice 2. En utilisant le théorème de Paley-Wiener, retrouver le résultat de propagation à vitesse finie directement à partir de la formule (2.40).

2.3.4 Application à la stabilité L^2 de l'équation des ondes

L'un des intérêts de l'analyse de Fourier est qu'elle permet d'avoir vite accès à un résultat de stabilité L^2 pour l'équation des ondes (et ce quelle que soit la dimension d'espace). Décomposons la solution u du problème de Cauchy en :

$$u(x, t) = u^0(x, t) + u^1(x, t),$$

où u^0 et u^1 , définies comme dans la remarque 15, sont les ondes générées respectivement par u_0 et u_1 . De 2.44, nous tirons en particulier :

$$|\hat{u}^0(k, t)| \leq |\hat{u}_0(k)|, \quad |\hat{u}^1(k, t)| \leq t |\hat{u}_1(k)|.$$

Grâce au théorème de Plancherel qui exprime, rappelons le, que la norme L^2 d'une fonction est égale (à un coefficient multiplicatif près...) à celle de sa transformée de Fourier, nous déduisons :

$$\|u^0(., t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}, \quad \|u^1(., t)\|_{L^2} \leq t \|u_1\|_{L^2},$$

et par conséquent, par l'inégalité triangulaire, l'inégalité de stabilité L^2 :

$$(2.47) \quad \|u(., t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + t \|u_1\|_{L^2}.$$

Cette inégalité exprime que l'application (à $t > 0$ fixé) qui au couple (u_0, u_1) fait correspondre la solution $u(., t)$ à l'instant t (cette application est parfaitement définie pour (u_0, u_1) régulières à support compact par exemple) se prolonge de manière unique (via un argument de densité) en une application linéaire continue de $L^2 \times L^2$ dans lui-même. C'est en ce sens un résultat de stabilité (ou de continuité dans L^2). L'inégalité 2.47 est typiquement l'inégalité que l'on cherchera à reproduire (ou du moins un équivalent) lorsque l'on étudiera la stabilité L^2 d'un schéma numérique.

Remarque 16. Il est facile de retrouver l'inégalité 2.47 directement à partir de la formule de d'Alembert. Toutefois, la méthode de Fourier a l'avantage de se généraliser très aisément en dimension supérieure. On peut aussi montrer avec la formule de d'Alembert (la méthode de Fourier n'est alors plus opérante) une inégalité de stabilité analogue dans les espaces L^p avec $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$, à savoir :

$$(2.48) \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p} + t \|u_1\|_{L^p}.$$

Toutefois, on peut démontrer que ce type d'inégalité n'est plus vrai en dimension supérieure ou égale à 2. On dit que, sauf en dimension 1, l'équation des ondes n'est pas bien posée dans L^p pour $p \neq 2$.

Exercice 3. Démontrer l'inégalité de stabilité L^p (2.48).

2.4 Équation avec second membre

2.4.1 Solution élémentaire

Le théorème 1 est pour nous l'occasion d'une première incursion dans la notion de solution élémentaire (ou fonction de Green) qui sera introduite au prochain paragraphe. Considérons la solution u^ε associée aux données initiales :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = \delta^\varepsilon(x), \end{cases}$$

où $\delta^\varepsilon(x)$ est une fonction telle que, lorsque ε tend vers 0 :

$$\delta^\varepsilon \rightarrow \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

où $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des distributions sur \mathbb{R} .

Par exemple :

$$\delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \text{ si } |x| < \varepsilon, \quad \delta^\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Il est facile de voir sur la formule (2.4) que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow G(x, t) \text{ presque partout}$$

où la fonction $G(x, t)$ est donnée par :

$$(2.49) \quad \begin{cases} G(x, t) = \frac{1}{2c}, & \text{si } x \in [-ct, ct], \\ G(x, t) = 0, & \text{si } |x| > ct. \end{cases}$$

Exercice 4. Démontrer le résultat précédent.

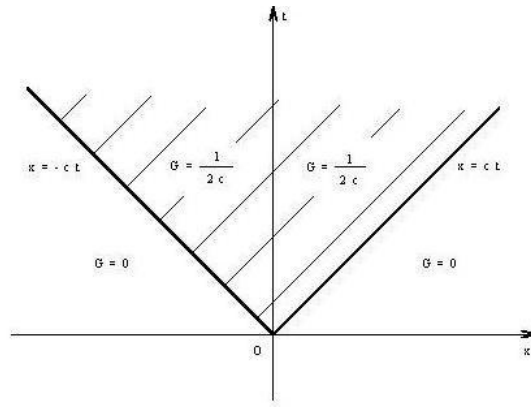


FIG. 2.7 – Support de la solution élémentaire 1D

Cette fonction est, au moins formellement (le sens rigoureux sera précisé au prochain chapitre), la solution du problème :

$$(2.50) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ G(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) = \delta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que la formule (2.4) s'écrit encore :

$$(2.51) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t) u_1(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} G(x - y, t) u_0(y) dy \right).$$

Cette formule est en fait générale car elle s'étend, ainsi que nous le verrons à n'importe quelle dimension d'espace. Par définition la fonction $G(x, t)$ est la fonction de Green ou solution élémentaire de l'équation des ondes 1D (2.3).

2.4.2 Expression de la solution du problème avec second membre

La fonction de Green sert également à représenter la solution du problème avec second membre :

$$(2.52) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous verrons dans le chapitre qui suit que la solution de ce problème s'écrit :

$$(2.53) \quad u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Dans notre cas particulier cette formule devient :

$$(2.54) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c} \int \int_{D(x, t)} f(y, s) dy ds.$$

Exercice 5. : Démontrer directement la formule (2.54) en décomposant l'équation des ondes (2.52) en la succession de deux équations de transport :

$$\left| \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = f, \\ v(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \right.$$

et en utilisant la méthode des caractéristiques pour résoudre chaque équation de transport.

A partir de la formule (2.54), il est facile de montrer le résultat suivant, qui est la traduction du phénomène de propagation à vitesse finie :

$$(2.55) \quad \text{supp } f(., t) \subset [a, b] \implies \text{supp } u(., t) \subset [a - ct, b + ct].$$

On a même le résultat plus général suivant :

$$(2.56) \quad \text{supp } f(., t) \subset [a - c^*t, b + c^*t] \implies \text{supp } u(., t) \subset [a - \max(c, c^*)t, b + \max(c, c^*)t].$$

2.4.3 Régularité de la solution

Comme dans le cas du problème de Cauchy, nous allons nous pencher sur la question de la régularité de la solution du problème 1. Comme l'opérateur d'Alembertien est, comme le Laplacien, un opérateur du second ordre, il est naturel de se poser la question de savoir si, comme dans le cas de l'équation de Laplace, on gagne "deux crans de régularité" en passant du second membre f à la solution u . Nous allons voir que, en raison du caractère hyperbolique de l'équation des ondes, ce n'est en général pas le cas.

Nous allons commencer par établir un résultat qui exprime essentiellement que l'on gagne un cran de régularité, typiquement

$$f \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \implies u \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})).$$

Nous allons en fait établir un résultat un peu plus fort (mais dans le même esprit) à savoir :

$$(2.57) \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \implies u \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})).$$

Aussi paradoxal que ça puisse paraître, la formule explicite n'est pas très commode pour établir ce type de résultat et il est plus pratique de passer par la transformation de Fourier en espace. Il est facile de montrer que la transformée de Fourier spatiale $\hat{u}(k, t)$ de la solution de (2.52) est donnée par :

$$(2.58) \quad \hat{u}(k, t) = \int_0^t \frac{\sin(ck(t-s))}{ck} \hat{f}(k, s) ds,$$

à partir de quoi on obtient :

$$\begin{cases} c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(k, t) = i \int_0^t \sin(ck(t-s)) \hat{f}(k, s) ds, \\ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(k, t) = \int_0^t \cos(ck(t-s)) \hat{f}(k, s) ds. \end{cases}$$

En particulier, par Cauchy-Schwartz, on a les majorations :

$$\begin{cases} |c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(k, t)|^2 \leq t \int_0^t |\hat{f}(k, s)|^2 ds, \\ |\frac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(k, t)|^2 \leq t \int_0^t |\hat{f}(k, s)|^2 ds. \end{cases}$$

Le théorème de Plancherel permet alors d'aboutir aux estimations :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)|^2 dx \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(x, s)|^2 dx ds, \\ \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)|^2 dx \leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(x, s)|^2 dx ds. \end{cases}$$

ce qui montre que :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \implies u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})).$$

Par ailleurs, à partir de la formule :

$$\begin{aligned} \left| c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(k, t+h) - c \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(k, t) \right| &= i \int_t^{t+h} \sin(ck(t+h-s)) \hat{f}(k, s) ds \\ &\quad + i \int_0^t [\sin(ck(t+h-s)) - \sin(ck(t-s))] \hat{f}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Plancherel et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient aisément l'estimation :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} |c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t+h) - c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)|^2 dx \right| &\leq 2 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} |f(x, s)|^2 dx ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\sin(ck(t+h-s)) - \sin(ck(t-s))|^2 |\hat{f}(k, s)|^2 dk ds, \end{aligned}$$

à partir de quoi on déduit grâce au théorème de Lebesgue que :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \implies \frac{\partial u}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})).$$

De façon analogue, on montre que :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \implies \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})),$$

et (2.57) est alors démontré.

Nous allons maintenant établir grâce à un contre-exemple que :

$$f \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \quad \text{n'implique pas} \quad u \in C^0(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R})),$$

autrement dit on ne gagne pas deux crans de régularité en général. Pour cela, considérons la fonction $f(x, t)$ définie par :

$$(2.59) \quad f(x, t) = 1 \text{ si } |x| < c^*t, \quad f(x, t) = 0 \text{ si } |x| > c^*t.$$

où $c^* > 0$ est donné. Il est facile de voir que :

$$(2.60) \quad f \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})), \quad f \notin C^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})), \quad f \notin C^0_{loc}(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})).$$

On peut à partir de la formule générale (2.54) obtenir l'expression explicite de la solution u du problème :

(i) Cas $c^* < c$. Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$(2.61) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2c} \frac{cc^*t^2 - x^2}{(c + c^*)}, & \text{si } |x| \leq c^*t, \\ u(x, t) = \frac{1}{2c} c^* \frac{(ct - |x|)^2}{(c^2 - (c^*)^2)}, & \text{si } c^*t \leq |x| \leq ct, \\ u(x, t) = 0, & \text{si } |x| \geq ct. \end{cases}$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est donc une réunion d'arcs de parabole, comme illustré par la figure 2.8.

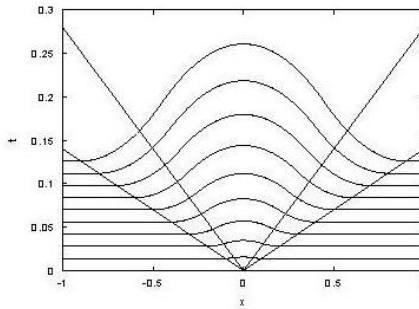


FIG. 2.8 – La solution pour $c^* = 0.5$ et $c = 1$.

On peut vérifier aisément que u est continûment dérivable à travers les droites $x = \pm ct$ et $x = \pm c^*t$ (également représentées sur la figure 2.8). On en déduit que $u(., t)$ appartient à $H^2(\mathbb{R})$ pour tout t et même que :

$$(2.62) \quad u \in C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R})).$$

(ii) Cas $c^* > c$. Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$(2.63) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2c} \frac{cc^*t^2 - x^2}{(c + c^*)}, & \text{si } |x| \leq ct, \\ u(x, t) = \frac{1}{2c} c \frac{(c^*t - |x|)^2}{(c^2 - (c^*)^2)}, & \text{si } ct \leq |x| \leq c^*t, \\ u(x, t) = 0, & \text{si } |x| \geq c^*t. \end{cases}$$

A nouveau, cette fonction est de classe C^1 et en particulier :

$$(2.64) \quad u \in C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R})).$$

(iii) Cas limite $c^* = c$. Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$(2.65) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{4c^2} (c^2t^2 - x^2), & \text{si } |x| \leq ct, \\ u(x, t) = 0, & \text{si } |x| \geq ct. \end{cases}$$

Cette fois, il est clair (voir figure 2.9) que la dérivée en x de u est discontinue à travers les droites $x = \pm c^*t$ et que par conséquent :

$$(2.66) \quad \forall t > 0, \quad u(., t) \notin H^2(\mathbb{R}).$$

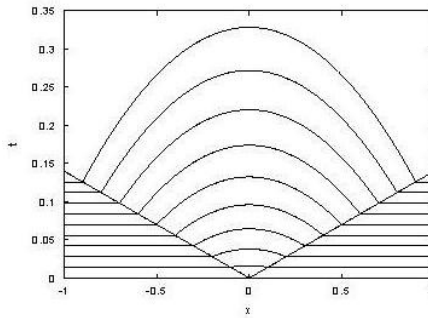


FIG. 2.9 – La solution pour $c = c^* = 1$.

La particularité de cet exemple vient du fait que la donnée f est singulière le long de droites qui se trouvent coïncider avec des caractéristiques de l'équation des ondes : il y a en quelque sorte interaction entre l'équation et les singularités de la donnée.

Exercice 6. Soit $f(x, t)$ la fonction définie par (2.59).

1. Montrer que cette fonction vérifie bien (2.60).

2. Montrer que la solution du problème est bien donnée suivant les cas par les formules (2.61) à (2.65).

Il est facile de voir que, pour récupérer à coup sûr la régularité $H^2(\mathbb{R})$, il suffit d'accroître d'un cran la régularité de f , soit en temps, soit en espace

$$(2.67) \quad f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \text{ ou } f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})) \cap C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})).$$

Exercice 7. Démontrer à partir de la formule (2.58) que l'on a bien la régularité (2.62) dès que f satisfait (2.67).

2.5 Propagation dans un demi-espace : réflexion des ondes et principe des images

Nous nous intéressons maintenant à l'équation des ondes posée dans la demi-droite $x > 0$ (ou \mathbb{R}^+). Cela correspond par exemple à étudier les mouvements d'une corde semi-infinie. Nous reprenons donc les équations du problème (2.3) dans le demi-espace \mathbb{R}^+ :

$$(2.68) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Posé tel quel, le problème (2.68) est mal posé : il admet une infinité de solutions. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que si $f(x)$ est une fonction régulière de la variable réelle à support dans le demi-espace $x < 0$, la fonction :

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

est une solution de (2.68) associée aux données initiales homogènes $u_0(x) = u_1(x) = 0$. Pour obtenir un problème bien posé, il faut compléter (2.68) par une condition aux limites en $x = 0$. Nous considérerons deux conditions aux limites classiques :

– La condition de Dirichlet homogène :

$$(2.69) \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

– La condition de Neumann homogène :

$$(2.70) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Pour réaliser que le problème de non unicité est alors levé, il suffit par exemple de remarquer que chacun des problèmes (2.68, 2.69) ou (2.68, 2.70) possède la propriété de conservation de l'énergie, laquelle entraîne en particulier un résultat d'unicité (voir Remarque 5). Pour s'en convaincre, nous établissons une identité d'énergie dans le demi-espace pour toute solution d'énergie finie de (2.68). Les calculs sont presque identiques à ceux déjà effectués dans la section 2.2 pour le cas de l'espace entier. De l'équation des ondes, nous déduisons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x > 0, t > 0.$$

Par ailleurs :

$$(2.71) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) dx, \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right\}, \end{aligned} \right.$$

alors que

$$(2.72) \quad \left\{ \begin{aligned} -c^2 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= c^2 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \\ &= \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \\ &= \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right\} + c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t). \end{aligned} \right.$$

Si on définit l'énergie :

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} e(x, t) dx < +\infty,$$

où $e(x, t)$ est toujours définie par (2.14), nous obtenons l'identité :

$$(2.73) \quad \frac{d}{dt} \{E(t)\} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$(2.69) \text{ ou } (2.70) \implies \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit que toute solution d'énergie finie de (2.68, 2.69) où (2.68, 2.70) satisfait :

$$E(t) = E(0), \quad \forall t > 0,$$

ce que nous voulions démontrer.

2.5.1 Le problème de Dirichlet

Nous cherchons maintenant à calculer explicitement la solution du problème (2.68, 2.69). Comme on sait résoudre le problème de Cauchy dans tout l'espace (2.3), l'idée est de ramener la résolution du problème (2.68, 2.69) à celle d'un problème de type (2.3). De façon plus précise, nous allons voir que la solution de (2.68, 2.69) n'est autre que la restriction au demi-espace $x > 0$ de la solution d'un problème de Cauchy sur \mathbb{R} à condition de prolonger adéquatement les données u_0 et u_1 au demi-espace $x < 0$.

L'observation clé est que l'opérateur d'Alembertien

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

est "pair" en x , c'est à dire invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$. Une conséquence immédiate sur le problème de Cauchy (2.3) est la suivante (cette propriété se lit d'ailleurs sur la formule de d'Alembert) :

- Si les données initiales u_0 et u_1 de (2.3) sont paires, à tout instant $t > 0$ la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est paire.
- Si les données initiales u_0 et u_1 de (2.3) sont impaires, à tout instant $t > 0$ la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est impaire.

Partons maintenant des données initiales u_0 et u_1 du problème (2.68, 2.69) (elles sont seulement définies pour $x > 0$) et construisons leurs prolongements "par imparité" \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 :

$$(2.74) \quad \begin{cases} \tilde{u}_0(x) = u_0(x) & \text{si } x > 0, & \tilde{u}_0(x) = -u_0(-x) & \text{si } x < 0, \\ \tilde{u}_1(x) = u_1(x) & \text{si } x > 0, & \tilde{u}_1(x) = -u_1(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soit $\tilde{u}(x, t)$ la solution du problème de Cauchy sur \mathbb{R} associé aux données initiales \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 :

$$(2.75) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2. *La solution $u(x, t)$ du problème (2.68, 2.69) n'est autre que la restriction au demi-espace $x > 0$ de la solution $\tilde{u}(x, t)$ du problème (2.75).*

En effet, observons simplement que :

- $\tilde{u}(x, t)$ satisfait bien sûr l'équation des ondes dans le demi-espace $x > 0$ (puisqu'elle la satisfait sur \mathbb{R} tout entier).
- A l'instant $t = 0$, par construction même de \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 , on a

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \text{pour } x > 0.$$

- Les fonctions \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 étant impaires, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est impaire. En particulier (dès qu'elle est continue) :

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Il s'ensuit que la restriction au demi-espace $x > 0$ de $\tilde{u}(x, t)$ est une solution du problème (2.68, 2.69). Comme cette solution est unique (voir le début de la section 2.5), c'est bien la solution recherchée.

Le résultat du théorème (2) s'interprète en terme de ce que l'on appelle le principe des images. Désignons par χ^+ (respectivement χ^-) la fonction caractéristique du demi-espace $x > 0$ (respectivement $x < 0$). Nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = \tilde{u}_0^+ + \tilde{u}_0^-, & \tilde{u}_0^+ = \chi^+ \tilde{u}_0, & \tilde{u}_0^- = \chi^- \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 = \tilde{u}_1^+ + \tilde{u}_1^-, & \tilde{u}_1^+ = \chi^+ \tilde{u}_1, & \tilde{u}_1^- = \chi^- \tilde{u}_1 \end{cases}$$

où, par définition :

- $(\tilde{u}_0^+, \tilde{u}_1^+)$ (prolongement de (u_0, u_1) par 0 dans le demi-espace $x < 0$) est la source réelle, à support dans $x > 0$.
- $(\tilde{u}_0^-, \tilde{u}_1^-)$ est la source image, à support dans $x < 0$.

Par linéarité, on a le principe de superposition :

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}^+(x, t) + \tilde{u}^-(x, t),$$

où

- \tilde{u}^+ est la solution du problème de Cauchy associé aux données $(\tilde{u}_0^+, \tilde{u}_1^+)$: c'est l'onde émise par la source réelle, c'est à dire la solution qu'on observerait s'il n'y avait pas de bord, souvent appelée onde incidente. (Attention $\tilde{u}^+ \neq \chi^+ \tilde{u}$)
- \tilde{u}^- est la solution du problème de Cauchy associé aux données $(\tilde{u}_0^-, \tilde{u}_1^-)$: c'est l'onde émise par la source image, encore appelée onde réfléchie. Cette onde est celle qui est créée par la présence du bord : on dit que le bord crée un phénomène de réflexion.

Bien entendu, la solution \tilde{u} n'ayant de sens que pour $x > 0$, l'onde réfléchie n'existe qu'au moment où l'onde émise par la source image pénètre dans le demi-espace $x > 0$, ce qui correspond au moment où l'onde incidente "atteint le bord". Pour mieux appréhender ce phénomène de réflexion, considérons le cas particulier suivant :

$$(2.76) \quad u_1 = 0, \quad u_0 = \varphi(x - 3)$$

où la fonction φ a été définie en (2.11). La solution du problème est alors représentée sur la figure 2.10. Son interprétation via le principe des images sur la figure 2.11 où nous représentons la fonction prolongée $\tilde{u}(x, t)$, les portions de courbes situées dans le domaine "image" $x < 0$ étant représentées en pointillé. Le résultat s'interprète comme suit :

- Aux premiers instants, la source réelle émet deux ondes, une qui se propage vers la droite, l'autre qui se propage vers la gauche. La source image fait de même mais pendant un certain temps, l'onde qu'elle émet reste à support dans $x < 0$: pendant cet intervalle de temps, la solution n'est pas influencée par la présence du bord. Ceci est bien entendu une conséquence de la propriété de propagation à vitesse finie.

- Aux instants suivants, la partie de l'onde émise par la source réelle qui se propage vers la droite poursuit sa route sans perturbation. Celle qui se propage vers la gauche rentre dans le milieu “invisible” $x < 0$ et est en quelque sorte “remplacée” par la partie de l'onde émise par la source image qui se propage vers la droite. On dit que l'onde incidente, qui se propageait vers la gauche, a donné naissance à une onde réfléchie, se propageant vers la droite.
- On constate enfin que la réflexion s'accompagne d'un changement de signe : on dit que la réflexion s'effectue avec le coefficient de réflexion :

$$(2.77) \quad R = -1.$$

Notons que, hormis le changement de signe, l'amplitude et la forme de l'onde incidente sont conservées : ceci est cohérent avec la conservation de l'énergie.

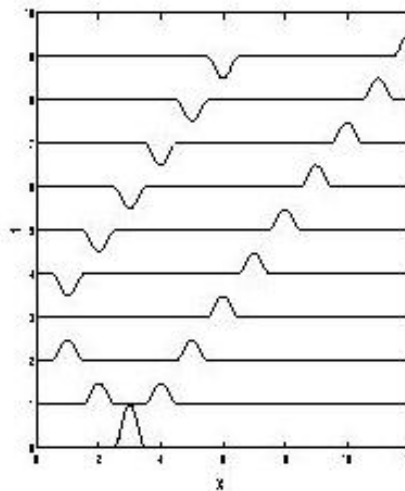


FIG. 2.10 – Solution du problème de Dirichlet

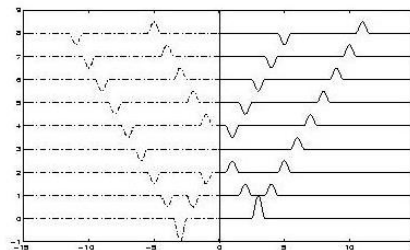


FIG. 2.11 – Le principe des images pour le problème de Dirichlet

Pour le cas d'une condition de Dirichlet non homogène, le principe des images ne s'applique plus. Nous renvoyons le lecteur à l'exercice suivant :

Exercice 8. *Résoudre explicitement le problème suivant :*

$$(2.78) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

avec la condition aux limites (la fonction g étant donnée) :

$$(2.79) \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

2.5.2 Le problème de Neumann

On a également un principe des images pour le problème (2.68, 2.70). Les idées sont analogues à celles développées pour le problème de Dirichlet et nous n'entrerons pas dans les détails. A partir des données initiales u_0 et u_1 (définies pour $x > 0$), nous construisons leurs prolongements "par parité" \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 :

$$(2.80) \quad \begin{cases} \tilde{u}_0(x) = u_0(x) & \text{si } x > 0, & \tilde{u}_0(x) = u_0(-x) & \text{si } x < 0, \\ \tilde{u}_1(x) = u_1(x) & \text{si } x > 0, & \tilde{u}_1(x) = u_1(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soit $\tilde{u}(x, t)$ la solution du problème de Cauchy sur \mathbb{R} associé aux données initiales prolongées \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 :

$$(2.81) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3. *La solution $u(x, t)$ du problème (2.68, 2.70) n'est autre que la restriction au demi-espace $x > 0$ de la solution $\tilde{u}(x, t)$ du problème (2.81).*

L'argumentation est essentiellement la même que pour le théorème 2 à ceci près que les données \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 étant paires, la solution \tilde{u} est paire en x . Dès qu'elle est dérivable, elle satisfait donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0, t) = 0,$$

c'est à dire la condition de Neumann en $x = 0$.

Le résultat du théorème 3 s'interprète comme pour le problème de Dirichlet en terme de sources images, le prolongement par parité venant simplement se substituer au prolongement

par imparité. La différence essentielle avec la condition de Dirichlet est que le phénomène de réflexion s'effectue sans changement de signe. On dit qu'on a un coefficient de réflexion :

$$(2.82) \quad R = 1.$$

A titre d'illustration, nous avons représenté sur la figure 2.12 (voir la figure 2.13 pour l'interprétation en terme du principe des images) la solution du problème pour les données (2.76).

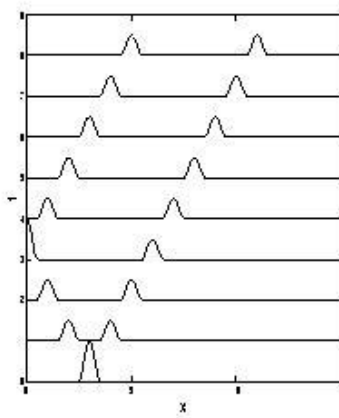


FIG. 2.12 – Solution du problème de Neumann

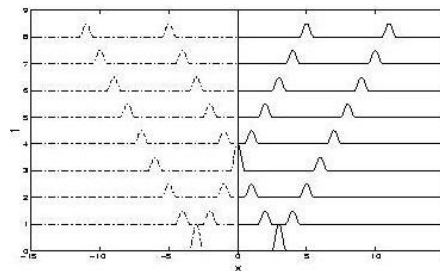


FIG. 2.13 – Le principe des images pour le problème de Neumann

Pour le problème de Neumann non homogène, nous renvoyons le lecteur à l'exercice suivant :

Exercice 9. Résoudre explicitement le problème suivant :

$$(2.83) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

avec la condition aux limites (la fonction g étant donnée) :

$$(2.84) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

Chapitre 3

Analyse mathématique du problème de diffraction 3D

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse mathématique du problème de diffraction en dimension 3 en domaine fréquentielle puis en domaine temporel.

Nous avons vu dans le paragraphe 1.3.2 des solutions des équations d'ondes dans l'espace libre : les ondes planes qui n'ont pas de termes sources et les ondes sphériques qui ont un terme source concentré en un point. Pour prendre en compte des termes sources généraux, et pour mieux comprendre la condition de radiation de Sommerfeld, il nous faut calculer les solutions élémentaires. Elles permettent de mieux comprendre la physique des phénomènes et serviront de base à la méthode des équations intégrales dans le chapitre 5. C'est l'objet du §3.2.

Nous calculons ensuite la forme générale des solutions sans second membre en dehors d'une boule. Ce sont les solutions qui nous intéressent dans la pratique, car les termes sources que nous considérons sont à support compact. Pour cela, nous avons besoin de quelques fonctions spéciales. Nous introduisons la base des harmoniques sphériques fonctions de Bessel et de Hankel. Elles nous permettent de calculer analytiquement (sous forme de séries) les ondes à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Ces solutions sont très utiles pour démontrer des résultats théoriques d'une part et servent de référence pour valider les méthodes numériques d'autre part.

Nous passons ensuite à l'analyse mathématique du problème de diffraction en domaine fréquentiel. Nous nous contentons du cas scalaire avec conditions aux limites de Dirichlet. Il s'agit de résoudre une EDP en domaine infini dont les solutions ne sont pas dans L^2 . Une formulation variationnelle ne peut être obtenue en intégrant dans tout l'espace. Mais la condition de radiation de Sommerfeld et les calculs de solutions explicites à l'extérieur d'une sphère du paragraphe 3.3.3 et la relation d'impédance sur la sphère, explicite dans la base de harmoniques sphériques, vue au paragraphe 3.3.4 permettent de tronquer le domaine infini par une grande sphère et de se ramener à un problème aux limites dans un domaine borné avec conditions aux limites non-locales sur la sphère. Nous démontrons que ce problème vérifie les hypothèses de l'alternative de Fredholm et en démontrant l'unicité de la solution, nous en déduisons l'existence. Nous aurions

pu démontrer ce résultat par la méthode d'absorption limite, nous en donnons les grandes lignes.

Les techniques qui permettent d'étudier le problème temporel reposent sur l'utilisation du théorème de Hille-Yosida rappelé au paragraphe A.5.6 pour établir l'existence et unicité, lemme de Grönwall pour obtenir des estimations d'énergie. Ces estimations serviront au chapitre 4 lors de la discrétisation des équations d'ondes avec la méthode des différences finies en domaine temporel. Au chapitre 5, nous évoquerons une autre approche pour l'étude des problèmes temporels reposant sur la transformée de Fourier-Laplace, l'étude de problèmes fréquentiels coercifs (du fait de la fréquence complexe !) et enfin le retour en temporel grâce au théorème de Paley-Wiener.

3.2 Solutions élémentaires

3.2.1 Solution élémentaire de l'équation de Helmholtz

Rappelons que pour un opérateur aux dérivées partielles \mathcal{L} , **linéaire et à coefficients constants** défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on appelle solution élémentaire toute distribution E solution de

$$\mathcal{L}E = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

L'intérêt principal de cette solution élémentaire est que sous réserve que la convolution ait un sens, $u = E * f$ est solution de :

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

En effet,

$$\mathcal{L}(E * f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité de } \mathcal{L}}}{=} (\mathcal{L}E) * f \underset{\substack{\uparrow \\ E \text{ solution élémentaire}}}{=} \delta * f \underset{\substack{\uparrow \\ \delta \text{ élément neutre de la convolution}}}{=} f$$

En ajoutant à une solution élémentaire toute solution non triviale du problème homogène, on trouve une nouvelle solution élémentaire. Pour un problème bien posé, en imposant en plus des conditions sur le comportement de la solution, par exemple le comportement à l'infini, conditions souvent dictées par des considérations physiques, la solution élémentaire est unique. A titre d'exemple, rappelons le théorème fondamental de l'électrostatique : l'unique solution «nulle à l'infini» de

$$-\Delta E(x) = \delta(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

est

$$E(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

Ceci donne, par produit de convolution, l'expression du potentiel électrique V d'une charge ponctuelle Q positionnée à l'origine. V est nul à l'infini et vérifie l'équation de Poisson :

$$-\Delta V = \frac{Q\delta}{\varepsilon_0} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

On retrouve

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|x|}$$

Remarquons aussi que l'on déduit de la solution élémentaire les solutions distributions pour des seconds membres f contenant des dérivées (au sens des distributions) de la fonction Dirac δ . En effet, la solution de

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x_i}\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

est donnée par :

$$u = E * \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\right) = \frac{\partial E}{\partial x_i} * \delta = \frac{\partial E}{\partial x_i}$$

Revenons à l'équation des ondes en temporel et en fréquentiel. On cherche E solution causale de

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)E(x, t) = \delta(x)\delta(t) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$$

En utilisant (1.32) et (1.38), on vérifie que la transformée de Fourier en temps de E est solution élémentaire du problème de Helmholtz :

$$-(\Delta + k^2)\hat{E}(x, \omega) = \delta(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Nous allons retrouver que la solution «physique» vérifie la condition de radiation.

L'opérateur $-(\Delta + k^2)$ ainsi que le second membre étant invariant par le groupe des rotations, il est naturel de chercher une solution radiale : $\hat{E}(x, \omega) = g_\omega(r)$ où $r = |x|$. En écrivant le Laplacien en coordonnées sphériques, on trouve que g_ω vérifie

$$-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rg_\omega) - k^2g_\omega = \delta(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Comme $|x|\delta(x) = 0^1$, on trouve que $f = rg_\omega$ vérifie

$$f''(r) + k^2f(r) = 0 \quad \text{pour } r > 0.$$

On en déduit que :

$$\hat{E}(x, \omega) = g_\omega(r) = a^+\frac{e^{ikr}}{r} + a^-\frac{e^{-ikr}}{r}$$

Remarque 17. L'expression du Laplacien en fonction de r dépend de la dimension d'espace. La forme précédente n'est donc valable qu'en dimension 3 !

Revenons dans le domaine temporel par transformation de Fourier inverse, en utilisant (1.39), on obtient :

$$E(x, t) = \underbrace{a^+\frac{\delta(t - r/c)}{r}}_{E^+(x, t)} + \underbrace{a^-\frac{\delta(t + r/c)}{r}}_{E^-(x, t)}$$

¹On peut multiplier δ par une fonction continue φ , le produit de distribution étant : $\langle \varphi\delta, \psi \rangle = \langle \delta, \varphi\psi \rangle = \varphi(0)\psi(0)$ pour $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$. On remarque que $\varphi\delta = 0$ si $\varphi(0) = 0$.

Nous remarquons que E^+ est causale alors que E^- est anti-causale. Notons $\Gamma^+(t)$ le support en espace de la distribution $E^+(\cdot, t)$, $\Gamma^-(t)$ le support de la distribution $E^-(\cdot, t)$ et S_r la sphère de centre 0 et de rayon r . On a :

$$\Gamma^+(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } t < 0 \\ \{0\} & \text{pour } t = 0 \\ S_{ct} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

C'est une sphère qui existe à partir du temps 0 et qui grandit à la vitesse c .

$$\Gamma^-(t) = \begin{cases} S_{-ct} & \text{pour } t < 0 \\ \{0\} & \text{pour } t = 0 \\ \emptyset & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

C'est une sphère qui existe pour les temps négatifs, et qui s'effondre à la vitesse c pour disparaître au temps $t = 0$. Pour visualiser l'évolution de Γ^- en cours du temps, il «suffit» de passer le film de Γ^+ à l'envers !

La solution $E^-(x, t)$ devient causale en inversant le sens d'écoulement du temps. C'est donc bien le choix du sens de l'écoulement du temps qui permet d'obtenir l'unicité de la solution élémentaire de l'équation des ondes. On démontre en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions que cette solution élémentaire est :

$$E(x, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}$$

Dans le domaine fréquentiel, la solution physique est la transformée de Fourier de LA solution temporelle. Avec notre choix de convention pour la transformation de Fourier $e^{-i\omega t}$ (cf (1.31)), on obtient que $a^+ \frac{e^{ikr}}{r}$ est la bonne solution élémentaire.

La condition de radiation (1.52) implique que $a^- = 0$. Nous rappelons les formules de dérivation à connaître :

$$(3.1) \quad \overrightarrow{\text{grad}} r = \frac{\vec{r}}{r}$$

où on a noté $\vec{r} = \vec{Ox}$ et donc par composition

$$(3.2) \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Donc,

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial r} = a^+ \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{e}_r + a^- \left(-ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{e}_r$$

soit encore

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial r} = a^+ \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} + a^- \left(-ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}$$

et

$$-ik\hat{E} = -a^+ ik \frac{e^{ikr}}{r} - a^- ik \frac{e^{-ikr}}{r}$$

En additionnant, on obtient :

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial r} - ik\hat{E} = a^+ * O\left(\frac{1}{r^2}\right) + a^- * O\left(\frac{1}{r}\right)$$

d'où le résultat.

Exercice 10. En notant que $-(\Delta + k^2)g_\omega = 0$ en dehors de l'origine, et en reprenant la définition de la dérivée au sens des distributions, vérifier que $a^+ = \frac{1}{4\pi}$.

On appelle Fonction ou Noyau de Green notée $G(x, y)$ la fonction définie par $E(x - y)$ avec E solution élémentaire. Pour l'équation de Helmholtz, dans le cas tridimensionnel et avec la convention en temps $e^{-i\omega t}$, nous avons :

$$G(x, y) = E(x - y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

Nous pouvons alors donner l'expression de la solution u de l'équation de Helmholtz (3.3) posée dans tout \mathbb{R}^3 et vérifiant la condition de radiation.

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f \\ r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

Par produit de convolution, on obtient :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy$$

Pour que cette expression ait un sens, on doit imposer des restrictions sur f , par exemple $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire f à support compact et de carré intégrable.

3.2.2 Dipôles électriques et magnétiques - tenseur élémentaire

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la solution élémentaire du système de Maxwell en domaine fréquentiel. Nous laissons les calculs dans le domaine temporel en exercice. Nous nous basons sur la fonction de Green $G(x, y)$ de l'équation de Helmholtz. Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, le système de Maxwell n'est pas équivalent à 6 équations de Helmholtz scalaires sur chacune des coordonnées de \vec{E} et \vec{H} . En particulier, les solutions cherchées sont à divergence nulle et donc toutes les composantes des champs sont couplées entre elles.

Nous cherchons donc les 6 solutions (\vec{E}_k, \vec{H}_k) de

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\text{rot}} & -i\omega\mu_0 \\ i\omega\varepsilon_0 & \overrightarrow{\text{rot}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_k \\ \vec{H}_k \end{bmatrix} = \delta(x) \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta_{i,k} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

qui vérifient, composante par composante, la condition de radiation (1.52) à l'infini. Ces 6 solutions forment un tenseur 6×6 qui est le tenseur de Green du système de Maxwell fréquentiel. Une fois ce tenseur obtenu, toute solution dans \mathbb{R}^3 du système de Maxwell avec termes sources s'obtiendra par produit de convolution.

En fait, nous n'allons pas utiliser la notation tensorielle, mais plutôt chercher les champs électromagnétiques générés par des sources ponctuelles de type courants électriques et magnétiques positionnées en un point y quelconque :

$$\begin{cases} \vec{m}(x) &= \vec{m}_0 \delta(x - y) \\ \vec{j}(x) &= \vec{j}_0 \delta(x - y) \end{cases}$$

En effet, ce type de sources est très utilisé dans le milieu de l'électromagnétisme, on parle de dipôles électriques et magnétiques. En particulier, beaucoup d'antennes ont un fonctionnement de type dipôle électrique (comme un fil de longueur $\lambda/4$ positionné sur un plan métallique) ou dipôle magnétique (fente de longueur $\lambda/4$ dans un plan métallique). Donc la connaissance de ces solutions élémentaires est indispensable.

Dans la suite, y est fixé, et les opérateurs de dérivation agissent en x . Les vecteurs \vec{m}_0 et \vec{j}_0 sont des vecteurs qui pourront ensuite dépendre de y .

En remarquant que les équations de Maxwell possèdent une certaine symétrie en \vec{E} et \vec{H} , cherchons d'abord l'expression des champs rayonnés par un dipôle électrique.

$$(3.4) \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - i\omega\mu_0 \vec{H} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0 \vec{E} &= \vec{j}_0 \delta(x - y) \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

On obtiendra les champs rayonnés par un dipôle magnétique en appliquant les transpositions suivantes à l'expression des champs rayonnés par un dipôle électrique.

$$(3.5) \quad \begin{cases} \vec{E} &\longrightarrow \vec{H} \\ \vec{H} &\longrightarrow -\vec{E} \\ \mu_0 &\longleftrightarrow \varepsilon_0 \\ \vec{j}_0 &\longleftrightarrow \vec{m}_0 \end{cases}$$

Appliquons le rotationnel à la première équation du système (3.4), multiplions la deuxième par $i\omega\mu_0$ et sommons, nous obtenons

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \underbrace{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}_{=k^2} \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{j}_0 \delta(x - y)$$

Pour se ramener à l'équation de Helmholtz vectorielle, nous utilisons la relation

$$\vec{\Delta} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}$$

Or, en appliquant la divergence à l'équation d'Ampère, nous trouvons

$$i\omega\epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \text{div} \left(\vec{j}_0 \delta(x-y) \right)$$

puisque la divergence d'un rotationnel est nulle. Le champ \vec{E} vérifie donc

$$-(\Delta + k^2) \vec{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\vec{j}_0 \delta(x-y) \right) + i\omega\mu_0 \vec{j}_0 \delta(x-y)$$

Nous en déduisons l'expression du champ \vec{E} en fonction des dérivées de la solution élémentaire.

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= -\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(G(x, y) \vec{j}_0 \right) + i\omega\mu_0 G(x, y) \vec{j}_0 \\ &= ikZ_0 \left(1 + \frac{1}{k^2} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \right) G(x, y) \vec{j}_0 \end{aligned}$$

Le champ magnétique s'en déduit grâce à l'équation de Faraday :

$$\vec{H}(x, y) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(G(x, y) \vec{j}_0 \right)$$

Le champ rayonné par un dipôle magnétique se calcule de manière analogue et sans nouveau calcul en utilisant (3.5).

L'expression des champs électromagnétiques rayonnés par des sources dipolaires \vec{j}_0 et \vec{m}_0 positionnées au point y est donc donnée par (3.6) :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \vec{E}(x, y) = ikZ_0 \left(1 + \frac{1}{k^2} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \right) G(x, y) \vec{j}_0(y) - \overrightarrow{\text{rot}} G(x, y) \vec{m}_0(y) \\ \vec{H}(x, y) = \overrightarrow{\text{rot}} G(x, y) \vec{j}_0(y) + \frac{ik}{Z_0} \left(1 + \frac{1}{k^2} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \right) G(x, y) \vec{m}_0(y) \end{cases}$$

Nous venons de trouver l'équivalent des ondes sphériques du cas scalaire pour le système de Maxwell, ondes dipolaires. En effectuant de même que précédemment un développement limité au voisinage d'un point $X = R\vec{v}$ loin de l'origine ($R \gg 1$) positionnée en y , en notant x un point courant de ce voisinage et $x' = x - X$ les coordonnées locales, on obtient en se limitant au dipôle électrique (le cas magnétique étant identique) :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \simeq \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{ik\vec{v} \cdot x'} \\ \overrightarrow{\text{grad}}_x G(x, y) &= \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{y\vec{x}}{|x-y|} \simeq ik \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{ik\vec{v} \cdot x'} \vec{v} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\overrightarrow{\text{grad}}_x \text{div}_x(G(x, y) \vec{j}_0(y)) = \overrightarrow{\text{grad}}_x(\overrightarrow{\text{grad}}_x G(x, y) \cdot \vec{j}_0(y)) \simeq -k^2 \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{ik\vec{\nu} \cdot x'} (\vec{\nu} \cdot \vec{j}_0(y)) \vec{\nu}$$

On obtient alors dans le cas du dipôle électrique le comportement lointain suivant des champs électromagnétiques dans la direction $\vec{\nu}$:

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y) \simeq ikZ_0 \left(\vec{j}_0 - (\vec{\nu} \cdot \vec{j}_0) \vec{\nu} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{ik\vec{\nu} \cdot x'} \\ \vec{H}(x, y) \simeq ik \left(\vec{\nu} \wedge \vec{j}_0 \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{ik\vec{\nu} \cdot x'} \end{cases}$$

En posant,

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = ikZ_0 \left(\vec{j}_0 - (\vec{\nu} \cdot \vec{j}_0) \vec{\nu} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \\ \vec{H}_0 = ik \left(\vec{\nu} \wedge \vec{j}_0 \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \vec{E}(x) \simeq \vec{E}_0 e^{ik\vec{\nu} \cdot x'} \\ \vec{H}(x) \simeq \vec{H}_0 e^{ik\vec{\nu} \cdot x'} \end{cases}$$

On remarque que le comportement à l'infini est localement celui d'une onde plane

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = Z_0 \vec{H}_0 \wedge \vec{\nu} \\ Z_0 \vec{H}_0 = \vec{\nu} \wedge \vec{E}_0 \end{cases}$$

Nous voyons alors apparaître une autre condition de radiation permettant de ne conserver que les ondes physiques, cette condition dite de Silver-Muller s'écrit :

$$r(\vec{E}(r) - Z_0 \vec{H}(r) \wedge \vec{e}_r) \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

Elle découle directement du comportement à l'infini des champs rayonnés par des sources élémentaires. Il est facile de démontrer que les ondes planes ne vérifient pas cette condition (à part uniquement dans la direction vers laquelle elles se propagent) ni les ondes dipolaires dépendant de l'autre solution élémentaire $\frac{e^{-ikr}}{r}$. Lorsque l'on résout numériquement le système de Maxwell en gardant les deux champs \vec{E} , \vec{H} , c'est cette condition qui est souvent utilisée plutôt que celle de Sommerfeld.

Remarque 18. L'expression des champs électromagnétiques rayonnés par un dipôle électrique s'obtient classiquement en utilisant les potentiels électriques, V potentiel scalaire et \vec{A} potentiel vecteur. En utilisant successivement les 2 théorèmes de Poincaré (les champs à divergence nulle

dérivent d'un rotationnel et les champs à rotationnel nul dérivent d'un gradient) dans le système (3.4), on obtient :

$$\begin{cases} \mu_0 \vec{H} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} - i\omega \vec{A} &= -\vec{\text{grad}} V \end{cases}$$

Le potentiel vecteur étant défini à un gradient près et le potentiel scalaire à une constante près, on utilise classiquement une jauge (ici celle de Lorentz en fréquence)

$$\text{div} \vec{A} - \frac{i\omega}{c^2} V = 0$$

qui permet de découpler les deux potentiels, qui vérifient alors respectivement l'équation de Helmholtz scalaire et vectorielle avec comme second membre respectif la charge électrique source et le courant électrique source. On obtient alors directement les champs rayonnés (3.6).

3.3 Fonctions spéciales et solutions analytiques

3.3.1 Harmoniques sphériques

La base des harmoniques sphériques est l'équivalent pour la sphère de \mathbb{R}^3 de la base $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ pour le cas du cercle. Nous allons nous contenter d'en présenter les résultats les plus utiles et renvoyer le lecteur intéressé à des ouvrages spécialisés. Cette base est très utile dans différents domaines de la physique, tant pour démontrer des résultats théoriques que d'un point de vue pratique, pour expliciter des solutions analytiques pour diverses EDP. Nous l'utiliserons pour calculer quelques solutions explicites de problèmes aux limites à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Définition 1. Les harmoniques sphériques d'ordre l sont la trace sur la sphère unité S des polynômes homogènes harmoniques (i.e. à Laplacien nul) de degré l .

Citons quelques propriétés intéressantes :

Proposition 1. Les harmoniques sphériques d'ordres différents sont orthogonales pour le produit $L^2(S)$.

Cette propriété se montre facilement en appliquant la formule de Green dans la sphère unité à deux polynômes harmoniques de degrés différents.

Proposition 2. Les harmoniques sphériques d'ordre l forment un espace vectoriel de dimension $2l + 1$ qu'on note \mathcal{H}_l .

Définition 2 (Opérateur de Laplace-Beltrami). Rappelons que le Laplacien s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \Delta_S + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Δ_S est appelé opérateur de Laplace-Beltrami ou Laplacien sur la sphère.

En fait, on peut définir un Laplacien surfacique pour toute surface sous réserve d'un minimum de régularité.

Théorème 1 (Base des harmoniques sphériques). *On a les propriétés suivantes :*

1. Δ_S est diagonalisable dans une base orthonormée de $L^2(S)$.
2. Pour tout l , \mathcal{H}_l est l'espace propre associé à la valeur propre $-l(l+1)$. Ainsi, $L^2(S)$ est somme directe orthogonale des \mathcal{H}_l .
3. Notons pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $-l \leq m \leq l$, P_l^m la fonction de Legendre associée

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1$$

où P_l est le polynôme de Legendre de degré l . Alors la famille $(Y_{l,m})_{l \in \mathbb{N}, -l \leq m \leq l}$ définie par

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

forme une base orthonormée de $L^2(S)$ qui diagonalise l'opérateur Δ_S :

$$\Delta_S Y_{l,m} + l(l+1) Y_{l,m} = 0$$

On remarque que

$$Y_{l,-m} = (-1)^m \overline{Y_{l,m}}$$

Ainsi toute fonction $u \in L^2(S)$ sur la sphère peut s'écrire

$$u = \sum_{l,m} u_{l,m} Y_{l,m}$$

la convergence étant à entendre au sens $L^2(S)$, et on a

$$\|u\|_{L^2(S)}^2 = \sum_{l,m} |u_{l,m}|^2$$

On peut développer des u beaucoup moins réguliers que L^2 .

C'est l'essentiel de ce qu'il suffit de connaître sur les harmoniques sphériques dans le cadre de ce cours.

3.3.2 Application à la résolution explicite de l'équation de Laplace

Soit Ω l'intérieur ou l'extérieur de la sphère unité qu'on note S . On cherche u à Laplacien nul dans Ω . Pour tout r fixé, u peut se développer en harmoniques sphériques :

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} U_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, on trouve que $U_{l,m}(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$U_{l,m}'' + \frac{2}{r} U_{l,m}' - \frac{l(l+1)}{r^2} U_{l,m} = 0 \quad \text{pour } r > 0$$

qui admet pour solutions indépendantes :

$$r^l \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^{l+1}}$$

Si Ω est l'intérieur de la sphère unité, on sélectionne la *solution bornée à l'origine*, i.e.

$$(3.7) \quad u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} u_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Si Ω est l'extérieur de la sphère unité, on sélectionne la *solution nulle à l'infini*, i.e.

$$(3.8) \quad u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} u_{l,m} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Les $u_{l,m}$ sont des coefficients à déterminer grâce à la condition aux limites. Dans le cas d'un **problème de Dirichlet** :

$$u = u^0 = \sum_{l,m} u_{l,m}^0 Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad \text{sur } S = \partial\Omega$$

on trouve

$$u_{l,m} = u_{l,m}^0$$

Dans le cas d'un **problème de Neumann** :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g = \sum_{l,m} g_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

En utilisant (3.7) et (3.8), on trouve :

$$\begin{aligned} u_{l,m} &= \frac{g_{l,m}}{l} && \text{pour le problème intérieur} \\ u_{l,m} &= -\frac{g_{l,m}}{l+1} && \text{pour le problème extérieur} \end{aligned}$$

3.3.3 Fonctions de Bessel et Hankel sphériques et équation de Helmholtz

Cherchons à faire le même calcul avec l'équation de Helmholtz

$$-(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

On trouve que les coefficients $U_{l,m}$ sont solution de l'équation de Bessel sphérique :

$$U_{l,m}'' + \frac{2}{r}U_{l,m}' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)U_{l,m} = 0 \quad \text{pour } r > 0$$

On montre que

$$U_{l,m}(r) = \alpha_{l,m}^1 h_l^{(1)}(kr) + \alpha_{l,m}^2 h_l^{(2)}(kr)$$

où

$$h_l^{(1)}(r) = (-r)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^l \left(\frac{e^{ir}}{r}\right) \quad h_l^{(2)}(r) = \overline{h_l^{(1)}(r)}$$

On les appelle *fonctions de Hankel sphériques de 1ère et 2ème espèce*.

En raisonnant par récurrence, on montre que

$$h_l^{(1)}(r) = (-i)^l \frac{e^{ir}}{r} \sum_{m=0}^l \beta_m^l \frac{1}{r^m}$$

avec

$$\beta_m^l = \frac{(l+m)!}{m!(l-m)!2^m}$$

Ainsi $h_l^{(1)}(r)$ se comporte à l'infini comme la solution élémentaire sortante :

$$h_l^{(1)}(r) \sim (-i)^l \frac{e^{ir}}{r} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

alors que

$$h_l^{(2)}(r) \sim (i)^l \frac{e^{-ir}}{r} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

est équivalente à la solution rentrante.

Résolvons le problème de diffraction d'une onde scalaire par une sphère (Ω est l'extérieur de la sphère unité) :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u^0 & \text{sur } S \\ u \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

où

$$u^0 = \sum_{l,m} u_{l,m}^0 Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

La condition de radiation permet de dire que $\alpha_{l,m}^2 = 0$. En imposant la condition de Dirichlet,

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} u_{l,m}^0 h_l^{(1)}(kr) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad \text{pour } r > 1$$

Pour représenter une solution des équations de Helmholtz à l'intérieur de la sphère, il faut utiliser les combinaisons des fonctions de Hankel sphériques bornées à l'origine :

$$j_l(r) = \Im m \left(h_l^{(1)}(r) \right)$$

Il s'agit des *fonctions de Bessel sphériques usuelles*.

Indépendamment de toute condition aux limites, les calculs précédents montrent que toute solution des équations de Helmholtz pour $r > 1$ et vérifiant la condition de radiation à l'infini s'écrit sous la forme :

$$(3.9) \quad u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} u_{l,m} h_l(kr) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

où à partir d'ici, on note $h_l = h_l^{(1)}$ sans aucune confusion. Cette formule est connue sous le nom de développement multipolaire.

En utilisant le comportement asymptotique des h_l à l'infini, on démontre que :

$$(3.10) \quad u(r, \theta, \varphi) \sim \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l,m} (-i)^l u_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{r} a(\theta, \varphi)$$

uniformément en (θ, φ) .

3.3.4 Opérateur d'impédance de la sphère

Calculons la dérivée normale sur la sphère :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} u_{l,m} k h_l'(kr) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Notons

$$U_{l,m} = u_{l,m} h_l(k)$$

les coefficients du développement de u sur la sphère unité S . On a ainsi, sur la sphère unité :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{l,m} z_l(k) U_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

où

$$z_l(k) = k \frac{h_l'(k)}{h_l(k)}$$

On vient de montrer un résultat très important :

Théorème et définition 1 (Opérateur de Dirichlet-Neumann). *Si u vérifie $-(\Delta + k^2)u = 0$ à l'extérieur de la sphère unité, ainsi que la condition de radiation à l'infini, alors la dérivée normale de u sur la sphère unité dépend uniquement de la trace $\gamma_0(u)$ de u sur cette sphère S :*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = T\gamma_0(u)$$

où

$$T : \sum_{l,m} U_{l,m} Y_{l,m} \mapsto \sum_{l,m} z_l(k) U_{l,m} Y_{l,m}$$

est appelé opérateur de Dirichlet-Neumann.

On montre aussi que T est un opérateur linéaire continu : $H^{1/2}(S) \rightarrow H^{-1/2}(S)$, i.e. ressemble à un opérateur de dérivation tangentielle d'ordre 1 puisqu'on perd un cran de régularité. Par contre, il est non-local, i.e. Tu en un point de la sphère S dépend des valeurs de u sur toute la sphère. En effet, pour pouvoir appliquer T , on a besoin des coefficients du développement de u sur les harmoniques

$$U_{l,m} = \int_S u \overline{Y_{l,m}} dS$$

avant de les multiplier par z_l . T est ce qu'on appelle un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1.

De plus, on montre les inégalités importantes suivantes :

Proposition 3. *Pour tout $v \in H^{1/2}(S)$, on a*

$$\begin{aligned} -\Re(Tv, v) &\geq C \|v\|_{H^{1/2}(S)}^2 \\ -\Im(Tv, v) &> 0 \end{aligned}$$

où (\cdot, \cdot) est le crochet de dualité $H^{-1/2}(S) \times H^{1/2}(S)$ (linéaire à droite, anti-linéaire à gauche).

Remarque 19. *La première inégalité est un résultat de coercivité sur T . La deuxième exprime que l'énergie rayonnée est positive. La preuve de ce théorème repose sur les propriétés de signe de z_l qu'on démontre en se basant sur la propriété de récurrence homographique suivante :*

$$z_{l+1}(k) = -(l+2) - \frac{k^2}{z_l(k) - l}$$

et le calcul explicite de z_0 . D'ailleurs, c'est cette même récurrence qu'on utilise pour calculer z_l dans la pratique.

Remarque 20. *Pour transposer les résultats précédents sur la sphère S_R de rayon $R > 0$, il suffit de remplacer $z_l(k)$ par*

$$Z_l(k, R) = k \frac{h'_l(kR)}{h_l(kR)} = \frac{1}{R} z_l(kR)$$

Terminons ce paragraphe par une remarque sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann du Laplacien. Le problème de Dirichlet intérieur (dans la boule) admet une solution unique. Il en est de même pour le problème de Dirichlet extérieur (à la boule) avec condition de potentiel nul à l'infini. On peut donc introduire l'opérateur de Dirichlet intérieur T^{int} et l'opérateur de Dirichlet extérieur T^{ext} . D'après les calculs du §3.3.2, on a

$$T^{int} : \sum_{l,m} U_{l,m} Y_{l,m} \mapsto \sum_{l,m} l U_{l,m} Y_{l,m}$$

et

$$T^{ext} : \sum_{l,m} U_{l,m} Y_{l,m} \mapsto \sum_{l,m} -(l+1) U_{l,m} Y_{l,m}$$

On en déduit la propriété inéressante suivante :

Proposition 4. *Les opérateurs de Dirichlet intérieur et extérieur du Laplacien sur la sphère vérifient l'identité remarquable suivante :*

$$(3.11) \quad T^{int} + T^{ext} = -I$$

Où I est l'injection canonique de $H^{1/2}(S)$ dans $H^{-1/2}(S)$. T^{ext} est donc une perturbation compacte de $-T^{int}$.

3.4 Étude du problème de diffraction dans le domaine fréquentiel

3.4.1 Panorama

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la démonstration de l'existence et unicité de la solution du problème de diffraction d'une onde par un obstacle borné. Nous le ferons dans le cas scalaire pour des conditions aux limites simples. Cette démonstration est représentative des difficultés que l'on rencontre lors de la résolution de tout problème de diffraction en domaine fréquentiel, que ce soit en acoustique, en électromagnétisme ou en élastodynamique, avec des difficultés techniques propres à chaque physique.

Dans ce chapitre, nous traitons le problème sous sa forme locale EDP. Dans un chapitre 4, nous l'aborderons sous l'angle de l'équation intégrale associée.

Comme nous le verrons, une onde qui se propage dans un domaine extérieur, complémentaire d'un borné, et qui vérifie les conditions de radiation, n'est pas de carré intégrable au voisinage de l'infini, son gradient non plus. Il n'est donc pas possible d'écrire une formulation variationnelle en intégrant dans tout le domaine. Une première technique consiste à rajouter une partie imaginaire au nombre d'onde qui devient $k_\eta = k + i\eta$, $\eta > 0$. La solution fondamentale devient exponentiellement décroissante à l'infini, et nous pouvons chercher une solution dans H^1 . On montre que la forme sesquilinéaire est H^1 -coercive et l'existence et unicité de la solution découlent du théorème de Lax-Milgram. Ceci pour $\eta > 0$. On démontre ensuite qu'on peut faire

tendre η vers 0 et obtenir une solution du problème initiale. C'est le *principe d'absorption limite*. Nous ne développerons pas cette technique, mais en dirons quelques mots dans le paragraphe 3.4.5.

Un autre technique consiste à tronquer le domaine et écrire des conditions aux limites dites *transparentes* sur l'interface de troncature, *i.e.* des conditions aux limites qui ne vont pas générer des réflexions : toute onde qui arrive sur une telle interface va pouvoir «sortir» du domaine. La solution du problème aux limites dans le domaine tronqué est ainsi la restriction à ce domaine de la solution du problème dans le domaine extérieur. Cette approche permettra une approximation par éléments finis. En effet, même si une formulation dans tout le domaine extérieur est possible, comment mailler un domaine infini ? Nous tronquons le domaine par une sphère et profitons du calcul de l'opérateur de Dirichlet-Neumann introduit dans le paragraphe 3.3.4 pour écrire la condition transparente. Ceci permet d'établir le théorème d'existence et unicité.

Dans la pratique, on préférera tronquer le plus près possible de l'obstacle pour diminuer autant que possible le domaine de calcul et optimiser par conséquent le temps de calcul. Une interface de type sphérique n'est pas toujours adaptée. Dans ce cas, la condition aux limites transparente n'est plus simple à implémenter. De plus, pour des raisons d'efficacité numérique, on préférera un opérateur local, alors que l'opérateur de Dirichlet-Neumann exact ne l'est pas. On travaille avec ce que l'on appelle des conditions aux limites absorbantes. D'un point de vue théorique, nous pouvons utiliser ce genre de conditions aux limites pour démontrer l'existence et unicité de la solution du problème dans le domaine tronqué. Cette fois-ci, cette solution n'est plus la restriction de la solution dans tout le domaine extérieur. Mais on démontre que lorsque $R \rightarrow \infty$, cette solution tend vers la solution cherchée dans tout voisinage borné de l'obstacle. Nous ne développerons pas cette technique.

Pour terminer, signalons un autre type de problèmes : la diffraction par des obstacles non-bornés. Par un exemple, un obstacle périodique dans une ou deux directions de l'espace, un plan ou un demi-plan infini. Ces obstacles pouvant être localement perturbés. . . Nous ne traiterons pas non plus ce genre de problèmes dans le cadre de ce cours.

3.4.2 Le cas scalaire

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde acoustique incidente p^{in} par un obstacle borné \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 . Nous considérons une condition aux limites de Dirichlet, la preuve dans le cas d'une condition de Neumann est semblable.

Considérons pour se fixer les idées une onde plane incidente

$$p^{in}(x) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

C'est une solution de l'équation de Helmholtz dans tout l'espace. La présence de l'obstacle va générer une onde diffractée qui vérifie l'équation de Helmholtz, la condition de radiation et qui est telle que l'onde totale, somme des ondes incidente et diffractée, vérifie la condition aux limites sur le bord de l'obstacle.

On note $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ le domaine extérieur, complémentaire de l'obstacle borné. C'est le domaine dans lequel se propage l'onde. On note $\Gamma = \partial\Omega$ le bord du domaine.

Le problème peut être énoncé de la façon suivante :

$$(3.12) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \\ p - p^{in} \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

p est l'onde totale. $p^{sc} = p - p^{in}$ est l'onde diffractée.

3.4.3 Troncature du domaine

Nous avons vu au paragraphe 3.3.3 qu'une fonction u qui vérifie l'équation de Helmholtz homogène à l'extérieur d'une sphère et qui vérifie la condition de radiation se comporte à l'infini comme :

$$u(r, \theta, \varphi) \sim \frac{e^{ikr}}{4\pi r} a(\theta, \varphi)$$

Toutes les dérivées radiales ont également un comportement en e^{ikr}/r à l'infini. Nous en déduisons que u n'est pas dans L^2 à l'infini, son gradient non plus (l'élément de volume étant $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$).

Il est donc exclu d'écrire une formulation variationnelle du problème en intégrant dans Ω : les intégrales ne sont pas convergentes ! Nous cherchons à tronquer le domaine Ω pour se ramener à un problème posé dans un domaine borné qui est équivalent au problème (3.12).

Soit $R > 0$ assez grand pour que la boule B_R de rayon R contienne l'obstacle \mathcal{O} . Notons S_R la sphère de rayon R et $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ le domaine tronqué.

Commençons par le lemme suivant, cas particulier du lemme des sauts :

Lemme 1. *Soit un ouvert \mathcal{O} coupé en deux ouverts \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 séparés par une interface Σ . Soit u_1 et u_2 deux fonctions régulières jusqu'au bord dans \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 respectivement. Si*

$$-(\Delta + k^2)u_i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}_i)$$

Notons u la fonction qui vaut u_i dans \mathcal{O}_i . On a

$$-(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O})$$

ssi

$$u_1 = u_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma$$

Démonstration. En testant par une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$, et en remarquant que $u \in L^2(\mathcal{O})$, on obtient :

$$\begin{aligned} (-(\Delta + k^2)u, \varphi) &= (u, -(\Delta + k^2)\varphi) \\ &= - \int_{\mathcal{O}} u(x)(\Delta \varphi(x) + k^2 \varphi(x)) dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{O}_i} u_i(x)(\Delta \varphi(x) + k^2 \varphi(x)) dx \end{aligned}$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit de distribution $\mathcal{D}'(\mathcal{O}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$.

Notons \vec{n}_i la normale unitaire sur Σ sortante de \mathcal{O}_i . Ainsi $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$. En intégrant par partie dans chacun des \mathcal{O}_i , on trouve :

$$\begin{aligned} (- (\Delta + k^2)u, \varphi) &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{O}_i} \underbrace{(\Delta u_i(x) + k^2 u_i(x))}_{=0} \varphi(x) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} u_i - \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \varphi \right) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} [u] - \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \varphi \right) d\Sigma \end{aligned}$$

où

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \quad [u] = u_1 - u_2 \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}$$

Ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$, d'où le résultat. \square

A l'aide de ce lemme, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 5 (Problème dans le domaine tronqué). *T étant l'opérateur de Dirichlet-Neumann défini dans le paragraphe 3.3.4, le problème de diffraction (3.12) est équivalent au problème suivant posé dans le domaine borné :*

$$(3.13) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p_R = 0 & \text{dans } \Omega_R \\ p_R = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial n} (p_R - p^{in}) = T\gamma_0(p_R - p^{in}) & \text{sur } S_R \end{cases}$$

i.e.

- la restriction à Ω_R de p solution de (3.12) est une solution de (3.13) ;
- une solution p_R de (3.13) peut se prolonger en une solution de (3.12).

Démonstration. Soit p une solution du problème (3.12). On a

$$((\Delta + k^2)p, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

et donc en particulier pour $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega_R)$. Comme le champ diffracté $p^{sc} = p - p^{in}$ vérifie la condition de radiation, on a d'après le théorème 1

$$\frac{\partial p^{sc}}{\partial n} = T(\gamma_0 p^{sc}) \quad \text{sur } S_R$$

La condition de Dirichlet sur Γ étant vérifiée par p_R , on en conclut que p_R est solution de (3.13).

Soit maintenant p_R solution du (3.13). Montrons qu'on peut la prolonger en une solution de (3.12). Développons la trace sur la sphère S_R du champ diffracté p^{sc} sur la base des harmoniques sphériques :

$$p_{l,m}^{sc} = \frac{1}{R^2} \int_{S_R} p^{sc} \overline{Y_{l,m}} dS_R$$

Pour prolonger la solution, considérons le problème de Dirichlet extérieur à la boule :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)P^{sc} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus B_R \\ P^{sc} = p^{sc} & \text{sur } S_R \\ P^{sc} \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

D'après les calculs du paragraphe 3.3.3, nous pouvons expliciter P^{sc}

$$P^{sc}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} p_{l,m}^{sc} \frac{h_l(kr)}{h_l(kR)} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Posons alors :

$$p = \begin{cases} p_R & \text{dans } \Omega_R \\ P^{sc} + p^{in} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus B_R \end{cases}$$

Par construction, p et sa dérivée normale sont continues à travers S_R . Le lemme 1 permet de conclure que p est solution du problème non tronqué. \square

L'opérateur T nous sert ici d'opérateur de troncature (d'où le choix de la lettre T).

3.4.4 Formulation variationnelle - Existence et unicité

L'opérateur de Dirichlet-Neumann nous a servi à ramener la condition de radiation à l'infini à distance finie ! C'est ce qui nous permet d'écrire le problème sous forme variationnelle.

En multipliant par une fonction test $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_R})$ nulle sur le bord Γ et en intégrant par partie, on est amené à introduire la forme sesquilinéaire suivante :

$$a(p, q) = \int_{\Omega_R} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_R} p \bar{q} - (T \gamma_0 p, \gamma_0 q)$$

où γ_0 est l'opérateur trace sur S_R , (\cdot, \cdot) le produit de dualité $H^{-1/2}(S_R) \times H^{1/2}(S_R)$, antilinéaire par rapport à $H^{1/2}(S_R)$. Posons

$$H = \{p \in H^1(\Omega_R) : p = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$a(\cdot, \cdot)$ est définie continue sur $H \times H$.

On définit aussi g le vecteur :

$$g = T p^{in} - \frac{\partial p^{in}}{\partial n} \in H^{-1/2}(S_R)$$

ce qui permet de définir la forme antilinéaire

$$\mathcal{L}(q) = (g, \gamma_0 q) \quad q \in H$$

\mathcal{L} est définie continue sur H .

La formulation variationnelle du problème (3.13) est donnée par :

$$(3.14) \quad \begin{cases} \text{Trouver } p \in H \text{ tel que :} \\ a(p, q) = \mathcal{L}(q) \quad \forall q \in H \end{cases}$$

Théorème 2 (Existence et unicité). *Le problème (3.14) admet une solution unique dans H . De plus*

$$\|p\|_H \leq C\|\mathcal{L}\|_{H'}$$

Démonstration. Le résultat peut être démontré grâce à l'alternative de Fredholm sous sa forme variationnelle (cf. annexe, corollaire 1). Nous allons montrer que les hypothèses du corollaire sont vérifiées.

Posons :

$$a_0(p, q) = \int_{\Omega_R} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} + \int_{\Omega_R} p \bar{q} - (T\gamma_0 p, \gamma_0 q)$$

et

$$a_1(p, q) = -(k^2 + 1) \int_{\Omega_R} p \bar{q}$$

On a $a(\cdot, \cdot) = a_0(\cdot, \cdot) + a_1(\cdot, \cdot)$. Grâce à la proposition 3, on trouve que :

$$\Re(a_0(p, p)) \geq \|p\|_{H^1(\Omega_R)}^2$$

$a_0(\cdot, \cdot)$ est donc coercive. Comme Ω_R est borné, d'après le théorème de Rellich (cf. théorème 17 de l'annexe), l'injection canonique $H^1(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_R)$ est compacte. Considérons deux suites u_n et v_n dans H qui convergent faiblement dans H : $u_n \rightharpoonup u$ et $v_n \rightharpoonup v$. La compacité implique que ces convergences sont fortes dans $L^2(\Omega_R)$ et par suite :

$$a_1(u_n, v_n) \rightarrow a_1(u, v) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Il reste à démontrer l'unicité. Soit $p \in H$ tel que

$$a(p, q) = 0 \quad \forall q \in H$$

En considérant $q = p$ et en prenant la partie imaginaire, on trouve

$$\Im(T\gamma_0 p, \gamma_0 p) = 0$$

ce qui implique d'après la proposition 3, que la trace $\gamma_0 p$ est nulle dans $H^{1/2}(S_R)$ et par suite

$$\frac{\partial p}{\partial n} = T\gamma_0 p = 0 \quad \text{sur } S_R$$

Ainsi, p vérifie l'équation de Helmholtz homogène

$$-(\Delta + k^2)p = 0 \quad \Omega$$

avec p et sa dérivée normale nulles sur la sphère. Le théorème de Cauchy-Kowalewska implique $p \equiv 0$ dans tout Ω_R . D'où l'unicité de la solution. Remarquons que l'unicité découle de la condition de radiation (au travers de la proposition 3).

En appliquant l'alternative de Fredholm, le problème (3.14) admet une solution unique dans H qui vérifie de plus

$$\|p\|_H \leq C\|\mathcal{L}\|_{H'}$$

□

3.4.5 Quelques remarques sur le principe d'absorption limite

Dans ce paragraphe, nous vérifions rapidement que le problème obtenu en remplaçant k par $k_\eta = k + i\eta$ avec $\eta > 0$ est coercif et est régi sous le lemme de Lax-Milgram. Nous terminons par quelques indications sur le passage à la limite $\eta \rightarrow 0+$.

Remarquons d'abord que dans ce cas, le choix de la bonne fonction de Green

$$G^\pm(x, y) = \frac{e^{\pm ik_\eta|x-y|}}{4\pi|x-y|} = e^{\mp\eta|x-y|} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

est facile : on choisit celle qui décroît à l'infini, *i.e.* G^+ qui décroît exponentiellement. La condition de radiation de Sommerfeld est alors remplacée par une condition de décroissance du champ et de son gradient de sorte que la formule de Green d'intégration par partie devienne valable dans Ω et permette une formulation variationnelle dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose $H = H_0^1(\Omega)$ et

$$a_\eta(p, q) = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - (k_\eta)^2 \int_\Omega p \bar{q}$$

On remarque que :

$$\Re a_\eta(p, -ik_\eta p) = \eta \left(\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \bar{q} + |k_\eta|^2 \int_\Omega p \bar{q} \right)$$

$a_\eta(\cdot, \cdot)$ est donc coercif et le problème admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

Il reste ensuite à montrer qu'on peut faire tendre η vers 0. Pour cela, on démontre que la solution est analytique par rapport à la fréquence complexe dans le demi-plan $\Im m > 0$. Ensuite en raisonnant par l'absurde, on montre que pour tout R assez grand, la norme $H^1(\Omega_R)$ est bornée. Ceci permet de passer à la limite pour des fréquences réelles avec obtention d'une solution dans $H^1(\Omega_R)$.

3.5 Étude de l'équation des ondes scalaires en régime transitoire

Nous traitons dans ce chapitre l'analyse mathématique de l'équation des ondes à l'aide des outils modernes de l'analyse fonctionnelle consacrés à l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous concentrons l'essentiel de notre présentation sur le problème modèle de l'équation des ondes à coefficients variables dans \mathbb{R}^N et généralisons les résultats obtenus au cas des domaines bornés et du système de Maxwell. Enfin nous abordons les propriétés de l'énergie.

3.5.1 Le problème modèle

Nous considérons le problème de propagation dans tout l'espace suivant :

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Les coefficients $\rho(x)$ et $\mu(x)$ caractérisant le milieu de propagation sont supposés satisfaire les hypothèses suivantes :

$$(3.16) \quad \left| \begin{array}{l} \bullet \rho(x), \mu(x) \text{ mesurables,} \\ \bullet 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N, \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Les données du problème sont donc, outre les coefficients $\rho(x)$ et $\mu(x)$:

- les données initiales $(u_0(x), u_1(x))$,
- le second membre $f(x, t)$.

L'inconnue du problème est la fonction $u(x, t)$.

3.5.2 Existence et unicité pour le problème modèle

On fait entrer (3.15) dans le cadre du théorème de Hille-Yosida en remarquant que (3.15) est équivalent au système :

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u) = \frac{f}{\rho}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = u_1(x). \end{array} \right.$$

On introduit alors l'espace de Hilbert :

$$H = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$$

muni du produit scalaire, si $U = (u \ v)^t$ et $U' = (u' \ v')^t$

$$(U, U')_H = (u, u')_\rho + (\nabla u, \nabla u')_\mu + (v, v)_\rho.$$

Nous avons adopté la notation (produit scalaire L^2 à poids) :

$$\begin{cases} (u, u')_\alpha = \int u(x) u'(x) \alpha(x) dx, \\ \forall (u, u', \alpha) \in L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \times L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \alpha \geq 0, \end{cases}$$

où pour simplifier les notations :

$$\int f dx \equiv \int_{\mathbb{R}^N} f dx.$$

Par ailleurs, nous désignerons par (\cdot, \cdot) le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R}^N)$ ce qui correspond à $(\cdot, \cdot)_\alpha$ lorsque $\alpha(x) \equiv 1$. La norme associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_\alpha$ sera notée $\|u\|_\alpha$.

On notera également Δ_μ l'opérateur $\text{div}(\mu \nabla)$ et on posera :

$$\mathcal{D}(\Delta_\mu) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) / \Delta_\mu u = \text{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

que l'on munira de sa norme naturelle

$$\|u\|_\mu^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta_\mu u\|^2.$$

On introduit alors :

$$D(A) = \mathcal{D}(\Delta_\mu) \times H^1(\mathbb{R}^N),$$

et on définit l'opérateur non borné sur H : $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ par

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\frac{1}{\rho} \text{div}(\mu \nabla u) \end{pmatrix}.$$

Le problème (3.17) se réécrit avec $U = (u \ v)^t$

$$(3.18) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$F = (0 \ f/\rho)^t, \quad U_0 = (u_0 \ u_1)^t.$$

Lemme 1. *L'opérateur $A + \lambda I$ est maximal monotone pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$.*

Démonstration.

1. Si $U = (u \ v)^t$, notons que :

$$(AU, U)_H = -(u, v)_\rho - (\nabla u, \nabla v)_\mu - \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mu \nabla u), v\right)_\rho.$$

Mais, grâce à la formule de Green

$$\left| \begin{aligned} -\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mu \nabla u), v\right)_\rho &= -(\operatorname{div} (\mu \nabla u), v), \\ &= (\mu \nabla u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla v)_\mu. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent :

$$(AU, U)_H = -(u, v)_\rho \geq -\frac{1}{2} \|u\|_\rho^2 - \frac{1}{2} \|v\|_\rho^2.$$

D'autre part :

$$\|U\|_H^2 = \|u\|_\rho^2 + \|\nabla u\|_\mu^2 + \|v\|_\rho^2,$$

donc

$$(AU, U)_H + \lambda \|U\|_H^2 \geq \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) [\|u\|_\rho^2 + \|v\|_\rho^2],$$

ce qui entraîne

$$\forall \lambda \geq \frac{1}{2}, \quad (AU, U)_H + \lambda \|U\|_H^2 \geq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

2. La surjectivité de $A + \nu I, \nu > 0$, équivaut à trouver $U \in D(A)$ solution de :

$$AU + \nu U = F$$

où F est un élément quelconque de H . Si $U = (u \ v)^t$ et $F = (f \ g)^t$, ceci équivaut à :

$$(3.19) \quad \begin{cases} -v + \nu u = f, & f \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mu \nabla u) + \nu v = g, & g \in L^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

En éliminant v , nous obtenons l'équation :

$$(3.20) \quad -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mu \nabla u) + \nu^2 u = g + \nu f,$$

dont la formulation variationnelle est :

$$(3.21) \quad (\mu \nabla u, \nabla u') + \nu^2 (\rho u, u') = (\rho(g + \nu f), u'), \quad \forall u' \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Le théorème de Lax-Milgram permet d'affirmer que le problème (3.21) admet bien une solution (unique) dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. En remontant à (3.20), on voit que $\operatorname{div} (\mu \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ donc que $u \in \mathcal{D}(\Delta_\mu)$.

Pour remonter à (3.19), il suffit alors de poser $v = \nu u - f$ qui est bien un élément de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nous avons donc démontré que $A + \nu I$ était surjectif pour tout $\nu \geq 0$. Pour conclure au caractère maximal monotone de $A + \lambda I$, il suffit de raisonner avec $\nu = \lambda + 1$.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (3.15) :

Théorème 4. *Avec les hypothèses :*

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathcal{D}(\Delta_\mu) \times H^1(\mathbb{R}^N), \\ f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)), \end{cases}$$

le problème (3.15) admet une unique solution forte dans l'espace :

$$C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\Delta_\mu)).$$

Démonstration. Les hypothèses du théorème équivalent à :

$$\begin{cases} U_0 = (u_0 \ u_1)^t \in D(A), \\ F = (0 \ f/\rho) \in C^1(\mathbb{R}^+; H). \end{cases}$$

Grâce au lemme 1 et au théorème de Hille-Yosida, nous déduisons que le problème d'évolution (3.18) admet une unique solution forte U_0 dans l'espace $C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$. On a :

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) &\iff \begin{cases} u \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\Delta_\mu)), \\ v \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)), \end{cases} \\ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^+; H) &\iff \begin{cases} u \in C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)), \\ v \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)). \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, on déduit que $u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$ ce qui achève la démonstration. □

3.5.3 Généralisation à divers problèmes d'ondes

Une équation des ondes abstraites

Formellement, l'équation des ondes (3.15) peut aussi s'écrire sous la forme abstraite :

$$(3.22) \quad \frac{d^2}{dt^2} u + \mathcal{A} u = \mathbf{f}$$

avec, sans préciser pour l'instant de cadre fonctionnel (espace de Hilbert, domaine de \mathcal{A} ,...)

$$\mathcal{A} u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u), \quad \mathbf{f} = f / \rho.$$

La démarche suivie au paragraphe précédent sur l'équation des ondes (3.15) se généralise facilement à une équation abstraite du type (3.22) sous réserves d'hypothèses adéquates sur l'opérateur \mathcal{A} .

Nous nous donnons deux espaces de Hilbert :

$$\begin{cases} \mathcal{H} \text{ muni du produit scalaire } (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} \text{ et de la norme } |\cdot|_{\mathcal{H}}, \\ V \text{ muni du produit scalaire } (\cdot, \cdot)_V \text{ et de la norme } |\cdot|_V. \end{cases}$$

On suppose d'une part que V est inclus dans \mathcal{H} avec injection continue :

$$V \subset \mathcal{H} \quad \text{et} \quad |u|_{\mathcal{H}} \leq C |u|_V, \quad \forall u \in V,$$

et d'autre part que V est dense dans \mathcal{H} . On se donne par ailleurs une forme bilinéaire sur V :

$$(u, v) \in V \times V \mapsto a(u, v) \in \mathbb{R},$$

que l'on suppose continue et symétrique :

$$(3.23) \quad \begin{cases} \exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| \leq M |u|_V |v|_V, \\ \forall (u, v) \in V \times V, \quad a(u, v) = a(v, u). \end{cases}$$

On suppose enfin que $a(u, v)$ possède la propriété de coercivité suivante :

$$(3.24) \quad \exists \alpha > 0, \quad \exists \nu \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \forall u \in V, \quad a(u, u) + \nu |u|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha |u|_V^2.$$

On peut alors définir un opérateur non borné dans H de la façon suivante :

– Le domaine de A est défini de l'une des manières équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{ u \in V, \exists C(u) \geq 0 / \forall v \in V, |a(u, v)| \leq C(u) |v|_{\mathcal{H}} \}, \\ &= \{ u \in V, \exists w \in \mathcal{H} / \forall v \in V, a(u, v) = (w, v)_{\mathcal{H}} \}. \end{aligned}$$

Pour vérifier l'équivalence de ces deux définitions, notons que si u appartient à $D(A)$ au sens de la première définition, alors l'application :

$$v \mapsto a(u, v)$$

est une forme linéaire sur V qui est continue par rapport à la topologie de \mathcal{H} . Par densité de V dans \mathcal{H} , elle se prolonge donc en une forme linéaire continue sur \mathcal{H} et le théorème de Riesz assure l'existence d'un vecteur w de \mathcal{H} (unique puisque V est dense dans \mathcal{H}) tel que :

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = (w, v),$$

ce qui prouve que u appartient à $D(\mathcal{A})$ au sens de la seconde définition. La réciproque est évidente.

– L'opérateur \mathcal{A} est défini par :

$$\forall u \in D(\mathcal{A}), \quad \forall v \in V, \quad (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{H}} = a(u, v),$$

ce qui caractérise entièrement $\mathcal{A}u$ par densité de V .

Notons qu'on a la triple inclusion :

$$D(\mathcal{A}) \subset V \subset \mathcal{H}.$$

On remarquera enfin que, compte tenu de (3.23) et (3.24), l'application bilinéaire

$$(u, v) \in V \times V \mapsto ((u, v))_V = a(u, v) + \nu (u, v)_{\mathcal{H}}$$

définit un produit scalaire sur V et que la norme associée $\|\cdot\|_V$ est équivalente à la norme $|\cdot|_V$. Autrement dit V , muni du produit scalaire $((u, v))_V$ est encore un espace de Hilbert .

A titre d'application, si on considère :

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N), \quad V = H^1(\mathbb{R}^N),$$

et si on pose :

$$(3.25) \quad \begin{cases} (u, v)_{\mathcal{H}} = (u, v)_{\rho} = \int_{\mathbb{R}^N} \rho u v \, dx, \\ (u, v)_V = \int_{\mathbb{R}^N} \{ u v + \nabla u \cdot \nabla v \} \, dx, \\ a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \end{cases}$$

alors on vérifie aisément que l'opérateur \mathcal{A} est défini par :

$$(3.26) \quad \begin{cases} D(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\Delta_{\mu}) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) / \Delta_{\mu} u = \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \\ \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u). \end{cases}$$

Pour définir le problème d'évolution abstrait du second ordre, nous nous donnons :

$$(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}) \times V, \quad f \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Définition 1. On appelle *solution forte* ou *solution classique* du problème d'évolution :

$$(3.27) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \mathcal{A}u = f, & t > 0, & (3.27)_1 \\ u(0) = u_0, & & (3.27)_2 \\ \frac{du}{dt}(0) = u_1, & & (3.27)_3 \end{cases}$$

toute fonction u de la variable réelle t à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ possédant la régularité :

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})),$$

vérifiant (3.27) au sens classique c'est à dire que :

- l'égalité (3.27)₁ a lieu pour tout $t > 0$, en tant qu'égalité entre éléments de l'espace \mathcal{H} ,
- l'égalité (3.27)₃ a lieu dans V et l'égalité (3.27)₂ a lieu dans $D(\mathcal{A})$.

Pour résoudre (3.27), l'idée est de se ramener à un problème d'évolution du premier ordre afin d'appliquer le théorème de Hille-Yosida. On introduit alors l'inconnue supplémentaire :

$$v = \frac{du}{dt}, \quad (\text{recherchée dans } C^0(\mathbb{R}^+; V))$$

et on formule un problème dont la nouvelle inconnue est :

$$U = (u, v)^t.$$

Pour cela, on introduit l'espace de Hilbert :

$$H = V \times \mathcal{H},$$

que l'on munit du produit scalaire (si $U = (u, v)^t$ et $U' = (u', v')^t$) :

$$(U, V) = ((u, u'))_V + (v, v')_{\mathcal{H}}.$$

On définit alors un opérateur non borné dans H par :

$$\begin{cases} D(A) = D(\mathcal{A}) \times V, \\ \forall U = (u, v)^t \in D(A), \quad AU = (-v, \mathcal{A}u)^t. \end{cases}$$

On pose alors :

$$U_0 = (u_0, u_1)^t \in D(A), \quad F = (0, f)^t \in C^0(\mathbb{R}^+; H),$$

et on introduit le problème d'évolution :

$$(3.28) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Les problèmes (3.27) et (3.28) sont équivalents au sens du lemme suivant (dont la preuve, évidente, est ici omise).

Lemme 2. *Si u est une solution classique du problème (3.27), alors*

$$U = (u, v = \frac{du}{dt})$$

est une solution classique du problème (3.28). Réciproquement si $U = (u, v)$ est une solution classique du problème (3.28), u est une solution classique du problème (3.27).

La suite de l'analyse repose sur le résultat fondamental suivant :

Lemme 3. *L'opérateur $A + \lambda I$ est maximal monotone pour tout $\lambda \geq \frac{\sqrt{\nu}}{2}$.*

Remarque 21. *Pour la propriété de monotonie de opérateur $A + \lambda I$, le fait d'avoir muni V du produit scalaire $((\cdot, \cdot))_V$ est fondamental.*

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Hille-Yosida et d'utiliser le lemme 2 pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. *Si on fait l'hypothèse :*

$$(3.29) \quad (u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}) \times V, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}),$$

le problème (3.27) admet une unique solution forte :

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})).$$

Si maintenant on applique ce théorème à l'exemple défini par (3.25) et (3.26), on vérifie facilement qu'on retombe sur le théorème 4. Nous allons voir maintenant d'autres exemples d'application qui concernent d'une part la prise en compte de conditions aux limites, d'autre part d'autres modèles de propagation.

Le cas de l'équation des ondes en présence d'un bord

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière Γ suffisamment régulière (de classe C^1 par morceaux suffit). De plus, n désigne le vecteur unitaire normal à Γ , sortant par rapport à Ω et $\rho(x)$ et $\mu(x)$ sont deux fonctions définies dans Ω et satisfaisant les inégalités (3.16) presque partout dans Ω .

Le problème de Dirichlet. Nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u(x, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, & x \in \Gamma, t > 0. \end{array} \right.$$

On peut facilement voir que ce problème entre dans le cadre de la théorie abstraite décrite au paragraphe précédent si on pose :

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \\ (u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \rho u v \, dx, \\ (u, v)_V = \int_{\Omega} \{ u v + \nabla u \cdot \nabla v \} \, dx, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ D(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_0(\Delta_{\mu}, \Omega) = \{ u \in H_0^1(\Omega) / \Delta_{\mu} u = \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\Omega) \}, \\ \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u). \end{array} \right.$$

Il est alors facile de démontrer le :

Théorème 6. *Si on fait les hypothèses :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0, u_1) \in \mathcal{D}_0(\Delta_{\mu}, \Omega) \times H_0^1(\Omega), \\ f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)), \end{array} \right.$$

le problème (3.30) admet une unique solution forte :

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}_0(\Delta_{\mu}, \Omega)).$$

Le problème de Neumann Nous cherchons maintenant à résoudre le problème suivant :

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad x \in \Gamma, t > 0. \end{array} \right.$$

Pour faire rentrer ce problème dans la théorie du paragraphe précédent, il suffit, par rapport au cas du problème de Dirichlet de remplacer $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$. On pose donc :

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad V = H^1(\Omega), \\ (u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \rho u v \, dx, \\ (u, v)_V = \int_{\Omega} \{ u v + \nabla u \cdot \nabla v \} \, dx, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ D(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\Delta_{\mu}, \Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) / \Delta_{\mu} u = \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\Omega) \}, \\ \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u). \end{array} \right.$$

Il est alors facile de démontrer le :

Théorème 7. *Si on fait les hypothèses :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0, u_1) \in \mathcal{D}(\Delta_{\mu}, \Omega) \times H^1(\Omega), \\ f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)), \end{array} \right.$$

le problème (3.32) admet une unique solution forte :

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\Delta_{\mu}, \Omega)).$$

Remarque 22. *Dans l'exemple précédent, il faut interpréter la condition aux limites de Neumann au sens :*

$$(\mu \nabla u) \cdot n|_{\Gamma} = 0, \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

En effet, à tout instant $\mu \nabla u(\cdot, t)$ appartient à l'espace $H(\operatorname{div}; \Omega)$ et on peut donc appliquer le théorème de traces dans $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Toutefois, si μ est suffisamment régulière au voisinage de Γ , alors u est H^2 au voisinage de Γ et la condition aux limites de Neumann a alors lieu en tant qu'égalité dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Le cas où Ω est borné : décomposition modale de la solution

Pour traiter ce cas, revenons un instant au cas du problème abstrait et plaçons nous dans l'hypothèse où :

$$(3.34) \quad \text{L'injection canonique de } V \text{ dans } H \text{ est compacte.}$$

Dans ce cas, l'opérateur \mathcal{A} est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte. En utilisant un résultat bien connu de la théorie spectrale, nous savons qu'il existe une suite $w_n, n \geq 1$ de $D(\mathcal{A})$ et une suite croissante de réels λ_n tendant vers $+\infty$ telle que :

- la famille $\{w_n, n \geq 1\}$ forme une base hilbertienne de \mathcal{H} qui est également complète pour V . En particulier :

$$(w_n, w_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{mn}, \quad \forall m, n \geq 1,$$

- la famille $\{w_n, n \geq 1\}$ diagonalise l'opérateur \mathcal{A} :

$$(3.35) \quad \mathcal{A}w_n = \lambda_n w_n \iff a(w_n, v) = \lambda_n (w_n, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V.$$

Pour simplifier (ce n'est pas essentiel contrairement à la propriété (3.34)), nous ferons l'hypothèse supplémentaire que la forme bilinéaire $a(., .)$ est positive (ce qui est le cas dans la plupart des applications) :

$$(3.36) \quad \forall u \in V, \quad a(u, u) \geq 0,$$

ce qui entraîne la positivité des valeurs propres :

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_n \geq 0.$$

Il est alors facile d'obtenir une représentation quasi-explicite de la solution du problème d'évolution abstrait. C'est ce qu'on appelle la décomposition modale, ou représentation modale de la solution :

Théorème 8. *Si on rajoute les hypothèses (3.34) et (3.36) à l'hypothèse (3.29), la solution u du problème (3.27) s'écrit :*

$$(3.37) \quad \begin{cases} u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) w_n, \\ u_n(t) = (u_0, w_n)_{\mathcal{H}} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + (u_1, w_n)_{\mathcal{H}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} \\ \quad + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} (t-s))}{\sqrt{\lambda_n}} (f(s), w_n)_{\mathcal{H}} ds, \end{cases}$$

où la série converge uniformément sur tout intervalle de temps borné dans \mathcal{H} , V et $D(\mathcal{A})$.

Démonstration. Le fait que $\{w_n, n \geq 1\}$ soit une base hilbertienne nous permet d'écrire :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u(t), w_n)_{\mathcal{H}} w_n,$$

et la régularité de U entraîne en particulier que $t \mapsto (u(t), w_n)_{\mathcal{H}} \in C^2(\mathbb{R}^+)$. En prenant le produit scalaire (dans \mathcal{H}) avec w_n et en utilisant (3.35), nous tombons sur l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(t), w_n)_{\mathcal{H}} + \lambda_n (u(t), w_n)_{\mathcal{H}} = (f(t), w_n)_{\mathcal{H}}.$$

Il est alors facile de conclure. □

Remarque 23. Pour le cas du problème de Cauchy ($f = 0$), la formule (3.37) fait apparaître la solution comme la superposition (dénombrable) de fonctions périodiques du temps de périodes respectives

$$T_n = \frac{2\pi}{\lambda_n},$$

Cette formule est à rapprocher de la formule obtenue par transformation de Fourier dans le cas $N = 1, \Omega = \mathbb{R}$ et ρ, μ constants : la variable continue k est remplacée par l'indice entier n et la fonction $w(k; \cdot) = \exp ikx$ par w_n . Ceci s'interprète à l'aide de la théorie spectrale : dans le cas Fourier, l'opérateur \mathcal{A} a un spectre purement continu alors que dans le cas de la formule (3.37), le spectre est purement discret. Notons également que w_n est ici un vrai mode propre de l'opérateur \mathcal{A} (il appartient au domaine de \mathcal{A}) alors que $w(k; \cdot)$ est un mode propre généralisé (il n'appartient pas au domaine de \mathcal{A}).

Remarque 24. Dans le cas où on ne fait plus l'hypothèse de coercivité (3.36), l'opérateur \mathcal{A} admet des valeurs propres négatives. L'expression (3.37) reste valable avec le nombre $\sqrt{\lambda_n}$ imaginaire pur. Pour ces modes, la fonction $u_n(t)$ est alors exponentiellement croissante.

Revenons maintenant aux problèmes de Dirichlet et Neumann (3.30) et (3.32). Nous faisons l'hypothèse supplémentaire :

L'ouvert Ω est borné,

auquel cas il est bien connu que :

(3.38) L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

On est alors dans le cadre d'application du théorème . Introduisons la famille des fonctions propres w_n^D et valeurs propres λ_n^D du problème de Dirichlet (3.30), c'est à dire de l'opérateur \mathcal{A} défini par (3.31) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla w_n^D) = \lambda_n^D \rho w_n^D & \text{dans } \Omega, \\ w_n^D = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

ainsi que les fonctions propres w_n^N et valeurs propres λ_n^N du problème de Neumann (3.32), c'est à dire de l'opérateur \mathcal{A} défini par (3.33)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla w_n^N) = \lambda_n^N \rho w_n^N & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial w_n^N}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 9. Si on fait l'hypothèse (3.38), les solutions respectives u^D et u^N des problèmes

(3.30) et (3.32) sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^D(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^D(t) w_n^D(x), \\ u_n^D(t) = \left(\int_{\Omega} u_0(x) w_n^D(x) dx \right) \cos(\sqrt{\lambda_n^D} t) \\ \quad + \left(\int_{\Omega} u_1(x) w_n^D(x) dx \right) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n^D} t)}{\sqrt{\lambda_n^D}} \\ \quad + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n^D}(t-s))}{\sqrt{\lambda_n^D}} \left(\int_{\Omega} f(x, s) w_n^D(x) dx \right) ds, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^N(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^N(t) w_n^N(x), \\ u_n^N(t) = \left(\int_{\Omega} u_0(x) w_n^N(x) dx \right) \cos(\sqrt{\lambda_n^N} t) \\ \quad + \left(\int_{\Omega} u_1(x) w_n^N(x) dx \right) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n^N} t)}{\sqrt{\lambda_n^N}} \\ \quad + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n^N}(t-s))}{\sqrt{\lambda_n^N}} \left(\int_{\Omega} f(x, s) w_n^N(x) dx \right) ds. \end{array} \right.$$

Terminons cette section par un exercice d'application du théorème 9 :

Exercice 11. Dans cet exercice, on se place en milieu homogène et on suppose donc que les coefficients ρ et μ sont constants avec :

$$\frac{\mu}{\rho} = c^2.$$

On s'intéresse au cas où le terme source est nul ($f = 0$).

1. On suppose que $N = 1$ et $\Omega = [0, 1]$. Donner dans ce cas l'expression explicite des solutions des problèmes (3.30) et (3.32). En déduire que ces solutions sont périodiques en temps (on précisera la période). Que se passe-t-il lorsque les données sont antisymétriques par rapport à $x = 1/2$?

2. On suppose que $N = 2$ et $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Montrer que la solution du problème de Dirichlet

(3.30) s'écrit $(x = (x_1, x_2))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^D(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p,q=1}^{+\infty} u_{pq}^D(t) \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_1), \\ u_{pq}^D(t) = \frac{2}{\pi} \left(\int_{\Omega} u_0(x) \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_1) dx \right) \cos(\sqrt{p^2 + q^2} \pi ct) \\ \quad + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\Omega} u_1(x) \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_1) dx \right) \frac{\sin(\sqrt{p^2 + q^2} \pi ct)}{\pi c \sqrt{p^2 + q^2}} \end{array} \right.$$

3. Quel est l'équivalent de la formule précédente pour le problème de Neumann (3.32) ?

4. Montrer que si

$$D = \{ \sqrt{p^2 + q^2}, (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \},$$

il n'existe pas de réel strictement positif α tel que tout élément de D soit un multiple entier de α (c'est à dire tel que $D \subset \alpha\mathbb{N}$). En déduire que la solution des problèmes (3.30) et (3.32) n'est (en général) pas périodique en temps.

Le cas du système de Maxwell

Pour rester dans le cadre général que nous avons étudié, nous traitons le système de Maxwell sous sa forme système du deuxième ordre et cherchons donc à résoudre le problème suivant :

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } E(x, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \text{rot}(\mu^{-1} \text{rot} E) = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ E(x, 0) = E_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) = E_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

La permittivité électrique $\varepsilon(x)$ et la perméabilité magnétique $\mu(x)$ sont des fonctions mesurables satisfaisant :

$$\left| \begin{array}{ll} \bullet 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_+ < +\infty, & \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N, \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty, & \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Remarque 25. Si on revient aux équations de base on a

$$f = \varepsilon \frac{\partial j}{\partial t},$$

où j désigne la densité de courant. D'autre part, si E_0 désigne le champ électrique initial, E_1 est relié au champ magnétique initial H_0 par :

$$E_1 = \mu^{-1} \text{rot } H_0.$$

Le cadre mathématique adapté au système (3.39) fait appel à un espace fonctionnel particulier :

$$H(\text{rot}, \mathbb{R}^3) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 / \text{rot}u \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^3)^2, \quad (u, v)_{\text{rot}} = \int_{\mathbb{R}^3} \{ u \cdot v + \text{rot}u \cdot \text{rot}v \} dx.$$

On montre assez facilement que :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ est dense dans } H(\text{rot}, \mathbb{R}^3).$$

La formule de Green suivante joue un rôle fondamental. Elle exprime essentiellement le fait que l'opérateur rotationnel est son propre adjoint :

$$(3.40) \quad \forall (u, v) \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^3)^2, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \text{rot}u \cdot v \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \text{rot}v \, dx.$$

Exercice 12. Montrer la formule (3.40) (raisonner d'abord avec u et v régulières à support compact et conclure par densité).

On peut alors appliquer la théorie abstraite si on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)^3, \quad V = H(\text{rot}, \mathbb{R}^3), \\ (u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot v \, dx, \\ (u, v)_V = (u, v)_{\text{rot}}, \\ a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \mu \text{rot}u \cdot \text{rot}v \, dx, \\ D(\mathcal{A}) = \{ u \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^3) / \text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}u) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \}, \\ \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = \varepsilon^{-1}\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}u). \end{array} \right.$$

On aboutit alors au résultat d'existence suivant :

Théorème 10. Si on fait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_0, E_1) \in D(\mathcal{A}) \times H(\text{rot}, \mathbb{R}^3), \\ f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)^3), \end{array} \right.$$

le problème (3.39) admet une unique solution forte :

$$E \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H(\text{rot}, \mathbb{R}^3)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})).$$

Remarque 26. Si on revient aux champs magnétiques et électriques initiaux H_0 et E_0 , les hypothèses sur les données initiales prennent une forme symétrique :

$$(E_0, H_0) \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^3) \times H(\text{rot}, \mathbb{R}^3), \quad (\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}E_0), \text{rot}(\varepsilon^{-1}\text{rot}H_0)) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Exercice 13. Rédiger les détails de la démonstration du théorème 10.

3.5.4 Identité de l'énergie - Estimations *a priori*

Soit u la solution forte de (3.15), on appelle énergie de u à l'instant t la quantité :

$$\begin{aligned} E(u, t) &= \frac{1}{2} \int \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int \mu |\nabla u(x, t)|^2 dx, \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\rho}^2 + \frac{1}{2} \left\| \nabla u(t) \right\|_{\mu}^2. \end{aligned}$$

Remarque 27. La quantité :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \rho(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \frac{1}{2} \mu(x) |\nabla u(x, t)|^2$$

est par définition la densité (spatiale) d'énergie de la solution u à l'instant t .

Compte tenu de la régularité de u , il est clair que cette énergie est finie à tout instant :

$$\forall t \geq 0, \quad E(u, t) < +\infty,$$

et qu'il s'agit d'une fonction dérivable du temps

$$t \rightarrow E(u, t) \in C^1(\mathbb{R}^+).$$

On a en fait le résultat suivant :

Théorème 11. (Identité de l'énergie)

$$(3.41) \quad \frac{d}{dt} E(u, t) = (f(t), \frac{du}{dt}(t)).$$

Démonstration.

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \left(\mu \nabla u, \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

soit, avec la formule de Green :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\mu \nabla u) \right),$$

c'est à dire, compte tenu de l'équation satisfaite par u , l'identité annoncée. \square

Corollaire 1. Si pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, le terme source $f(x, t)$ est identiquement nul, l'énergie $E(u, t)$ est constante entre les instants t_1 et t_2 . C'est un résultat de conservation de l'énergie.

Nous allons maintenant déduire de l'identité d'énergie (3.41) des estimations *a priori* sur la solution, c'est à dire des estimations de certaines normes de la solution u sans connaître l'expression de celle-ci.

Théorème 12. (*Estimations en norme H^1 et L^2*)

Pour tout instant $t \geq 0$, on a les estimations :

$$(3.42) \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\rho} \leq (2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}} ds,$$

$$(3.43) \quad \left\| \nabla u(t) \right\|_{\mu} \leq (2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}} ds,$$

$$(3.44) \quad \left\| u(t) \right\|_{\rho} \leq \left\| u_0 \right\|_{\rho} + t (2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t (t-s) \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}} ds,$$

où E_0 désigne l'énergie initiale

$$E_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left\| u_1 \right\|_{\rho}^2 + \left\| \nabla u_0 \right\|_{\mu}^2 \right\}.$$

Démonstration. En intégrant entre 0 et t l'identité (3.41) nous obtenons :

$$(3.45) \quad E(u, t) = E_0 + \int_0^t (f(s), \frac{du}{dt}(s)) ds.$$

Or, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$|(f(s), \frac{du}{dt}(s))| \leq \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{\rho} \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}},$$

soit encore, comme $\left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{\rho}^2 \leq 2E(u, s)$:

$$|(f(s), \frac{du}{dt}(s))| \leq \sqrt{2} E(u, s)^{\frac{1}{2}} \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}}.$$

En reportant dans (3.45), nous obtenons :

$$E(u, s) \leq E_0 + \sqrt{2} \int_0^t \left\| f(s) \right\|_{\frac{1}{\rho}} E(u, s)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Pour conclure nous utiliserons une variante du lemme de Gronwall, que nous démontrerons un peu plus loin.

Lemme 4. Soit $\alpha \in]0, 1[$, $C > 0$ et $\varphi(t)$ et $m(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur $[0, T]$ et satisfaisant :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq C + \int_0^t m(s) \varphi(s)^{\alpha} ds,$$

alors on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq \{C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds\}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Appliquons le résultat de ce lemme avec :

$$\varphi(t) = E(u, t), \quad m(t) = \sqrt{2} \|f(t)\|_{\frac{1}{\rho}}, \quad C = E_0, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Il vient :

$$E(u, t) \leq \left\{ E_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}} ds \right\}^2.$$

Pour obtenir les estimations (3.42) et (3.43) il suffit alors de remarquer que

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\rho} \quad \text{et} \quad \left\| \nabla u(t) \right\|_{\mu}$$

sont majorés par $\sqrt{2E(u, t)}$. Enfin pour obtenir (3.44) il suffit d'écrire que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{du}{dt}(s) ds$$

et d'utiliser (3.42). □

Remarque 28. Nous avons choisi de passer par la forme intégrée (3.45) de l'identité (3.41) et par le lemme de Gronwall 4 en raison du caractère fondamental de ce lemme dans beaucoup d'applications. On peut toutefois utiliser un raccourci en remarquant que (3.41) entraîne :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) \leq \sqrt{2} E(u, t)^{\frac{1}{2}} \|f(t)\|_{\frac{1}{\rho}}$$

et en intégrant cette inéquation différentielle.

Démonstration du lemme 4 :

Soit $t \in [0, T]$, on introduit la fonction :

$$G(t) = C + \int_0^t m(s) \varphi(s)^{\alpha} ds.$$

G est dérivable et on a :

$$G'(t) = m(t) \varphi(t)^{\alpha}.$$

Par hypothèse $\varphi(t) \leq G(t)$. De plus, comme α est positif, la fonction $x \rightarrow x^{\alpha}$ est croissante. Par conséquent, compte tenu de la positivité de $m(t)$, il vient :

$$G'(t) \leq m(t) G(t)^{\alpha},$$

soit encore

$$G(t)^{-\alpha} G'(t) \leq m(t).$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t , nous obtenons :

$$\frac{1}{1-\alpha} \{G(t)^{1-\alpha} - C^{1-\alpha}\} \leq \int_0^t m(s) ds.$$

Comme $\alpha < 1$, $1 - \alpha > 0$ et la fonction $x \rightarrow x^{\frac{1}{1-\alpha}}$ est croissante. Nous en déduisons l'inégalité

$$G(t) \leq \{C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

et donc le résultat annoncé puisque $\varphi(t) \leq G(t)$.

Exercice 14. (Cas limite du lemme 4 pour $\alpha = 1$)

Soit $C > 0$ et $\varphi(t)$ et $m(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur $[0, T]$ et satisfaisant :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq C + \int_0^t m(s) \varphi(s) ds.$$

Montrer que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq C \exp \int_0^t m(s) ds.$$

Remarque 29. Le résultat du théorème 12 est bien un résultat de continuité de la solution par rapport aux données. Plus exactement il exprime que l'application $(u_0, u_1, f) \rightarrow u$ définie par le théorème d'existence et unicité est continue de $D(A) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times C^1(0, T; \mathbb{R}^N)$, munie de la topologie de l'espace $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \times L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$, à valeurs dans l'espace fonctionnel

$$W(0, T) = C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1),$$

muni de la norme

$$(3.46) \quad \|u\|_{W(0,T)} = \sup_{[0,T]} \{ \|u(t)\|_{\rho} + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\rho} + \|\nabla u(t)\|_{\mu} \},$$

qui en fait, rappelons le, un espace de Banach.

Chapitre 4

Méthode des différences finies en temporel pour le système de Maxwell

4.1 Introduction-Identité d'énergie-Décomposition en ondes planes harmoniques

4.1.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre la méthode des différences finies dans le domaine temporel pour le système de Maxwell. Cette méthode très populaire s'appelle en anglais FDTD : Finite Differences in Time Domain. Nous étudierons dans un premier temps le cas de la dimension 1 et introduirons les notions essentielles (condition CFL, consistance, stabilité par méthode d'énergie, dispersion numérique). Le cas de la dimension 3 sera alors abordé et étudié en détail. Les constantes caractérisant les milieux pourront varier en espace mais nous considérerons qu'elles ne dépendent pas de la variable temps (cas des matériaux dispersifs).

Le problème à résoudre est :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(x, t) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(x, t) - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{H}(x, 0) = \vec{H}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

Si on suppose que les données initiales sont assez régulières, soit

$$(\vec{E}_0, \vec{H}_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$$

alors le problème de Cauchy ((4.1)) admet une solution (faible) unique d'énergie finie.

Afin de ne traiter que des quantités de même dimension, il est usuel de redimensionner le champ magnétique comme le champ électrique via l'impédance du vide. On introduit ϵ_r, μ_r les permittivité et perméabilité relatives du milieu (elles sont sans dimension et plus grandes que 1) définies en fonction des permittivité et perméabilité du vide ϵ_0, μ_0 :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

et on note c la vitesse de la lumière et Z_0 l'impédance du vide (en Ohm) :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_r \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H}}{\partial t} = 0, \\ \vec{\text{rot}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H} - \epsilon_r \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

que l'on réécrit :

$$\begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{\partial (Z_0 \vec{H})}{\partial t} + \vec{\text{rot}} \vec{E} = 0, \\ \frac{\epsilon_r}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\text{rot}} (Z_0 \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

Dans toute la suite nous désignerons encore par \vec{H} la quantité homogène à un champ électrique $Z_0 \vec{H}$.

Le système à résoudre est donc (nous avons pour simplifier supposé qu'il n'y a pas de terme source mais des données initiales uniquement) :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(x, t) + \vec{\text{rot}} \vec{E}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \frac{\epsilon_r}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) - \vec{\text{rot}} \vec{H}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{H}(x, 0) = \vec{H}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

4.1.2 Identité d'énergie

L'analyse de la stabilité et donc de la convergence du schéma numérique utilisera une estimation d'énergie. Nous présentons donc dans le cas continu pour le système du premier ordre les résultats de conservation d'énergie. Nous nous intéressons au système avec terme source, en effet dans la démonstration de convergence nous verrons apparaître en terme source du schéma l'erreur de consistance, il est donc fondamental de comprendre comment le schéma numérique hérite des propriétés du problème continu. Soit donc à résoudre :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(x, t) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(x, t) = \vec{m}(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \frac{\epsilon_r}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(x, t) = -\vec{j}(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{H}(x, 0) = \vec{H}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Définition 2. On définit l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}(t)$ à l'instant t par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int (\epsilon_r |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu_r |\vec{H}(x, t)|^2) dx = \frac{1}{2} \|\vec{E}(t)\|_{\epsilon_r}^2 + \frac{1}{2} \|\vec{H}(t)\|_{\mu_r}^2$$

Théorème 13. (Identité de l'énergie)

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = (\vec{m}, \vec{H})(t) - (\vec{j}, \vec{E})(t)$$

Où $(,)$ désigne le produit scalaire de $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. La variation de l'énergie est égale au travail des forces extérieures.

Démonstration. On multiplie la première équation de (4.3) par \vec{H} , la deuxième par \vec{E} , on additionne et on intègre en espace :

$$\int \left(\frac{\epsilon_r}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\mu_r}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} \right)(x, t) dx + \int (-\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{E} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{H})(x, t) dx = (\vec{m}, \vec{H}) - (\vec{j}, \vec{E})$$

La formule d'intégration par parties pour le rotationnel donne immédiatement

$$\int (-\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{E} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{H})(x, t) dx = 0$$

car il n'y a pas de terme de bord. Pour conclure, on reconnaît :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}|^2$$

□

Théorème 14. *On a les estimations a priori suivantes :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &\leq \left\{ \mathcal{E}(0)^{\frac{1}{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(s)\| ds \right\}^2 \\ \|\vec{E}(t)\|_{\epsilon_r} &\leq (2\mathcal{E}(0))^{\frac{1}{2}} + c \int_0^t \|f(s)\| ds \\ \|\vec{H}(t)\|_{\mu_r} &\leq (2\mathcal{E}(0))^{\frac{1}{2}} + c \int_0^t \|f(s)\| ds\end{aligned}$$

avec $\|f(t)\| = \|\vec{j}(t)\|_{1/\epsilon_r} + \|\vec{m}(t)\|_{1/\mu_r}$.

Démonstration. On établit par Cauchy-Schwarz la majoration suivante :

$$\left| (\vec{m}, \vec{H}) - (\vec{j}, \vec{E}) \right| (t) \leq \|\vec{m}(t)\|_{1/\mu_r} \|\vec{H}(t)\|_{\mu_r} + \|\vec{j}(t)\|_{1/\epsilon_r} \|\vec{E}(t)\|_{\epsilon_r}$$

On a les majorations $\|\vec{E}(t)\|_{\epsilon_r}^2 \leq 2\mathcal{E}(t)$ et $\|\vec{H}\|_{\mu_r}^2 \leq 2\mathcal{E}(t)$. On en déduit

$$\left| (\vec{m}, \vec{H}) - (\vec{j}, \vec{E}) \right| (t) \leq \sqrt{2}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(t) \left(\|\vec{m}(t)\|_{1/\mu_r} + \|\vec{j}(t)\|_{1/\epsilon_r} \right)$$

L'identité d'énergie conduit à l'inéquation différentielle suivante :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq \sqrt{2}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(t) \|f(t)\|$$

qui se réécrit :

$$\frac{\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t)}{2\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(t)} \leq \frac{c}{\sqrt{2}} \|f(t)\|$$

En intégrant, on obtient :

$$\mathcal{E}(t)^{\frac{1}{2}} - \mathcal{E}(0)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(s)\| ds$$

Les inégalités proposées s'obtiennent alors immédiatement. □

Nous avons obtenu la continuité de la solution en fonction des données initiales (via l'énergie au temps $t = 0$) et des termes sources. Nous retrouverons par la suite des résultats équivalents.

4.1.3 Décomposition en ondes planes harmoniques

Comme nous l'avons fait pour l'équation des ondes en dimension 1, nous allons utiliser la transformée de Fourier en espace pour en tirer des propriétés que nous étendrons au schéma discrétisé. C'est l'objet de l'analyse de stabilité par Fourier qui est une technique utilisée aussi pour démontrer la convergence des schémas numériques sur grilles régulières. C'est donc beaucoup moins général qu'une méthode basée sur des considérations énergétiques mais c'est très efficace

dans le cas de la méthode des différences finies, en particulier pour déterminer l'influence sur la condition de stabilité des schémas de la prise en compte des conditions aux limites ainsi que l'étude de dispersion numérique. On se place dans le cas de matériaux homogènes, donc sans perte de généralité avec $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

A toute fonction $u(x, t)$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de régularité suffisante, on associe $\hat{u}(\vec{k}, t)$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ par

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx$$

et la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la relation :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\vec{k}, t) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}$$

Nous introduisons donc les champs \hat{E} et \hat{H} transformés de Fourier des solutions \vec{E} et \vec{H} du système (4.2). Comme $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$, nous avons

$$\widehat{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}} = i\vec{k} \wedge \hat{u}.$$

Pour tout \vec{k} , les champs $(\hat{E}(\vec{k}, \cdot), \hat{H}(\vec{k}, \cdot))$ sont donc solutions du problème différentiel en temps suivant

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\hat{H}}{dt}(t) + i\vec{k} \wedge \hat{E}(t) = 0, & t > 0, \\ \frac{1}{c} \frac{d\hat{E}}{dt}(t) - i\vec{k} \wedge \hat{H}(t) = 0, & t > 0, \\ \hat{E}(0) = \hat{E}_0, \\ \hat{H}(0) = \hat{H}_0. \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire des 2 premières équations de (4.4) par \vec{k} , on obtient l'équivalent de la relation de divergence nulle des champs électromagnétiques soit à l'aide des conditions initiales :

$$\hat{E} \cdot \vec{k} = \hat{E}_0 \cdot \vec{k} \quad \hat{H} \cdot \vec{k} = \hat{H}_0 \cdot \vec{k}$$

On note \hat{E}_\perp et \hat{H}_\perp les composantes de \hat{E} et \hat{H} orthogonales à \vec{k} , il est aisé de vérifier en éliminant tout à tour l'un des champs qu'elles sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \hat{E}_\perp}{dt^2} + |\vec{k}|^2 \hat{E}_\perp = 0$$

et

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \hat{H}_\perp}{dt^2} + |\vec{k}|^2 \hat{H}_\perp = 0$$

On pose $\omega(k) = c|\vec{k}|$ et on obtient

$$\hat{E}_\perp = \hat{E}_{0,\perp} \cos(\omega(k)t) + \hat{E}_{1,\perp} \sin(\omega(k)t)$$

et

$$\hat{H}_\perp = \hat{H}_{0,\perp} \cos(\omega(k)t) + \hat{H}_{1,\perp} \sin(\omega(k)t)$$

On utilise alors les conditions initiales pour déterminer les 4 coefficients. $\hat{E}_{0,\perp}$ et $\hat{H}_{0,\perp}$ sont les composantes orthogonales à \vec{k} de \hat{E}_0 et \hat{H}_0 . On vérifie sans peine que les coefficients $\hat{E}_{1,\perp}$ et $\hat{H}_{1,\perp}$ sont déterminés par :

$$\hat{E}_{1,\perp} = i \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \hat{H}_{0,\perp} \quad \hat{H}_{1,\perp} = -i \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \hat{E}_{0,\perp}$$

On en déduit que pour chaque \vec{k} , les solutions du problème continu sont combinaison linéaire de $\cos(\omega(k)t)e^{i\vec{k}\cdot x}$ et $\sin(\omega(k)t)e^{i\vec{k}\cdot x}$, ce qui démontre la stabilité de la solution en fonction des données initiales. On note que c'est le fait que $\omega(k)$ soit réel qui assure cette stabilité. On obtiendra sur le schéma numérique une relation analogue qui permettra de quantifier sur grilles régulières la dispersion du schéma.

4.2 Première analyse sur le cas simplifié de la dimension 1

4.2.1 Le système du premier ordre en dimension 1

Dans cette section, nous nous plaçons en une dimension d'espace, selon la direction x . Donc $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$.

$$\vec{\text{rot}} \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} u_z \\ +\frac{\partial}{\partial x} u_y \end{vmatrix}$$

Nous obtenons alors immédiatement $\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$ soit $E_x(x, t) = E_{x,0}(x)$ et $H_x(x, t) = H_{x,0}(x)$ pour tout $t \geq 0$ et deux systèmes d'équations découplés en (E_y, H_z) et $(E_z, -H_y)$ de la

forme :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial e}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \frac{\epsilon_r}{c} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ e(x, 0) = e_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ h(x, 0) = h_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 30. Si on définit p par $\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = e$, la première équation de (4.5) donne

$$\frac{\mu_r}{c} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_r h + \frac{\partial p}{\partial x}) = 0$$

soit $\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_r h$. En reportant dans la deuxième équation de (4.5), on obtient :

$$\frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

En posant $p_0(x) = -\int_{-\infty}^x \mu_r h_0(s) ds$ et $p_1(x) = ce_0(x)$, on obtient que p est solution de

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial p}{\partial x} \right)(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ p(x, 0) = p_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

soit le problème de Cauchy associé à l'équation des ondes scalaire en dimension 1. Résoudre en dimension 1 l'équation scalaire du deuxième ordre ou le système du premier ordre est rigoureusement la même chose. Nous choisissons de privilégier l'approche système du premier ordre car elle se généralise plus exhaustivement dans le cas des dimensions d'ordre supérieur quelque soit le système considéré (Maxwell, Euler linéarisé...).

4.2.2 Rappels sur les différences finies - Cadre fonctionnel

Soit f une fonction “assez régulière” (au moins C^2) définie sur \mathbb{R} et soit h le pas de discrétisation. On veut approcher les dérivées de f au point $x_j = jh$ en utilisant uniquement les valeurs de f en ces points. Il est naturel d'approcher la dérivée de f en un point x par un taux d'accroissement, par exemple décentré à droite :

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou décentré à gauche :

$$f'(x) \sim \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Il est aisé de vérifier en utilisant la formule de Taylor que ces approximations sont d'ordre 1.

$$(4.7) \quad f(x_{j+1}) = f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_j), \quad \xi_j \in]x_j, x_{j+1}[$$

ce qui montre que

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} + \epsilon(h)$$

avec l'estimation :

$$|\epsilon(h)| = \left| \frac{h^2}{2}f''(\xi_j) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{\xi \in]x_j, x_{j+1}[} |f''(\xi)|$$

Pour gagner un ordre supplémentaire, il est usuel d'utiliser des schémas centrés, en effet sur grille régulière par parité, on obtient dans les développements de Taylor uniquement des termes pairs en puissance de h . On doit cependant supposer plus de régularité à f . On obtient alors (si $f \in C^3$) :

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h} + \frac{h^2}{6}(f'''(\xi_j^+) + f'''(\xi_j^-)), \quad (\xi_j^+, \xi_j^-) \in]x_{j-1}, x_j[\times]x_j, x_{j+1}[$$

soit une approximation d'ordre 2. Le fait d'utiliser une approximation centrée permettra aussi de mettre en évidence une conservation d'énergie, essentielle pour établir des résultats de stabilité par méthode énergétique.

L'espace de Hilbert intervenant après approximation ponctuelle est l'espace L_h^2 . Nous précisons ci-dessous ces propriétés principales.

L'espace L_h^2

On considère l'espace de Hilbert L_h^2 :

$$L_h^2 = \left\{ u_h = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \sum_j |u_j|^2 < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\|u_h\|^2 = h \sum_j |u_j|^2$ et du produit scalaire associé $(u_h, v_h) = h \sum_j u_j v_j$. De même que pour le cas continu, on notera $\|u_h\|_\alpha^2 = h \sum_j \alpha_j |u_j|^2$.

Il y a deux façons d'approcher en espace une fonction $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ par une suite u_h de L_h^2 : l'approximation ponctuelle (si $u(x)$ est continue)

$$(4.8) \quad u_j = u(x_j),$$

ou par valeur moyenne :

$$(4.9) \quad u_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x) dx.$$

Pour ces 2 types d'approximation (qui interviendront dans le schéma de démarrage) nous aurons besoin d'estimations de stabilité. L'espace L_h^2 est isomorphe au sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions constantes par morceaux, en effet la suite $u_h = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ peut être assimilée à la fonction $u_h(x)$

$$u_h(x) = u_j \text{ si } x \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\equiv]x_j - h/2, x_j + h/2[$$

et le produit scalaire sur L_h^2 coïncide alors avec le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$. Si π_h est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur L_h^2 , on définit pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f_h = \pi_h f$ par

$$(f_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in L_h^2$$

En choisissant $v_h = 1_{]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[}$, on obtient :

$$f_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x) dx,$$

Le deuxième choix d'approximation (4.9) correspond alors à :

$$u_h = \pi_h u$$

et donc en utilisant les propriétés des opérateurs de projection, nous avons le résultat d'estimation uniforme (ne dépendant pas de h)

$$\|u_h\| \leq \|u\|_{L^2}$$

Nous aurons aussi besoin d'une estimation d'erreur, en supposant u régulière, nous aurons à estimer $\sum_j h |u_j - u(x_j)|^2$. Par définition,

$$u_j - u(x_j) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u(x) - u(x_j)) dx,$$

mais on remarque que les bornes de l'intégrale sont symétriques par rapport à x_j , ce qui nous autorise à espérer un ordre de plus dans le développement limité, on utilise la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2

$$u(x) - u(x_j) - (x - x_j)u'(x_j) = \int_{x_j}^x (x - s) u''(s) ds,$$

et comme :

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (x - x_j) u'(x_j) dx = 0,$$

on a

$$u_j - u(x_j) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} dx \left(\int_{x_j}^x (x - s) u''(s) ds \right),$$

Comme par Cauchy-Schwarz, $\forall x \in [x_j - h/2, x_j + h/2]$

$$\left| \int_{x_j}^x (x-s) u''(s) ds \right|^2 \leq \left| \int_{x_j}^x |x-s|^2 ds \right| \left| \int_{x_j}^x |u''(s)|^2 ds \right| \leq Ch^3 \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} |u''(s)|^2 ds,$$

on obtient

$$\int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} \left| \int_{x_j}^x (x-s) u''(s) ds \right|^2 dx \leq Ch^4 \|u''\|_{L^2_{[x_j-\frac{1}{2}, x_j+\frac{1}{2}]}}^2$$

Nous avons alors à nouveau par Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} dx \left(\int_{x_j}^x (x-s) u''(s) ds \right) \right|^2 \leq \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} 1^2 dx \right) \left(\int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} \left| \int_{x_j}^x (x-s) u''(s) ds \right|^2 dx \right)$$

Et donc en regroupant,

$$\sum_j h |u_j - u(x_j)|^2 \leq Ch^4 \sum_j \|u''\|_{L^2_{[x_j-\frac{1}{2}, x_j+\frac{1}{2}]}}^2$$

Soit en notant $\bar{u}_h = (u(x_j))_{j \in \mathbb{Z}}$,

$$\|u_h - \bar{u}_h\| \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}$$

qui est une estimation uniforme.

Dans le cas (4.8), soit approximation ponctuelle, on sait qu'il faut disposer de régularité supplémentaire pour obtenir une estimation uniforme de $\|u_h\|$. En effet, les théorèmes de trace ne sont valables que dans H^1 et faux dans L^2 . On suppose donc que $u(x)$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$. On écrit

$$u(x_j) = u(x) + \int_x^{x_j} u'(s) ds$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\forall x \in]x_j - h/2, x_j + h/2[, \quad |u(x_j)|^2 \leq 2|u(x)|^2 + 2|x - x_j| \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} |u'(s)|^2 ds$$

On intègre sur x alors entre $x_j - h/2$ et $x_j + h/2$, il vient :

$$h |u(x_j)|^2 \leq 2 \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} |u(x)|^2 dx + h^2 \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_j+\frac{1}{2}} |u'(s)|^2 ds$$

On obtient après sommation sur j :

$$\|u_h\|^2 \leq 2\|u\|_{L^2}^2 + h^2 \|u'\|_{L^2}^2$$

Et comme on peut raisonnablement supposer h majoré par une constante, on obtient l'estimation uniforme suivante dans le cas de l'approximation (4.8) :

$$\|u_h\| \leq C\|u\|_{H^1}$$

Quant à l'estimation d'erreur $\sum_j h|u_j - u(x_j)|^2$, elle est identiquement nulle pour ce choix d'approximation.

Nous utiliserons ces résultats lors de l'étude de stabilité et convergence des schémas.

Consistance et stabilité d'un schéma

Nous renvoyons au cours de G. Allaire pour une étude précise des notions de stabilité et consistance. Nous rappelons ici les principales définitions.

Soit \mathcal{L} un opérateur aux dérivées partielles en temps et en espace. Soit u la solution espace-temps d'un problème de type :

$$\mathcal{L}u(x, t) = g(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Pour simplifier les définitions, nous ne tenons pas compte ici des conditions initiales. On note $\mathcal{L}_{\Delta t, h}$ un opérateur sur les suites (u_i^n) approchant l'opérateur \mathcal{L} par une méthode de différences finies. On introduit alors la solution du schéma discret :

$$\mathcal{L}_{\Delta t, h} u_i^n = g_i^n \quad i \in \mathbb{Z}, n > 0$$

Définition 3. On définit l'erreur de troncature ϵ_i^n par

$$\epsilon_i^n = \mathcal{L}_{\Delta t, h} u(x_i, t^n) - g_i^n$$

Le schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 quand les pas de discrétisation h et Δt tendent vers 0. Le schéma est dit d'ordre m en temps et k en espace si

$$\epsilon_i^n = O(\Delta t^m) + O(h^k) \quad \text{quand} \quad \Delta t, h \longrightarrow 0$$

Remarque 31. L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'opérateur continu est approché par le schéma discret. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence) mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

Remarque 32. Nous pouvons écrire de 2 façons l'erreur de troncature : Comme u est solution de

$$\mathcal{L}u(x, t) - g(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Nous avons

$$\epsilon_i^n = [\mathcal{L}_{\Delta t, h} - \mathcal{L}]u(x_i, t^n) - [g_i^n - g(x_i, t^n)]$$

qui est bien une mesure de l'approximation de l'opérateur continu par le schéma. Mais nous avons aussi :

$$\mathcal{L}_{\Delta t, h} u_i^n = g_i^n \quad i \in \mathbb{Z}, n > 0$$

Donc

$$\epsilon_i^n = \mathcal{L}_{\Delta t, h} [u(x_i, t^n) - u_i^n]$$

L'erreur de troncature est donc aussi la solution discrète obtenue par le schéma quand on met au second membre l'erreur de convergence.

Définition 4. Le schéma discret est dit stable si la solution discrète dépend de manière uniforme de la donnée. Soit, il existe une constante C indépendante de $h, \Delta t$ telle que :

$$\| \| u_i^n \| \| \leq C \| \| g_i^n \| \|$$

pour une norme $\| \| \|$ sur les suites discrètes. En d'autres termes, l'opérateur inverse $\mathcal{L}_{\Delta t, h}^{-1}$ est borné uniformément.

A l'aide de la remarque précédente, nous avons le théorème fondamental

Théorème 3. Un schéma stable et consistant est convergent.

Démonstration. En définissant l'erreur de convergence par $\| \| [u(x_i, t^n) - u_i^n] \|$, nous avons par la stabilité :

$$\| \| u(x_i, t^n) - u_i^n \| \| \leq \| \| \epsilon_i^n \| \|$$

et la consistance donne la convergence vers 0 quand $h, \Delta t$ tendent vers 0. \square

4.2.3 Le schéma saute-mouton pour le système d'ordre 1

Nous introduisons une discrétisation en temps $t^n = n\Delta t$ et une discrétisation en espace $x_i = i\Delta x = ih$. En considérant le système (4.5), on constate qu'il est naturel pour rester centré d'introduire en espace et en temps une discrétisation décalée, soit des temps $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ et des positions spatiales $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h$. On choisira ainsi de chercher les approximations des inconnues e et h sur des grilles décalées en temps et en espace, par exemple : $H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ approximera $h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ et E_i^n approximera $e(x_i, t^n)$. On écrit donc une approximation de la première équation autour de $(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) \sim \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) \sim \frac{E_i^n - E_i^n}{h}$$

On voit qu'il est naturel d'approximer la deuxième équation autour de $(x_i, t^{n-\frac{1}{2}})$:

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x_i, t^{n-\frac{1}{2}}) \sim \frac{E_i^n - E_i^{n-1}}{\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_i, t^{n-\frac{1}{2}}) \sim \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{h}$$

On note B_h et C_h respectivement les opérateurs définis sur les suites $H_h = (H_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$ et $E_h = (E_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par

$$(B_h H_h)_i = \frac{H_{i+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}}}{h} \quad \text{et} \quad (C_h E_h)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{E_{i+1} - E_i}{h}$$

en dimension supérieure pour le système vectoriel de Maxwell, B_h représentera une approximation de l'opérateur $-\text{rot}$ et C_h de l'opérateur rot . Nous proposons donc le schéma dit saute-mouton (leap-frog en anglais), la figure 4.1 illustre l'origine de ces noms :

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (C_h E_h)_{i+\frac{1}{2}} = 0, & n \geq 1 \\ \frac{\epsilon_r}{c} \frac{E_i^n - E_i^{n-1}}{\Delta t} + (B_h H_h)_{i+\frac{1}{2}} = 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

Evidemment pour parfaitement déterminer le schéma, il faut rajouter un schéma de démarrage tenant compte des conditions initiales. Supposons E_h^0 et $H_h^{\frac{1}{2}}$ connus, la deuxième relation de (4.10) permet de déterminer explicitement E_h^1 . La première équation permet alors de déterminer explicitement $H_h^{3/2}$ en fonction de E_h^1 et $H_h^{\frac{1}{2}}$, et ainsi de suite.

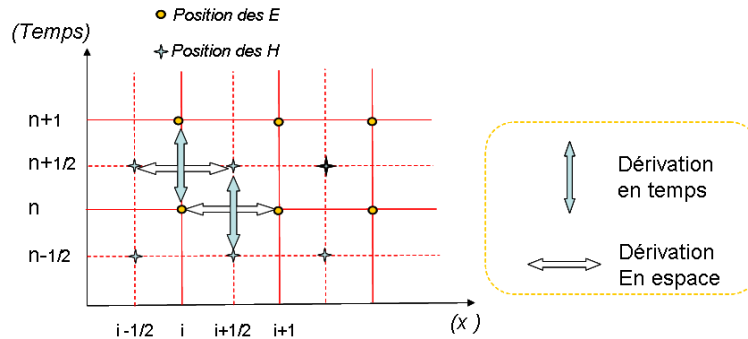


FIG. 4.1 – Schéma saute-mouton en 1 dimension

Nous aurons dans la suite besoin de quelques propriétés fondamentales des opérateurs B_h et C_h que l'on fait opérer sur L_h^2 .

Théorème 4. Les opérateurs B_h et $-C_h$ sont duaux l'un de l'autre

$$(C_h E_h, H_h) = (-E_h, B_h H_h)$$

et on a les majorations

$$\|C_h E_h\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|E_h\|^2$$

$$\|B_h H_h\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|H_h\|^2$$

Démonstration. On effectue une intégration par parties discrète.

$$\sum_i (C_h E_h)_{i+\frac{1}{2}} H_{i+\frac{1}{2}} = \sum_i \frac{E_{i+1} - E_i}{h} H_{i+\frac{1}{2}} = \sum_i E_i \left(\frac{H_{i-\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}}{h} \right) = - \sum_i E_i (B_h H_h)_i$$

De même :

$$\sum_i (C_h E_h)_{i+\frac{1}{2}} (C_h E_h)_{i+\frac{1}{2}} = \sum_i \left(\frac{E_{i+1} - E_i}{h} \right)^2 \leq \sum_i \left(\frac{2|E_{i+1}|^2 + 2|E_i|^2}{h^2} \right) \leq \frac{4}{h^2} \sum_i |E_i|^2$$

Où on a utilisé l'inégalité $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on peut même prouver que cette estimation est optimale en prenant des suites alternées de 1 et -1 à support de plus en plus grand. La dernière inégalité se démontre de même. \square

Théorème 5. *Le schéma saute-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.*

Exercice 15. *A l'aide de développements de Taylor, démontrer le théorème précédent.*

4.2.4 Vitesse de propagation numérique- Condition nécessaire de convergence

Avant de faire l'analyse de la stabilité du schéma (nécessaire pour obtenir sa convergence puisque nous savons qu'il est consistant), nous pouvons donner une condition nécessaire de convergence à partir d'arguments simples concernant le support des solutions exactes et approchées. Nous supposons dans le raisonnement qui suit que ϵ_r et μ_r sont constants égaux à 1 et que le nombre CFL $\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$ est fixé.

La propriété fondamentale que nous allons utiliser est la propagation à vitesse finie : si les données initiales sont à support compact, la solution reste à tout instant à support compact (en espace). Dans le cas de la dimension 1, nous avons vu que si le support des données initiales était inclus dans l'intervalle $[a, b]$ alors à l'instant t le support spatial de la solution est inclus dans l'intervalle $[a - ct, b + ct]$.

Le schéma explicite a lui aussi une vitesse de propagation (numérique) finie. En effet, il est facile de voir à l'aide de la figure 4.1, en notant u_j^n soit $H_i^{n-\frac{1}{2}}$ ou $E_{i+\frac{1}{2}}^n$ que si :

$$u_j^n = u_j^{n-1} = 0 \quad \text{pour } j \notin [j_{\min}, j_{\max}] \Rightarrow u_j^{n+1} = 0 \quad \text{pour } j \notin [j_{\min} - 1, j_{\max} + 1]$$

Ce qui veut dire qu'en un pas de temps, la solution s'est propagée d'un pas en espace à droite et un pas en espace à gauche. On peut donc définir une vitesse de propagation numérique

$V_{num} = h/\Delta t$ qui traduit la propagation de l'onde numérique à droite et à gauche (comme dans le cas continu). Pour espérer la convergence du schéma numérique, il est nécessaire d'imposer à cette vitesse d'être supérieure à celle de la vitesse de propagation des ondes c , c'est la condition nécessaire de Courant-Friedrichs-Levy qui s'écrit en dimension 1 :

$$(4.11) \quad V_{num} \geq c \iff \frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

Si la vitesse du schéma numérique est inférieure à celle de la solution exacte, le schéma va prédire des valeurs nulles dans des zones où la solution ne l'est pas, il ne peut donc pas y avoir convergence. Au contraire, si la vitesse numérique est supérieure à celle de la solution exacte, on prédira des valeurs non nulles là où la solution est nulle, mais cela n'empêche pas d'espérer qu'en faisant tendre h et Δt vers 0, ces valeurs approchées tendent vers 0.

Nous illustrons ce raisonnement par les figures suivantes basées sur le cône de propagation et celui de dépendance introduits au premier chapitre. On introduit de même les cônes de propagation et de dépendance numériques caractérisés par des pentes de valeur $-1/V_{num}$ et $1/V_{num}$ au lieu des pentes $-1/c$ et $1/c$ trouvées dans le cas continu.

Si $V_{num} < c$, (figure 4.2), le cône de propagation numérique (qui est toujours le même quelque soit h si on garde α constant) est strictement inclus dans le cône de propagation continu. Dans les régions comprises entre les deux cônes, la solution discrète $u_{h,\Delta t}$ est toujours nulle alors que la solution exacte u ne l'est pas, il ne peut donc pas y avoir convergence.

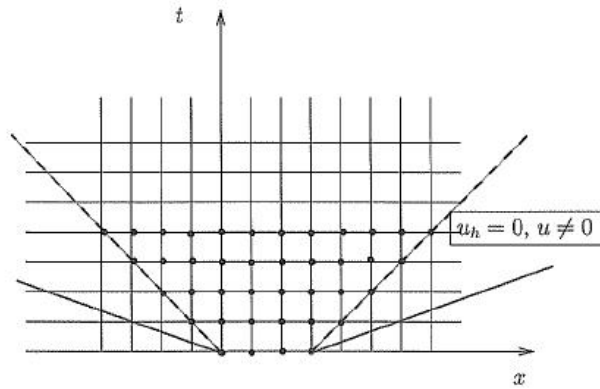


FIG. 4.2 – $\frac{1}{c} < \frac{1}{V_{num}}$: pas de convergence

Si $V_{num} \geq c$, (figure 4.3), c'est le cône de propagation continu qui est inclus dans le cône de propagation numérique. Dans la zone intermédiaire la solution exacte u est nulle alors que la solution approchée ne l'est pas a priori. Mais ce n'est pas un obstacle à la convergence du schéma : $u_{h,\Delta t}$ peut très bien tendre vers 0 dans cette zone quand h et Δt tendent vers 0.

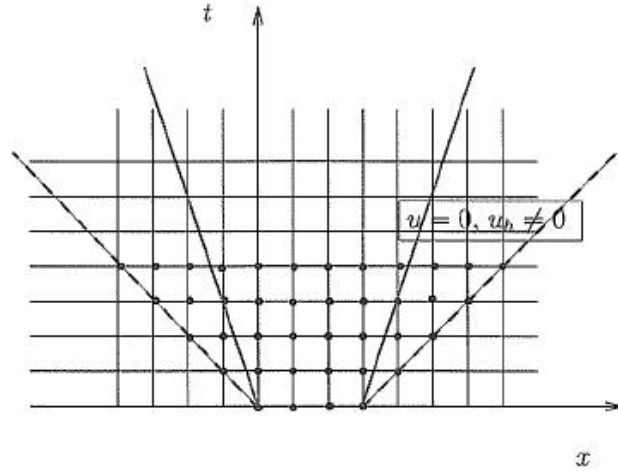


FIG. 4.3 – $\frac{1}{V_{num}} < \frac{1}{c}$: convergence possible

Si nous utilisons les cônes de dépendance, le raisonnement suivant permet d'aboutir aussi à la condition nécessaire de convergence.

On considère $M = (x_j, t^n)$ un point de la grille de calcul. Les points qui ont servi à calculer u_j^n sont contenus dans un cône de sommet M d'arête les demi droites issues de M et de pente $\pm h/\Delta t$, noté $K_\alpha^-(M)$, (figure 4.4). La solution approchée u_j^n dépend donc uniquement des valeurs de u^0 et u^1 sur le segment $[M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+] = [x_{j-n}, x_{j+n}] = [(j-n)h, (j+n)h]$. La solution exacte dépend des valeurs de u^0 et u^1 sur le segment $[M^-, M^+]$, avec $M^- = (x_j - ct^n, 0)$ et $M^+ = (x_j + ct^n, 0)$

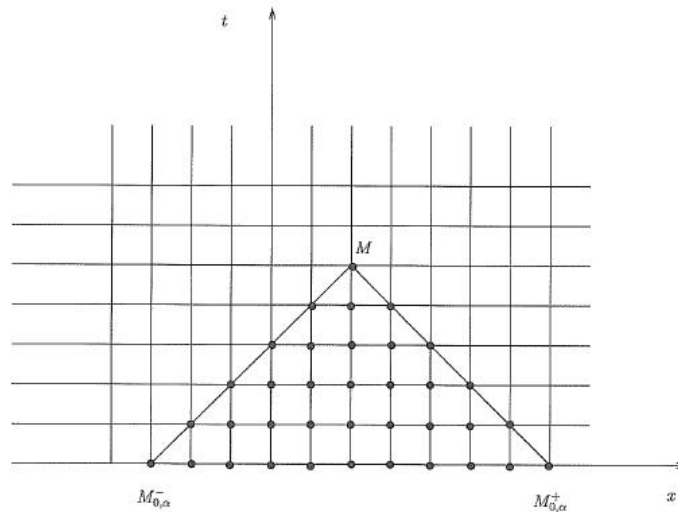


FIG. 4.4 – Cône de dépendance numérique

On a donc deux cas :

Cas 1 : $[M^-, M^+] \subset [M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+]$, c'est à dire le cône de dépendance numérique contient le cône de dépendance exacte, on a donc toutes les informations nécessaires pour construire la solution approchée. Ce cas correspond à $(j - n)h \leq x_j - ct^n \leq (j + n)h$ soit $c\Delta t \leq h$.

Cas 2 : $[M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+] \subset [M^-, M^+]$, c'est à dire le cône de dépendance numérique est strictement contenu dans le cône de dépendance exacte et la solution approchée ne tient pas compte des valeurs (non nulles) de la solution à l'extérieur du cône numérique. Il ne peut donc y avoir convergence. Ce cas correspond à $c\Delta t > h$.

Nous pouvons alors aisément obtenir par raisonnement analogue la condition nécessaire de convergence dans le cas des dimensions supérieures. La solution élémentaire en dimension 2 (fonction de Green) est :

$$G(x, t) = \frac{H(t - |x|/c)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2/c^2}}$$

et en dimension 3 :

$$G(x, t) = \frac{\delta(t - |x|/c)}{4\pi|x|}$$

Le support en espace de la fonction de Green au temps t est respectivement en 2D le disque en 3D la sphère de rayon ct ce qui est cohérent avec la propagation à vitesse finie c pour une source élémentaire placée à l'origine spatiale et correspondant à un dirac à $t = 0$. A l'instant $t^n = n\Delta t$ elle a donc atteint tous les points $|x| \leq cn\Delta t$. La solution numérique se propage dans le cas 2D sur un losange (un carré en tournant les axes) de demi-diagonale nh et donc de demi-côté $l = nh/\sqrt{2}$, (figure 4.5). La condition nécessaire de stabilité impose que le losange doit strictement contenir le disque, sinon on prédirait des valeurs approchées nulles là où la solution exacte ne l'est pas. Le losange contient strictement le disque si $l \geq cn\Delta t$ donc si $nh/\sqrt{2} \geq cn\Delta t$ soit si $c\Delta t/h \leq \sqrt{2}/2$.

Par un argument semblable, on obtient en 3D la condition $c\Delta t/h \leq \sqrt{3}/3$. La solution numérique se propage dans un octaèdre régulier (figure 4.6) dont la distance de l'origine (centre de gravité) aux sommets est égale à nh . Le minimum de la distance de l'origine à cet octaèdre est atteint au centre de gravité des faces, et la distance vaut alors $l = nh/\sqrt{3}$ (figure 4.7). La condition nécessaire de convergence s'écrit de même $l \geq cn\Delta t$ soit $nh/\sqrt{3} \geq cn\Delta t$ soit encore $c\Delta t/h \leq \sqrt{3}/3$.

Remarque 33. Dans le cas d'un schéma implicite, la vitesse numérique de propagation devient infinie (l'inverse d'une matrice creuse est a priori une matrice pleine !). La condition nécessaire de convergence est alors automatiquement assurée, le cône de propagation numérique (en fait le demi-plan supérieur en dim 1) contenant toujours le cône de propagation continu.

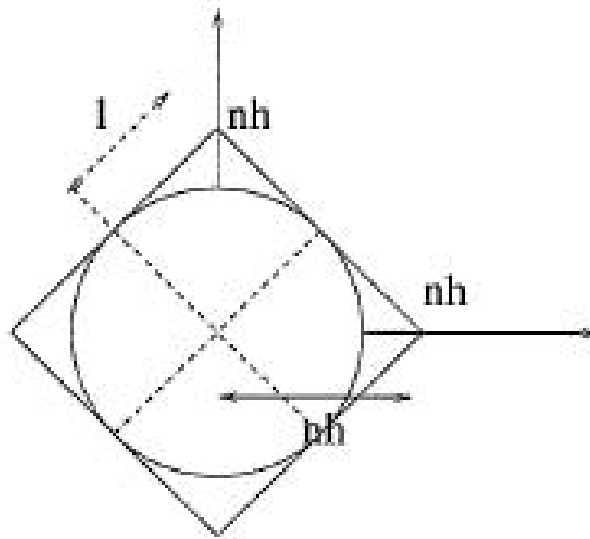


FIG. 4.5 – Support des solutions exactes et approchées en 2D

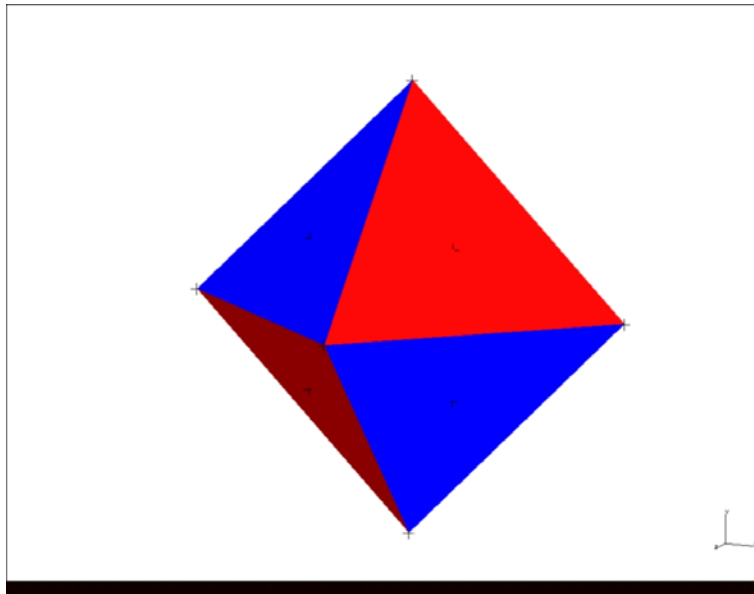


FIG. 4.6 – Support de la solution approchée en 3D

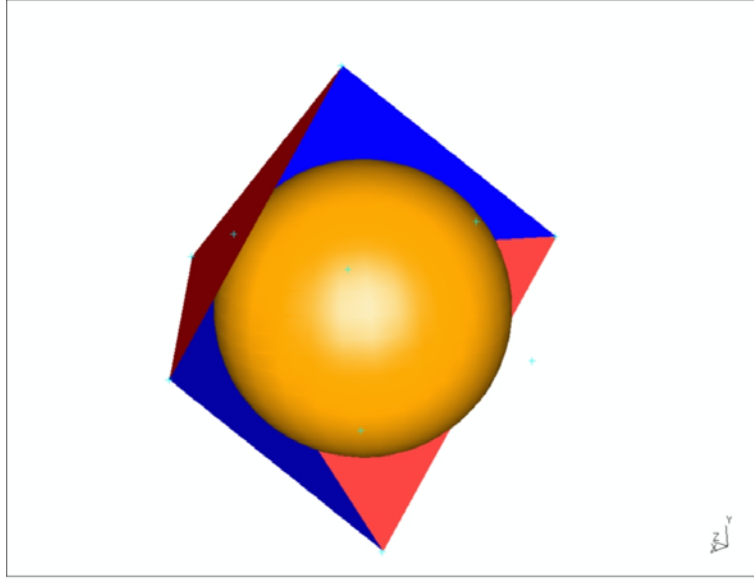


FIG. 4.7 – Support des solutions exactes et approchées en 3D

4.2.5 Identité d'énergie pour le système discrétisé

Nous allons établir un résultat de conservation d'énergie pour le système discrétisé avec termes sources comme dans le cas du problème continu.

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{\mu_r}{c} \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (C_h E_h^n)_{i+\frac{1}{2}} = +m_{i+\frac{1}{2}}^n, \\ \frac{\epsilon_r^i}{c} \frac{E_i^n - E_i^{n-1}}{\Delta t} + (B_h H_h^{n-\frac{1}{2}})_i = -j_i^{n-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Dans un premier temps, on considère les sources nulles de façon à pouvoir identifier quelle est l'énergie discrète. Nous multiplions la première équation de (4.10) par un équivalent discret de

$h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$, soit $\frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2}$ qui est une approximation centrée. La première équation donne après sommation sur i :

$$\sum_i \frac{\mu_r}{c} \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2} h + (C_h E_h^n, \frac{H_h^{n+\frac{1}{2}} + H_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}) = 0,$$

qui s'écrit par dualité

$$\frac{1}{2c\Delta t} \left(\sum_i \mu_r^{i+\frac{1}{2}} |H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|^2 h - \sum_i \mu_r^{i+\frac{1}{2}} |H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}|^2 h \right) - (E_h^n, B_h \frac{H_h^{n+\frac{1}{2}} + H_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}) = 0$$

On multiplie de même la deuxième équation de (4.10) par un équivalent discret et centré de $e(x_i, t^{n-\frac{1}{2}})$ soit $\frac{E_i^n + E_i^{n-1}}{2}$:

$$\frac{1}{2c\Delta t} \left(\sum_i \epsilon_r^i |E_i^n|^2 h - \sum_i \epsilon_r^i |E_i^{n-1}|^2 h \right) + (B_h H_h^{n-\frac{1}{2}}, \frac{E_h^n + E_h^{n-1}}{2}) = 0$$

En sommant les deux expressions, certains termes s'éliminent :

$$-(E_h^n, B_h \frac{H_h^{n+\frac{1}{2}} + H_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}) + (B_h H_h^{n-\frac{1}{2}}, \frac{E_h^n + E_h^{n-1}}{2}) = -\frac{1}{2}(E_h^n, B_h H_h^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(E_h^{n-1}, B_h H_h^{n-\frac{1}{2}})$$

qui est une quantité de type $f(n+1) - f(n)$. On définit donc l'énergie discrète par

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 + \frac{1}{2} \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2 - \frac{c\Delta t}{2} (B_h H_h^{n+\frac{1}{2}}, E_h^n)$$

Nous avons donc le premier résultat d'énergie suivant

Théorème 6. *En l'absence de termes sources (j, m) , l'énergie discrète $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$ de la solution de (4.12) se conserve au cours des itérations en temps :*

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}, \forall n \geq 1$$

Démonstration. Avec le choix fait sur la définition de l'énergie, on a directement :

$$\frac{1}{c\Delta t} (\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}) = 0$$

□

Le résultat précédent ne permet pas de conclure directement à la stabilité de la solution du schéma explicite. Contrairement au cas continu, l'énergie discrète qui se conserve n'est pas somme de quantités positives (on ne connaît pas le signe de $-(B_h H_h^{n+\frac{1}{2}}, E_h^n)$). Ce terme peut devenir négatif et grand en valeur absolue permettant aux termes $\|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2$ et $\|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2$ de devenir aussi très grands tout en laissant l'énergie se conserver ! Toutefois, on pressent que quand $c\Delta t$ devient assez petit, ce produit scalaire peut devenir faible devant la somme des 2 normes.

En notant ϵ_r^m, μ_r^m les valeurs minimales de $\epsilon_r(x), \mu_r(x)$, on a la majoration

$$(B_h H_h^{n+\frac{1}{2}}, E_h^n) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_r^m \epsilon_r^m}} \frac{2}{h} \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r} \|E_h^n\|_{\epsilon_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_r^m \epsilon_r^m}} \frac{1}{h} (\|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 + \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2)$$

et donc

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} (1 - \frac{c\Delta t}{\sqrt{\mu_r^m \epsilon_r^m} h}) \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 + \frac{1}{2} (1 - \frac{c\Delta t}{\sqrt{\mu_r^m \epsilon_r^m} h}) \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2$$

Donc en notant $c^M = \frac{c}{\sqrt{\mu_r^m \epsilon_r^m}}$ la vitesse maximum des ondes dans le milieu, sous la condition

$$\frac{c^M \Delta t}{h} < 1$$

nous avons le résultat de stabilité suivant :

Lemme 5. Sous la condition $\alpha = \frac{c^M \Delta t}{h} < 1$, on a les estimations pour les champs solutions du système (4.12)

$$\begin{cases} \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Dans le cas où il n'y a pas de sources extérieures, on a de plus

$$\begin{cases} \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}} \\ \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Le résultat est encore incomplet puisque l'estimation précédente n'est pas uniforme en h puisqu'elle fait apparaître l'énergie discrète au temps $t = \frac{1}{2}\Delta t$ et donc des normes discrètes dépendant de h . L'estimation uniforme sera établie lorsque nous préciserons le schéma de démarrage mais nous avons déjà établi lors des rappels que pour les 2 approximations spatiales présentées, il y avait une estimation uniforme en espace nécessitant plus ou moins de régularité sur les données initiales.

Nous introduisons à présent les termes sources.

Théorème 15. (Identité de l'énergie)

$$\frac{1}{c\Delta t} \left(\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) = (m_h^n, \frac{H_h^{n+\frac{1}{2}} + H_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}) - (j_h^{n-\frac{1}{2}}, \frac{E_h^n + E_h^{n-1}}{2})$$

Démonstration. Il est aisé d'introduire le travail des forces discret. □

Nous en déduisons les estimations a priori suivantes :

Théorème 16. Sous la condition CFL, $\alpha = \frac{c^M \Delta t}{h} < 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} &\leq \left\{ \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta t}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\| \right\}^2 \\ \|E_h^n\|_{\epsilon_r} &\leq \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \sqrt{\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\Delta t}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\| \\ \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r} &\leq \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \sqrt{\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\Delta t}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\| \end{aligned}$$

avec $\|f_h^k\| = \|j_h^{k-\frac{1}{2}}\|_{1/\epsilon_r} + \|m_h^k\|_{1/\mu_r}$

Démonstration. On effectue une majoration du travail discret en introduisant l'énergie discrète :

$$(m_h^n, \frac{H_h^{n+\frac{1}{2}} + H_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}) - (j_h^{n-\frac{1}{2}}, \frac{E_h^n + E_h^{n-1}}{2}) \leq (\|m_h^n\|_{\frac{1}{\mu_r}} + \|j_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\frac{1}{\epsilon_r}}) \sqrt{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

donc

$$\frac{1}{c\Delta t} \left(\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \leq \|f_h^n\| \sqrt{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

On reconnait une identité remarquable

$$\left(\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} - \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}} \right) \leq \frac{c\Delta t}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \|f_h^n\|$$

En sommant de proche en proche, on obtient la première estimation. On utilise à nouveau les majorations

$$\begin{cases} \|H_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \|E_h^n\|_{\epsilon_r}^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

pour obtenir les estimations sur E_h et H_h .

□

Remarque 34. *On a l'impression sur ces estimations que le schéma se détériore quand α tend vers 1. En dimension 1, le schéma est exact à CFL 1, les estimations précédentes ne sont donc pas optimales.*

Exercice 16. *En utilisant la propriété en 1D que toute solution de l'équation des ondes s'écrit $f(x-ct) + g(x+ct)$, montrer que la solution continue est solution du schéma (4.10) et donc qu'à CFL = 1 le schéma est exact. Cette propriété n'est vraie qu'en une seule dimension comme la formule de D'Alembert.*

4.2.6 Erreur de convergence, erreur de consistance et schéma de démarrage

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'erreur de convergence du schéma par technique énergétique. Il importe de définir l'erreur de convergence en fonction de la technique utilisée. Cette définition n'est pas si naturelle que cela puisque nous cherchons à comparer deux solutions qui ne vivent pas dans le même espace : la solution du problème continu qui est une fonction de l'espace et du temps, la solution du schéma discret qui est une suite doublement indexée en temps et en espace.

Nous introduisons \bar{E}_i^n et $\bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ les suites de L_h^2 définies à partir des valeurs des solutions exactes aux noeuds de la grille espace-temps, en supposant ces solutions suffisamment régulières.

$$\bar{E}_i^n = e(x_i, t^n) \quad \bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$$

et on définit l'erreur de convergence dans L_h^2 par

$$e_{h,E}^n = \bar{E}_i^n - E_h^n \quad e_{h,H}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_h^{n+\frac{1}{2}}$$

Si les solutions E_h^n et $H_h^{n+\frac{1}{2}}$ du schéma discretisé vérifient avec des notations simplifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_r^h}{c} \left(D_t H_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_h^n + (C_h E_h^n)_h = +m_h^n, \\ \frac{\epsilon_r^h}{c} (D_t E_h^n)_{h^{n-\frac{1}{2}}} + (B_h H_h^{n-\frac{1}{2}})_h = -j_h^{n-\frac{1}{2}} \\ E_h^0 = f_h(e_0, h_0) \\ H_h^{\frac{1}{2}} = g_h(e_0, h_0) \end{array} \right.$$

L'erreur de consistance ε est alors définie en injectant dans le schéma la solution exacte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_r^h}{c} \left(D_t \bar{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_h^n + (C_h \bar{E}_h^n)_h = +m_h^n + \varepsilon_{h,E}^n, \\ \frac{\epsilon_r^h}{c} (D_t \bar{E}_h^n)_{h^{n-\frac{1}{2}}} + (B_h \bar{H}_h^{n-\frac{1}{2}})_h = -j_h^{n-\frac{1}{2}} - \varepsilon_{h,H}^{n-\frac{1}{2}} \\ \bar{E}_h^0 = f_h(e_0, h_0) + \varepsilon_{h,E}^0 \\ \bar{H}_h^{\frac{1}{2}} = g_h(e_0, h_0) + \varepsilon_{h,H}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Par linéarité en soustrayant les deux expressions, on obtient que l'erreur de convergence est la solution du schéma discret avec termes sources égaux à l'erreur de consistance et données initiales liées au schéma de démarrage $(f_h(e_0, h_0), g_h(e_0, h_0))$. On comprend alors pourquoi la convergence est obtenue quand il y a consistance et stabilité : le résultat de stabilité permet de majorer l'erreur de convergence par l'erreur de consistance et le résultat de consistance assure que cette dernière tend vers 0 et précise l'ordre de convergence en fonction de Δt et h . Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_r^h}{c} \left(D_t e_{h,H}^{n+\frac{1}{2}} \right)_h^n + (C_h e_{h,E}^n)_h = \varepsilon_{h,E}^n, \\ \frac{\epsilon_r^h}{c} (D_t e_{h,E}^n)_{h^{n-\frac{1}{2}}} + (B_h e_{h,H}^{n-\frac{1}{2}})_h = -\varepsilon_{h,H}^{n-\frac{1}{2}} \\ e_{h,E}^0 = \varepsilon_{h,E}^0 \\ e_{h,H}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_{h,H}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors énoncer directement le théorème suivant :

Théorème 17. *Sous la condition CFL, $\alpha = \frac{c^M \Delta t}{h} < 1$, l'erreur de convergence et son énergie associée $\mathcal{F}_h^{n+\frac{1}{2}}$ vérifient*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h^{n+\frac{1}{2}} &\leq \left\{ \mathcal{F}_h^{\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta t}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\| \right\}^2 \\ \|e_{h,E}^n\|_{\epsilon_r} &\leq \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \sqrt{\mathcal{F}_h^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\Delta t}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\| \\ \|e_{h,H}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu_r} &\leq \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \sqrt{\mathcal{F}_h^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\Delta t}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \|f_h^k\|\end{aligned}$$

avec $\|f_h^k\| = \|\varepsilon_{h,H}^{k-\frac{1}{2}}\|_{1/\epsilon_r} + \|\varepsilon_{h,E}^k\|_{1/\mu_r}$

Il ne nous reste plus qu'à établir des estimations uniformes de l'erreur de consistance (qui feront intervenir l'ordre du schéma) et de l'énergie initiale (qui dépend du schéma de démarrage).

Estimation uniforme de l'erreur de consistance

Nous calculons $\epsilon_{i+\frac{1}{2},E}^n$ en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{\partial h}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(t^{n+\frac{1}{2}}-s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^n} \frac{(t^{n-\frac{1}{2}}-s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds\end{aligned}$$

De même,

$$(C_h \bar{E}_h^n)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\partial e}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \frac{1}{h} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(x, t^n) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(x_i-x)^2}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(x, t^n) dx$$

Donc pour tout i, n on a :

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+\frac{1}{2},E}^n &= \frac{\mu_r^{i+\frac{1}{2}}}{c} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(t^{n+\frac{1}{2}}-s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^n} \frac{(t^{n-\frac{1}{2}}-s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(x, t^n) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(x_i-x)^2}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(x, t^n) dx \right]\end{aligned}$$

Nous majorons $|\varepsilon_{i+\frac{1}{2},E}^n|^2$ qui est le carré d'une somme de 4 termes par 4 fois le carré de chaque terme et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par exemple :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(t^{n+\frac{1}{2}} - s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right)^2 \leq \frac{1}{\Delta t^2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(t^{n+\frac{1}{2}} - s)^4}{4} ds \right) \left(\int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right)$$

On intègre ensuite en temps le polynôme pour obtenir :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(t^{n+\frac{1}{2}} - s)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right)^2 \leq \frac{C}{\Delta t^2} (\Delta t^5) \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds$$

De même,

$$\left(\frac{1}{h} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(x, t^n) dx \right)^2 \leq C h^3 \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|^2(x, t^n) dx$$

Et donc on obtient :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{i+\frac{1}{2},E}^n|^2 &\leq C \left[\Delta t^3 \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds + \Delta t^3 \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^n} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right. \\ &\quad \left. + h^3 \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|^2(x, t^n) dx + h^3 \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|^2(x, t^n) dx \right] \end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes :

$$|\varepsilon_{i+\frac{1}{2},E}^n|^2 \leq C \left[\Delta t^3 \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds + h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|^2(x, t^n) dx \right]$$

On a alors en sommant sur i une estimation de la norme dans L_h^2 de $\varepsilon_{h,E}^n$:

$$\|\varepsilon_{h,E}^n\|_{\frac{1}{\mu_r}}^2 \leq C \left[\left(\sum_i h \Delta t^3 \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) ds \right) + h^4 \left\| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(t^n) \right\|_{L^2}^2 \right]$$

soit encore en permutant intégrale et signe somme

$$\|\varepsilon_{h,E}^n\|_{\frac{1}{\mu_r}}^2 \leq C \left[\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \Delta t^3 \left(\sum_i h \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) \right) ds + h^4 \left\| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(t^n) \right\|_{L^2}^2 \right]$$

$\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x_{i+\frac{1}{2}}, s)$ représentant l'approximation ponctuelle aux points de la grille de $\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(x, s)$ on a la majoration :

$$\left(\sum_i h \left| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right|^2(x_{i+\frac{1}{2}}, s) \right) \leq \left\| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(s) \right\|_{H^1}^2$$

donc

$$\|\varepsilon_{h,E}^n\|_{\frac{1}{\mu_r}}^2 \leq C \left[\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \Delta t^3 \left\| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(s) \right\|_{H^1}^2 ds + h^4 \left\| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}(t^n) \right\|_{L^2}^2 \right]$$

Nous avons obtenu des estimations uniformes en espace. Pour la variable temps, on se place dans le cadre des fonctions continues en temps de $[0, T]$ à valeurs dans un espace de Hilbert H . Soit si $u \in C^0(0, T, H)$, on définit

$$\|u\|_{C^0(0,T,H)} = \sup_{[0,T]} (\|u(t)\|_H)$$

Nous obtenons alors une estimation uniforme en temps :

$$\|\varepsilon_{h,E}^n\|_{\frac{1}{\mu_r}}^2 \leq C \left[\Delta t^4 \left\| \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} \right\|_{C^0(0,T,H^1)}^2 + h^4 \left\| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right\|_{C^0(0,T,L^2)}^2 \right]$$

on en déduit l'estimation uniforme sur $\|f_h^k\|$:

$$\|f_h^k\| \leq C \left[\Delta t^2 (\|h\|_{C^3(0,T,H^1)} + \|e\|_{C^3(0,T,H^1)}) + h^2 (\|e\|_{C^0(0,T,H^3)} + \|h\|_{C^0(0,T,H^3)}) \right]$$

L'estimation étant uniforme, $\Delta t \sum_{k=1}^n \|f_h^k\|$ ramène juste T qui est une constante. Il ne reste plus qu'à choisir et étudier le schéma de démarrage pour conclure sur la convergence et l'ordre du schéma

Schéma de démarrage

Il consiste dans le choix des solutions initiales E_h^0 et $H_h^{\frac{1}{2}}$.

E_h^0 doit approcher $E(x, t = 0) = e_0(x)$. Nous avons le choix entre 2 types d'approximation (ponctuelle ou en moyenne). Dans chacun des cas, nous avons une estimation uniforme :

$$\|E_h^0\|_{\epsilon_r} \leq C \|e_0\|_{H^1} \quad \text{cas (4.8)}$$

$$\|E_h^0\|_{\epsilon_r} \leq C \|e_0\|_{L^2} \quad \text{cas (4.9)}$$

Nous avons aussi une estimation de l'erreur de convergence initiale sur E :

$$\|e_{h,E}^0\|_{\epsilon_r} = 0 \quad \text{cas (4.8)}$$

$$\|e_{h,E}^0\|_{\epsilon_r} \leq Ch^2 \|e_0''\|_{L^2} \quad \text{cas (4.9)}$$

$H_h^{\frac{1}{2}}$ doit approcher $h(x, t = \Delta t/2)$. Nous avons de même 2 choix d'approximation en espace comme précédemment. La difficulté supplémentaire provient du décalage d'un demi-pas de temps par rapport à la donnée initiale $h_0(x) = h(x, t = 0)$. Un premier choix est de prendre

$$H_h^{\frac{1}{2}} = h_{0,h}$$

Nous établissons sans difficulté comme pour E_h^0 des estimations uniformes de stabilité, et on étudie l'erreur du schéma. On a alors

$$e_{h,H}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_{h,H}^{\frac{1}{2}} = \bar{H}_h^{\frac{1}{2}} - H_h^{\frac{1}{2}}$$

En effectuant un développement limité, on a

$$\bar{H}_h^{\frac{1}{2}} - H_h^{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} h'_h(x_h, 0)$$

On constate que le schéma n'est plus alors précis qu'à l'ordre 1 en temps. Le théorème de convergence montre que même si l'erreur de consistance est d'ordre 2 en temps et en espace le schéma n'est que d'ordre 1 en temps si l'approximation du schéma de démarrage n'est que d'ordre 1. Il est donc fondamental d'utiliser un bon schéma de démarrage pour obtenir l'ordre maximal de convergence. Nous effectuons donc un développement limité à l'ordre supérieur pour obtenir l'ordre 2 en temps :

$$\bar{H}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}, \frac{\Delta t}{2}) = h_0(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial h}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\Delta t^2)$$

Comme $\frac{\mu_r(x_{i+\frac{1}{2}})}{c} \frac{\partial h}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) = -\frac{\partial e}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0)$, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) = -\frac{c}{\mu_r} \frac{\partial e}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) = -\frac{c}{\mu_r} (C_h E_h^0)_{i+\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

Nous choisissons donc comme schéma de démarrage :

$$H_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = h_0(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{c}{\mu_r} \frac{\Delta t}{2} (C_h E_h^0)_{i+\frac{1}{2}}$$

Exercice 17. Etablir que, pour le choix précédent, l'erreur de convergence $e_{h,H}^{\frac{1}{2}} = O(\Delta t^2) + O(h^2)$.

Conclusion sur la convergence

Pour résumer, nous avons démontré que le schéma (4.10) était convergent d'ordre 2 en temps et en espace. Rappelons les principaux ingrédients :

- définir une énergie discrète qui se conserve en l'absence de terme source

- établir une condition sous laquelle cette énergie s'écrit en somme de termes positifs, cela donne une condition suffisante de stabilité
- établir la continuité des solutions discrètes par une majoration uniforme en fonction de l'énergie et des termes sources
- exprimer l'erreur de consistance et déterminer son ordre
- choisir le schéma de démarrage cohérent avec l'erreur de consistance

La généralisation au cas du système en 3 dimensions suivra la même démarche, il suffira d'établir :

- une approximation centrée qui permettra d'assurer l'ordre 2
- une relation de dualité entre les approximations C_h et B_h des opérateurs $\vec{\text{rot}}$ et $-\vec{\text{rot}}$ essentielle pour définir l'énergie discrète
- la constante de continuité de l'opérateur B_h qui permet de déterminer la condition de stabilité

Il est important de noter que l'on obtient l'ordre maximal du schéma que si la solution, donc les données sont assez régulières. Dans le cas contraire, nous n'avons plus le droit d'effectuer les développements limités et donc l'ordre observé sera inférieur.

4.2.7 Notion de dispersion numérique

Nous allons aborder rapidement la notion de dispersion numérique sur le cas 1D, nous l'étudierons plus en détail sur le système de Maxwell en 3 dimensions.

L'étude de la dispersion numérique consiste à déterminer quelles sont les solutions particulières de type $e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t - kx)}$. Cette technique permet rapidement de déterminer sur grille régulière les propriétés des schémas numériques. C'est un élément de l'analyse par transformée de Fourier de la stabilité des schémas. On suppose k fixé et on regarde les valeurs $\omega_{\Delta t, h}$ pour lesquelles $e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t - kx)}$ est solution. S'il existe $\omega_{\Delta t, h}$ ayant une partie imaginaire positive, alors il peut exister des solutions explosant au cours du temps. A l'inverse si les seuls $\omega_{\Delta t, h}$ sont réels, les solutions particulières restent bornées au cours du temps et par transformée de Fourier inverse, toute solution en temps fini reste bornée. On détermine ainsi rapidement une condition suffisante de stabilité.

De plus le rapport $\omega_{\Delta t, h}/k$ permet de déterminer la vitesse numérique des ondes de nombre d'onde k . Dans le domaine continu, nous avons vu que ce rapport était constant égal à c , vitesse de la lumière dans le vide. L'étude de la dépendance du rapport $\omega_{\Delta t, h}/k$ s'appelle la dispersion numérique. Nous allons voir sur le cas 1D que ce rapport n'est plus constant et en tirer des premières conclusions. Nous nous plaçons dans le cas homogène : $\epsilon_r \equiv \mu_r \equiv 1$. Nous injectons dans le système discrétisé homogène (4.10) les quantités : $E_i^n = E e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - kx_i)}$ et $H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} =$

$He^{-i(\omega_{\Delta t,h}t^{n+\frac{1}{2}}-kx_{i+\frac{1}{2}})}$ et factorisons respectivement $e^{-i(\omega_{\Delta t,h}t^n-kx_{i+\frac{1}{2}})}$ et $e^{-i(\omega_{\Delta t,h}t^{n-\frac{1}{2}}-kx_i)}$

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{H}{\Delta t} (e^{-i\omega_{\Delta t,h} \frac{\Delta t}{2}} - e^{+i\omega_{\Delta t,h} \frac{\Delta t}{2}}) + \frac{E}{h} (e^{ik \frac{h}{2}} - e^{-ik \frac{h}{2}}) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{E}{\Delta t} (e^{-i\omega_{\Delta t,h} \frac{\Delta t}{2}} - e^{+i\omega_{\Delta t,h} \frac{\Delta t}{2}}) + \frac{H}{h} (e^{ik \frac{h}{2}} - e^{-ik \frac{h}{2}}) = 0, \end{cases}$$

On obtient le système suivant, en notant $\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$ le coefficient CFL :

$$\begin{cases} -2iH \sin \frac{\omega_{\Delta t,h} \Delta t}{2} + \alpha 2iE \sin \frac{kh}{2} = 0 \\ -2iE \sin \frac{\omega_{\Delta t,h} \Delta t}{2} + \alpha 2iH \sin \frac{kh}{2} = 0 \end{cases}$$

On obtient la relation :

$$\sin^2 \frac{\omega_{\Delta t,h} \Delta t}{2} = \alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2}$$

Nous retrouvons que sous la condition CFL, $\alpha \leq 1$, pour tout k , les pulsations $\omega_{\Delta t,h}$ sont réelles, le schéma est donc stable. On a de plus la relation suivante entre la solution positive $\omega_{\Delta t,h}(k)$ et k :

$$\omega_{\Delta t,h} = \frac{2}{\Delta t} \arcsin(\alpha \sin \frac{kh}{2})$$

Un développement limité nous montre que

$$\frac{\omega_{\Delta t,h} \Delta t}{2} + O(\Delta t^3) = \frac{c\Delta t}{h} \left(\frac{kh}{2} + O(h^3) \right)$$

soit encore

$$\omega_{\Delta t,h} = kc + O(\Delta t^2) + O(h^2)$$

Nous retrouvons ainsi directement que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

Analyse de la dispersion numérique

Il est important de remarquer que le rapport $\frac{\omega_{\Delta t,h}}{k}$ n'est plus constant, les longueurs d'ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans le schéma numérique, on dit que le schéma est dispersif. La vitesse de phase dépend donc de k , soit de la longueur d'onde. Ce phénomène s'appelle la dispersion numérique. La différence $(c - \omega_{\Delta t,h}(k)/k)t$ représente à un instant t le déphasage entre l'onde continue et l'onde numérique, déphasage dû à la discrétisation en espace. Ce déphasage augmente au cours du temps c'est pourquoi il est important de bien le maîtriser. On trace donc les *courbes de dispersion* obtenues en traçant les variations du rapport entre vitesse continue et vitesse de phase numérique :

$$q_{\Delta t,h} = \frac{\omega_{\Delta t,h}}{kc}$$

en fonction de la quantité $K = kh$. On utilise en particulier l'inverse de nombre de points par longueurs d'onde :

$$G = \frac{K}{2\pi} = \frac{h}{\lambda}.$$

On obtient :

$$q_{h,\Delta t} = \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \frac{2}{\Delta t kc} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{h} \sin \frac{kh}{2}\right) = \frac{2}{\alpha K} \arcsin\left(\alpha \sin \frac{K}{2}\right)$$

qui s'exprime comme fonction de α et G :

$$q(\alpha, G) = \frac{2}{\alpha K} \arcsin\left(\alpha \sin \frac{K}{2}\right) = \frac{1}{\alpha \pi G} \arcsin(\alpha \sin(\pi G))$$

Pour convenablement représenter en espace un signal sinusoïdal nous savons qu'un critère de maillage est de disposer d'au moins 5 points par longueur d'onde, il est donc largement raisonnable de limiter la valeur de G à 0.5. Analysons le résultat obtenu :

- Quand α est fixé et $h \rightarrow 0$ (et donc Δt aussi), on a

$$q(\alpha, G) = 1 - (1 - \alpha^2)K^2/12 + \dots$$

On retrouve que le schéma converge et est d'ordre 2 (et même d'ordre infini si $\alpha = 1$). En raffinant le maillage, la dispersion diminue.

- Pour α fixé, la fonction $G \rightarrow q(\alpha, G)$ est décroissante. Donc plus on a de points par longueur d'onde plus q est proche de 1. En particulier la dispersion est meilleure sur les basses fréquences que les hautes fréquences. Les ondes numériques vont moins vite que les ondes continues.
- pour G fixé, la fonction $\alpha \rightarrow q(\alpha, G)$ est croissante. Le meilleur schéma est donc obtenu pour le plus grand α possible et limité par la condition CFL. Soit en 1D pour $\alpha = 1$, on a $q(1, G) = 1$ on retrouve que le schéma est exact dans ce cas là, toutes les fréquences se propagent à la même vitesse.
- Sous la condition $\alpha \leq 1$, on retrouve la stabilité du schéma puisque les $\omega_{h,\Delta t}(k)$ sont réels quelque soit k . S'il existait des $\omega_{h,\Delta t}(k)$ complexes alors une des deux valeurs solutions aurait une partie imaginaire strictement positive et donc il y aurait des solutions qui explosent. L'analyse de dispersion est souvent utilisée pour trouver rapidement la condition de stabilité d'un schéma.
- La limite quand $\alpha \rightarrow 0$ correspond à :

$$q(\alpha \rightarrow 0, G) \sim \frac{1}{\alpha \pi G} \alpha \sin(\pi G) = \frac{1}{\pi G} \sin(\pi G) = \frac{2}{K} \sin\left(\frac{K}{2}\right)$$

qui correspond à l'erreur de dispersion du schéma semi-discretisé en espace. Et donc la dispersion du schéma semi-discretisé en espace est moins bonne que celle du schéma totalement discretisé.

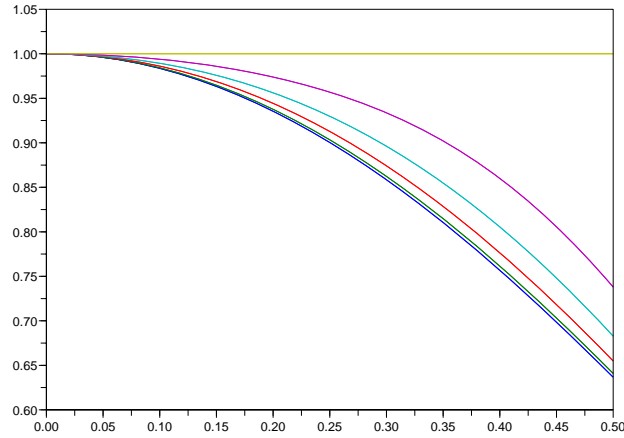


FIG. 4.8 – Courbes de dispersion schéma explicite 1D, $\alpha = 0, 0.2 \dots 0.8, 1$

4.3 Etude du schéma FDTD pour le système de Maxwell en dimension 3

Nous nous intéressons à la résolution du système de Maxwell re-dimensionné en 3 dimensions d'espace. Dans toute la suite, nous supposons que $\epsilon_r \equiv \mu_r \equiv 1$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(x, t) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{H}(x, 0) = \vec{H}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

4.3.1 Le schéma de Yee

Présentation du schéma

Nous rappelons l'expression de l'opérateur $\vec{\text{rot}}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \\ & & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Nous suivons la démarche introduite en dimension 1 pour la direction x en décalant d'un demi pas en temps et en espace les quantités couplées (E_y, H_z) et $(E_z, -H_y)$ (et donc les permutations circulaires sur les directions) pour obtenir des approximations centrées.

Nous proposons d'approcher les champs \vec{E} et \vec{H} de la manière suivante :

$$\vec{E}_h^n = \begin{vmatrix} E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n \\ E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n \\ E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n \end{vmatrix} \quad \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} H_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ H_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

On vérifie que E_x et H_y sont positionnées au même endroit en x et y et décalés d'une demi maille en z et ainsi de suite par permutation circulaire. Nous proposons alors le schéma suivant :

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{E^n_{z,i,j+1,k+\frac{1}{2}} - E^n_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{E^n_{y,i,j+\frac{1}{2},k+1} - E^n_{y,i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta z} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{E^n_{x,i+\frac{1}{2},j,k+1} - E^n_{x,i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta z} - \frac{E^n_{z,i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E^n_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H^{n-\frac{1}{2}}_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} + \frac{E^n_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k} - E^n_{y,i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x} - \frac{E^n_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k} - E^n_{x,i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta y} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{E^n_{x,i+\frac{1}{2},j,k} - E^{n-1}_{x,i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t} - \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H^{n-\frac{1}{2}}_{z,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y} + \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{y,i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{E^n_{y,i,j+\frac{1}{2},k} - E^{n-1}_{y,i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} - \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{x,i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H^{n-\frac{1}{2}}_{z,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{E^n_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} - E^{n-1}_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{y,i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{H^{n-\frac{1}{2}}_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{x,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \end{array} \right.$$

Les 2 Grilles

La figure 4.9 présente sur une maille de la grille (i, j, k) la position des inconnues discrètes. L'intérêt industriel d'une méthode de différences finies sur grille régulière apparaît immédiatement, aucun stockage de géométrie n'est nécessaire, les points sont repérés uniquement par leur triplet d'indice (nombres entiers) et la donnée de Δx , Δy , Δz suffit à déterminer les positions géométriques. Les inconnues sont elles aussi repérées par les indices (i, j, k) de la maille élémentaire auxquelles elles appartiennent.

On remarque que les champs \vec{E}_h sont positionnés au milieu des arêtes de même direction alors que les champs \vec{H}_h sont au centre des faces perpendiculaires à leur direction.

En introduisant la grille duale, figure 4.10 dont les sommets sont les centres des cubes de la grille initiale, on constate que sur cette grille duale les champs \vec{H}_h sont positionnés au milieu des arêtes de même direction alors que les champs \vec{E}_h sont au centre des faces perpendiculaires à leur direction. Cette dualité des grilles est cohérente avec le fait que dans les équations de Maxwell les opérateurs intervenants sont $\vec{\text{rot}}$ et $-\vec{\text{rot}}$ et qu'il y a donc une symétrie des inconnues et des équations que nous retrouvons dans le schéma discret.

Interprétation du schéma par la circulation des champs

Le schéma de Yee a été introduit par une technique de type différences finies. Nous pouvons en donner une autre interprétation en utilisant une méthode de type volumes finis.

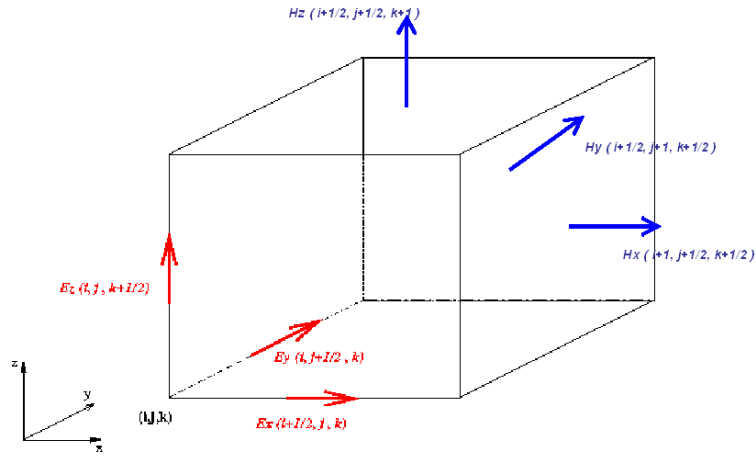


FIG. 4.9 – La maille élémentaire du schéma de Yee

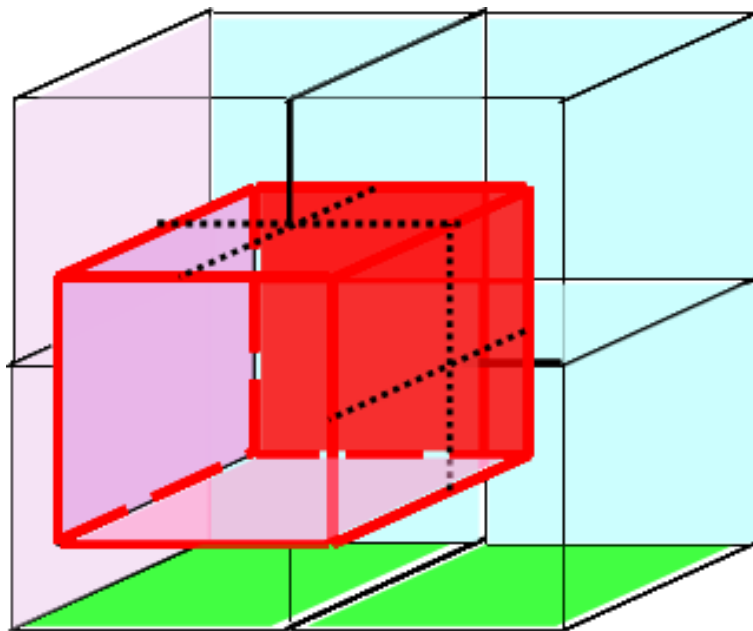


FIG. 4.10 – La grille initiale et la grille duale

On considère la surface carrée S , figure 4.11 située dans le plan $z_k = k\Delta z$ délimitée par les droites $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = y_j$ et $y = y_{j+1}$.

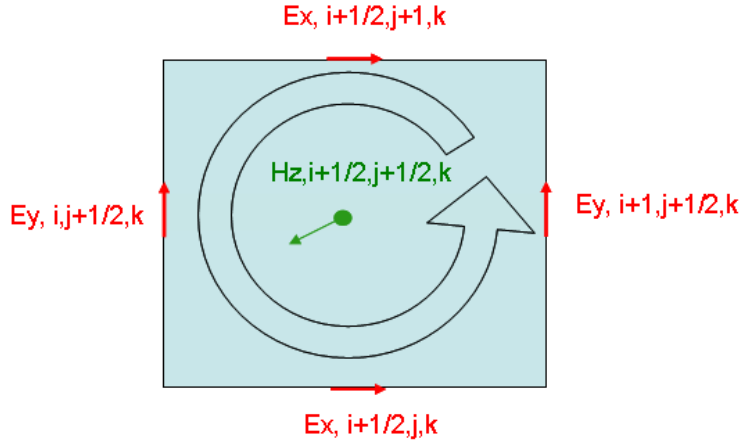


FIG. 4.11 – Surface S dans le plan $z = z_k$

Nous intégrons alors la composante en z de la première équation du système de Maxwell sur la surface S :

$$\int \int_S \left(\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + (\vec{\text{rot}} \vec{E})_z \right) (x, y, z_k) dx dy = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \int_S H_z(x, y, z_k) dS + \int \int_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ désigne l'élément d'aire portée par la normale extérieure à la face S orientée dans le sens trigonométrique.

On note alors $H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$ la moyenne de H_z sur la face S :

$$H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int \int_S H_z(x, y, z_k) dS$$

et on choisit une discrétisation centrée en temps autour de t^n soit :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \int_S H_z(x, y, z_k) dS = \frac{\Delta x \Delta y}{c} \frac{H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

On utilise la formule de la circulation pour le terme en $\vec{\text{rot}} \vec{E}$:

$$\int \int_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{E} \cdot \vec{\tau}$$

où C désigne le contour orienté de S et $\vec{\tau}$ le vecteur tangent orienté au contour. On note alors $E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}$ la moyenne de $\vec{E} \cdot \vec{e}_x$ sur les arêtes horizontales et $E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}$ la moyenne de $\vec{E} \cdot \vec{e}_y$ sur les arêtes verticales, par exemple :

$$E_{x,i+\frac{1}{2},j,k} = \Delta x \int_{C_{(i,j,k)}^{(i+1,j,k)}} \vec{E} \cdot \vec{\tau}$$

On a alors directement :

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{\tau} = \Delta x (E_{x,i+\frac{1}{2},j,k} - E_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}) + \Delta y (E_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k} - E_{y,i,j+\frac{1}{2},k})$$

On choisit de même d'écrire l'expression au temps t^n et en regroupant les termes on obtient :

$$\frac{\Delta x \Delta y}{c} \frac{H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \Delta x (E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n - E_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}^n) + \Delta y (E_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k}^n - E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n) = 0$$

qui se compare exactement avec la troisième expression du schéma de Yee :

$$\frac{1}{c} \frac{H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{E_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k}^n - E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} - \frac{E_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta y} = 0$$

En effectuant le même raisonnement sur les autres sections carrées de la grille, puis sur la grille duale, on trouve les 6 expressions du schéma de Yee.

Vitesse de propagation numérique

On s'intéresse au cône de dépendance de chaque inconnue. Prenons par exemple, $E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}$ à l'itération n , quelles sont les inconnues auxquelles il contribue dans les étapes suivantes ?

L'arête qui le porte appartient à quatre boucles de circulation, donc il contribue à l'étape $n + 1/2$ à 4 valeurs de H :

$$H_{y,i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad H_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad H_{z,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \quad H_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}$$

Ces 4 champs H contribuent à leur tour à l'étape $n + 1$ aux 4 arêtes qui entourent la face au milieu de laquelle ils sont positionnés soit en tout 5 arêtes suivant \vec{e}_x , 4 arêtes suivant \vec{e}_y et 4 arêtes suivant \vec{e}_z , voir figure 4.12 :

$$\begin{array}{cccc} E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} & E_{x,i+\frac{1}{2},j,k+1}^{n+1} & E_{x,i+\frac{1}{2},j,k-1}^{n+1} & E_{x,i+\frac{1}{2},j-1,k}^{n+1} & E_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}^{n+1} \\ E_{y,i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} & E_{y,i+1,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} & E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} & E_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} & \\ E_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} & E_{z,i+1,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} & E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} & E_{z,i+1,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} & \end{array}$$

Il est facile alors de voir que tous ces champs E comme H sont situés sur des points contenus dans l'octaèdre régulier centré autour de $i + \frac{1}{2}, j, k$ et de distance aux sommets h , voir figure 4.6. En fait, l'octaèdre est légèrement tronqué dans la direction x puisque les points $i - \frac{1}{2}, j, k$ et $i + \frac{3}{2}, j, k$ ne sont pas atteints, les plans extrêmes rencontrés sont les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$. Une composante de champ se propage plus vite (à la vitesse $V_{num} = h/\Delta t$) dans les directions transverses que dans la sienne propre.

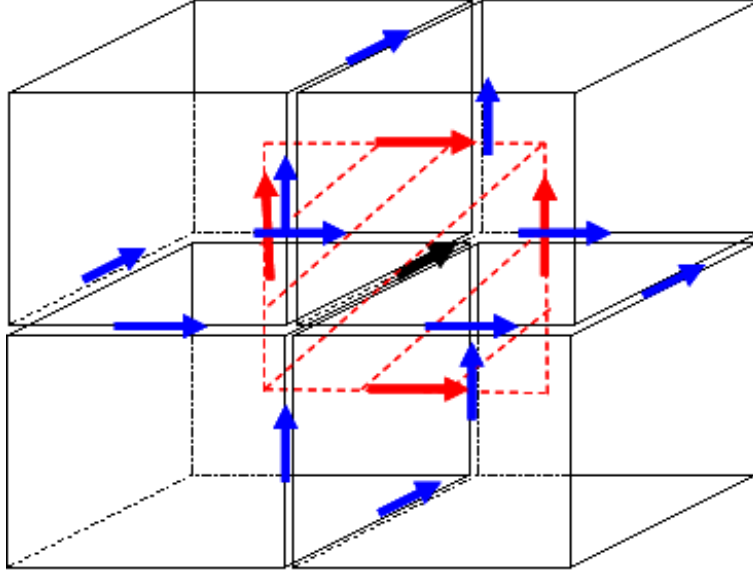


FIG. 4.12 – Propagation numérique de E_x sur une itération

En effectuant la même analyse qu'en dimension 1, la condition nécessaire de convergence est que la sphère de rayon $c\Delta t$ doit strictement être incluse dans le cône de propagation numérique, les points de distance minimale sont les mêmes que dans le cas scalaire, on en déduit que la condition nécessaire de convergence est

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4.3.2 Propriétés discrètes du schéma de Yee, analyse par méthode énergétique

Nous allons introduire quelques notations qui faciliteront l'étude du schéma de Yee.

On note \vec{C}_h l'opérateur vectoriel sur \vec{E}_h approchant dans le schéma l'opérateur $\vec{\text{rot}}$ et \vec{B}_h l'opérateur vectoriel sur \vec{H}_h approchant dans le schéma l'opérateur $-\vec{\text{rot}}$. Le schéma de Yee s'écrit alors sous forme vectorielle :

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (\vec{C}_h \vec{E}_h^n)_h = 0, & n \geq 1 \\ \frac{1}{c} \frac{\vec{E}_h^n - \vec{E}_h^{n-1}}{\Delta t} + (\vec{B}_h \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}})_h = 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

On remarque que l'action de \vec{C}_h sur un champ \vec{E}_h donne un champ positionné comme \vec{H}_h , de même l'action de \vec{B}_h sur un champ \vec{B}_h donne un champ positionné comme \vec{E}_h .

On note alors C_h^i , respectivement C_h^j , C_h^k les opérateurs de dérivation discrets dans les directions \vec{e}_x , respectivement \vec{e}_y , \vec{e}_z sur des positions entières à valeur sur les positions décalées et

laissant les autres directions inchangées. Par exemple

$$(C_h^i u_h)_{i+\frac{1}{2},\alpha,\beta} = \frac{u_{i+1,\alpha,\beta} - u_{i,\alpha,\beta}}{\Delta x}$$

On note B_h^i (resp B_h^j, B_h^k) les opérateurs de dérivation discrets mais sur la grille décalée, envoyant des données positionnées aux demi indices à valeur sur les positions entières. Par exemple

$$(B_h^k u_h)_{\alpha,\beta,k} = \frac{u_{\alpha,\beta,k+\frac{1}{2}} - u_{\alpha,\beta,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}$$

Nous avons démontré que les opérateurs C_h^α et B_h^α étaient 2 à 2 duaux l'un de l'autre dans la mesure où les positions n'intervenant pas dans la dérivation sont les mêmes. Nous pouvons alors facilement exprimer \vec{C}_h et \vec{B}_h en fonction des opérateurs 1D.

$$\vec{C}_h \vec{E}_h = \begin{pmatrix} C_h^j E_{z,h} - C_h^k E_{y,h} \\ C_h^k E_{x,h} - C_h^i E_{z,h} \\ C_h^i E_{y,h} - C_h^j E_{x,h} \end{pmatrix} \quad \vec{B}_h \vec{H}_h = \begin{pmatrix} -B_h^j H_{z,h} + B_h^k H_{y,h} \\ -B_h^k H_{x,h} + B_h^i H_{z,h} \\ -B_h^i H_{y,h} + B_h^j H_{x,h} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat de dualité suivant :

Théorème 7. *Les opérateurs \vec{B}_h et \vec{C}_h sont duaux l'un de l'autre*

$$(\vec{C}_h \vec{E}_h, \vec{H}_h) = (-\vec{E}_h, \vec{B}_h \vec{H}_h)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (\vec{C}_h \vec{E}_h, \vec{H}_h) &= +(C_h^j E_{z,h}, H_{x,h}) - (C_h^k E_{y,h}, H_{x,h}) \\ &\quad +(C_h^k E_{x,h}, H_{y,h}) - (C_h^i E_{z,h}, H_{y,h}) \\ &\quad +(C_h^i E_{y,h}, H_{z,h}) - (C_h^j E_{x,h}, H_{z,h}) \end{aligned}$$

On remarque que $E_{z,h}$ et $H_{x,h}$ sont positionnés au même endroit pour les directions différentes de y , on peut donc utiliser la dualité des opérateurs 1D, C_h^j, B_h^j pour le premier terme. Le même raisonnement s'applique aux autres termes, donc :

$$\begin{aligned} (\vec{C}_h \vec{E}_h, \vec{H}_h) &= +(E_{z,h}, -B_h^j H_{x,h}) - (E_{y,h}, -B_h^k H_{x,h}) \\ &\quad +(E_{x,h}, -B_h^k H_{y,h}) - (E_{z,h}, -B_h^i H_{y,h}) \\ &\quad +(E_{y,h}, -B_h^i H_{z,h}) - (E_{x,h}, -B_h^j H_{z,h}) \\ &= -(E_{x,h}, -B_h^j H_{z,h} + B_h^k H_{y,h}) \\ &\quad -(E_{y,h}, -B_h^k H_{x,h} + B_h^i H_{z,h}) \\ &\quad -(E_{z,h}, -B_h^i H_{y,h} + B_h^j H_{x,h}) \\ &= -(\vec{E}_h, \vec{B}_h \vec{H}_h) \end{aligned}$$

□

Ayant établi le résultat de dualité, nous savons qu'il nous faudra une estimation de la norme de l'opérateur \vec{B}_h pour obtenir la condition de stabilité. Essayons d'estimer $\|\vec{B}_h \vec{H}_h\|$ dans le cas où $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$,

$$\|\vec{B}_h \vec{H}_h\|^2 = \| -B_h^j H_{z,h} + B_h^k H_{y,h} \|^2 + \| -B_h^k H_{x,h} + B_h^i H_{z,h} \|^2 + \| -B_h^i H_{y,h} + B_h^j H_{x,h} \|^2$$

En utilisant la majoration (optimale car le sup est atteint quand $a = b$), $\|a + b\|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$, et les estimations déjà établies sur les opérateurs 1D, on a

$$\|\vec{B}_h \vec{H}_h\|^2 \leq 4 \frac{4}{h^2} (\|H_{x,h}\|^2 + \|H_{y,h}\|^2 + \|H_{z,h}\|^2) \leq \frac{16}{h^2} \|\vec{H}_h\|^2$$

Nous trouvons alors par méthode énergétique une condition suffisante CFL : $\alpha < \frac{1}{2}$, ce qui est plus contraignant que le résultat attendu par le critère de vitesse numérique du schéma en 3D : $\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La majoration précédente n'est donc pas optimale. En fait le schéma a d'autres propriétés remarquables en lien avec l'analyse effectuée dans le cas continu.

Dans le domaine continu, nous avons la propriété sur les opérateurs différentiels :

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} - \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{u}$$

Cette propriété, associée à la conservation de la divergence :

$$\frac{\partial \operatorname{div}(\epsilon_r \vec{E})}{\partial t} = 0$$

et

$$\frac{\partial \operatorname{div}(\mu_r \vec{H})}{\partial t} = 0$$

permet de montrer que \vec{E} et \vec{H} vérifient l'équation des ondes vectorielles. Nous allons démontrer dans le cas discret l'équivalent de ces deux propriétés.

Equivalent discret de la relation $\vec{\Delta} = \vec{\nabla} \operatorname{div} - \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}}$

Un équivalent discret de $-\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{H}$ est $\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h$

$$\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h = \begin{pmatrix} C_h^j (-B_h^i H_{y,h} + B_h^j H_{x,h}) - C_h^k (-B_h^k H_{x,h} + B_h^i H_{z,h}) \\ C_h^k (-B_h^j H_{z,h} + B_h^k H_{y,h}) - C_h^i (-B_h^i H_{y,h} + B_h^j H_{x,h}) \\ C_h^i (-B_h^k H_{x,h} + B_h^i H_{z,h}) - C_h^j (-B_h^j H_{z,h} + B_h^k H_{y,h}) \end{pmatrix}$$

qui se réécrit :

$$\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h = \begin{pmatrix} (C_h^j B_h^j + C_h^k B_h^k) H_{x,h} - C_h^j B_h^i H_{y,h} - C_h^k B_h^i H_{z,h} \\ (C_h^k B_h^k + C_h^i B_h^i) H_{y,h} - C_h^k B_h^j H_{z,h} - C_h^i B_h^j H_{x,h} \\ (C_h^i B_h^i + C_h^j B_h^j) H_{z,h} - C_h^i B_h^k H_{x,h} - C_h^j B_h^k H_{y,h} \end{pmatrix}$$

Nous voulons faire apparaître un équivalent discret du lapacien, Δ . Cet opérateur n'a pas la même expression en fonction des champs auxquels il s'applique. $H_{x,h}$ étant positionné en $(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, on définit :

$$A_{x,h} = B_h^i C_h^i + C_h^j B_h^j + C_h^k B_h^k$$

On peut alors définir l'équivalent discret $\vec{A}_{h,H}$ du Laplacien vectoriel sur \vec{H}_h

$$\vec{A}_{h,H} \vec{H}_h = \begin{pmatrix} A_{x,h,H} H_{x,h} = (B_h^i C_h^i + C_h^j B_h^j + C_h^k B_h^k) H_{x,h} \\ A_{y,h,H} H_{y,h} = (C_h^i B_h^i + B_h^j C_h^j + C_h^k B_h^k) H_{y,h} \\ A_{z,h,H} H_{z,h} = (C_h^i B_h^i + C_h^j B_h^j + B_h^k C_h^k) H_{z,h} \end{pmatrix}$$

On a donc en ajoutant et retranchant les quantités adéquates :

$$\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h = \begin{pmatrix} (B_h^i C_h^i + C_h^j B_h^j + C_h^k B_h^k) H_{x,h} - C_h^j B_h^i H_{y,h} - C_h^k B_h^i H_{z,h} - B_h^i C_h^i H_{x,h} \\ (C_h^i B_h^i + B_h^j C_h^j + C_h^k B_h^k) H_{y,h} - C_h^k B_h^j H_{z,h} - C_h^i B_h^j H_{x,h} - B_h^j C_h^j H_{y,h} \\ (C_h^i B_h^i + C_h^j B_h^j + B_h^k C_h^k) H_{z,h} - C_h^i B_h^k H_{x,h} - C_h^j B_h^k H_{y,h} - B_h^k C_h^k H_{z,h} \end{pmatrix}$$

Les opérateurs C_h^α et B_h^β commutant dès que $\alpha \neq \beta$, on obtient

$$\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h = \begin{pmatrix} A_{x,h,H} H_{x,h} - B_h^i (C_h^j H_{y,h} + C_h^k H_{z,h} + C_h^i H_{x,h}) \\ A_{y,h,H} H_{y,h} - B_h^j (C_h^k H_{z,h} + C_h^i H_{x,h} + C_h^j H_{y,h}) \\ A_{z,h,H} H_{z,h} - B_h^k (C_h^i H_{x,h} + C_h^j H_{y,h} + C_h^k H_{z,h}) \end{pmatrix}$$

On note $\text{div}_{h,H}$ l'opérateur discret s'appliquant à \vec{H}_h ,

$$\text{div}_{h,H} \vec{H}_h = C_h^i H_{x,h} + C_h^j H_{y,h} + C_h^k H_{z,h}$$

$\text{div}_{h,H} \vec{H}_h$ est une approximation centrée de $\text{div} \vec{H}$ aux points $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$.

On note alors $\vec{\nabla}_{h,H}$ l'opérateur discret s'appliquant à des suites u_h positionnées aux points $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$ défini par

$$\vec{\nabla}_{h,H} u_h = \begin{pmatrix} B_h^i u_h \\ B_h^j u_h \\ B_h^k u_h \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla}_{h,H} u_h$ est une approximation centrée de $\vec{\nabla} u$, qui renvoie un vecteur positionné comme \vec{H}_h . Nous avons alors :

$$\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h = \vec{A}_{h,H} \vec{H}_h - \vec{\nabla}_{h,H} \text{div}_{h,H} \vec{H}_h$$

En se souvenant que \vec{C}_h approxime $\overrightarrow{\text{rot}}$ et \vec{B}_h approxime $-\overrightarrow{\text{rot}}$, nous venons de démontrer l'équivalent discret de $\vec{\Delta} = \vec{\nabla} \text{div} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}$ appliqué à des champs \vec{H}_h :

$$\vec{A}_{h,H} \vec{H}_h = \vec{\nabla}_{h,H} \text{div}_{h,H} \vec{H}_h + \vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h$$

Il est facile de démontrer qu'une relation semblable existe appliquée à des champs \vec{E}_h , les définitions des opérateurs discrets $\vec{A}_{h,E}$, $\vec{\nabla}_{h,E}$, $\text{div}_{h,E}$ devant être adaptées au positionnement des champs \vec{E}_h sur la grille (on échange les rôles des B_h^α et C_h^α)

Conservation de la divergence en discret

Nous allons établir (qu'en absence de sources), il y a comme dans le domaine continu conservation de la divergence des champs.

Théorème 8. *Les solutions du schéma de Yee (4.14) en l'absence de termes sources vérifient :*

$$\text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} = \text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}} = \text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{\frac{1}{2}} \quad n \geq 1$$

et

$$\text{div}_{h,E} \vec{E}_h^n = \text{div}_{h,E} \vec{E}_h^{n-1} = \text{div}_{h,E} \vec{E}_h^0 \quad n \geq 1$$

Démonstration. On applique l'opérateur $\text{div}_{h,H}$ à la première équation de (4.14) :

$$\frac{1}{c} \frac{\text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \text{div}_{h,H} \vec{C}_h \vec{E}_h = 0$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{div}_{h,H} \vec{C}_h \vec{E}_h &= C_h^i (C_h^j E_{z,h} - C_h^k E_{y,h}) \\ &\quad + C_h^j (C_h^k E_{x,h} - C_h^i E_{z,h}) \\ &\quad + C_h^k (C_h^i E_{y,h} - C_h^j E_{x,h}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car les opérateurs C_h^α et C_h^β commutent dès que $\alpha \neq \beta$. On en déduit immédiatement

$$\text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \text{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

La deuxième relation se montre de même en utilisant $\text{div}_{h,E} \vec{B}_h = 0$. Nous avons utilisé les équivalents discrets de $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} = 0$. □

Remarque 35. *Nous avons défini pour simplifier le schéma de Yee pour des matériaux homogènes, $\epsilon_r = \mu_r \equiv 1$. En réintroduisant les permittivité et perméabilité discrètes, le résultat devient :*

$$\text{div}_{h,H} (\mu_{r,h} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) = \text{div}_{h,H} (\mu_{r,h} \vec{H}_h^{\frac{1}{2}})$$

et

$$\operatorname{div}_{h,E}(\epsilon_{r,h}\vec{E}_h^n) = \operatorname{div}_{h,E}(\epsilon_{r,h}\vec{E}_h^0)$$

qui est l'équivalent discret de la propriété des solutions continues :

$$\operatorname{div}(\mu_r\vec{H})(x, t) = \operatorname{div}(\mu_r\vec{H})(x, 0) \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\operatorname{div}(\epsilon_r\vec{E})(x, t) = \operatorname{div}(\epsilon_r\vec{E})(x, 0) \quad \forall t \geq 0$$

En regroupant les résultats, nous pouvons énoncer le théorème d'estimation :

Théorème 9. *En l'absence de termes sources et si $\operatorname{div}_{h,H} \vec{H}_h^{\frac{1}{2}} = \operatorname{div}_{h,E} \vec{E}_h^0$, pour tout $n \geq 1$, les solutions du schéma de Yee en 3 dimensions vérifient :*

$$\|\vec{B}_h \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{12}{h_M^2} \|\vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2$$

et

$$\|\vec{C}_h \vec{E}_h^n\|^2 \leq \frac{12}{h_M^2} \|\vec{E}_h^n\|^2$$

où h_M désigne un pas moyen défini par :

$$h_M = \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

qui est bien égal à h si $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$.

Démonstration.

$$\|\vec{B}_h \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = (-\vec{C}_h \vec{B}_h \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) = (-\vec{A}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) + (\vec{\nabla}_{h,H} \operatorname{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}})$$

En utilisant la nullité de $\operatorname{div}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{B}_h \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &= (-\vec{A}_{h,H} \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \|C_h^i H_{x,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|B_h^j H_{x,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|B_h^k H_{x,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &+ \|B_h^i H_{y,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|C_h^j H_{y,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|B_h^k H_{y,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &+ \|B_h^i H_{z,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|B_h^j H_{z,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|C_h^k H_{z,H}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq 4\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right) \|\vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons établir de façon strictement similaire à la démonstration en dimension 1, le résultat de stabilité par méthode énergétique pour le schéma de Yee en 3 dimensions avec comme condition CFL

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

soit

$$\frac{c\Delta t}{h_M} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

qui est bien la condition nécessaire obtenue en utilisant le cône de propagation numérique sur grille régulière et l'on peut vérifier par essais numériques que c'est la condition CFL maximum. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier la convergence avec ordre 2 en temps et en espace en généralisant les résultats obtenus en dimension 1.

4.3.3 Analyse de stabilité par ondes planes, dispersion numérique

Nous allons effectuer par Fourier l'analyse de stabilité du schéma de Yee. Nous avons vu dans le cas de la dimension 1 que cela consistait à évaluer la dispersion numérique.

Nous allons donc chercher pour un vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ fixé quelles sont les solutions de type $e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x})}$

On écrit donc $\vec{E}_h^n = \vec{E}^0 e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_h)}$ et $\vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} = \vec{H}^0 e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^{n+\frac{1}{2}} - \vec{k} \cdot \vec{x}_h)}$ avec évidemment x_h positionné au bon point de la grille en fonction des composantes des champs.

Rappelons les propriétés de l'opérateur C_h^i quand il opère sur une onde harmonique :

$$(C_h^i(e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_{i, \alpha, \beta})})_i)_{i+\frac{1}{2}, \alpha, \beta} = 2i \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\Delta x} e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_{i+\frac{1}{2}, \alpha, \beta})}$$

On voit que C_h^i agit comme un opérateur multiplicatif de valeur $2i \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\Delta x}$. De même par exemple,

$$(B_h^k(e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^{n+\frac{1}{2}} - \vec{k} \cdot \vec{x}_{\alpha, \beta, k+\frac{1}{2}})})_k)_{\alpha, \beta, k} = 2i \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2})}{\Delta z} e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^{n+\frac{1}{2}} - \vec{k} \cdot \vec{x}_{\alpha, \beta, k})}$$

B_h^k agit comme un opérateur multiplicatif de valeur $2i \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2})}{\Delta z}$. La propriété s'étend sans difficulté aux autres indices. En utilisant l'expression de \vec{C}_h (\vec{B}_h) en fonction des C_h^α (B_h^α), on obtient le système vectoriel :

$$\begin{cases} -2i \frac{1}{c\Delta t} \vec{H}^0 \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} + 2i \vec{k}_h \wedge \vec{E}^0 = 0 \\ -2i \frac{1}{c\Delta t} \vec{E}^0 \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} - 2i \vec{k}_k \wedge \vec{H}^0 = 0 \end{cases}$$

où on a noté \vec{k}_h le vecteur :

$$\vec{k}_h = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\Delta x} \\ \frac{\sin(\frac{k_y \Delta y}{2})}{\Delta y} \\ \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2})}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\vec{H}^0 \cdot \vec{k}_h = \vec{E}^0 \cdot \vec{k}_h = 0$$

relation qu'on aurait obtenue en utilisant les équations sur la divergence des champs. Les seules ondes harmoniques électromagnétiques pouvant se propager ont des champs \vec{E} et \vec{H} orthogonales à la direction définie par \vec{k}_h .

On en déduit aussi que $\vec{E}^0 \cdot \vec{H}^0 = 0$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} |\vec{k}_h|^2 \vec{E}^0 = \frac{1}{c\Delta t} \vec{H}^0 \wedge \vec{k}_h \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} \\ \vec{H}^0 \wedge \vec{k}_h = \frac{1}{c\Delta t} \vec{E}^0 \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} \end{cases}$$

et donc, en éliminant $\vec{H}^0 \wedge \vec{k}_h$, on obtient :

$$|\vec{k}_h|^2 \vec{E}^0 = \left(\frac{1}{c\Delta t}\right)^2 \sin^2 \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} \vec{E}^0$$

Nous obtenons la relation de dispersion :

$$\sin^2 \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} = (c\Delta t)^2 |\vec{k}_h|^2$$

qui est bien l'extension en 3 dimensions de la relation établie en 1D (prendre $k_y = k_z = 0$) :

$$\sin^2 \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} = (c\Delta t)^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z^2} \right)$$

La condition de stabilité est d'assurer des solutions réelles à $\omega_{\Delta t, h}$ quelque soit \vec{k} . On obtient :

$$(c\Delta t)^2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \leq 1$$

soit encore :

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

qui est exactement la condition CFL trouvée par la méthode énergétique.

Si les pas sont les mêmes dans les 3 directions égaux à h , la relation de dispersion devient :

$$\sin^2 \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} = \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{k_x h}{2} + \sin^2 \frac{k_y h}{2} + \sin^2 \frac{k_z h}{2}\right)$$

On constate que non seulement le schéma est dispersif mais qu'il aussi anisotrope, la vitesse des ondes harmoniques dépend de la direction de l'onde.

Pour simplifier, nous illustrons cette notion d'anisotropie pour le cas particulier de la dimension 2. Nous laissons en exercice la généralisation à la dimension 3.

On introduit l'angle de la direction de l'onde par rapport à la grille, soit $\theta = \arctan(k_y/k_x)$, et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ le nombre d'onde, la dispersion s'exprime maintenant en fonction de α, K et θ :

$$q(\alpha, K, \theta) = \frac{2}{\alpha K} \arcsin\left(\alpha \left(\sin^2 \frac{K \cos \theta}{2} + \sin^2 \frac{K \sin \theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Un développement de Taylor donne :

$$q(\alpha, K, \theta) = 1 - (1 - \alpha^2 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta)) K^2/24 + O(K^4)$$

Donc on constate qu'on approche la vitesse à l'ordre 2 et de façon inférieure pour les fréquences qui nous intéressent. Le fait que q dépende de l'angle θ signifie que le schéma introduit une anisotropie numérique, pour une fréquence donnée, un α fixé, les ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans toutes les directions.

Pour $\theta = \pi/4$, on obtient l'expression suivante :

$$q(\alpha, K, \pi/4) = \frac{2}{\alpha K} \arcsin\left(\sqrt{2} \alpha \sin \frac{K}{2\sqrt{2}}\right)$$

Donc le cas le plus favorable est obtenu pour la valeur de α maximum égale à $\alpha_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$q\left(\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, K, \pi/4\right) = 1$$

Le schéma n'est exact que dans les directions diagonales pour la valeur maximum de la CFL. Pour α fixé, on remarque que le schéma est de moins en moins dispersif pour θ variant entre 0 et $\pi/4$. Le cas pire correspond à la propagation dans les directions du maillage. De même on observe que le phénomène de dispersion est accentué quand la CFL diminue. C'est pour cela que les logiciels de calcul travaillent à CFL maximum!!! Nous présentons ci-dessous différentes courbes de dispersion pour des valeurs angulaires fixées permettant de voir l'influence de la CFL ainsi que des courbes d'anisotropie représentant pour diverses CFL (paramétrées par $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha_{max}}$) l'influence des paramètres $N = 1/G$ nombre de points par longueur d'onde et θ direction de l'onde.

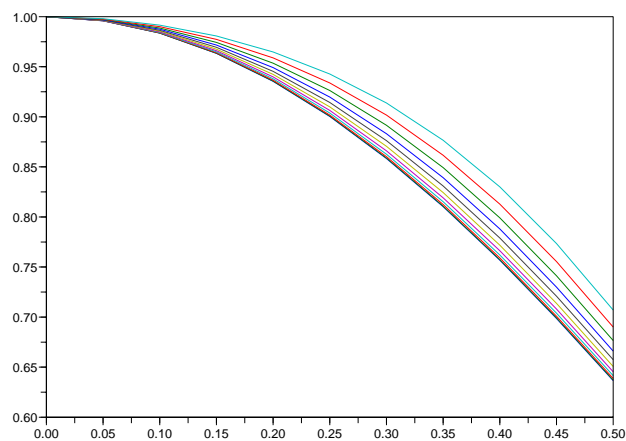


FIG. 4.13 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = 0$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

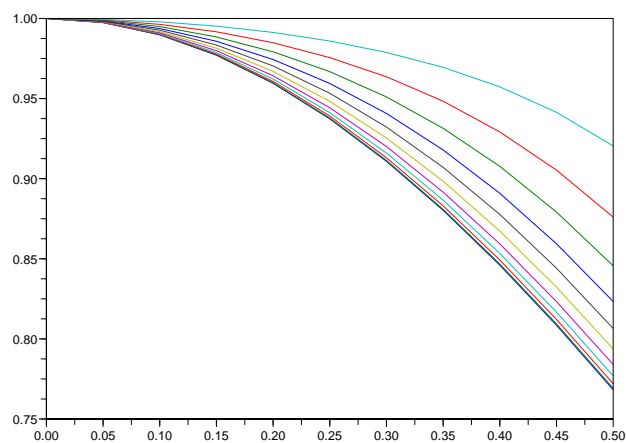


FIG. 4.14 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = \pi/6$, $\gamma = 0, 0.1 \dots 0.9, 1$

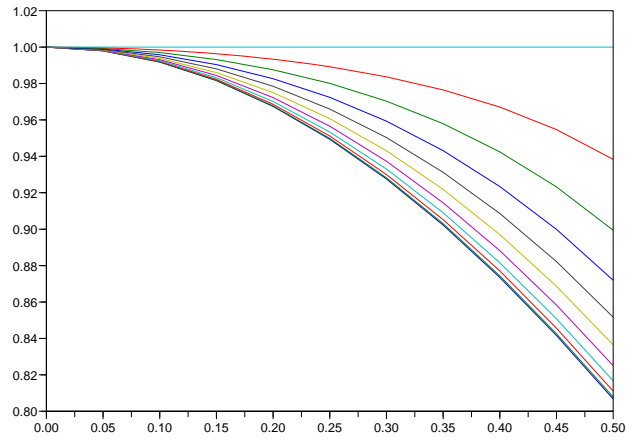


FIG. 4.15 – Courbes de dispersion 2D à $\theta = \pi/4$, $\gamma = 0, 0.1 \cdots 0.9, 1$

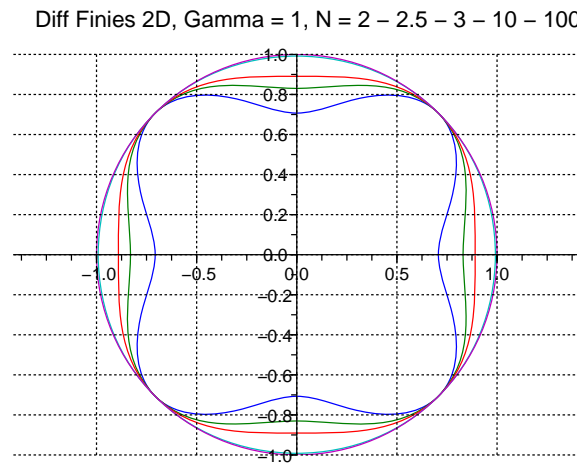


FIG. 4.16 – Courbes d'anisotropie à cfl max, $\gamma=1$

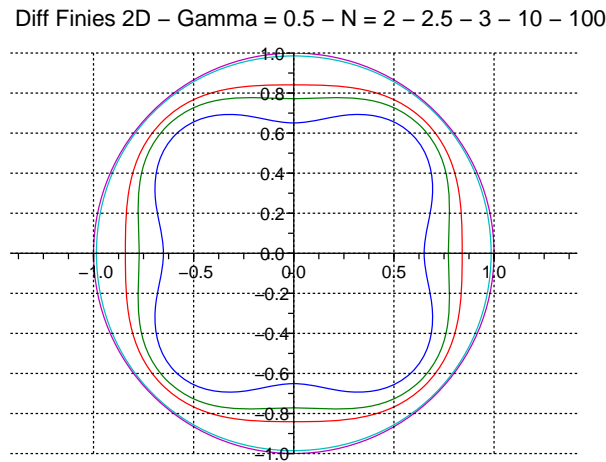


FIG. 4.17 – Courbes d'anisotropie à $cfl \max/2$, $\gamma=0.5$

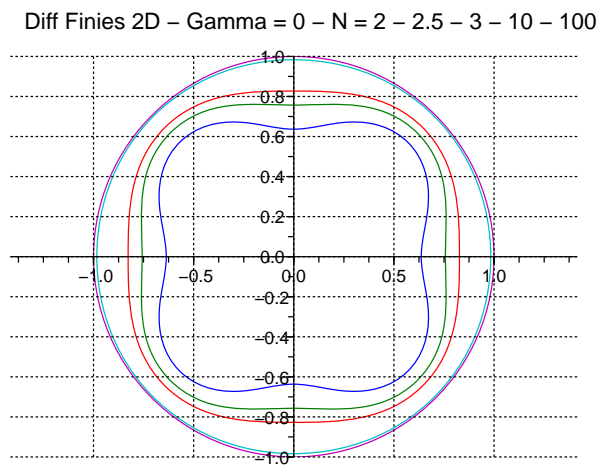


FIG. 4.18 – Courbes d'anisotropie du schéma semi-discrétisé, $\gamma=0$.

Chapitre 5

Représentation intégrale des ondes en dimension 3 - équations intégrales

5.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction à la méthode des équations intégrales, le chapitre suivant traitera de la méthode des éléments finis de frontière qui en est la version discrète. Le principe est le suivant : on veut résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire à coefficients constants dans un domaine intérieur ou extérieur, avec des conditions aux limites et des conditions à l'infini. On suppose connue la solution élémentaire vérifiant les conditions à l'infini de cette équation écrite dans tout l'espace. On se ramène d'abord à l'équation homogène en résolvant «explicitement» l'équation avec second membre (ou terme source) dans tout l'espace par convolution du terme source avec la solution élémentaire. On utilise ensuite un théorème de représentation intégrale qui donne une expression explicite de la solution du problème homogène en tout point de l'espace. Cette expression intégrale fait intervenir la solution élémentaire et des fonctions définies sur la frontière qui sont les sauts de certaines traces de la solution sur la frontière, comme les sauts de pression et de vitesse normale dans les problèmes d'acoustique. Ces traces sont des inconnues du problème. On démontre également que tout champ représenté ainsi (avec des fonctions quelconque définies sur la frontière) vérifie l'EDP dans le volume et les conditions à l'infini. Pour qu'un tel champ soit solution du problème aux limites, il ne reste plus qu'à imposer les conditions aux limites sur le bord. Ceci conduit à l'équation intégrale. On a ramené un problème aux limites posé dans un volume (éventuellement infini) à une équation intégrale posé sur le bord de ce volume.

Le plan du chapitre est le suivant : nous commençons par quelques rappels mathématiques sur les distributions de simple et double couche, la convolution et la formule des sauts déclinée en plusieurs versions pour les opérateurs différentiels usuels.

Nous étudions ensuite le rayonnement d'une source dans l'espace libre. Le champ solution est obtenu en convolant le terme source, *i.e.* le second membre de l'équation, avec la solution élémentaire. Nous développons plus particulièrement le cas particulier des sources surfaciques. Ceci nous amène à introduire et étudier les principales propriétés des potentiels de simple et

double couche.

Dans le §5.4, nous établissons le théorème de représentation intégrale des solutions régulières de l'équation de Helmholtz en dehors d'une surface fermée et vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini. Les opérateurs donnant les valeurs de la solution sur le bord vérifient des propriétés intéressantes, en particulier, celles de projecteurs (de Calderón).

Nous montrons ensuite comment ramener la résolution des problèmes de Dirichlet et Neumann intérieurs et extérieurs pour l'équation de Helmholtz à des équations intégrales avec inconnues sur la frontière. Nous étudions ensuite les relations entre les problèmes d'EDP et les différentes équations intégrales obtenues.

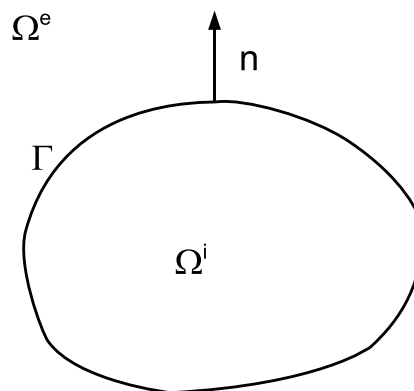
Dans le §5.6, nous étudions quelques applications de la formule de représentation, en dehors des équations intégrales. En particulier, nous faisons le lien avec des formules que le lecteur aurait vu par ailleurs : propriété de la moyenne et la formule de Poisson pour les fonctions harmoniques, la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes.

Le §5.7 donne quelques généralisations de la notion de fonction de Green et de la formule de représentation intégrale.

Dans le dernier paragraphe, nous étudions les opérateurs intégraux rencontrés précédemment à des densités dans des espaces de Sobolev. Nous établissons les propriétés de continuité et des estimations de coercivité dans le cas de fréquences complexes. Les démonstrations utilisent les propriétés de problèmes d'EDP avec conditions de transmission à travers la frontière.

5.1.1 Conventions et notations

Dans toute la suite, nous supposons que Γ est une surface bornée régulière et découpe l'espace en deux ouverts : un ouvert borné et un ouvert non-borné. L'ouvert non-borné sera appelé l'ouvert extérieur et noté Ω^e , l'ouvert borné l'ouvert intérieur et sera noté Ω^i . La normale unitaire \vec{n} sur Γ est orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Pour une fonction u régulière jusqu'au



bord dans Ω^i et Ω^e , nous notons u^i sa restriction à Ω^i et u^e sa restriction à Ω^e :

$$u = \begin{cases} u^i & \text{dans } \Omega^i \\ u^e & \text{dans } \Omega^e \end{cases}$$

Nous définissons le saut de la trace de u à travers Γ comme

$$[u] = u^i - u^e$$

Dans tout le chapitre, quand nous travaillons en domaine fréquentiel, nous adoptons la convention de dépendance en temps en $e^{-i\omega t}$, même si ceci n'est pas systématiquement rappelé.

5.2 Distributions de simple et double couche

Dans ce paragraphe, nous rappelons sans démonstration quelques résultats pratiques de la théorie des distributions, fondamentaux pour établir les résultats de ce chapitre. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au cours d'Analyse MAT431 «Distribution, Analyse de Fourier».

5.2.1 Définitions

Soit σ une fonction régulière définie sur Γ . Rappelons qu'on appelle **distribution de simple couche** de densité σ sur Γ la mesure de Radon $s(\sigma) = \sigma(x) d\Gamma(x)$:

$$\langle s(\sigma), \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \sigma(x) \varphi(x) d\Gamma(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

C'est une distribution d'ordre 0 à support dans Γ . *Par exemple, en électrostatique, une densité volumique de charge ρ dont l'épaisseur (du support) est très petite est souvent approchée par une densité surfacique de charge σ en intégrant ρ sur l'épaisseur. Cette densité de charge est modélisée par l'objet mathématique $s(\sigma)$.*

On définit également la **distribution de double couche** de densité μ notée $d(\mu)$:

$$\langle d(\mu), \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \mu(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) d\Gamma(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

On a

$$\int_{\Gamma} \mu(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) d\Gamma(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{\delta} \varphi(x + \delta \vec{n}(x)) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{\delta} \varphi(x) d\Gamma(x) \right)$$

En développant ces calculs, on démontre que le potentiel de double couche est la limite de la somme de deux potentiels de simple couche de densités opposées sur la surface Γ et une surface Γ_{δ} obtenue en déplaçant les points de Γ d'une distance δ suivant la normale. *D'où l'origine*

du terme «double» couche. C'est la généralisation au cas d'une surface de la notion de dipôle ponctuel. Plus précisément, on remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}\langle d(\mu), \varphi \rangle &= \int_{\Gamma} \mu(x) \vec{n}(x) \cdot \nabla \varphi(x) d\Gamma(x) \\ &= \langle s(\mu \vec{n}), \nabla \varphi \rangle \\ &= -\langle \operatorname{div}(s(\mu \vec{n})), \varphi \rangle\end{aligned}$$

d'où la relation

$$d(\mu) = -\operatorname{div}(s(\mu \vec{n}))$$

5.2.2 Produit de convolution

Rappelons que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on peut définir $f * \varphi$ par

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(x - y) dy$$

$f * \varphi$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \varphi)(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{f} * \psi)(x) \varphi(x) dx$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$.

Cette définition se généralise à $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$: pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

qui appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par exemple

$$(5.1) \quad (s(\sigma) * \varphi)(x) = \int_{\Gamma} \varphi(x - y) \sigma(y) d\Gamma(y)$$

Comme $s(\sigma)$ est d'ordre 0, on peut facilement montrer que la formule est valable pour φ continue.

On généralise ensuite ce produit à $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$, i.e. convolution d'une distribution quelconque et d'une autre à support compact. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} * \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

où $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$. On a

$$\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$$

Pour $a \in \mathbb{R}^n$, notons τ_a l'opérateur de translation de vecteur a , i.e. pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit $\tau_a T$ comme suit

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

On a

$$\tau_a(u * \varphi) = \tau_a u * \varphi = u * \tau_a \varphi$$

Si δ_a désigne la masse de Dirac en a , on a

$$\delta_a * u = \tau_a u$$

En particulier, δ est l'élément neutre : $T * \delta = T$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Si U est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même qui commute avec les translations, i.e. $\tau_a U = U \tau_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$U\varphi = u * \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Les équations aux dérivées partielles linéaires sont des cas particuliers d'équations de convolution. En effet, la dérivée s'écrit comme une convolution

$$\partial^\alpha T = \partial^\alpha \delta * T$$

et $\partial^\alpha \delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Le produit de convolution est commutatif. Il est associatif sous condition : $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$ si au moins deux des trois distributions sont à support compact. Exemple :

$$(5.2) \quad \partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha \delta * (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$$

si S ou T est à support compact.

Le produit de convolution est continu : si $T_n \rightarrow T$ et $S_n \rightarrow S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et si S_n et S sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, avec des supports inclus dans le même compact, alors $T_n * S_n \rightarrow T * S$.

Enfin, signalons que si E est \mathcal{C}^∞ en dehors de l'origine et si q est une distribution à support compact, alors $E * q$ est \mathcal{C}^∞ en dehors du support de q .

5.2.3 Formule des sauts

Soit u une fonction régulière par morceaux dans \mathbb{R}^3 , qui subit un saut à travers une surface Γ régulière orientée. On note Ω^i , resp. Ω^e , l'ouvert situé du côté intérieur, resp. extérieur, de la normale.

On note entre accolade une distribution définie par une fonction régulière en dehors de Γ . Ainsi, on peut noter

$$u = \{u\} = \begin{cases} u^e & \text{dans } \Omega^e \\ u^i & \text{dans } \Omega^i \end{cases}$$

et

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = \begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega^e \\ \frac{\partial u^i}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega^i \end{cases}$$

La formule des sauts donne la valeur d'une dérivée partielle de u au sens des distributions en fonction des dérivées partielles de u^e dans Ω^e et u^i dans Ω^i et du saut de u :

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \{u\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} - s([u] n_i)$$

Cette formule se décline sous plusieurs formes pour des champs scalaires et vectoriels. Soit de plus $\vec{A} = \{\vec{A}\}$ un champ de vecteurs régulier de part et d'autre Γ , nous avons les relations suivantes :

$$(5.4) \quad \nabla \{u\} = \{\nabla u\} - s([u] \vec{n})$$

$$(5.5) \quad \operatorname{div} \{\vec{A}\} = \{\operatorname{div} \vec{A}\} - s([\vec{A} \cdot \vec{n}])$$

$$(5.6) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \{\vec{A}\} = \{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}\} + s([\vec{A} \wedge \vec{n}])$$

$$(5.7) \quad \Delta \{u\} = \{\Delta u\} - s\left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\right) + d([u])$$

En raisonnant, composante par composante, on voit que cette dernière formule est également valable pour un champ vectoriel. Mais en utilisant la décomposition suivante du Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \nabla \operatorname{div} \vec{A} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$$

on trouve :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \Delta \{\vec{A}\} &= \{\Delta \vec{A}\} - s([\operatorname{div} \vec{A}] \vec{n}) + s([\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \wedge \vec{n}]) \\ &\quad - \nabla s([\vec{A} \cdot \vec{n}]) + \overrightarrow{\operatorname{rot}} s([\vec{A} \wedge \vec{n}]) \end{aligned}$$

5.3 Rayonnement d'une source dans l'espace libre

5.3.1 Rayonnement d'une source quelconque

Nous avons rappelé au paragraphe 3.2 la notion de solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles et son utilité pour calculer une solution de l'équation avec second membre dans l'espace libre, *i.e.* dans tout l'espace, sans conditions aux limites à part les conditions de comportements à l'infini. Nous avons calculé la solution élémentaire E de l'équation de Helmholtz vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld :

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Plus précisément, E vérifie :

$$-(\Delta + k^2)E = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) = 0$$

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact, la solution de

$$-(\Delta + k^2)p = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

qui vérifie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0$$

est donnée par

$$p = E * T$$

Comme E est de classe \mathcal{C}^∞ dans le complémentaire de l'origine, d'après ce qui a été rappelé au §5.2.2, p est \mathcal{C}^∞ en dehors du support de T , la condition de radiation s'entend ainsi au sens classique.

Dans les paragraphes suivants, nous donnons quelques exemples de solutions avec des sources à support ponctuel, surfacique ou volumique. Nous insistons sur le cas des sources surfaciques qui sont à la base de la formule de représentation intégrale dans un ouvert intérieur ou extérieur.

5.3.2 Sources ponctuelles

Considérons l'équation de Helmholtz avec un terme source ponctuelle monopolaire placée en un point y

$$-(\Delta_x + k^2)p(x, y) = T(y)\delta_y(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

p vérifiant la condition de radiation. p est donnée par

$$p(x, y) = T(y)(E * \delta_y)(x) = T(y)E(x - y)$$

En notant

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

la fonction de Green du problème, p s'écrit :

$$p(x, y) = T(y)G(x, y)$$

Remarque 1. Nous avons noté explicitement (et artificiellement) une dépendance de la constante T en fonction de y pour faire le rapprochement entre la formule obtenue avec ce qui viendra dans la suite.

Au paragraphe 3.2, nous avons également calculé, dans le cas des équations de Maxwell, le champ électromagnétique rayonné par des sources élémentaires du système du premier ordre : les dipôles électrique et magnétique. Transposons cette analyse au cas de l'équation de Helmholtz. Remarquons que l'équation du second ordre

$$-(\Delta + k^2)p = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

avec p satisfaisant la condition de radiation à l'infini, est équivalente au système du premier ordre

$$\begin{cases} -ik p + \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{ik} T \\ -ik \vec{v} + \nabla p = \vec{0} \end{cases}$$

p et \vec{v} satisfaisant la condition de radiation à l'infini. C'est le système de l'acoustique linéaire où p est la pression et \vec{v} la vitesse (à un facteur $\rho_0 c$ près).

Nous pouvons alors considérer des sources ponctuelles élémentaires localisées en un point y pour le système :

$$(5.9) \quad \begin{cases} -ik p + \operatorname{div}_x \vec{v} = Q(y)\delta(x-y) \\ -ik \vec{v} + \nabla_x p = \vec{F}(y)\delta(x-y) \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

où $Q(y)$ et $\vec{F}(y)$ s'interprètent (à une constante $\rho_0 c$ près) comme un débit et une force. *Comme plus haut, $Q(y)$ et $\vec{F}(y)$ sont des constantes.* p est alors solution de

$$-(\Delta_x + k^2)p = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

avec T source ponctuelle (plus générale qu'une masse de Dirac) :

$$(5.10) \quad T = -ikQ(y)\delta(x-y) - \operatorname{div}_x \left(\vec{F}(y)\delta(x-y) \right)$$

De même, \vec{v} vérifie

$$-(\nabla_x \operatorname{div}_x + k^2) \vec{v} = -\nabla_x (Q(y)\delta(x-y)) - ik\vec{F}(y)\delta(x-y)$$

Pour se ramener à l'équation de Helmholtz vectorielle, utilisons la relation (A.8) :

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}$$

En appliquant le rotationnel à la deuxième équation du système (5.9), nous trouvons

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{1}{ik} \operatorname{rot}_x \left(\vec{F}(y)\delta(x-y) \right)$$

(car $\operatorname{rot} \nabla p = \vec{0}$). Nous en déduisons

$$-(\Delta + k^2)\vec{v} = \vec{S}$$

avec

$$(5.11) \quad \vec{S} = -\nabla_x (Q(y)\delta(x-y)) + \frac{1}{ik} \left(-\vec{\text{rot}}_x \vec{\text{rot}}_x + k^2 \right) \left(\vec{F}(y)\delta(x-y) \right)$$

En convolant la solution élémentaire E avec les seconds membres (5.10) et (5.11), on trouve :

$$(5.12) \quad \begin{cases} p(x, y) &= -ikG(x, y)Q(y) - \text{div } G(x, y)\vec{F}(y) \\ \vec{v}(x, y) &= -\nabla_x G(x, y)Q(y) + \frac{1}{ik} \left(-\vec{\text{rot}}_x \vec{\text{rot}}_x + k^2 \right) G(x, y)\vec{F}(y) \end{cases}$$

En remplaçant la vitesse \vec{v} par :

$$\vec{V} = \vec{v} + \frac{1}{ik} \vec{F}(y)\delta(x-y)$$

i.e.

$$\vec{V} = \frac{1}{ik} \nabla p$$

et en posant :

$$\vec{P} = -\frac{1}{ik} \vec{F}$$

nous obtenons le nouveau système :

$$\begin{cases} -ik p + \text{div } \vec{V} &= q \\ -ik \vec{V} + \nabla p &= \vec{0} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

où maintenant, \vec{V} est à rotationnel nul dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et au lieu d'une source de débit et une source de force, nous avons uniquement une source de débit somme d'un monopôle et d'un dipôle :

$$q = Q(y)\delta(x-y) - \text{div}_x \left(\vec{P}(y)\delta(x-y) \right)$$

En effet, si

$$\vec{P} = P\vec{v}$$

le deuxième terme est la limite au sens des distributions de deux monopôles positionnés en deux points très proche $y \pm \frac{s}{2}\vec{v}$, d'amplitudes opposées $\mp P/s$:

$$\text{div}_x \left(\vec{P}(y)\delta(x-y) \right) = \vec{P}(y) \cdot \nabla_x \delta(x-y) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{P}{s} \left(\delta(x-y + \frac{s}{2}\vec{v}) - \delta(x-y - \frac{s}{2}\vec{v}) \right)$$

Le lecteur démontrera ce résultat proprement en testant la formule avec des fonctions régulières.

\vec{V} vérifie directement :

$$-(\Delta_x + k^2)\vec{V} = -\nabla_x q$$

d'où la nouvelle expression pour la vitesse :

$$(5.13) \quad \vec{V}(x, y) = -\nabla_x G(x, y)Q(y) + \nabla_x \text{div}_x \left(G(x, y)\vec{P}(y) \right)$$

Remarque 2. En développant ces expressions en coordonnées sphériques, le lecteur reconnaîtra dans la formule de la pression le début du développement multipolaire (3.9), avec uniquement les termes en $l = 0$ (monopôle) et $l = 1$ (dipôle).

5.3.3 Sources volumiques

Considérons maintenant des sources étendues à support compact. Soit τ une fonction régulière à support compact, la solution de

$$-(\Delta + k^2)p = \tau \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

est donnée par

$$(5.14) \quad p(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \tau(y) dy$$

En travaillant avec le système du premier ordre de l'acoustique, équivalent à l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} -ik p + \operatorname{div} \vec{v} = q \\ -ik \vec{v} + \nabla p = \vec{f} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

avec q et \vec{f} densités volumiques de débit et de force, fonctions régulières à support compact dans \mathbb{R}^3 , on obtient les nouvelles formules de représentation :

$$(5.15) \quad p(x) = -ik \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) q(y) dy - \operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \vec{f}(y) dy$$

et

$$(5.16) \quad \vec{v}(x) = -\nabla \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) q(y) dy - \left(\frac{1}{ik} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} + ik \right) \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \vec{f}(y) dy$$

Développons le terme en «rot rot». On a

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}_x G(x, y) \vec{f}(y) = \nabla_x G(x, y) \wedge \vec{f}(y)$$

mais

$$\nabla_x G(x, y) = -\nabla_y G(x, y)$$

En utilisant la formule d'intégration par partie (A.6), on trouve :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \vec{f}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{f}(y) dy$$

Le lecteur fera ce calcul proprement, en régularisant G au voisinage de $y = x$ et passant à la limite grâce au théorème de Lebesgue, la singularité en $1/r$ étant intégrable.

D'où la nouvelle de représentation de la vitesse :

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \vec{v}(x) = & -\nabla \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) q(y) dy \\ & - \frac{1}{ik} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{f}(y) dy - ik \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \vec{f}(y) dy \end{aligned}$$

5.3.4 Sources surfaciques - Potentiels de simple et double couche

Potentiel de simple couche

Considérons une surface fermée régulière Γ découpant l'espace en un ouvert borné Ω^i et un ouvert non borné Ω^e , tel que décrit au §5.1.1.

Nous nous intéressons à des sources localisées sur Γ . Soit τ une fonction régulière définie sur Γ , on note $s(\tau)$ la distribution de simple couche sur Γ de densité τ . La solution p de

$$-(\Delta + k^2)p = s(\tau) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

vérifiant la condition de radiation est donnée par :

$$p = E * s(\tau)$$

p est dit *potentiel de simple couche*, et l'opérateur \mathcal{S} défini par

$$\mathcal{S}\tau = E * s(\tau)$$

est appelé *opérateur intégral de simple couche*.

Théorème 10 (Le potentiel de simple couche). *Pour toute fonction τ régulière définie sur Γ , le potentiel de simple couche $p = \mathcal{S}\tau$ a les propriétés suivantes :*

1. *p est une fonction continue dans \mathbb{R}^3 , de classe C^∞ en dehors de Γ ,*

$$(5.18) \quad \mathcal{S}\tau(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)\tau(y)d\Gamma(y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3$$

On note S l'opérateur \mathcal{S} composé avec l'opérateur de restriction sur Γ . C'est l'opérateur qui à une fonction τ définie sur Γ associe la fonction $S\tau$ définie sur Γ par :

$$(5.19) \quad S\tau(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)\tau(y)d\Gamma(y) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma$$

2. *p est solution de l'équation de Helmholtz homogène en dehors de Γ :*

$$-(\Delta + k^2)p = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

3. *p vérifie la condition de radiation de Sommerfeld. Plus précisément, on a la formule de champ lointain suivante :*

$$(5.20) \quad \mathcal{S}\tau(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A\tau(\nu) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où $x = r\nu$, $r = |x|$, et

$$(5.21) \quad A\tau(\nu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\nu \cdot y} \tau(y) d\Gamma(y)$$

est dite amplitude de diffusion (ou de scattering)

4. Les dérivées normales intérieure et extérieure sur Γ sont données par

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p^i}{\partial n} &= +\frac{\tau}{2} + D^* \tau \\ \frac{\partial p^e}{\partial n} &= -\frac{\tau}{2} + D^* \tau \end{aligned}$$

où

$$(5.23) \quad D^* \tau(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) \tau(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \Gamma$$

le noyau $\partial G / \partial n_x$ ayant une singularité en $1/|x - y|$ et est donc dans $L^1(\Gamma)$. Ainsi, la dérivée normale de p subit un saut égal à τ sur Γ :

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^i - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^e = \tau$$

Démonstration. 1. Comme vu plus haut au §5.3.1, $p = E * T$ est \mathcal{C}^∞ dans le complémentaire du support de $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$. Ici $\text{supp } s(\tau) = \Gamma$. Pour démontrer la continuité à travers Γ , régularisons E près de l'origine, par exemple en posant pour $\delta > 0$ «petit» :

$$E_\delta(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } |x| \geq \delta \\ \frac{e^{ik\delta}}{4\pi\delta} & \text{si } |x| \leq \delta \end{cases}$$

E_δ est continue. On a d'après §5.2.2

$$p_\delta(x) = E_\delta * s(\tau)(x) = \int_{\Gamma} E_\delta(x - y) \tau(y) d\Gamma(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Soit $x \in \Gamma$. En remarquant que dans le plan tangent en x à Γ , l'élément d'aire est $rdrd\theta$ (coordonnées polaires centrées en x), on voit que la singularité en $1/|x - y|$ est intégrable sur Γ , i.e. $E \in L^1(\Gamma)$. Donc l'intégrale

$$\int_{\Gamma} G(x, y) \tau(y) d\Gamma(y)$$

est convergente et le théorème de Lebesgue permet de déduire que

$$\int_{\Gamma} E_\delta(x - y) \tau(y) d\Gamma(y) \longrightarrow \int_{\Gamma} G(x, y) \tau(y) d\Gamma(y) \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0$$

D'autre part, d'après §5.2.2 (continuité de la convolution) :

$$E_\delta * s(\tau) \longrightarrow E * s(\tau) \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0$$

d'où

$$(5.24) \quad p(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \tau(y) d\Gamma(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

De même, en remarquant que $G(z, \cdot)$ est uniformément dans $L^1(\Gamma)$ pour z dans le voisinage de $x \in \Gamma$, le théorème de Lebesgue permet de montrer que

$$p(x) = \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^i} p(z) = \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^e} p(y)$$

pour tout $x \in \Gamma$.

2. p vérifie l'équation de Helmholtz homogène en dehors de Γ , puisque

$$-(\Delta + k^2)(E * s(\tau)) = -(\Delta E + k^2 E) * s(\tau) = \delta * s(\tau) = s(\tau)$$

et le support de $s(\tau)$ est Γ .

3. Calculons le comportement de potentiel de simple couche p quand $r = |x|$ tend vers l'infini, pour une direction d'observation $\vec{\nu}$ donnée

$$\vec{\nu} = \frac{x}{|x|} \quad \text{dans la sphère unité.}$$

Pour $y \in \Gamma$, donc borné, on a uniformément en y :

$$\begin{aligned} |x - y| &= (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2)^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2\nu \cdot \frac{y}{r} + \frac{|y|^2}{r^2} \right)^{1/2} \\ &= r - \nu \cdot y + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} + \nu \cdot \frac{y}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

D'où

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\nu \cdot y} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

et la formule (5.20).

4. Démontrons d'abord que pour $x \in \Gamma$, le noyau

$$\frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) = \vec{n}(x) \cdot \nabla_x G(x, y)$$

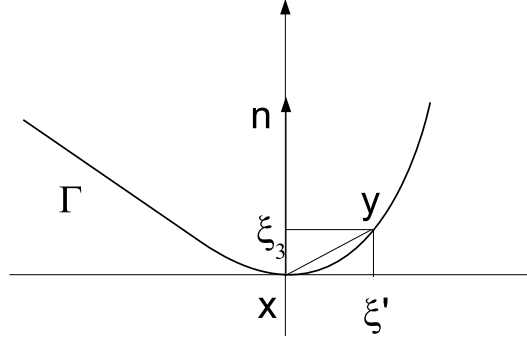
est dans $L^1(\Gamma)$. Une analyse sommaire indique que

$$\frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) ((x-y) \cdot \vec{n}(x))$$

a une singularité en $1/|x - y|^2$ qui est non intégrable sur Γ . En fait, nous allons démontrer que cette singularité est en $1/|x - y|$. En effet, une surface régulière peut être décrite au voisinage de x comme le graphe d'une fonction régulière φ à variable dans le plan tangent en x :

$$\xi_3 = \varphi(\xi') \quad \text{avec}$$

$\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in T\Gamma_x$ (plan tangent à Γ au point x), l'axe des ξ_3 étant suivant \vec{n} . On a



$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \varphi(0) = 0$$

d'où

$$(y - x) \cdot \vec{n}(x) = \xi_3 = \varphi(\xi') = O(|\xi'|^2) \quad \text{pour } \xi' = o(1)$$

D'autre part

$$|x - y|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2 = O(|\xi'|^2)$$

d'où

$$(x - y) \cdot \vec{n}(x) = O(|x - y|^2)$$

Pour $x \in \Gamma$, la singularité du noyau $\partial G / \partial n_x$ est donc en $1/|x - y|$. On en conclut qu'il est également dans $L^1(\Gamma)$. Il en est de même pour $\partial G / \partial n_y$ (démonstration analogue).

Calculons la dérivée normale du potentiel de simple couche intérieure, comme la limite :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^i(x) = \frac{\partial p}{\partial n}(x + 0^- \vec{n}(x)) = \lim_{s \rightarrow 0, s < 0} \vec{n}(x) \cdot \nabla \mathcal{S}\tau(x + s\vec{n}(x))$$

Pour la dérivée normale extérieure, nous prendrons la limite quand s tend vers 0 par valeurs positives.

Soit donc $s \neq 0$ de signe fixé et $\varepsilon > 0$ deux distances suffisamment petites devant les dimensions de Γ . Notons $z = x + s\vec{n}(x)$, z est dans Ω^i si $s < 0$ à dans Ω^e si $s > 0$ (pour s suffisamment petit). Notons Γ_ε l'intersection de Γ avec la boule $B(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε . Découpons l'intégrale en deux :

$$\vec{n}(x) \cdot \nabla \mathcal{S}\tau(z) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) \tau(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) \tau(y) d\Gamma(y)$$

Pour chacune des deux intégrales, nous allons faire tendre s vers 0 (à signe fixé) et à $\varepsilon > 0$ fixé suffisamment petit, puis nous ferons tendre ε vers 0^+ .

La deuxième intégrale ne pose pas de problème. En effet, à ε fixé, le noyau est régulier au voisinage de x et

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^i \cup \Omega^e} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) \tau(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) \tau(y) d\Gamma(y)$$

D'autre part, nous avons démontré plus haut que le noyau

$$\frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y)$$

est $L^1(\Gamma)$ pour $x \in \Gamma$, on a donc

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^i \cup \Omega^e} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) \tau(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) \tau(y) d\Gamma(y) + o(1) = D^* \tau(x) + o(1)$$

pour ε petit.

Traisons la première intégrale. Pour ε petit, la fonction τ étant régulière, on a

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) \tau(y) d\Gamma_\varepsilon(y) = (\tau(x) + O(\varepsilon)) \int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) d\Gamma_\varepsilon(y)$$

On a

$$\vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) = -\frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{4\pi|z - y|^3} + O\left(\frac{1}{|x - y|}\right)$$

L'intégrale sur Γ_ε du terme en $1/|x - y|$ étant en $O(\varepsilon)$, nous sommes ramenés au calcul de

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) d\Gamma_\varepsilon(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{4\pi|z - y|^3} d\Gamma_\varepsilon(y) + O(\varepsilon)$$

Utilisons la paramétrisation introduite plus haut pour estimer cette dernière intégrale. Dans la base locale (ξ', ξ_3) , $(\xi'$ dans le plan tangent $T_x \Gamma$ et ξ_3 suivant $\vec{n}(x)$). on a

$$z = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} \xi' \\ \varphi(\xi') \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{|z - y|^3} = \frac{s - \varphi(\xi')}{\left(|\xi'|^2 + (s - \varphi(\xi'))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

L'élément d'aire est donné par :

$$d\Gamma_\varepsilon = \sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} \varphi(\xi')|^2} d\xi' = (1 + O(\varepsilon^2)) d\xi'$$

Comme $\xi' = O(\varepsilon)$ et $\varphi(\xi') = O(|\xi'|^2) = O(\varepsilon^2)$, si l'on prend $s = O(\varepsilon^2)$, on peut se ramener à calculer l'intégrale dans le plan tangent :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{|z - y|^3} d\Gamma_\varepsilon(y) = (1 + O(\varepsilon^2)) \int_{Q_\varepsilon} s (|\xi'|^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi'$$

où $Q_\varepsilon \in T\Gamma_x$ est l'ouvert de paramétrisation de Γ_ε , qu'on pourrait choisir pour simplifier comme étant le disque de centre l'origine (x) et de rayon ε (celui-ci définissant Γ_ε). L'utilisation des coordonnées polaires facilite les calculs :

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} s (|\xi'|^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi' &= 2\pi s \int_0^\varepsilon \rho (\rho^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}} d\rho \\ &= -2\pi s \int_0^\varepsilon \frac{d}{d\rho} (\rho^2 + s^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho \\ &= 2\pi \left(\operatorname{sgn}(s) - s(\varepsilon^2 + s^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

On conclut que pour $s = O(\varepsilon^2)$ on a :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{n}(x) \cdot \nabla_z G(z, y) d\Gamma_\varepsilon(y) = -\frac{\operatorname{sgn}(s)}{2} + O(\varepsilon)$$

c.à.d. $\mp 1/2$ (à ε près) suivant que s tend 0 par valeurs positives ou négatives, c.à.d. si z tend x en venant de Ω^e ou de Ω^i . D'où la formule (5.22). □

Remarque 3. Comme nous le verrons plus loin, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(y - z) \cdot \vec{n}(y)}{|y - z|^3} d\Gamma_\varepsilon(y)$$

qui est équivalente à l'intégrale que nous cherchions à calculer, est l'angle solide sous lequel on voit Γ_ε depuis z . En prenant ε petit, Γ_ε ressemble à un disque plat, et en rapprochant z de x à une distance trop petite devant ε , Γ_ε apparaît comme un plan infini. L'angle solide est $\pm 2\pi$ suivant la position de z par rapport à la normale.

Potentiel de double couche

Considérons maintenant le système du premier ordre avec q et \vec{f} des densités surfaciques de débit et de force. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, considérons le cas particulier d'une densité de force normale à Γ :

$$\vec{f} = \phi \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur normale unitaire sur Γ . Le système s'écrit

$$\begin{cases} -ik p + \operatorname{div} \vec{v} = s(q) \\ -ik \vec{v} + \nabla p = s(\phi \vec{n}) \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

où $s(q)$ et $s(\phi\vec{n})$ sont les distributions de simple couche de densités q et $\phi\vec{n}$. Les mêmes calculs que précédemment conduisent à

$$-(\Delta + k^2)p = -ik s(q) - \operatorname{div} s(\phi\vec{n})$$

où l'on reconnaît dans le terme source, la somme d'une distribution de simple couche et d'une distribution de double couche

$$d(\phi) = -\operatorname{div} s(\phi\vec{n})$$

\vec{v} vérifie

$$-(\Delta + k^2)\vec{v} = -\nabla s(q) - \left(\frac{1}{ik} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} + ik \right) s(\phi\vec{n})$$

Nous en concluons les expressions suivantes

$$(5.25) \quad p = -ik \mathcal{S}q - \operatorname{div} \mathcal{S}(\phi\vec{n})$$

et

$$(5.26) \quad \vec{v} = -\nabla \mathcal{S}q - \left(\frac{1}{ik} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} + ik \right) \mathcal{S}(\phi\vec{n})$$

Nous avons déjà étudié dans le paragraphe précédent les propriétés du potentiel de simple couche, *i.e.* le cas $\phi = 0$. En particulier, nous avons démontré que la composante normale de la vitesse est discontinue sur Γ :

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \vec{v}^i \cdot \vec{n} &= -\frac{q}{2} - D^*q \\ \vec{v}^e \cdot \vec{n} &= +\frac{q}{2} - D^*q \end{aligned}$$

d'où le saut

$$[\vec{v} \cdot \vec{n}] = -q$$

Dans la suite, nous supposons $q = 0$ et nous précisons les expressions de p et \vec{v} , en particulier sur Γ . Pour cela, introduisons l'opérateur \mathcal{D} défini par

$$(5.28) \quad \mathcal{D}\phi = E * d(\phi) = -\operatorname{div} \mathcal{S}(\phi\vec{n})$$

\mathcal{D} est appelé *opérateur intégral de double couche*. $p = \mathcal{D}\phi$ est dit *potentiel de double couche*.

Nous appelons vitesse associée à p le champ de vecteurs défini par l'équation :

$$(5.29) \quad \vec{v} = \frac{1}{ik} (\nabla p - s(\phi\vec{n})) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

qui a l'expression :

$$(5.30) \quad \vec{v} = - \left(\frac{1}{ik} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} + ik \right) \mathcal{S}(\phi\vec{n}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Théorème 11 (Le potentiel de double couche). *Pour toute fonction ϕ régulière définie sur Γ , le potentiel de double couche $p = \mathcal{D}\phi$ a les propriétés suivantes :*

1. *p est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ en dehors de Γ , et pour tout x dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, on a*

$$(5.31) \quad p(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

2. *p est solution de l'équation de Helmholtz homogène en dehors de Γ :*

$$-(\Delta + k^2)p = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

3. *p vérifie la condition de radiation de Sommerfeld. Plus précisément, on a la formule de champ lointain suivante :*

$$(5.32) \quad \mathcal{D}\phi(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A\phi(\nu) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où $x = r\nu$, $r = |x|$, et

$$(5.33) \quad A\phi(\nu) = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\nu \cdot y} \phi(y) (\vec{n}(y) \cdot \nu) d\Gamma(y)$$

est dite amplitude de diffusion (ou de scattering)

4. *p est discontinu à la traversée de Γ . Pour $x \in \Gamma$, les traces intérieure et extérieure sont données par*

$$(5.34) \quad \begin{aligned} p^i(x) &= \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^i} \mathcal{D}\phi(z) = -\frac{\phi(x)}{2} + D\phi(x) \\ p^e(x) &= \lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^e} \mathcal{D}\phi(z) = +\frac{\phi(x)}{2} + D\phi(x) \end{aligned}$$

avec

$$(5.35) \quad D\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \phi(y) d\Gamma(y) \quad \forall x \in \Gamma$$

Le noyau $\partial G / \partial n_y$ ayant une singularité en $1/|x - y|$ et est donc dans $L^1(\Gamma)$. Ainsi, p subit un saut de $-\phi$ à la traversée de Γ :

$$[p] = p^i - p^e = -\phi$$

5. *L'expression (5.30) de la vitesse \vec{v} associée à $p = \mathcal{D}\phi$ est équivalente à la suivante :*

$$(5.36) \quad \vec{v} = -\frac{1}{ik} \overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi) - ik \mathcal{S}(\phi \vec{n}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

6. La dérivée normale de p est continue à travers Γ et vaut

$$\frac{\partial p^i}{\partial n} = \frac{\partial p^e}{\partial n} = N\phi$$

où

$$(5.37) \quad N\phi(x) = -\operatorname{rot}_\Gamma S(\overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma \phi})(x) + k^2 \vec{n} \cdot S(\phi \vec{n})(x) \quad \forall x \in \Gamma$$

Remarque 4. $\operatorname{rot}_\Gamma$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma}$ sont des opérateurs différentiels surfaciques. Ils dérivent tangentiellement sur Γ . Si Γ étant un contour dans le plan, ils correspondraient à la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne. Le lecteur est renvoyé à l'annexe A.4 pour une introduction rapide et élémentaire à ces opérateurs.

Démonstration. 1. Comme précédemment, $p = E * d(\phi)$ est \mathcal{C}^∞ en dehors du support Γ de $d(\phi)$. En $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, nous avons

$$p(x) = -\operatorname{div} \int_\Gamma G(x, y) \phi(y) \vec{n}(y) d\Gamma(y) = - \int_\Gamma \nabla_x G(x, y) \cdot \vec{n}(y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

Ce qui donne l'expression (5.31) en remarquant que $\nabla_x G(x, y) = -\nabla_y G(x, y)$.

2. Mêmes arguments que pour le potentiel de simple couche.
3. Nous avons déjà démontré que

$$G(x, y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\nu \cdot y} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

De même,

$$\nabla_y G(x, y) = -ik\nu G(x, y)$$

D'où le résultat.

4. Nous savons déjà que pour $x \in \Gamma$ le noyau

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)$$

a une singularité en $1/|x-y|$ intégrable sur Γ . Comme plus haut nous calculons pour $x \in \Gamma$ les limites

$$p^i(x) = \lim_{s \rightarrow 0, s < 0} \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}(x + s\vec{n}(x), y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

et

$$p^e(x) = \lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}(x + s\vec{n}(x), y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

Comme plus haut, nous considérons $s \neq 0$ de signe fixé et $\varepsilon > 0$ deux distances suffisamment petites devant les dimensions de Γ . Notons $z = x + s\vec{n}(x)$, z est dans Ω^i si $s < 0$

à dans Ω^e si $s > 0$. Notons Γ_ε l'intersection de Γ avec la boule $B(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε . Découpons l'intégrale en deux :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(z, y) \phi(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n_y}(z, y) \phi(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n_y}(z, y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

Par exactement les mêmes arguments que plus haut, la deuxième intégrale conduit à $D\phi(x)$ quand z tend x , puis ε tend vers 0.

Pour la première intégrale, nous sommes ramenés à calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|z - y|^3} d\Gamma_\varepsilon$$

Mais par continuité de la normale, nous avons

$$\vec{n}(y) = \vec{n}(x) + O(|x - y|)$$

et $|x - y| = O(|z - y|)$, donc

$$\frac{(z - y) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|z - y|^3} = \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{4\pi|z - y|^3} + O\left(\frac{1}{|x - y|}\right)$$

L'intégrale du reste en $1/|x - y|$ sur Γ_ε étant $O(\varepsilon)$, nous trouvons

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|z - y|^3} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z - y) \cdot \vec{n}(x)}{4\pi|z - y|^3} d\Gamma_\varepsilon + O(\varepsilon)$$

déjà calculée plus haut. D'où le terme $\mp\phi/2$.

5. Considérons la formule de représentation (5.30) de \vec{v} . Développons le terme en «rot rot». Pour cela, régularisons $E : E_n = E * \varphi_n$ où φ_n est une suite régularisante, et en notant $G_n(x, y) = E_n(x - y)$, on a toujours

$$\nabla_x G_n(x, y) = -\nabla_y G_n(x, y)$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{\text{rot}} \int_{\Gamma} G_n(x, y) \phi(y) \vec{n}(y) d\Gamma(y) = - \int_{\Gamma} (\nabla_y G_n(x, y) \wedge \vec{n}(y)) \phi(y) d\Gamma(y)$$

D'après la formule (A.24) de l'annexe A.4, le gradient se décompose en gradient tangentiel (dérivées tangentielles) et gradient normale (dérivée normale) :

$$\nabla_y G_n(x, y) = \nabla_{\Gamma, y} G_n(x, y) + \frac{\partial G_n}{\partial n_y}(x, y) \vec{n}(y)$$

Ainsi

$$\nabla_y G_n(x, y) \wedge \vec{n}(y) = \nabla_{\Gamma, y} G_n(x, y) \wedge \vec{n}(y)$$

D'autre part, d'après la formule (A.26) de la même annexe :

$$\nabla_{\Gamma,y} G_n(x, y) \wedge \vec{n}(y) = \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma,y} G_n(x, y)$$

D'où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \int_{\Gamma} G_n(x, y) \phi(y) \vec{n}(y) d\Gamma(y) = - \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} (G_n(x, y)) \phi(y) d\Gamma(y)$$

Enfin, en utilisant la formule d'intégration par partie (A.37), on trouve :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \int_{\Gamma} G_n(x, y) \phi \vec{n}(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} G_n(x, y) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi(y) d\Gamma(y)$$

En passant ensuite à la limite, avec la même justification que plus haut, nous trouvons

$$(5.38) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\phi \vec{n}) = \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi)$$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\phi \vec{n})$ est \mathcal{C}^{∞} en dehors de Γ , continue à la traversée de Γ .

6. Le gradient de p est lié à la vitesse \vec{v} par (5.29). Les limites sur Γ intérieures et extérieures des composantes normales du gradient de p et de \vec{v} sont donc égales. Il est plus aisé d'étudier celles de \vec{v} avec l'expression (5.36).

Le terme en $ik\mathcal{S}(\phi \vec{n})$ est continu à travers Γ (pour toutes ses composantes). Concernant le terme en «rot rot», remarquons que d'après la formule (A.30) de l'annexe A.4, la composante normale du rotationnel est une dérivée tangentielle de la trace tangentielle :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi) = \text{rot}_{\Gamma} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi)$$

Elle est donc continue puisque $\mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi)$ est continue à la traversée de Γ .

□

Remarque 5. Nous sommes passés par la formule de représentation de $ik\vec{v}$ et une intégration par partie pour calculer la dérivée normale du potentiel de double couche. En s'attaquant aux calculs de la dérivée normale directement avec la formule du gradient

$$\nabla \mathcal{D}\phi = -\nabla \text{div} \mathcal{S}(\phi \vec{n}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

nous aurions été gênés par la singularité de type distribution de simple couche. En effet, la vitesse est un champ de vecteur régulier par morceaux, alors que le gradient de la pression est la somme d'un champ de vecteur régulier par morceaux (le gradient de p dans Ω^i et dans Ω^e) et d'une distribution de simple couche sur Γ :

$$-\nabla \text{div} \mathcal{S}(\phi \vec{n}) = - \left(\overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \phi) - k^2 \mathcal{S}(\phi \vec{n}) \right) + s(\phi \vec{n}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

De fait, le lecteur vérifiera que l'expression formelle suivante

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -\vec{n}(x) \cdot \nabla \text{div} \mathcal{S}(\phi \vec{n}) = \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) \phi(y) d\Gamma(y)$$

fait intervenir un noyau non intégrable qui a une singularité en $1/|x - y|^3$, dit **noyau hypersingulier**.

Cette expression provient de l'intégrale d'une densité surfacique de dipôles (5.13) (formule en $\nabla \text{div} +$ une masse de Dirac), alors que l'expression (5.37) vient d'une densité surfacique de forces normales à Γ (5.12) (formule en « $\text{rot rot} - k^2$ »). D'ailleurs, pour donner un sens à l'intégrale du noyau hypersingulier, on a recours à la notion d'intégrale au sens des parties finies, ce qui revient en fin de compte à retirer la distribution de simple couche, avec des calculs plus compliqués dans la pratique.

Remarque 6. Pour mieux comprendre la différence entre les formules de \vec{v} et ∇p , faisons une analogie avec le cas 1D. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = x$$

La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = x + \delta(x)$$

f' n'est pas égale g dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais

$$f'(x) = g(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

et les limites en 0 à droite et à gauche existent et sont égales

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

f est l'analogue de p , g l'analogue de $ik\vec{v}$. On conçoit qu'il est plus facile de manipuler g qui est une fonction plutôt que f' qui est une distribution...

5.4 Théorème de représentation intégrale

5.4.1 Rayonnement en présence d'un obstacle

Dans ce paragraphe, nous étudions la représentation intégrale des ondes dans un ouvert Ω^i intérieur ou Ω^e extérieur et en régime fréquentiel. La représentation en régime temporel s'en déduit par l'utilisation de la transformée de Fourier. Nous nous intéressons donc aux solutions de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R} \setminus \Gamma = \Omega^i \cup \Omega^e$ qui vérifient la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini :

$$-(\Delta + k^2)p = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^i \cup \Omega^e)$$

pour une distribution T à support compact dans $\Omega^i \cup \Omega^e$. Nous avons déjà vu dans le paragraphe 5.3 comment résoudre ce problème dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ en convolant T avec la solution élémentaire E . En fait, une distribution à support compact dans un ouvert \mathcal{O} est aussi une distribution à support compact dans \mathbb{R}^3 . Dans le cas présent, en remarquant que T est dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ et nous pouvons d'abord résoudre l'équation de Helmholtz avec le second membre T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$-(\Delta + k^2)p^{in} = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

p^{in} vérifiant la condition de radiation à l'infini. On se ramène ainsi aux résultats du paragraphe précédent. p^{in} est l'onde qui existerait en absence de la frontière Γ . C'est ce qu'on appelle *champ incident*. Nous sommes ainsi ramenés à travailler avec le *champ diffracté* $p^{sc} = p - p^{in}$ qui vérifie l'équation homogène dans $\Omega^i \cup \Omega^e$

$$-(\Delta + k^2)p^{sc} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^i \cup \Omega^e)$$

p est appelé *champ total*.

Sans restreindre la généralité du propos, nous étudions dans ce paragraphe la représentation intégrale des solutions de l'équation de Helmholtz sans second membre dans $\Omega^i \cup \Omega^e$.

5.4.2 Solutions de l'équation homogène en présence d'un obstacle

Théorème 12 (de représentation intégrale). *Soit p une fonction régulière jusqu'au bord de part et d'autre de Γ . On note p^i sa restriction à Ω^i , p^e à Ω^e . Les sauts de p et de sa dérivée normale sont notés μ et λ :*

$$\mu = [p] = p^i - p^e \quad \lambda = \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\partial p^i}{\partial n} - \frac{\partial p^e}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma$$

Si

$$-(\Delta p^i + k^2 p^i) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^i),$$

et

$$-(\Delta p^e + k^2 p^e) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^e),$$

p^e satisfait la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0$$

alors p est la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche :

$$p = \mathcal{S}\lambda - \mathcal{D}\mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Plus précisément, on a les formules de représentation intégrales suivantes :

$$(5.39) \quad p(x) = \mathcal{S}\lambda(x) - \mathcal{D}\mu(x) \quad \text{pour } x \in \Omega^e \cup \Omega^i$$

et

$$(5.40) \quad \frac{1}{2} (p^i(x) + p^e(x)) = S\lambda(x) - D\mu(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma$$

D'autre part

$$\nabla p = \nabla S\lambda + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \mu) - k^2 \mathcal{S}(\mu \vec{n}) \right) - s(\mu \vec{n}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Plus précisément, on a les formules de représentation intégrales suivantes :

$$(5.41) \quad \nabla p(x) = \nabla S\lambda(x) + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \mu)(x) - k^2 \mathcal{S}(\mu \vec{n})(x) \right) \quad \text{pour } x \in \Omega^i \cup \Omega^e$$

et

$$(5.42) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p^i}{\partial n}(x) + \frac{\partial p^e}{\partial n}(x) \right) = D^*\lambda(x) - N\mu(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma$$

où \mathcal{S} , S , \mathcal{D} , D , D^* et N sont les opérateurs intégraux introduits dans le §5.3, dont nous rappelons les expressions :

$$(5.43) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}\lambda(x) &= \int_{\Gamma} G(x, y) \lambda(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{D}\mu(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \mu(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ \mathcal{D}\mu(x) &= -\text{div} \int_{\Gamma} G(x, y) \mu(y) \vec{n}(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ S\lambda(x) &= \int_{\Gamma} G(x, y) \lambda(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \Gamma \\ D\mu(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \mu(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \Gamma \\ D^*\lambda(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) \mu(y) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \Gamma \\ N\mu(x) &= -\text{rot}_\Gamma \int_{\Gamma} G(x, y) \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \mu(y) d\Gamma(y) \\ &\quad + k^2 \int_{\Gamma} G(x, y) \mu(y) \vec{n}(y) \cdot \vec{n}(x) d\Gamma(y) \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{array} \right.$$

Démonstration. D'après la formule des sauts (5.7), la pression p vérifie

$$-(\Delta + k^2)p = s(\lambda) - d(\mu) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

ainsi que la condition de radiation à l'infini. Donc

$$p = E * s(\lambda) - E * d(\mu)$$

D'après les résultats des théorèmes 10 et 11, on a

$$E * s(\lambda) = \mathcal{S}\lambda$$

et

$$E * d(\mu) = \mathcal{D}\mu$$

On a aussi l'expression de ces opérateurs pour x dans $\Omega^i \cup \Omega^e$ et sur Γ . De même pour le gradient de p . Ceci termine la démonstration.

La différence avec ces théorèmes, c'est que les fonctions λ et μ ne sont pas forcément connues.

Nous allons dans la suite donner une démonstration plus élémentaire de la première partie du théorème, la représentation de p , ne faisant pas appel aux propriétés de la convolution des distributions.

Soit $x \in \Omega = \Omega^i \cup \Omega^e$ et soit $\varepsilon > 0$ tel $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Notons $\Omega_{\varepsilon, R}$ l'ouvert Ω privé de la boule de rayon ε centrée en x et tronqué à l'infini par la sphère de rayon $R > 0$ assez grand : $\Omega_{\varepsilon, R} = \Omega \setminus (\overline{B(x, \varepsilon)} \cup \{|x| \geq R\})$. La formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \underbrace{(\Delta p(y) + k^2 p(y))}_{=0} G(x, y) dy - \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \underbrace{(\Delta_y G(x, y) + k^2 G(x, y))}_{=0} p(y) dy = \\ \int_{\partial\Omega_{\varepsilon, R}} \left(\frac{\partial p}{\partial \nu}(y) G(x, y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) p(y) \right) d\gamma(y) \end{aligned}$$

où $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à Ω . Rappelons que la normale \vec{n} sur Γ est orientée vers l'extérieur de Ω^i . $\partial\Omega_{\varepsilon, R} = S_\varepsilon \cup S_R \cup \Gamma^i \cup \Gamma^e$, où l'on a distingué la frontière commune de Ω^i et Ω^e pour pouvoir distinguer les termes de bords de l'intégration par partie venant de l'intérieur et ceux venant de l'extérieur (qui viennent avec le signe opposé). Dans les intégrales sur Γ^i , on a $\vec{\nu} = \vec{n}$, alors que dans les intégrales sur Γ^e , on a $\vec{\nu} = -\vec{n}$, d'où

$$\text{termes sur } \Gamma = \int_{\Gamma} \left(G(x, y) \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right](y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) [p](y) \right) d\Gamma(y)$$

qui forment le membre de droite de la formule de représentation.

$$\text{termes sur } S_R = \int_{S_R} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \nu} - ikp \right) G(x, y) - \left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) - ikG(x, y) \right) p(y) \right) dS_R(y)$$

p est solution de l'équation de Helmholtz homogène en dehors d'une boule et vérifie la condition de radiation de Sommerfeld, et par suite d'après les propriétés des fonction de Hankel et le développement multipolaire de p , on a :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \nu} - ikp \right) = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{et} \quad p = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

uniformément en (θ, φ) . Il en est de même pour G (expression explicite). L'intégrand est donc $O(1/R^3)$ ce qui prouve que l'intégrale tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$ ($dS_R = R^2 dS_1$). Il reste les termes sur S_ε . Ici la normale est rentrante dans la boule $B(x, \varepsilon)$. Le gradient de p étant borné par une constante C au voisinage de x , on trouve que le premier terme sur S_ε tend vers 0 :

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \nu} \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} dS_\varepsilon(y) \right| \leq \frac{C}{4\pi\varepsilon} \times 4\pi\varepsilon^2$$

La continuité de p en x permet de conclure pour le deuxième terme sur S_ε :

$$-\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) p(y) dS_\varepsilon(y) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + ik \right) \underbrace{\int_{S_\varepsilon} p(y) dS_\varepsilon(y)}_{=4\pi\varepsilon^2(p(x)+O(\varepsilon))} = -p(x) + O(\varepsilon)$$

Ceci démontre la formule pour un point x dans Ω . Soit maintenant x sur Γ . Les termes sur Γ sont remplacés par des intégrales sur $\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)$. Le noyau $G(x, y)$ est \mathcal{C}^∞ pour $y \neq x$, et a une singularité en $1/|x - y|$ en x , intégrable sur Γ , et par conséquent

$$\int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} G(x, y) \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right](y) d\Gamma(y) \rightarrow \int_{\Gamma} G(x, y) \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right](y) d\Gamma(y)$$

D'après le théorème de Lebesgue.

D'autre part, nous avons vu plus haut (dans la démonstration du théorème 10) que pour une surface Γ régulière au voisinage de $x \in \Gamma$, le noyau

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)$$

a également une singularité en $1/|x - y|$. On en conclut qu'il est également dans $L^1(\Gamma)$ et on a

$$\int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} [p](y) d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} [p](y) d\Gamma$$

Ce sont les termes sur S_ε qui n'ont pas la même limite que plus haut. En effet la boule $B(x, \varepsilon)$ n'est plus incluse dans Ω , mais se partage entre Ω^i et Ω^e . $S_\varepsilon = S_\varepsilon^i \cup S_\varepsilon^e$, asymptotiquement deux demi-sphères de rayon ε (ε petit).

$$-\int_{S_\varepsilon^i} \left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) p(y) \right) dS_\varepsilon^i(y) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) \underbrace{\int_{S_\varepsilon^i} p^i(y) dS_\varepsilon^i(y)}_{=2\pi\varepsilon^2(p^i(x)+O(\varepsilon))} = -\frac{1}{2}p^i(x) + O(\varepsilon)$$

Idem pour l'intégrale sur S_ε^e . D'où le résultat pour $x \in \Gamma$. □

Remarque 7. Ce théorème donne la représentation intégrale de ce que nous avons appelé plus haut un champ (ou onde) diffracté(e). Mais le champ incident $p^{in} = E * T$ est \mathcal{C}^∞ en dehors du support de T que nous avons supposé compact ($T \in \mathcal{E}'(\Omega^i)$ ou $T \in \mathcal{E}'(\Omega^e)$), en particulier $\text{supp}(T)$ n'intersecte pas Γ . λ et μ sont donc également les sauts des traces du champ total.

Remarque 8. Pour représenter les solutions de l'équation de Helmholtz dans l'un des deux ouverts Ω^i ou Ω^e uniquement, il suffit, par exemple, de considérer la fonction nulle dans le deuxième ouvert pour se ramener aux hypothèses du théorème de représentation. En effet, la fonction nulle vérifie l'équation homogène ainsi que la condition de radiation (dans le cas de l'ouvert extérieur). Dans ce cas, les sauts sont \pm les traces.

Remarque 9. Attention : ce théorème nous dit uniquement comment représenter les solutions de l'équation homogène en fonction de certaines quantités sur le bord, λ et μ que nous ne connaissons pas forcément, et non de résoudre un problème aux limites. Dans le paragraphe 5.5, nous utilisons cette forme de la solution pour imposer les conditions aux limites. Ceci conduit à ce qu'on appelle une équation intégrale. La résolution de celle-ci donne accès à λ et μ , et par suite à p et son gradient partout dans l'espace grâce à la formule de représentation intégrale, ce qui résout le problème aux limites.

Remarque 10. La formule de représentation se généralise au cas d'une surface Γ lipschitzienne. Les relations sur le bord sont alors vérifiées presque partout sur Γ . En particulier, supposons que Γ est régulière par morceaux et que x se trouve sur une singularité géométrique (dièdre, coin, pointe de cône...). Dans la démonstration, interviennent les facteurs $\text{aire}(S_\varepsilon^i)/(4\pi)$ et $\text{aire}(S_\varepsilon^e)/(4\pi)$. Pour une surface régulière, S_ε^i et S_ε^e ressemblent à deux demi-sphères pour ε suffisamment «petit», d'où le facteur $1/2$ devant p^i et p^e . Ces facteurs doivent être remplacés par les rapports à 4π des limites des angles solides intérieur et extérieur de S^i et S^e . Par exemple, sur l'arête d'une cube, ces facteurs sont $1/4$ et $3/4$, et sur le coin de celui-ci $1/8$ et $7/8$. La notion d'angle solide de cette singularité sera rappelée dans le paragraphe 5.6.3.

Remarque 11. Le théorème est valable pour k réel ou complexe et même pour $k = 0$. C'est la condition à l'infini qui change. Par exemple, pour $k = k_1 + ik_2 \in \mathbb{C}$ avec $k_2 > 0$, le choix du noyau de Green

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = e^{-k_2|x-y|} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

exponentiellement décroissant à l'infini, correspond à un champ dans H^1 à l'infini. De même, le choix du noyau

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

correspond à une condition champ nul à l'infini pour $k = 0$.

5.4.3 Projecteurs de Calderón

Théorème 13. Soient μ et λ deux fonctions régulières quelconques définies sur Γ . Alors la fonction p définie par

$$(5.44) \quad p = S\lambda - \mathcal{D}\mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

est solution de l'équation de Helmholtz dans $\Omega^i \cup \Omega^e$ et vérifie la condition de radiation à l'infini, et les traces intérieures et extérieures de p et de sa dérivée normale sont données par :

$$(5.45) \quad \begin{pmatrix} p^i \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{I}{2} - D\right) \mu + S\lambda \\ -N\mu + \left(\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{2} + H\right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

et

$$(5.46) \quad \begin{pmatrix} p^e \\ \frac{\partial p^e}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{I}{2} - D\right) \mu + S\lambda \\ -N\mu + \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{I}{2} + H\right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

où H est l'opérateur

$$H = \begin{pmatrix} -D & S \\ -N & D^* \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\lambda = \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] \quad \text{et} \quad \mu = [p]$$

De plus, les opérateurs

$$C_i = \frac{I}{2} + H$$

et

$$C_e = \frac{I}{2} - H$$

sont des projecteurs, i.e. ils satisfont :

$$(5.47) \quad C_i^2 = C_i, \quad C_e^2 = C_e, \quad C_i + C_e = I.$$

On les appelle **projecteurs de Calderón** intérieur et extérieur respectivement. Les relations (5.47) peuvent s'expliciter de la manière suivante :

$$(5.48) \quad DS = SD^*$$

$$(5.49) \quad ND = D^*N$$

$$(5.50) \quad D^2 - SN = \frac{I}{4}$$

$$(5.51) \quad D^{*2} - NS = \frac{I}{4}$$

Démonstration. Démontrons la propriété de projecteur intérieur. Étant donnés μ et λ , nous définissons p par

$$p = \mathcal{S}\lambda - \mathcal{D}\mu$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2}(p^i + p^e) = p^i - \frac{\mu}{2} = p^e + \frac{\mu}{2}$$

et la manipulation analogue sur les dérivées normales, les relations de traces (5.40) et (5.42) nous disent que

$$\begin{pmatrix} p^i \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{2} + H \right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant la fonction w^i définie de la manière suivante :

$$w^i(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in \Omega^i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème de représentation intégrale on a

$$w^i = \mathcal{S}q - \mathcal{D}\varphi$$

avec $q = \frac{\partial p^i}{\partial n}$ et $\varphi = p^i$. Les relations de trace donnent cette fois :

$$\begin{pmatrix} w^i \\ \frac{\partial w^i}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^i \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{2} + H \right) \begin{pmatrix} p^i \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\left(\frac{I}{2} + H \right)^2 \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{2} + H \right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Pour démontrer la propriété de projecteur extérieur, on raisonne sur la fonction w^e qui vaut p à l'extérieur et 0 à l'intérieur. \square

5.5 Équations intégrales

Nous avons vu plus haut que les potentiels de simple et double couche sont définis partout, vérifient l'équation de Helmholtz en dehors de Γ ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini. Ainsi, pour que de tels potentiels soient solution d'un problème aux limites intérieur ou extérieur pour l'équation de Helmholtz, il ne reste plus qu'à satisfaire la condition aux limites sur Γ . Ceci nous ramène à ce qu'on appelle une équation intégrale sur le bord. Dans ce paragraphe, nous montrons comment aboutir à ces équations. Leur étude plus rigoureuse sera faite plus loin.

Rappelons que la normale unitaire \vec{n} sur Γ est sortante de Ω^i .

5.5.1 Choix du prolongement et de la trace

Pour se ramener à une équation intégrale, nous avons le choix entre deux points de vue. Le premier, opérationnel, consiste à rechercher *a priori* la solution de l'EDP sous la forme d'une certaine combinaison d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche. La deuxième approche consiste à se ramener d'abord aux hypothèses du théorème 12 de représentation intégrale. Pour cela, il nous faut prolonger la solution à tout l'espace par une fonction qui vérifie l'équation de Helmholtz homogène en dehors de Γ et la condition de radiation de Sommerfeld dans le cas d'un prolongement à l'extérieur. On utilise ensuite l'une des relations de trace (5.45) et (5.46) pour obtenir une équation sur le bord. Résoudre l'équation intégrale est alors équivalent à résoudre simultanément deux problèmes aux limites pour l'EDP : un problème intérieur et un autre extérieur. Nous adoptons cette deuxième approche.

Notons p la fonction prolongée :

$$p(x) = \begin{cases} p^e(x) & \text{si } x \in \Omega^e \\ p^i(x) & \text{si } x \in \Omega^i \end{cases}$$

On a ainsi d'après le théorème 12 :

$$(5.52) \quad p = \mathcal{S}\lambda - \mathcal{D}\mu$$

avec

$$(5.53) \quad \lambda = \frac{\partial p^i}{\partial n} - \frac{\partial p^e}{\partial n} \quad \text{et} \quad \mu = p^i - p^e \quad \text{sur } \Gamma$$

Remarque 12. Attention, λ et μ n'auront pas la même valeur suivant le prolongement choisi. Nous les distinguerons par un indice désignant ce dernier. L'exposant e ou i rappellera qu'il s'agit au départ de la résolution d'un problème extérieur ou intérieur.

5.5.2 Problème de Dirichlet extérieur

Soit p^0 une fonction régulière donnée sur Γ , nous cherchons p^e solution de :

$$(5.54) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p^e = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ p^e = p^0 & \text{sur } \Gamma, \\ p^e \text{ vérifie la condition de radiation à l'infini.} \end{cases}$$

Nous avons vu dans le chapitre 3 que ce problème a une solution unique dans H^1 de tout borné.

Prolongement par 0

La fonction nulle vérifie l'équation de Helmholtz homogène dans Ω^i . Dans ce cas, les sauts λ et μ sont, au signe près, les traces de la solution :

$$\lambda_0^e = -\frac{\partial p^e}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{c'est une inconnue,}$$

et

$$\mu_0^e = -p^0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{c'est une donnée.}$$

D'aucuns parleront de variables physiques.

L'expression de la trace de p^e sur Γ fournit ainsi l'équation :

$$(5.55) \quad \boxed{S\lambda_0^e = \left(\frac{I}{2} - D\right) p^0}$$

dite équation intégrale de simple couche.

La résolution de cette équation fournit λ_0^e . La formule de représentation intégrale (5.52) donne ensuite la valeur de p^e en tout point de Ω^e .

En utilisant plutôt la relation intégrale donnant la trace de la dérivée normale de p^e :

$$\frac{\partial p^e}{\partial n} = \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_0^e - N\mu_0^e$$

on trouve une nouvelle équation intégrale :

$$(5.56) \quad \boxed{\left(\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_0^e = -Np^0}$$

Prolongement par la solution du problème de Dirichlet intérieur

On obtient p^i en résolvant (par la pensée) le problème de Dirichlet intérieur avec la même donnée p^0 . Sans exhiber cette solution, on sait que dans ce cas le saut μ_D^e de p est nul et p est un potentiel de simple couche :

$$p = S\lambda_D^e$$

Cette fois, λ_D^e n'a pas d'interprétation physique évidente (en fonction de la solution extérieure).

En prenant la trace sur Γ , on obtient la nouvelle équation intégrale :

$$(5.57) \quad \boxed{S\lambda_D^e = p^0 \quad \text{sur } \Gamma.}$$

L'opérateur à inverser est le même que pour (5.55), mais le second membre n'est pas le même, λ non plus n'a plus la même signification.

Le prolongement n'est pas unique si k^2 est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet dans Ω^i . On en déduit que l'opérateur S ne sera pas inversible à ces fréquences propres.

L'utilisation de la trace de la dérivée normale ne donne pas une nouvelle équation intégrale :

$$\frac{\partial p^e}{\partial n} = \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_D^e$$

En utilisant l'équation intégrale (5.55) et la relation de Calderón (5.48) on trouve :

$$\left(-\frac{I}{2} + D\right) S\lambda_D^e = \left(-\frac{I}{2} + D\right) p^0$$

qui est l'équation (5.57) composée par l'opérateur $(-I/2 + D)$.

Prolongement par la solution du problème de Neumann intérieur

On résout le problème de Neumann intérieur avec comme donnée la dérivée normale de la solution du problème extérieur. Dans ce cas, le saut λ_N^e de la dérivée normale est nul et μ_N^e le saut de p est l'inconnue du problème. p est un potentiel de double couche :

$$\begin{aligned} p(x) &= -\mathcal{D}\mu_N^e(x) \quad \text{pour } x \in \Omega^i \cup \Omega^e \\ \frac{p^i(x) + p^0(x)}{2} &= -D\mu_N^e(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{aligned}$$

On en déduit l'équation intégrale :

$$(5.58) \quad \boxed{-\left(\frac{I}{2} + D\right)\mu_N^e = p^0}$$

Le prolongement n'est pas unique si k^2 est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Neumann dans Ω^i . On en déduit que l'opérateur $-(I/2 + D)$ ne sera pas inversible à ces fréquences propres.

Prolongement par la solution du problème de Robin intérieur ou astuce de Brakhage et Werner

On résout le problème de Robin intérieur :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)p^i = 0 & \text{dans } \Omega^i, \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} - ik\beta p^i = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

où β est un nombre complexe quelconque à partie réelle strictement positif pour obtenir une condition aux limites dissipative. C'est un nombre sans unité qui représente une admittance relative. Dans ce cas, ce problème a une solution unique et l'équation intégrale obtenue sera inversible quelque soit la fréquence.

En prenant

$$g = \frac{\partial p^e}{\partial n} - ik\beta p^e$$

on obtient des sauts λ_R^e et μ_R^e proportionnels :

$$\lambda_R^e = ik\beta\mu_R^e$$

La trace de p sur Γ donne la nouvelle équation intégrale

$$(5.59) \quad \boxed{\left(ik\beta S - \left(\frac{I}{2} + D\right)\right)\mu_R^e = p^0}$$

5.5.3 Problème de Dirichlet intérieur

À l'aide des équations intégrales, on peut également résoudre le problème de Dirichlet intérieur

$$(5.60) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega^i, \\ p = p^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera qu'avec les prolongements proposés plus hauts, *i.e.* par 0, la solution du problème de Dirichlet extérieur et celle du problème de Neumann extérieur, on aboutit respectivement aux équations intégrales suivantes :

$$(5.61) \quad S\lambda_0^i = \left(\frac{I}{2} + D\right) p^0$$

$$(5.62) \quad \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_0^i = Np^0$$

$$(5.63) \quad S\lambda_D^i = p^0$$

$$(5.64) \quad \left(\frac{I}{2} - D\right) \mu_N^i = p^0$$

5.5.4 Problème de Neumann extérieur

$$(5.65) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p^e = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \frac{\partial p^e}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma, \\ p^e \text{ vérifie la condition de radiation à l'infini.} \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera qu'en prolongeant par 0, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$(5.66) \quad N\mu_0^e = \left(\frac{I}{2} + D^*\right) g$$

En considérant la relation de trace de p on obtient :

$$(5.67) \quad \left(\frac{I}{2} - D\right) \mu_0^e = Sg$$

En prolongeant par la solution du problème de Neumann intérieur, p est un potentiel de double couche et l'équation intégrale s'écrit : obtient :

$$(5.68) \quad \boxed{N\mu_N^e = -g}$$

Le prolongement n'est pas unique si k^2 est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Neumann dans Ω^i . On en déduit que l'opérateur N ne sera pas inversible à ces fréquences propres.

En prolongeant par la solution du problème de Dirichlet intérieur, p est un opérateur de simple couche et l'équation intégrale devient :

$$(5.69) \quad \boxed{\left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_D^e = g}$$

En prolongeant par la solution du problème de Robin, le prolongement est unique et l'on obtient l'équation intégrale :

$$(5.70) \quad \boxed{-\left(N + ik\beta\left(\frac{I}{2} - D^*\right)\right) \mu_R^e = g}$$

5.5.5 Problème de Neumann intérieur

$$(5.71) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p^i = 0 & \text{dans } \Omega^i, \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma, \\ p^i \text{ vérifie la condition de radiation à l'infini.} \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera qu'avec les 4 prolongements vus plus haut, on obtient les équations intégrales suivantes :

$$(5.72) \quad \boxed{N\mu_0^i = \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) g}$$

$$(5.73) \quad \boxed{\left(\frac{I}{2} + D\right) \mu_0^i = Sg}$$

$$(5.74) \quad \boxed{N\mu_N^i = -g}$$

$$(5.75) \quad \boxed{\left(\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda_D^e = g}$$

5.5.6 Équivalence entre problèmes aux limites et équations intégrales

Dans le paragraphe précédemment, nous sommes partis d'un problème d'EDP intérieur ou extérieur avec conditions aux limites et en utilisant les relations de trace des formules de représentation intégrale, nous avons abouti à différentes équations intégrales. À chaque équation intégrale sont associés deux problèmes aux limites : un intérieur et un extérieur. Ainsi, même si le problème original est inversible, l'équation intégrale associée peut ne pas l'être si le nouveau problème compagnon ne l'est pas. Ce nouveau problème introduit n'est pas toujours évident à deviner. Par exemple, en prolongeant par 0, on a résolu un problème de Dirichlet avec donnée nulle la première fois, et un problème de Neumann avec donnée nulle la deuxième fois. Démontrons sur quelques exemples l'équivalence entre problèmes aux limites et équations intégrales. Nous laissons au lecteur le soin de le faire pour le reste des équations énoncées.

Étude de l'équation intégrale (5.55) : $S\lambda_0^e = \left(\frac{I}{2} - D\right) p^0$

Étant donnée une solution p^e du problème de Dirichlet extérieur, nous avons démontré que $\lambda_0^e = -\partial p^e / \partial n$ est solution de l'équation (5.55). Ce qui établit l'existence d'au moins une solution de cette équation intégrale, le problème de Dirichlet extérieur (5.54) admettant une solution unique. Inversement, soit λ_0^e solution de (5.55). Alors

$$p = S\lambda_0^e + \mathcal{D}p^0$$

est solution de l'équation de Helmholtz Ω^e (et Ω^i) et vérifie la condition de radiation à l'infini. D'autre part, la première relation (5.46) donne la trace extérieure de p :

$$p|_{\Gamma^e} = S\lambda_0^e + \left(\frac{I}{2} + D\right) p^0 = p^0$$

La restriction de p à Ω^e est donc solution du problème de Dirichlet extérieur (5.54). Ainsi, trouver une solution de l'équation intégrale équivaut à en trouver une pour le problème aux limites.

D'après (5.45) la trace intérieure de p est nulle :

$$p|_{\Gamma^i} = S\lambda_0^e + \left(-\frac{I}{2} + D\right) p^0 = 0$$

Donc la restriction p^i de p à Ω^i est solution du problème de Dirichlet homogène. Notons $(k_n^D)^2$ les valeurs propres de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène.

Si $k \notin \{k_n^D\}$, p est nulle à l'intérieure et $\lambda_0^e = -\partial p^e / \partial n$. Dans ce cas, l'équation intégrale (5.55) a une solution et une seule.

S'il existe n tel que $k = k_n^D$, alors p^i est un vecteur propre quelconque dans l'espace propre E_n^D associé à k_n^D et en notant λ_n sa dérivée normale sur Γ , l'équation intégrale admet alors les solutions :

$$\lambda_{0,n}^e = -\frac{\partial p^e}{\partial n} + \lambda_n$$

Dans ce cas, l'équation intégrale (5.55) admet toujours une solution mais elle n'est pas unique. On peut lui ajouter la dérivée normale λ_n de n'importe quel vecteur propre. Cette solution «parasite» de rayonne pas à l'extérieur :

$$\mathcal{S}\lambda_{0,n}^e(x) + \mathcal{D}p^0(x) = \mathcal{S}\lambda_0^e(x) + \mathcal{D}p^0(x) = p^e(x) \quad \text{pour } x \in \Omega^e$$

Étude de l'équation intégrale (5.57) : $\mathcal{S}\lambda_D^e = p^0$

Cette fois-ci, l'existence n'est pas toujours assurée. En effet, étant donnée p^0 , il existe une unique solution p^e solution du problème de Dirichlet extérieur (5.54). Pour en déduire une solution de l'équation intégrale (5.57), il nous faut définir le prolongement à Ω^i par p^i solution du problème de Dirichlet intérieur avec donnée aux limites p^0 .

Si $k \notin \{k_n^D\}$, le problème intérieur admet une solution et une seule, notée p^i . Alors

$$\lambda_D^e = \frac{\partial p^i}{\partial n} - \frac{\partial p^e}{\partial n}$$

est solution de l'équation intégrale.

S'il existe n tel que $k = k_n^D$, alors p^i existe ssi les conditions d'orthogonalité suivantes sont vérifiées (voir l'alternative de Fredholm au paragraphe A.5.4) :

$$(5.76) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u_n^D}{\partial n} p^0 = 0 \quad \text{pour tout } u_n^D \in E_n^D$$

E_n^D étant l'espace propre associé à k_n^D . Ces relations sont en nombre fini puisque E_n^D est de dimension finie.

Inversement, si λ_D^e est solution de l'équation intégrale (5.57), alors la fonction p définie par

$$p = \mathcal{S}\lambda_D^e$$

vérifie l'équation de Helmholtz dans Ω^e et Ω^i ainsi que la condition de radiation à l'infini. D'après le théorème 13

$$p^e = p^i = \mathcal{S}\lambda_D^e = p^0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

On obtient ainsi une solution du problème de Dirichlet extérieur (5.54).

La solution de l'équation intégrale (5.57) est unique ssi $k \notin \{k_n^D\}$. D'ailleurs, nous avons vu plus haut en (5.87) que

$$\ker S = \left\{ \lambda_n = \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \quad \text{avec } u_n^D \in E_n^D \right\}$$

Pour l'équation (5.55), nous avons toujours existence d'au moins une solution. On en déduit qu'aux fréquences propres k_n^D , le second membre doit vérifier les conditions d'orthogonalité :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \left(\frac{I}{2} - D \right) p^0 = 0 \quad \text{pour tout } u_n^D \in E_n^D$$

En transposant l'opérateur, on voit que ceci est la conséquence de la relation (5.86) vue plus haut.

$$\left(\frac{I}{2} - D^*\right) \lambda_n^D = 0$$

Enfin signalons que les relations d'orthogonalité (5.76) sont en général vérifiées par les données «physiques». *Le lecteur est invité à le vérifier pour p^0 trace d'une onde plane ou d'une onde sphérique dont la source est située dans le domaine extérieur.*

Étude de l'équation intégrale (5.58) : $-\left(\frac{I}{2} + D\right) \mu_N^e = p^0$

Étant donnée une solution p^e du problème de Dirichlet extérieur, il nous faut cette fois-ci prolonger à l'intérieur en résolvant le problème de Neumann intérieur avec la donnée $\partial p^e / \partial n$. Notons $\{(k_n^N)^2\}$ les valeurs propres du problème de Neumann intérieur pour $-\Delta$, E_n^N les sous-espaces propres associés.

Si $k \notin \{k_n^N\}$, le problème intérieur admet une solution et une seule, notée p^i . Alors

$$\mu_N^e = p^i - p^0$$

est solution de l'équation intégrale.

S'il existe n tel que $k = k_n^N$, alors p^i existe ssi les conditions d'orthogonalité suivantes sont vérifiées :

$$(5.77) \quad \int_{\Gamma} u_n^N \frac{\partial p^e}{\partial n}$$

À la différence des relations (5.76), ici la quantité qui doit vérifier les relations d'orthogonalité n'est pas connu ! Étant donnée p^0 , on ne peut pas savoir *a priori*, si ces relations seront vérifiées avant de résoudre le problème extérieur ! Dans le cas où ces relations sont vérifiées, μ_N^e est déterminé modulo le noyau de $I/2 + D$ qui n'est rien d'autre que l'espace de traces sur Γ des vecteurs propres $u_n^N \in E_n^N$ d'après (5.88).

Inversement, si μ_N^e est solution de l'équation intégrale (5.58), alors

$$p = -\mathcal{D}\mu_N^e$$

est solution de l'équation de Helmholtz à l'intérieur et à l'extérieur et vérifie la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini.

5.6 Quelques applications de la formule de représentation intégrale

Dans ce paragraphe, nous appliquons le théorème de représentation intégrale dans quelques cas particuliers et obtenons ainsi quelques formules remarquables.

5.6.1 Représentation intégrale 1D

La fonction

$$e_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{2ik}$$

est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz 1D, *i.e.* :

$$-(e_k'' + k^2 e_k) = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld 1D :

$$(5.78) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{de_k}{d|x|}(x) - ik e_k(x) \right) = 0$$

C'est la transformée de Fourier de la solution élémentaire causale de l'équation des ondes :

$$e(t, x) = \frac{c}{2} H(t - |x - y|/c)$$

où H est la fonction de Heaviside. Plus rigoureusement, en tant que distribution sur \mathbb{R}^2 (en k et x), e_k s'écrit comme une valeur principale :

$$e_k(x) = \text{vp} \left(\frac{1}{-2ik} \right) e^{ik|x|}$$

C'est la solution élémentaire qui vérifie la condition de radiation :

Si u est une fonction régulière jusqu'au bord dans \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- , solution de

$$-(u'' + k^2 u) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > 0$$

et qui vérifie la condition de radiation (5.78), alors d'après la formule des sauts 1D, on a

$$-(u'' + k^2 u) = \mu \delta' + \lambda \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

avec

$$\mu = u(0-) - u(0+)$$

$$\lambda = u'(0-) - u'(0+)$$

On en déduit

$$u = e_k * (\mu \delta' + \lambda \delta) = \mu e_k' + \lambda e_k$$

5.6.2 Formules de Poisson et de Cauchy

La formule de représentation intégrale (5.39) et (5.40) est valable pour le cas du Laplacien dans le plan avec la fonction de Green :

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x - y|)$$

Dans ce cas, le plan \mathbb{R}^2 peut être confondu avec \mathbb{C} et nous disposons de la notion d'intégrale sur les chemins, en plus de l'intégrale sur une courbe.

Un chemin est une application continue de $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. $\gamma(\alpha)$ est le point de départ, $\gamma(\beta)$ est le point d'arrivée. Le chemin est fermé si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Si $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ est l'image de γ , l'intégrale sur le chemin γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

L'image Γ peut être parcourue plusieurs fois, d'où la notion d'indice d'un point z par rapport au chemin γ :

$$(5.79) \quad \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

C'est une fonction à valeurs entières dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ qui est constante sur chaque composante connexe de Ω et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω . C'est le nombre de tours autour de z qu'effectue le point $\gamma(t)$ quand t varie de α à β . Le lecteur fera le lien avec le théorème de Gauss en dimension 3 (voir plus bas).

Rappelons que l'intégrale sur la courbe Γ (qui intervient dans la formule de représentation intégrale) est définie par

$$\int_{\Gamma} f(z) d\Gamma(z) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Considérons le cas particulier où Γ est le cercle unité. Ω^i est le disque unité ouvert. Soit u une fonction harmonique dans Ω^i continue dans $\overline{\Omega^i}$. La formule de représentation intégrale dit que

$$(5.80) \quad \begin{aligned} u(r, \theta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2r \cos(\theta - t) + 1) \frac{\partial u}{\partial r}(1, t) dt \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - \cos(\theta - t)}{r^2 - 2r \cos(\theta - t) + 1} u(1, t) dt \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega^i$ ($r < 1$). Mais dans ce cas, en développant u en série de Fourier par rapport à θ , la relation entre u et sa dérivée normale est explicite. En effet, si l'on écrit en coordonnées polaires

$$u(1, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^0 e^{in\theta}$$

et si l'on cherche u sous la forme

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(r) e^{in\theta} \quad \text{pour } r \leq 1$$

Comme $\Delta u = 0$, pour tout n , $u_n(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$u_n'' + \frac{1}{r} u_n' - \frac{n^2}{r^2} u_n = 0 \quad \text{pour } r < 1$$

qui pour solutions $r^{\pm n}$. La solution devant être bornée à l'origine, u prend la forme :

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^0 r^{|n|} e^{in\theta} \quad \text{pour } r \leq 1.$$

En introduisant le noyau Poisson $P_r(\theta)$

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (z^n + \bar{z}^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} \quad \text{pour } r < 1,$$

on retrouve la formule de représentation de Poisson :

$$(5.81) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) u(1, t) dt$$

Cette formule semble «magique» car elle ne fait pas intervenir la dérivée normale de u . En fait, cette formule est la combinaison de la formule de représentation (5.80) et de l'expression explicite (bien que non locale) de la dérivée normale de u en fonction de u sur le cercle (via ces coefficients de Fourier) :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| u_n^0 e^{in\theta}$$

expression possible dans le cas où Γ est un cercle.

Il y a un autre cas où la formule de représentation ne fait pas intervenir en apparence la dérivée normale, c'est la formule de Cauchy. Elle dit que sous certaines conditions sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ (par exemple sa convexité) si u est une fonction holomorphe dans Ω et si γ est un chemin fermé dans Ω , alors

$$(5.82) \quad \text{Ind}_\gamma(z) u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{pour } z \in \Omega$$

Cette formule est la conséquence de la formule de représentation intégrale pour le Laplacien (une fonction holomorphe est harmonique) et des relations de Cauchy-Riemann ($u = f + ig$ et $z = x + iy$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

ce qui permettent de relier dérivée normale et dérivée tangentielle de u sur Γ :

$$(5.83) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -i \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

avec

$$\tau = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

le vecteur tangent unitaire ($n = n_1 + in_2$ et $\tau = -n_2 + in_1$). En effet, notons I le membre de gauche de la formule (5.82).

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{u(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \tau(t) |\gamma'(t)| dt$$

or

$$\frac{1}{\gamma(t) - z} = \frac{\overline{\gamma(t) - z}}{|\gamma(t) - z|^2}$$

En développant les calculs, on trouve (en mélangeant notations vectorielles et complexes) :

$$\overline{(\gamma(t) - z)}\tau(t) = (\xi - z) \cdot \vec{\tau} + i(\xi - z) \cdot \vec{n}$$

avec $\xi = \gamma(t)$. D'où

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\xi) \left(\frac{\xi - z}{|\xi - z|^2} \cdot \vec{\tau}(\xi) + i \frac{\xi - z}{|\xi - z|^2} \cdot \vec{n}(\xi) \right) d\Gamma(\xi)$$

En remarquant que

$$\nabla_{\xi} \ln |\xi - z| = \frac{\xi - z}{|\xi - z|^2}$$

l'expression devient :

$$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau_{\xi}} (\ln |\xi - z|) u(\xi) d\Gamma(\xi)}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} (\ln |\xi - z|) u(\xi) d\Gamma(\xi)}_{I_2}$$

On reconnaît dans I_2 le potentiel de double couche. En intégrant par partie et en utilisant (5.83) I_1 devient :

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln |\xi - z| \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi) d\Gamma(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln |\xi - z| \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) d\Gamma(\xi)$$

D'où le résultat.

5.6.3 Angle solide

Considérons le cas particulier

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega^i \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^e \end{cases}$$

p vérifie les hypothèses du théorème de représentation (avec $k = 0$) qui s'écrit :

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\Gamma(y) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } x \in \Omega^i \\ 2\pi & \text{si } x \in \Gamma \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^e \end{cases}$$

On retrouve le théorème de Gauss de l'angle solide. En effet, l'angle solide sous lequel on voit l'élément de surface orientée $d\vec{\Gamma} = \vec{n}(y)d\Gamma(y)$ depuis x est :

$$d\Theta(x, y) = \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{\Gamma}$$

où r est la distance entre x et l'élément d'aire, \vec{u} le vecteur unitaire porté par la droite joignant x à l'élément d'aire :

$$\vec{u} = \frac{y - x}{|y - x|}$$

Au signe près, c'est l'aire de la portion de la sphère unité intersectée par le cône de sommet x qui s'appuie sur l'élément d'aire.

$$d\Theta(x, y) = \frac{(y - x) \cdot \vec{n}(y)}{|y - x|^3} d\Gamma(y) = -\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\Gamma(y)$$

Σ est une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , et $x \notin \Sigma$, l'angle solide sous lequel on voit Σ depuis x est donnée

$$\Theta(x) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma(y)$$

Le théorème de Gauss dit que l'angle solide sous lequel on voit une surface fermée est 4π (*i.e.* tout l'espace) si on est à l'intérieur et 0 si l'on se trouve à l'extérieur.

Le lecteur a probablement vu ce résultat en cours d'électrostatique avec un autre vocabulaire : Soit une charge électrique ponctuelle q positionnée en x . La loi de Coulomb dit que son champ électrostatique est donné par

$$\vec{E}(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

A partir de cette formule, le théorème de Gauss dit que le flux électrostatique sortant d'une surface fermée Γ est égal à q/ϵ_0 si x est à l'intérieur et 0 si x est à l'extérieur. Gauss en a déduit une généralisation de la loi de Coulomb :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où ρ est la densité volumique de charge.

5.6.4 Propriété de la moyenne

Proposition 6 (Propriété de la moyenne). *Si u est une fonction harmonique dans un ouvert Ω , alors elle vérifie la propriété de la moyenne : pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\rho > 0$ tel que la boule fermée de centre x et de rayon ρ est contenue dans Ω , $u(x)$ est égale à la moyenne de u sur la sphère S_ρ de centre x et de rayon ρ .*

Démonstration. En effet, considérons la fonction qui vaut u dans la boule $B(x, \rho)$ et 0 à l'extérieur. La formule de représentation intégrale donne :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S_\rho} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS_\rho(y) - \int_{S_\rho} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) u(y) dS_\rho(y) \\ &= \frac{1}{4\pi\rho} \int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS_\rho(y) + \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho} u(y) dS_\rho(y) \end{aligned}$$

où \vec{n} est la normale sortante sur S_ρ . Comme $\Delta u = 0$ dans B_ρ , on en déduit que

$$\int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS_\rho(y) = - \int_{B_\rho} \Delta u(y) dy = 0$$

D'où

$$u(x) = \frac{1}{\text{aire}(S_\rho)} \int_{S_\rho} u(y) dS_\rho(y)$$

d'où le résultat. □

5.6.5 Représentation intégrale de $\sin(k|x|)/(4\pi|x|)$

Proposition 7. *La partie imaginaire de la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz a la représentation intégrale suivante :*

$$(5.84) \quad \frac{\sin k|x|}{4\pi|x|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_S e^{-ik\nu \cdot x} dS(\nu)$$

où S est la sphère unité.

Démonstration. Posons

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} = E_r(x) + iE_i(x)$$

E_i est régulière et vérifie

$$-(\Delta + k^2)E_i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Soit B_R la sphère de centre x et de rayon R et S_R sa frontière. En considérant la fonction qui vaut E_i dans B_R et 0 à l'extérieur, on trouve :

$$\begin{aligned} E_i(x) &= \int_{S_R} G(x, y) \frac{\partial E_i}{\partial n_y}(y) dS_R(y) - \int_{S_R} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) E_i(y) dS_R(y) \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_R} \left(\frac{\partial E_i}{\partial n_y}(y) - \left(ik - \frac{1}{R} \right) E_i(y) \right) dS_R(y) \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_R} \left(\left(k \frac{\cos kr}{4\pi r} - \frac{\sin kr}{4\pi r^2} \right) e_r \cdot n - \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\sin kr}{4\pi r} \right) dS_R(y) \end{aligned}$$

avec $r = |y|$, $y = re_r$. Quand $R \rightarrow \infty$, x étant fixé, on a le développement :

$$\begin{aligned} r &= |(y - x) + x| \\ &= (R^2 + 2x \cdot (y - x) + |x|^2)^{1/2} \\ &= R \left(1 + 2\frac{x}{R} \cdot \nu + \frac{|x|^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad \text{avec } \nu = \frac{y - x}{|y - x|} \text{ la normale à } S_R \\ &= R + x \cdot \nu + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

On a aussi

$$e_r = \nu + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Un changement de variable nous ramène à intégrer sur S la sphère unité centrée à l'origine ($dS_R(y) = R^2 dS(\nu)$)

$$\begin{aligned} E_i(x) &= k \frac{e^{ikR}}{(4\pi)^2} \int_S \left(\cos(k(R + x \cdot \nu)) - i \sin(k(R + x \cdot \nu)) \right) dS(\nu) + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= k \frac{1}{(4\pi)^2} \int_S e^{-ik\nu \cdot x} dS(\nu) + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre R vers l'infini, on trouve le résultat. □

Ceci permet de réécrire la partie imaginaire de l'opérateur de simple couche. Introduisons

$$A^* \alpha(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S e^{ikx \cdot \nu} \alpha(\nu) dS(\nu)$$

A^* est un opérateur continu de $L^2(S)$ dans $L^2(\Gamma)$, c'est l'adjoint de l'opérateur de champ lointain

$$A \lambda(\nu) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma e^{-ik\nu \cdot x} \lambda(x) d\Gamma(x)$$

vu plus haut. La partie imaginaire S_i de S s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_i \lambda(x) &= \int_\Gamma \frac{\sin(k|x - y|)}{4\pi|x - y|} \lambda(y) d\Gamma(y) \\ &= k \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{4\pi} \int_S e^{-ik\nu \cdot (x - y)} dS(\nu) \lambda(y) d\Gamma(y) \\ &= k \frac{1}{4\pi} \int_S e^{ik\nu \cdot x} \left(\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma e^{-ik\nu \cdot y} \lambda(y) d\Gamma(y) \right) dS(\nu) \end{aligned}$$

soit

$$S_i = k A^* A$$

S_i est ainsi un opérateur positif. Nous verrons l'importance d'une telle factorisation dans le paragraphe 6.3 consacré à la méthode des multipôles rapides.

5.6.6 Ondes planes

L'onde plane

$$p(x) = e^{ik\nu \cdot x} \quad |\nu| = 1$$

vérifie l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3 et en particulier dans l'ouvert borné Ω^i . En la prolongeant par 0 à l'extérieur Ω^e , on vérifie les hypothèses du théorème de représentation intégrale ce qui donne :

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{ik(r+\nu \cdot y)}}{4\pi r} \left(ik\nu \cdot n(y) - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{y-x}{r} \cdot n(y) \right) d\Gamma(y) = \begin{cases} e^{ik\nu \cdot x} & \text{si } x \in \Omega^i \\ \frac{e^{ik\nu \cdot x}}{2} & \text{si } x \in \Gamma \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^e \end{cases}$$

avec $r = |x - y|$.

5.6.7 Les modes intérieurs

Considérons les modes propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$-(\Delta u_n^D + k_n^2 u_n^D) = 0 \quad \text{dans } \Omega^i$$

avec $u_n^D \in H_0^1(\Omega^i)$. k_n forme une suite qui tend vers l'infini, et les u_n^D forment une base orthogonale de $L^2(\Omega)$. Les sous-espaces propres associés E_n^D sont de dimension finie (d'après l'alternatie de Fredholm). Notons

$$\lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_n^D \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{2} + H \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_n^D \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{I}{2} + H \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_n^D \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$(5.85) \quad S\lambda_n^D = 0$$

et

$$(5.86) \quad \left(-\frac{I}{2} + D^* \right) \lambda_n^D = 0$$

Démontrons que

$$(5.87) \quad \boxed{\ker(S) = \ker \left(-\frac{I}{2} + D^* \right) = \left\{ \lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \quad \text{avec } u_n^D \in E_n^D \right\}}$$

En effet, si $S\lambda = 0$, la fonction

$$p = S\lambda$$

vérifie l'équation de Helmholtz à l'intérieur et à l'extérieur ainsi que la condition de radiation à l'infini. De plus,

$$p^e = p^i = S\lambda = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

D'où $p = 0$ dans Ω^e et donc

$$\lambda = \frac{\partial p^i}{\partial n}$$

p^i est solution du problème de Dirichlet homogène intérieur. D'où p^i est non nul ss'il existe n tel que $k = k_n^D$, à ce moment p^i est un vecteur propre $u_n \in E_n^D$

De même, si λ est tel que

$$\left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda = 0$$

alors la fonction

$$p = S\lambda$$

vérifie

$$\frac{\partial p^e}{\partial n} = \left(-\frac{I}{2} + D^*\right) \lambda = 0$$

D'où $p = 0$ dans Ω^e d'après l'unicité de la solution du problème de Neumann extérieur. On en déduit que

$$S\lambda = 0$$

D'où le résultat.

Le lecteur vérifiera, qu'en faisant le même raisonnement sur les modes propres du problème de Neumann intérieur que :

$$(5.88) \quad \boxed{\ker(N) = \ker\left(\frac{I}{2} + D\right) = \{\mu_n^N = (u_n^N)|_\Gamma \quad \text{avec } u_n^N \in E_n^N\}}$$

où E_n^N est un sous-espace propre du problème de Neumann intérieur.

5.7 Généralisation de la formule de représentation intégrale

5.7.1 Fonction de Green d'un problème aux limites

Nous avons vu que la solution élémentaire de l'opérateur différentiel est le principal ingrédient de la formule de représentation intégrale et de la méthode des équations intégrales. Nous avons utilisée la solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Nous pouvons généraliser cette notion de solution élémentaire dans beaucoup de situations en rajoutant des conditions aux limites. Dans ce cas, on appelle fonction de Green $G(x, y)$ la solution au point x de l'équation avec second membre élémentaire δ_y vérifiant les conditions aux limites. $G(x, y)$ n'est plus forcément de la forme $E(x - y)$, ni $g(|x - y|)$. On démontre des théorèmes de représentation intégrale analogues à celui que nous avons démontré plus haut, en substituant la fonction de Green vérifiant les conditions aux limites à celle du l'espace libre. Citons quelques exemples

Problèmes dans le demi-espace : lors de la résolution d'un problème aux limites autour d'un obstacle Ω^i de frontière Γ bornée, on est souvent amené à prendre en compte la présence du sol qu'on représente par un plan infini P (penser à un problème d'acoustique automobile). La frontière du domaine où l'on résout l'EDP est ainsi $\Gamma \cup P$. Supposons que sur P , on impose une condition de Dirichlet ou Neumann homogène. L'utilisation de la fonction de Green dans le demi-espace vérifiant la condition aux limites homogène de Dirichlet ou de Neumann sur le plan P permet de représenter la solution du problème par les mêmes formules que plus haut, avec la nouvelle fonction de Green, faisant intervenir uniquement des intégrales sur Γ . L'utilisation de ces fonctions de Green permet également de réduire la résolution de l'équation intégrale sur un objet symétrique à deux problèmes sur la moitié de l'objet. Le lecteur calculera en exercice les fonctions de Green du demi-espace avec conditions de Dirichlet et Neumann (on pensera au miroir plan).

Conditions aux limites sur Γ borné : En résolvant, numériquement ou analytiquement quand cela est possible, le problème aux limites avec une source élémentaire en un point y , on peut utiliser cette solution pour représenter en y la solution pour tout second membre de la condition aux limites. Nous ferons dans le paragraphe suivant les calculs pour le cas particulier de la condition de Dirichlet.

Milieux périodiques : par exemple les antennes réseaux. En utilisant la fonction de Green périodique, on peut se ramener à une formule de représentation intégrale sur la frontière d'une cellule élémentaire de périodicité.

Cas particuliers : dans beaucoup de cas particuliers d'EDP ou de conditions aux limites, on ne dispose pas d'une expression explicite de la fonction de Green. Néanmoins, il peut s'avérer intéressant de la calculer numériquement, et la stocker/tabuler pour l'utiliser ensuite dans un code d'équation intégrale.

5.7.2 Fonction de Green avec condition de Dirichlet - Réciprocité

Soient Ω^i un ouvert borné (l'ouvert intérieur), Ω^e l'ouvert complémentaire (dit ouvert extérieur) et Γ la frontière commune, surface fermée régulière. Contrairement au reste du chapitre : *la normale unitaire \vec{n} sur Γ est orientée de l'extérieur vers l'intérieur.*

Pour tout point x_s dans Ω^e , on note $U(x_s, x)$ la solution du problème aux limites suivant :

$$(5.89) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)U(x_s, x) = \delta(x - x_s) & \text{dans } \Omega^e \\ U(x_s, x) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ U(x_s, x) \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

$U(x_s, x)$ est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans Ω^e nulle sur Γ et vérifiant la condition de radiation à l'infini.

Comme nous l'avons mentionné au §5.4, ce problème se met sous la forme d'un problème de diffraction d'une onde incidente, solution des équations avec second membre dans tout l'espace :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)U^{in}(x_s, x) = \delta(x - x_s) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ U^{in}(x_s, x) \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

$U^{in}(x_s, x)$ est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld :

$$U^{in}(x_s, x) = G(x_s, x) = \frac{e^{ik|x_s-x|}}{4\pi|x_s-x|}$$

$U^{in}(x_s, x)$ est l'onde incidente dans notre problème, l'onde diffractée $U^d(x_s, x) = U(x_s, x) - U^{in}(x_s, x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)U^d(x_s, x) = 0 & \text{dans } \Omega^e \\ U^d(x_s, x) = -U^{in}(x_s, x) & \text{sur } \Gamma \\ U^d(x_s, x) \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

D'après les résultats démontrés au §3.4, ce problème admet une solution unique.

Soient x_s et x'_s deux points distincts dans Ω^e . Nous démontrons que

$$(5.90) \quad U(x_s, x'_s) = U(x'_s, x_s)$$

Ce résultat traduit le principe de réciprocité entre émetteur et récepteur. En effet

$$I = 0 = \int_{\Gamma \cup S_R \cup S(x_s, \varepsilon) \cup S(x'_s, \varepsilon)} \left(\frac{\partial U}{\partial \nu}(x_s, x) U(x'_s, x) - U(x_s, x) \frac{\partial U}{\partial \nu}(x'_s, x) \right) dS(x)$$

où $\vec{\nu}$ est la normale sortante à $\Omega_{\varepsilon, R}^e$ sur ses différentes frontières.

L'intégrale sur Γ est nulle à cause des conditions aux limites.

Avec les mêmes arguments que ceux du théorème de représentation intégrale, l'intégrale sur S_R tend vers 0 car l'intégrand est en $1/R^3$.

Pour étudier l'intégrale sur $S(x_s, \varepsilon)$, remarquons que $U(x'_s, x)$ est régulier sur $S(x_s, \varepsilon)$ et que $U(x_s, x) = G(x_s, x) + U^d(x_s, x)$ où $U^d(x_s, x)$ est régulier, et

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x_s, x) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left(-ik + \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad \text{pour } x \in S(x_s, \varepsilon)$$

Enfin, rappelons que l'élément d'aire sur $S(x_s, \varepsilon)$ est $dS_{x_s}^\varepsilon = \varepsilon^2 dS_{x_s}$, dS_{x_s} étant l'élément d'aire de la sphère unité centrée en x_s . L'intégrale de termes en $1/\varepsilon$ sur $S(x_s, \varepsilon)$ tend vers 0.

L'intégrale sur $S(x_s, \varepsilon)$ est la somme de deux termes, le premier tend vers $U^{in}(x_s, x)$, en effet :

$$\begin{aligned} \int_{S(x_s, \varepsilon)} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x_s, x) U(x'_s, x) dS_{x_s}^\varepsilon(x) &= \int_{S(x_s, \varepsilon)} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) (U(x'_s, x_s) + O(\varepsilon)) dS_{x_s}^\varepsilon(x) \\ &= U(x'_s, x_s) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0, en effet :

$$\begin{aligned} - \int_{S(x_s, \varepsilon)} U(x_s, x) \frac{\partial U}{\partial \nu}(x'_s, x) dS_{x_s}^\varepsilon(x) &= \int_{S(x_s, \varepsilon)} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon} + O(1) \right) O(1) dS_{x_s}^\varepsilon(x) \\ &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Au signe près, les intégrales sur $S(x'_s, \varepsilon)$ jouent un rôle symétrique et elles tendent vers $-U(x'_s, x_s)$.

Ainsi, un observateur en x_s perçoit un signal émis par une source en x'_s de la même façon qu'un observateur en x'_s qui reçoit un signal émis par une source en x_s .

Cette formule est toujours vraie pour $k = 0$ (équation de Laplace). Supposons de plus que Ω^i est la boule $B(0, R)$, Γ est la sphère S_R . Étant donné un point source x dans le domaine extérieur, on note x' son inverse par rapport à S_R :

$$x' = \frac{R^2}{|x|^2}x$$

Si on note A et A' les points d'abscisse x et x' respectivement. La sphère S_R est le lieu des points M (d'abscisse y) tel que

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{OA'}{R} = \frac{R}{OA}$$

Dans ce cas particulier, la fonction de Green s'écrit

$$(5.91) \quad U(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{4\pi|x'-y|}$$

5.7.3 Nouvelle représentation intégrale - Formule de Poisson en 3D

Soit u une fonction régulière dans $\overline{\Omega^e}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)u = 0 & \text{dans } \Omega^e \\ u \text{ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

En utilisant la même technique de démonstration que plus haut, nous démontrerons la nouvelle formule de représentation intégrale :

$$(5.92) \quad u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n_y}(x, y) u(y) d\Gamma(y) \quad \forall x \in \Omega^e$$

Notons que cette formule donne explicitement la solution du problème de Dirichlet extérieur en fonction de U .

En effet, soit $x \in \Omega^e$, on considère $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que la boule $B(x, \varepsilon) \subset \Omega^e$, et $R > 0$ suffisamment grand pour que $\Gamma \subset B(0, R)$. On note $\Omega_{\varepsilon, R}^e = (\Omega^e \cap B(0, R)) \setminus B(x, \varepsilon)$, et on intègre par partie

$$I = \int_{\Omega_{\varepsilon, R}^e} \left((\Delta U(x_s, x) + k^2 U(x_s, x)) u(x) - U(x_s, x) (\Delta u(x) + k^2 u(x)) \right) dx$$

On trouve :

$$0 = \int_{\Gamma \cup S_R \cup S(x_s, \varepsilon)} \left(\frac{\partial U}{\partial \nu}(x_s, x) u(x) - U(x_s, x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x)$$

Comme plus haut, les termes sur S_R tendent vers 0 quand R tend vers l'infini, et les termes sur $S(x_s, \varepsilon)$ tendent vers $u(x)$. Enfin, l'un des termes sur Γ est nul à cause de la condition aux limites sur U , le second est :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n}(x_s, x) u(x) d\Gamma(x)$$

d'où la formule.

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n_y}(x, y) u(y) d\Gamma(y) \quad \forall x \in \Omega^e$$

u solution du problème de Dirichlet extérieur avec donnée u_0 sur le bord est donnée explicitement par cette formule, en substituant u_0 à u dans l'intégrale.

Dans le cas particulier de l'équation de Laplace, en utilisant la fonction de Green (5.91), on retrouve en développant les calculs la formule de Poisson :

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{3/2}} u(R, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

où γ est l'angle \widehat{AOM} :

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$$

5.8 Formulations variationnelles

5.8.1 Calcul formel

Dans ce paragraphe, nous étudions les deux équations intégrales :

$$S\lambda = p_0$$

qui est apparue lors de la résolution du problème de Dirichlet extérieur (et intérieur), et

$$-N\mu = g$$

qui permet de résoudre simultanément les problèmes de Neumann intérieur et extérieur.

Nous cherchons à mettre ces deux équations sous forme variationnelle. Formellement, nous voulons écrire :

$$\int_{\Gamma} S\lambda(x) \overline{\lambda^t}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_0(x) \overline{\lambda^t}(x) d\Gamma(x)$$

pour toute fonction test λ^t dans un espace à déterminer. Nous avons vu au chapitre 3 que dans Ω^i la solution variationnelle de l'équation de Helmholtz est dans $H^1(\Omega^i)$ et à l'extérieur dans $H^1(\Omega^e \cap B_R)$ pour toute boule de rayon R assez grand (pour contenir Ω^i). $\overrightarrow{\text{grad}} p$ est dans $H(\text{div})$ de part et d'autre de Γ . Par conséquent, λ qui est le saut de la dérivée normale de p devrait être dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Il nous faut alors donner un sens à $S\lambda$ pour $\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ alors que

dans les paragraphes précédents, nous avons travaillé avec des champs «réguliers». Il faut donner un sens à la forme sesquilineaire

$$\int_{\Gamma} S\lambda(x)\overline{\lambda^t}(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \lambda(y)\overline{\lambda^t}(x)d\Gamma(y)d\Gamma(x)$$

Pour cela, il faudra démontrer que $S\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ le dual de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour le problème de Neumann, on veut écrire :

$$-\int_{\Gamma} N\mu(x)\overline{\mu^t}(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} g(x)\overline{\mu^t}(x)d\Gamma(x)$$

Grâce à la nouvelle formule (5.37), on a après intégration par partie (cf. formule (A.36)) :

$$\int_{\Gamma} S(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \mu)(x) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \overline{\mu^t}(x)d\Gamma(x) + k^2 \int_{\Gamma} S(\mu \vec{n})(x) \cdot (\overline{\mu^t} \vec{n})(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} g(x)\overline{\mu^t}(x)d\Gamma(x)$$

soit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \left(\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \mu(y) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \overline{\mu^t}(x) - k^2 (\mu \vec{n})(x) \cdot (\overline{\mu^t} \vec{n})(x) \right) d\Gamma(y)d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} g(x)\overline{\mu^t}(x)d\Gamma(x) \end{aligned}$$

μ étant un saut de pression, l'espace serait naturellement $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Remarquons que si nous démontrons que S est continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, la forme sesquilineaire $\langle N\mu, \mu^t \rangle$ sera continue. Il est donc essentiel de bien étudier l'opérateur S .

En fait, nous pouvons généraliser la définition des distributions de simple et double couche à des densités dans les espace de Sobolev, et définir les potentiels comme le résultat de la convolution de la solution élémentaire E avec ces distributions. Nous avons choisi de définir ces opérateurs comme les solutions de problèmes de transmission, et grâce aux intégrales de volume obtenir des estimations de la norme de ces opérateurs.

Dans les démonstrations qui vont suivre, nous allons supposer que k est complexe avec une partie imaginaire strictement positive. Ceci simplifiera l'étude en rendant le problème coercif et fournira un contrôle facile de la norme de la solution. Le cas k réel est plus délicat.

Ces estimations pour k complexe peuvent servir à l'étude du problème temporel par application du théorème de Paley-Wiener.

Pour commencer, introduisons des normes de Sobolev dépendant de la fréquence, équivalentes aux normes classiques à fréquence fixée.

Dans ce qui suit, $k \in \mathbb{R} + ik_I$ avec $k_I > 0$ fixé.

5.8.2 Normes de Sobolev dépendant de la fréquence

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Rappelons la norme $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Cette définition suppose que les coordonnées sont adimensionnées. Si x est une variable d'espace homogène à une longueur, le deuxième terme a la dimension du premier divisée par une longueur au carré. Pour rendre cette définition cohérente, il faudrait pondérer le deuxième terme par exemple par $1/|k|^2$, le nombre d'onde étant homogène à l'inverse d'une longueur. Posons :

$$\|u\|_{1,|k|,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{|k|^2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Ceci revient à adimensionner les coordonnées, en faisant le changement de variable :

$$u_{|k|}(x) = \frac{1}{|k|^{d/2}} u\left(\frac{x}{|k|}\right)$$

et nous définissons la norme

$$\|u\|_{s,|k|,\Omega} = \|u_{|k|}\|_{s,\Omega}$$

équivalente à la norme $H^s(\Omega)$. En Fourier, ceci revient à modifier la définition de $H^s(\mathbb{R}^d)$

$$\|u\|_{s,\mathbb{R}^d}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

en

$$\|u\|_{s,|k|,\mathbb{R}^d}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \frac{|\xi|^2}{|k|^2}\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

On peut préciser les inégalités de trace et de relèvement. Si l'on note γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on peut démontrer qu'il existe une constante $C(\Gamma, k_I) > 0$ telle que

$$(5.93) \quad \|\gamma_0(u)\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,|k|,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Inversement, si $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que $u_0 = \gamma_0(u)$ et on a

$$(5.94) \quad \|u\|_{1,|k|,\Omega} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

De même, les champs de vecteurs dans l'espace de Hilbert $H(\text{div}, \Omega)$, *i.e.* espace des champs de vecteurs dans $L^2(\Omega)^3$ à divergence dans $L^2(\Omega)$, ont une trace normale $\gamma_n(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{n}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a

$$(5.95) \quad \|\gamma_n(\vec{v})\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{\text{div},|k|,\Omega} \quad \forall \vec{v} \in H(\text{div}, \Omega)$$

Cette application trace est surjective, et pour tout $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe $\vec{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ tel que $\gamma_n(\vec{v}) = g$ et

$$(5.96) \quad \|\vec{v}\|_{\text{div},|k|,\Omega} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \quad \forall \vec{v} \in H(\text{div}, \Omega).$$

5.8.3 L'opérateur intégral de simple couche

Lemme 2. Soit $p \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta p \in L^2(\Omega)$, $\Omega = \Omega^i \cup \Omega^e$. Notons

$$\lambda = \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right]$$

$\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a

$$(5.97) \quad \|\lambda\|_{-\frac{1}{2}, |\kappa|, \Gamma} \leq C(\Gamma, k_I) |\kappa|^{-\frac{1}{2}} \left(|\kappa|^2 |\nabla p|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Delta p|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. Le résultat se démontre par dualité. Soit $q_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relèvement q dans $H^1(\Omega)$ (donc dans $H^1(\mathbb{R}^3)$) tel que

$$\|q\|_{1, |\kappa|, \mathbb{R}^3} \leq C(\Gamma, k_I) |\kappa|^{-\frac{1}{2}} \|q_0\|_{\frac{1}{2}, |\kappa|, \Gamma}$$

On donne un sens au saut de la dérivée normale grâce à la formule de Green :

$$\langle \lambda, q_0 \rangle = \int_{\Omega} \Delta p(x) q(x) dx + \int_{\Omega} \nabla p(x) \cdot \nabla q(x) dx$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du relèvement choisi. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |\langle \lambda, q_0 \rangle| &\leq |\Delta p|_{L^2(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)} + |\nabla p|_{L^2(\Omega)} \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(|\Delta p|_{L^2(\Omega)}^2 + |\kappa|^2 |\nabla p|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{1, |\kappa|, \Omega} \\ &\leq C(\Gamma, k_I) |\kappa|^{-\frac{1}{2}} \left(|\Delta p|_{L^2(\Omega)}^2 + |\kappa|^2 |\nabla p|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|q_0\|_{\frac{1}{2}, |\kappa|, \Gamma} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 14. Soit $\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un unique $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$(5.98) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^i \cup \Omega^e) \\ [p] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

De plus, p dépend continûment de λ et on a

$$(5.99) \quad \|p\|_{1, |\kappa|, \mathbb{R}^3} \leq C(\Gamma, k_I) |\kappa|^{-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{-\frac{1}{2}, |\kappa|, \Gamma}$$

L'opérateur $\lambda \mapsto p$ est la généralisation de l'opérateur \mathcal{S} que nous avons défini précédemment pour λ régulier. Nous continuerons à le noter \mathcal{S} .

Notons $S = \gamma_0 \circ \mathcal{S}$. Cet opérateur est continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$(5.100) \quad \|S\lambda\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \leq C(\Gamma, k_I) \|\lambda\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

On a le résultat de coercivité :

$$(5.101) \quad \Re_{+\frac{1}{2}} \langle -ikS\lambda, \lambda \rangle_{-\frac{1}{2}} \geq C(\Gamma, k_I) |k|^{-1} \|\lambda\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma}^2$$

S est donc un isomorphisme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: pour tout $p_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un unique $\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que

$$S\lambda = p_0$$

λ est solution du problème variationnel

$$_{+\frac{1}{2}} \langle -ikS\lambda, \lambda^t \rangle_{-\frac{1}{2}} = _{+\frac{1}{2}} \langle -ikp_0, \lambda^t \rangle_{-\frac{1}{2}} \quad \forall \lambda^t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Démonstration. Le problème (5.98) a la formulation variationnelle suivante :

$$(5.102) \quad \begin{cases} \text{trouver } p \in V \text{ tel que} \\ a(p, q) = \Lambda(q) \quad \forall q \in V \end{cases}$$

où

$V = H^1(\mathbb{R}^3)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle p, q \rangle_V = \int_{\mathbb{R}^3} p(x) \bar{q}(x) dx + \frac{1}{|k|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p(x) \cdot \nabla \bar{q}(x) dx$$

$a(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire sur $V \times V$ définie par

$$a(p, q) = i\bar{k} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla p(x) \cdot \nabla \bar{q}(x) dx - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} p(x) \bar{q}(x) dx \right)$$

$a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$:

$$|a(p, q)| \leq |k|^3 \|p\|_V \|q\|_V$$

$a(\cdot, \cdot)$ est V -coercif :

$$\Re a(p, p) = k_I |k|^2 \|p\|_V^2$$

Λ est une forme antilinéaire continue sur V :

$$\Lambda(q) = i\bar{k} \langle \lambda, \gamma_0(q) \rangle_{+\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité de trace (5.93), on trouve

$$\|\Lambda\|_{V'} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{\frac{3}{2}} \|\lambda\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème variationnel (5.102) admet une solution unique qui de plus vérifie

$$\|p\|_V \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{-\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}$$

D'autre part, remarquons que

$$\Re \langle -ikS\lambda, \lambda \rangle = \Re a(\mathcal{S}\lambda, \mathcal{S}\lambda) = k_I |k|^2 \|\mathcal{S}\lambda\|_{1, |k|, \mathbb{R}^3}$$

En appliquant (5.97) à $p = \mathcal{S}\lambda$, et en utilisant $\Delta p = -k^2 p$, on trouve

$$\|\lambda\|_{-\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}^2 \leq C(\Gamma, k_I) |k|^3 \|p\|_{1, |k|, \mathbb{R}^3}^2$$

et donc

$$\Re \langle -ikS\lambda, \lambda \rangle \geq C(\Gamma, k_I) |k|^{-1} \|\lambda\|_{-\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}^2$$

□

Remarque 13. Pour résoudre l'équation intégrale de simple couche

$$S\lambda = p_0$$

on commence par multiplier par $-ik$ avant d'appliquer à des fonctions test. C'est cette formulation qui donne une partie réelle coercive. A k fixé, ceci n'a pas trop d'importance. Mais pour passer en temporel, cette remarque sera très importante. Elle conduit à la formulation stable du problème. Remarquons à ce propos que le terme ik apparaît naturellement lorsqu'on travaille avec τ le saut de vitesse normale plutôt que λ le saut d'accélération normale, i.e. saut de la dérivée normale de la pression. Physiquement, la puissance est liée au produit $p\bar{w}$ dont la partie réelle est la puissance active qui doit être positive.

5.8.4 La dérivée normale de l'opérateur intégral de double couche

Dans ce paragraphe, nous étudions l'équation intégro-différentielle suivante :

$$-\frac{1}{ik} N\mu = g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

avec

$$N\mu = - \left(\operatorname{rot}_\Gamma S(\overrightarrow{\operatorname{rot}_\Gamma \mu}) - k^2 \vec{n} \cdot S(\mu \vec{n}) \right)$$

Ceci résout le problème de Neumann avec une représentation de la pression en potentiel de double couche. Il est plus facile de considérer le problème en vitesse \vec{w} . Le saut de pression devient, à ik près, le saut de la divergence de \vec{w} . L'étude qui suit est calquée sur celle du paragraphe précédent ! Commençons donc par un lemme sur le saut de la divergence.

Lemme 3. Soit $\vec{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ tel $\nabla \operatorname{div} \vec{w} \in L^2(\Omega)$, avec $\Omega = \Omega^i \cup \Omega^e$. Notons

$$\mu = \frac{1}{ik} [\operatorname{div} \vec{w}]$$

$\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a

$$(5.103) \quad \|\mu\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{3}{2}} \left(|\nabla \operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)}^2 + |k|^2 |\operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. C'est également une trace par dualité. Soit $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relèvement $\vec{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ (donc dans $H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$) tel que

$$\|\vec{v}\|_{\operatorname{div},|k|,\Omega} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

On donne un sens au saut de la trace de la divergence grâce à la formule de Green :

$$(ik) \frac{1}{2} \langle \mu, g \rangle_{-\frac{1}{2}} = \int_{\Omega} \nabla \operatorname{div} \vec{w}(x) \cdot \vec{v}(x) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w}(x) \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du relèvement choisi. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |k| \frac{1}{2} \langle \mu, g \rangle_{-\frac{1}{2}} &\leq |\nabla \operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)^3} \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + |\operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)} |\operatorname{div} \vec{v}|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(|\nabla \operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)^3}^2 + |k|^2 |\operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|k|^2} |\operatorname{div} \vec{v}|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(|\nabla \operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)^3}^2 + |k|^2 |\operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{\operatorname{div},|k|,\Omega} \\ &\leq C(\Gamma, k_I) |k|^{-\frac{1}{2}} \left(|\nabla \operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)^3}^2 + |k|^2 |\operatorname{div} \vec{w}|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 15. Soit $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un unique $\vec{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ tel que

$$(5.104) \quad \begin{cases} \nabla \frac{1}{ik} \operatorname{div} \vec{w} - ik \vec{w} = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^i \cup \Omega^e) \\ [\vec{w} \cdot \vec{n}] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{1}{ik} [\operatorname{div} \vec{w}] = \mu & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Cette solution s'exprime en fonction de l'opérateur de simple couche

$$\vec{w} = \frac{1}{ik} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \mathcal{S}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} \mu) - k^2 \mathcal{S}(\mu \vec{n}) \right)$$

\vec{w} dépend continuellement de μ et on a

$$(5.105) \quad \|\vec{w}\|_{\operatorname{div},|k|,\mathbb{R}^3} \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

Notons N l'opérateur

$$N : \mu \mapsto -ik \gamma_n(\vec{w})$$

Cet opérateur est continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$(5.106) \quad \|N\mu\|_{-\frac{1}{2},|k|,\Gamma} \leq C(\Gamma, k_I)|k|^2 \|\mu\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

On a le résultat de coercivité :

$$(5.107) \quad \Re_{+\frac{1}{2}} \langle -\frac{1}{ik} N\mu, \mu \rangle_{-\frac{1}{2}} \geq C(\Gamma, k_I)|k|^{-1} \|\mu\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma}^2$$

N est donc un isomorphisme de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$: pour tout $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un unique $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que

$$-\frac{1}{ik} N\mu = g$$

μ est solution du problème variationnel suivant :

$$+\frac{1}{2} \langle -\frac{1}{ik} N\mu, \mu^t \rangle_{-\frac{1}{2}} \quad \forall \mu^t \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Démonstration. Le problème (5.105) a pour formulation variationnelle :

$$(5.108) \quad \begin{cases} \text{trouver } \vec{w} \in V \text{ tel que} \\ a(\vec{w}, \vec{v}) = M(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \end{cases}$$

où

$V = H(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_V = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{w}(x) \cdot \vec{v}(x) dx + \frac{1}{|k|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div } \vec{w}(x) \text{div } \vec{v}(x) dx$$

$a(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire sur $V \times V$ définie par

$$a(\vec{w}, \vec{v}) = -\frac{1}{ik} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div } \vec{w}(x) \text{div } \vec{v}(x) dx - ik \int_{\mathbb{R}^3} \vec{w}(x) \cdot \vec{v}(x) dx$$

$a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$:

$$|a(\vec{w}, \vec{v})| \leq |k| \|\vec{w}\|_V \|\vec{v}\|_V$$

$a(\cdot, \cdot)$ est V -coercif :

$$\Re a(\vec{w}, \vec{w}) = k_I \|\vec{w}\|_V^2$$

M est une forme antilinéaire continue sur V :

$$M(\vec{v}) = -\frac{1}{2} \langle \mu, \gamma_n(\vec{v}) \rangle_{-\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité de trace (5.95), on trouve

$$\|M\|_{V'} \leq C(\Gamma, k_I)|k|^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{\frac{1}{2},|k|,\Gamma}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème variationnel (5.102) admet une solution unique qui de plus vérifie

$$\|\vec{w}\|_V \leq C(\Gamma, k_I) |k|^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}$$

D'autre part, remarquons que

$$\Re_{+\frac{1}{2}} \langle -\frac{1}{ik} N\mu, \mu \rangle_{-\frac{1}{2}} = \Re a(\vec{w}, \vec{w})$$

En utilisant l'inégalité (5.103) avec $\nabla \operatorname{div} \vec{w} = -k^2 \vec{w}$, on trouve

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}^2 \leq C(\Gamma, k_I) |k| \|\vec{w}\|_V^2$$

d'où

$$\Re_{+\frac{1}{2}} \langle -\frac{1}{ik} N\mu, \mu \rangle_{-\frac{1}{2}} \geq C(\Gamma, k_I) |k|^{-1} \|\mu\|_{\frac{1}{2}, |k|, \Gamma}^2$$

d'où le résultat de coercivité. □

Chapitre 6

Méthode des éléments finis de frontière

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions sur un cas simple l'approximation des équations intégrales par la méthode des éléments finis de frontière, par opposition à la méthode des éléments finis de volume qui s'intéresse à l'EDP. Dans la littérature anglo-saxonne, cette méthode est souvent désignée par son acronyme BEM pour Boundary Element Method.

Au lieu de discrétiser directement l'EDP, on discrétise une équation intégrale dont la solution permet de remonter à la solution de l'EDP grâce à la formule de représentation intégrale. Partant de la formulation variationnelle de l'équation intégrale, faisant intervenir des intégrales doubles (surface-surface), l'approximation de l'espace variationnel par un espace discret d'éléments finis de frontière conduit à un système linéaire avec une matrice pleine complexe, souvent symétrique. Ceci détermine les densités (par exemple les sauts de pression et vitesse normale en acoustique) qui permettent dans un deuxième temps de déduire le champ en n'importe quel point de l'espace grâce à la formule de représentation intégrale.

Cette méthode est connue pour sa grande précision. En effet, la représentation intégrale basée sur le modèle discrétisé, vérifie exactement l'EDP (sous réserve de bien calculer les intégrales qui interviennent dans les formules) et la condition de radiation à l'infini : c'est dans le noyau de Green ! L'erreur de discrétisation provient d'une part de l'approximation de la géométrie, d'autre part de celle de la condition aux limites, qui est vérifiée au sens faible. Notons qu'industriellement, l'étape de préparation des données de calcul est très lourde et consommatrice en temps ingénieur. La simplification de l'étape de maillage (de surface plutôt que de volume), dès qu'il s'agit d'objet industriels complexes, est un autre intérêt pratique de la méthode. Le maillage doit bien approcher la vraie géométrie tout en respectant la longueur d'onde. Pour des applications où l'on s'intéresse au champ lointain, un pas de maillage de l'ordre du cinquième de la longueur d'onde suffit en général. On trouve dans la littérature une autre approximation des équations intégrales par la méthode de collocation. Elle a été populaire chez les ingénieurs, car elle conduit à une intégration approchée assez simple à mettre en œuvre informatiquement, et de plus l'assemblage de la matrice ne faisant pas intervenir d'intégrale double (provenant d'une intégration avec un point de Gauss) est plus rapide qu'avec une méthode variationnelle et un calcul pré-

cautionneux de ces intégrales. Ceci se fait au détriment de la précision. On est souvent obligé de surmailler pour atteindre une bonne précision. Or l'étape d'assemblage de la matrice a une complexité en $O(N^2)$, où N est le nombre d'inconnues, et l'étape de résolution par méthode directe est en $O(N^3)$. Pour des problèmes pratiques, l'étape dimensionnante est l'étape de résolution du système linéaire. Pour un nombre d'inconnues grandissant, la résolution directe n'est plus possible, même avec les plus gros ordinateurs. Nous présentons la méthode des multipôles rapides qui permet de résoudre le système par méthode itérative, réclamant à chaque itération de savoir calculer le produit matrice fois vecteur. Cette méthode permet de calculer une bonne approximation de ce produit sans jamais assembler toute la matrice et avec une complexité en $O(N \ln N)$ au lieu de $O(N^2)$. Cette méthode développée récemment est en train de s'imposer dans l'industrie avec l'extension croissante de son domaine d'applications.

6.2 Méthode des éléments finis de frontière en domaine fréquentiel

6.2.1 Approximation variationnelle

Considérons l'équation intégrale de simple

$$S\lambda = p_0$$

qui permet de résoudre simultanément les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur pour l'équation de Helmholtz. On commence par mettre ce problème sous forme variationnel :

$$\begin{cases} \text{trouver } \lambda \in V \text{ tel que} \\ s(\lambda, \lambda^t) = \mathcal{P}_0(\lambda^t) \quad \forall \lambda^t \in V \end{cases}$$

avec $V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

$$s(\lambda, \lambda^t) = {}_{+\frac{1}{2}} \langle S\lambda, \lambda^t \rangle_{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathcal{P}_0(\lambda^t) = {}_{+\frac{1}{2}} \langle p_0, \lambda^t \rangle_{-\frac{1}{2}}$$

L'approximation par éléments finis de frontière consiste d'abord à approcher la surface par un maillage \mathcal{T}_h en triangle par exemple. On note Γ_h la surface Γ approchée. Ce maillage vérifie les propriétés habituelles (sur l'intersection de deux triangles, la qualité des éléments...). Pour espérer avoir des résultats raisonnables, il faut que la taille h des éléments soit plus petite que la longueur d'onde. Pour la plupart des applications, notamment celle où l'on s'intéresse au champ lointain, une taille de triangles inférieure au cinquième de la longueur d'onde est suffisante. Le nombre de triangle croît donc comme le carré de la fréquence.

On approche ensuite l'espace variationnel V par l'espace

$$V_h^0 = \{\lambda_h = \lambda_i \text{ sur le triangle } T_i, T_i \in \mathcal{T}_h\}$$

C'est une approximation dite P^0 . Cette approximation est conforme : $V_h \subset V$ et en faisant tendre h vers 0, on approche de mieux en mieux l'espace V et moyennant un opérateur de projection de Γ_h sur Γ , on peut exhiber un opérateur d'interpolation et démontrer de bonnes estimations.

Notons N le nombre de triangles. L'espace V_h^0 est de dimension N , et l'on dispose d'une base simple : $\varphi_i, i = 1, \dots, N$, avec

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{aire}(T_i)} & \text{sur le triangle } T_i \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\lambda_h \in V_h$ est représenté par le vecteur Λ^h des coordonnées de λ_h dans cette base :

$$\lambda_h(x) = \sum_{i=1}^N \Lambda_i^h \varphi_i(x)$$

Le problème approché consiste en

$$\begin{cases} \text{trouver } \lambda_h \in V_h \text{ tel que} \\ s_h(\lambda_h, \lambda_h^t) = \mathcal{P}_{0,h}(\lambda_h^t) \quad \forall \lambda_h^t \in V_h \end{cases}$$

où

$$s_h(\lambda_h, \lambda_h^t) = \int_{\Gamma_h \times \Gamma_h} G(x, y) \lambda_h(y) \lambda_h^t(x) d\Gamma_h(y) d\Gamma_h(x)$$

et

$$\mathcal{P}_{0,h}(\lambda_h^t) = \int_{\Gamma_h} \widetilde{p_{0,h}}(x) \lambda_h^t(x) d\Gamma_h(x)$$

$\widetilde{p_{0,h}}$ étant obtenu à l'aide de l'opérateur de l'interpolation. En général, p_0 est la trace d'une onde incidente, par exemple une onde plane. On prend alors pour $\widetilde{p_{0,h}}$, la trace de celle-ci sur le maillage.

Notons S^h la matrice $N \times N$ suivante :

$$S_{i,j}^h = s_h(\varphi_j, \varphi_i) = \frac{1}{\text{aire}(T_i)} \frac{1}{\text{aire}(T_j)} \int_{T_i} \int_{T_j} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dT_j(y) dT_i(x)$$

S^h est une matrice pleine complexe symétrique (non hermitienne).

Notons P_0^h le vecteur de coordonnées

$$P_{0,i}^h = \frac{1}{\text{aire}(T_i)} \int_{T_i} \widetilde{p_{0,h}}(x) dT_i(x)$$

Le problème discret est équivalent à résoudre le système

$$(6.1) \quad S^h \Lambda^h = P_0^h$$

On démontre que si k^2 n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour l'opérateur $-\Delta$, alors si le maillage est suffisamment fin (h suffisamment petit), le problème discret (6.1) admet une unique solution. Dans la pratique, il suffit souvent que le pas du maillage h soit inférieur à une fraction de la longueur d'onde, de l'ordre de $\lambda/5$.

Une fois l'équation intégrale discrète (6.1) résolue, on peut représenter le champ en tout point grâce à la formule de représentation intégrale. C'est une formule de représentation discrète au sens où d'une part les intégrales sont calculées sur la surface facétisée Γ_h

$$u_h(x) = \int_{\Gamma_h} G(x, y) \lambda_h(y) d\Gamma_h(y) = \sum_{j=1}^N \Lambda_j^h \frac{1}{\text{aire}(T_j)} \int_{T_j} G(x, y) dT_j(y)$$

et que les intégrales sur les triangles T_j sont calculées par des formules approchées.

6.2.2 Remarques sur la résolution du problème discret

On voit que la mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis de frontière est bien plus complexe que celle des éléments finis de volume appliqués à la résolution d'une EDP. Le «ticket d'entrée» est cher !

D'abord, nous sommes amenés à calculer des intégrales singulières, la précision du résultat, et l'utilité du calcul, dépendant bien sûr de la précision du calcul de celles-ci. D'un point de vue informatique, nous avons à gérer de gros volumes de données. En effet, bien qu'on ait gagné une dimension d'espace - d'un problème d'EDP dans un volume on s'est ramené à problème intégral posé sur une surface - la matrice du système est pleine et donc on peut être pénalisé en stockage mémoire/disque et en temps de calcul. Notons qu'en respectant un pas de maillage h en $\lambda/5$ (en tout cas proportionnel à la longueur d'onde λ), on voit que le nombre de degrés de liberté, ici le nombre de triangles, croît comme $O(\lambda^{-2}) = O(f^2)$, où $f = c/\lambda$ est la fréquence. L'occupation mémoire/disque croît comme f^4 .

Le système peut être résolu à l'aide d'une factorisation LDL^t complexe. La complexité de la factorisation est en $O(N^3) = O(f^6)$. Dans la pratique, la factorisation est praticable pour une taille de problème l'ordre de quelques dizaines de milliers d'inconnues sur un PC de bureau et quelques centaines de milliers sur un cluster de PC. Au delà, il faut changer la méthode résolution et résoudre le système à l'aide d'une méthode itérative. Néanmoins le produit matrice-vecteur en $O(N^2) = O(f^4)$ reste très cher. La méthode des multipôles présentée dans le paragraphe suivant, permet de diminuer cette complexité à $O(N \log N)$.

6.2.3 Principe de réciprocité

Nous avons démontré au §5.7.2 le principe de réciprocité entre émetteur et récepteur. Vérifions ce qu'il en est pour le problème discrétisé.

Considérons une source élémentaire positionnée au point $x_s \in \Omega^e$. L'équation intégrale discrétisée s'écrit :

$$S^h \Lambda_{x_s}^h = -G_{x_s}$$

où la i ème coordonnée du vecteur G_{x_s} est donnée par

$$(G_{x_s})_i = \frac{1}{\text{aire}(T_i)} \int_{T_i} G(x_s, x) dT_i(x)$$

G étant la fonction de Green de l'équation de Helmholtz. On suppose que h est suffisamment petit pour que la matrice S^h soit inversible.

Le champ total discret en un point $x \neq x_s$ quelconque dans l'espace est la somme du champ incident $G(x_s, x)$ et du champ diffracté $S^h \lambda_{x_s}^h$:

$$U_h(x_s, x) = G(x_s, x) + \sum_{j=1}^N (\Lambda_{x_s}^h)_j \frac{1}{\text{aire}(T_j)} \int_{T_j} G(x, y) dT_j(y)$$

Ainsi si x_s et x'_s sont deux points distincts dans Ω^e , on a

$$U_h(x_s, x'_s) = G(x_s, x'_s) + {}^t(\Lambda_{x_s}^h) G_{x'_s}$$

Or

$$\Lambda_{x_s}^h = -(S^h)^{-1} G_{x_s}$$

On a

$$G(x_s, x'_s) = G(x'_s, x_s)$$

D'autre part, comme S^h est symétrique, son inverse l'est aussi et on a

$${}^t(\Lambda_{x_s}^h)(G_{x'_s}) = -{}^t(G_{x_s})(S^h)^{-1}(G_{x'_s}) = -{}^t(G_{x'_s})(S^h)^{-1}(G_{x_s}) = {}^t(\Lambda_{x'_s}^h)(G_{x_s})$$

On en déduit que l'approximation variationnelle conserve le principe de réciprocité :

$$U_h(x_s, x'_s) = U_h(x'_s, x_s)$$

6.3 Méthode des multipôles rapides

6.3.1 Méthode mono-niveau

Premier survol

Le but de cette partie est de présenter rapidement, sans détailler, et de manière si possible didactique la méthode multipôle rapide dans sa version simplifiée à un niveau. Les éléments présentés ici doivent suffire à implémenter une première méthode multipôle mono-niveau.

Principe de base La méthode multipôle rapide permet de réaliser de manière économique des produits matrice-vecteur. On se donne donc un vecteur $\Lambda^h = (\Lambda_i^h)_{1 \leq i \leq N}$ représentant la fonction $\lambda_h(x) = \sum_{1 \leq j \leq N} \Lambda_j^h \varphi_j(x)$, et on cherche à calculer le produit $S^h \Lambda^h$ dont la i -ième coordonnée s'écrit :

$$(6.2) \quad (S^h \Lambda^h)_i = \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(x, y) \lambda_h(x) \varphi_i(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

L'idée de base de la méthode multipôle est de tenter de séparer les variables x et y afin de pouvoir séparer les deux intégrales. Pour cela, il nous faut réécrire le noyau de Green différemment. Cette réécriture déterminera la forme que prendront les fonctions manipulées par la FMM.

Simplification des termes matriciels Pour des équations intégrales plus compliquées, on pourra toujours se ramener à calculer des expressions de la forme :

$$(6.3) \quad \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(x, y) f(x) g(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

avec des fonctions f et g scalaires.

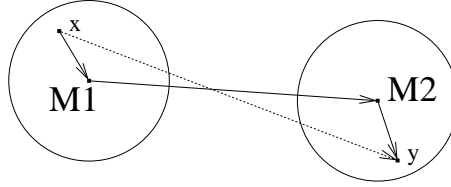


FIG. 6.1 – Configuration type

Décomposition du noyau On se donne quatre points x , M_1 , M_2 et y . Pour fixer les idées, on suppose que l'on est dans la configuration représentée figure 6.1 : x est proche de M_1 , y est proche de M_2 , M_1 et M_2 sont éloignés. On précisera ultérieurement le sens précis de ces assertions. Le vecteur \vec{xy} se décompose bien sûr sous la forme :

$$\vec{xy} = \vec{xM_1} + \vec{M_1M_2} + \vec{M_2y}$$

On souhaiterait donc décomposer le noyau de Green $G(x, y)$ de la même manière. Le théorème d'addition de Gegenbauer permet de faire cela. Précisons tout d'abord quelques notations : on désigne par S la sphère unité de \mathbb{R}^3 , par \vec{s} un point générique de S , par P_l le polynôme de Legendre de rang l , et par $h_l^{(1)}$ la fonction de Hankel sphérique du premier type de rang l . On a alors la décomposition suivante pour le noyau de Green :

$$(6.4) \quad G(x, y) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\vec{s} \in S} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{xM_1}} T_{M_1 \vec{M_2}}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M_2y}} d\vec{s}$$

où

$$(6.5) \quad T_{M_1 M_2}^L(\vec{s}) = \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k \cdot |M_1 M_2|) P_l(\cos(\vec{s}, M_1 M_2))$$

Tâchons d'interpréter la formule (6.4). Elle comporte trois termes : le terme $e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}_1}$ transporte l'information du point source x au point M_1 . Le terme $T_{M_1 M_2}(\vec{s})$ assure le transfert de l'information entre M_1 et M_2 . Enfin, le terme $e^{ik\vec{s} \cdot M_2 y}$ transporte l'information jusqu'au point destination y . On voit que dans cette formule, les variables x et y sont bien séparées. La fonction (6.5) s'appelle *fonction de transfert*.

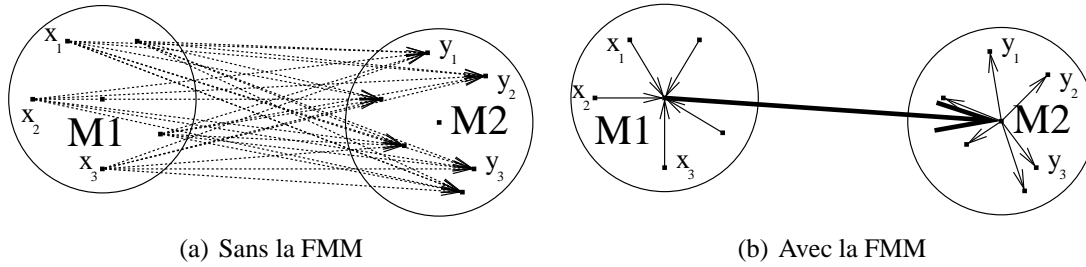


FIG. 6.2 – Traitement des interactions

L'intérêt de cette décomposition du noyau de Green est illustré sur la figure 6.2. Dans le cas où un ensemble de points x_i proches de M_1 agit sur un autre ensemble de points y_j proches de M_2 , la méthode classique (figure 6.2a) génère un grand nombre d'interactions, tandis que la méthode multipôle (figure 6.2b) centralise les informations en M_1 et M_2 et génère ainsi beaucoup moins de calculs.

On voit apparaître ici deux difficultés : d'une part l'intégrale sur \mathcal{S} dans (6.4) va devoir être discrétisée, d'autre part le nombre de termes de la somme (6.5) va devoir être fixé, et ces deux approximations devront être réalisées conjointement.

Découpage en domaine Afin de retrouver les points x et y de l'équation (6.3) dans une configuration proche de celle de la figure 6.1, on va procéder au découpage de la surface de l'objet traité Γ_h en sous-domaines de tailles homogènes. Il existe pour cela une infinité de méthodes possibles, on en a choisi une qui est à la fois simple et systématique : on conçoit une grille 3D cubique de pas a englobant Ω (figure 6.3), chaque intersection non-vide d'un cube de la grille et de la surface Γ_h constitue un sous-domaine de notre découpage.

Le découpage obtenu sur un objet plus réaliste est représenté sur la figure 6.4. Le maillage utilisé est celui d'un airbus A318 d'envergure 15 longueurs d'onde, comportant 23676 inconnues. Le découpage est constitué de 584 boîtes d'arête égale à une demi longueur d'onde.

L'équivalent 2D de ce partitionnement est représenté sur la figure 6.5. Les cellules ayant une intersection non vide avec Γ_h sont grisées. On note \mathcal{C} les cellules ainsi découpées, et M le centre de \mathcal{C} .

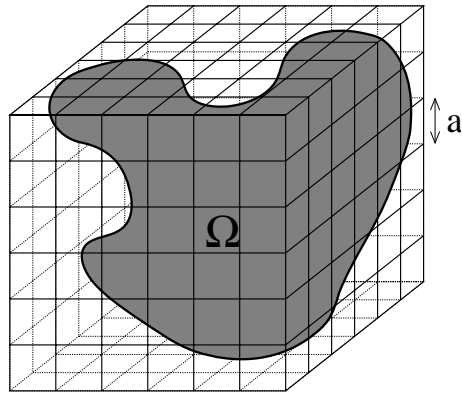


FIG. 6.3 – Découpage de Γ_h avec une grille 3D d'arête a

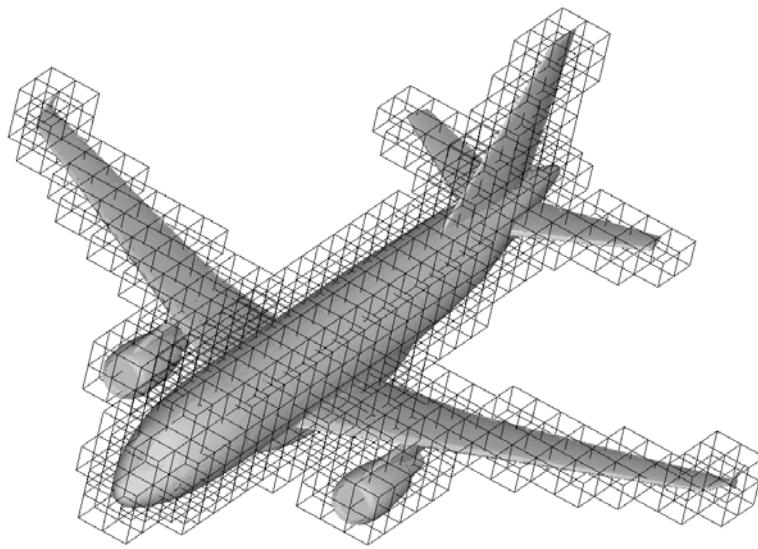


FIG. 6.4 – Découpage d'un airbus A318 avec une grille 3D

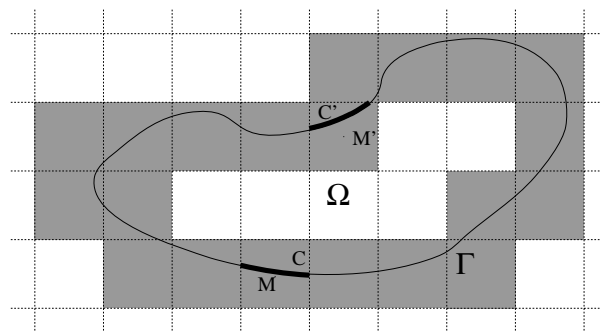


FIG. 6.5 – Découpage de Γ_h en sous-domaine (version 2D)

Interaction entre deux sous-domaines On se donne deux cellules \mathcal{C} et \mathcal{C}' de notre grille, de centres respectifs M et M' , et on cherche à calculer le terme d'interaction entre deux sous-domaines $\Gamma_h \cap \mathcal{C}$ et $\Gamma_h \cap \mathcal{C}'$, à savoir :

$$(6.6) \quad \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'} G(x, y) f(x) g(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

En utilisant la décomposition du noyau (6.4), en mettant de côté la constante $ik/16\pi^2$, et en supposant L fixé, ce terme peut s'écrire :

$$\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot M' y} d\vec{s} f(x) g(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

Réordonnons les intégrales :

$$(6.7) \quad \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) \left(\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} f(x) d\Gamma_h(x) \right) \right] e^{ik\vec{s} \cdot M' y} g(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

On voit apparaître trois phases dans le calcul de cette formule :

Initialisation : on calcule la fonction \mathcal{F}_C définie sur la sphère unité \mathcal{S} par :

$$(6.8) \quad \mathcal{F}_C(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} f(x) d\Gamma_h(x)$$

\mathcal{F}_C ne dépend que du courant f , de la cellule \mathcal{C} et de son centre M . Elle représente l'influence du domaine $\Gamma_h \cap \mathcal{C}$ sur l'extérieur. \mathcal{F}_C sera parfois appelée "fonction d'émission" de \mathcal{C} . D'une manière générale, les fonctions définies sur \mathcal{S} comme \mathcal{F}_C seront appelées "fonctions de radiation".

Transfert : on multiplie la fonction \mathcal{F}_C par la fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}^L$. Le produit résultant est toujours une fonction définie sur \mathcal{S} , elle représente l'action des courants f portés par $\Gamma_h \cap \mathcal{C}$ au point M' de l'espace.

Intégration : on termine le calcul en intégrant le résultat du transfert à la fois sur \mathcal{S} et sur $\Gamma_h \cap \mathcal{C}'$:

$$\int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) \mathcal{F}_C(\vec{s}) \right] e^{ik\vec{s} \cdot M' y} g(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

Troncature et discrétisation Troncature de la fonction de transfert

On va tenter d'utiliser la formule de décomposition du noyau (6.4) dans la configuration de la figure 6.5. Pour cela, il est tout d'abord nécessaire de choisir L dans la somme définissant la fonction de transfert (6.5).

On a donc deux cellules \mathcal{C} de centre M , \mathcal{C}' de centre M' et deux points $x \in \mathcal{C}$ et $y \in \mathcal{C}'$. On note :

$$(6.9) \quad \begin{cases} \vec{r}_0 &= M\vec{M}', \\ \vec{r} &= \vec{x}\vec{y} - M\vec{M}' = x\vec{M} + M'\vec{y} \end{cases}$$

On a donc $\vec{x}\vec{y} = \vec{r} + \vec{r}_0$. Le vecteur $\vec{x}\vec{y}$ se décompose comme la somme du vecteur \vec{r}_0 reliant les centres des cellules et du vecteur \vec{r} constituant le “reliquat”. On cherche à calculer le noyau de Green $G(|\vec{r} + \vec{r}_0|)$ à partir de la fonction de transfert $T_{\vec{r}_0}^L$. Nous donnons ici un résultat simplifié mais correct en première approximation. Sous la condition :

$$(6.10) \quad \frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}_0|} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

on peut se contenter de prendre $L = k|\vec{r}|$ termes dans la somme de la série (6.5) pour obtenir la convergence (La notation $L = k|\vec{r}|$ est un raccourci pour $L = \lfloor k|\vec{r}| \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). Dans la pratique, cette valeur de L s’avère convenable pour des valeurs de a supérieure à 2λ , mais conduit à une *FMM* peu précise en dessous. Pour une méthode précise à 10^{-3} (i.e. un écart relatif de 10^{-3} entre les produits matrice-vecteur classiques et multipôles), on peut prendre les valeurs présentées dans la table 6.1.

a	L
$\lambda/4$	8
$\lambda/2$	12
λ	20
2λ	32

TAB. 6.1 – Suggestions de valeurs pour a et L

Dans le cas d’un découpage de Γ_h par une grille cubique 3D d’arête a , on a :

$$(6.11) \quad |\vec{r}| \leq \sqrt{3}a$$

donc (6.10) sera vérifiée dès que :

$$|\vec{r}_0| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}a \approx 1,9a$$

Cette condition exclut toutes les cellules \mathcal{C}' ayant une face, une arête ou un sommet en commun avec \mathcal{C} , puisqu’on a alors $|\vec{r}_0|/a$ qui vaut 1 dans le premier cas, $\sqrt{2}$ dans le second et $\sqrt{3}$ dans le troisième. Bien sûr $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ est également exclu.

On qualifiera désormais de *voisines* deux cellules ayant au moins un sommet commun. On vient donc de voir que :

- Si \mathcal{C} et \mathcal{C}' ne sont pas voisines, la série (6.5) peut être tronquée au rang $L = k|\vec{r}|$. On peut alors calculer l’interaction entre $\Gamma_h \cap \mathcal{C}$ et $\Gamma_h \cap \mathcal{C}'$ à partir de (6.7).

- Si \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont voisines, on ne peut pas tronquer la fonction de transfert, on est donc obligé de calculer le terme (6.6) classiquement.

On notera par la suite $v(\mathcal{C})$ l'ensemble des cellules voisines de \mathcal{C} .

Discretisation de la sphère unité L étant désormais fixé, on a besoin de calculer l'intégrale de surface sur \mathcal{S} définie par :

$$\int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}} T_{\vec{r}_0}^L(\vec{s}) d\vec{s}$$

Les fonctions \mathcal{L}^2 de \mathcal{S} ont une base naturelle qui est celle des harmoniques sphériques, notée :

$$(Y_{l,m})_{l \geq 0, -l \leq m \leq l}$$

La fonction $T_{\vec{r}_0}^L$ appartient à l'espace engendré par les harmoniques de rang $l \leq L$: on dit qu'elle est de largeur de bande L .

Or le terme $e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}}$ se développe en série :

$$(6.12) \quad e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}} = \sum_{l \geq 0} (2l+1) i^l j_l^{(1)}(k \cdot |\vec{r}|) P_l(\cos(\vec{s}, \vec{r}))$$

De la même manière que l'on arrête la somme de la fonction de transfert $T_{\vec{r}_0}^L$ au rang L , on démontre que la série $e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}}$ peut être tronquée au rang L avec une erreur du même ordre. On déduit du résultat précédent que la fonction intégrée $T_{\vec{r}_0}^L e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}}$ est de largeur de bande $2L$, c'est à dire qu'elle peut s'écrire :

$$e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}} T_{\vec{r}_0}^L(\vec{s}) = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq 2L}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s})$$

Il nous faut trouver des points de quadrature \vec{s}_p et des poids ω_p qui intègrent exactement les harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ avec $0 \leq l \leq 2L$ et $-l \leq m \leq l$.

Le choix le plus simple est de prendre pour points d'intégration une distribution uniforme sur θ et sur ϕ :

$$\begin{cases} \theta_i = \pi \frac{i+1/2}{2L+1} & 0 \leq i \leq 2L, \\ \phi_j = 2\pi \frac{j}{2L+1} & 0 \leq j \leq 2L \end{cases}$$

associés aux poids d'intégration adéquats.

Le choix fait ici n'est pas optimal, mais il est le plus simple à implémenter, et est suffisant en première approche.

Récapitulatif On a désormais tous les éléments pour réaliser un produit matrice-vecteur multipôle à un niveau. On se donne un courant surfacique \vec{t} en entrée, et un découpage de Γ_h à travers une grille. Le produit $S^h \Lambda^h$ se réalise en deux parties :

Interactions proches : pour tout cellule \mathcal{C}' fixée, et pour toute fonction de base $\vec{\varphi}_j$ localisée dans \mathcal{C}' , on passe en revue les cellules \mathcal{C} voisines de \mathcal{C}' pour calculer de manière classique le terme d'interaction :

$$(6.13) \quad \sum_{\mathcal{C} \in v(\mathcal{C}')} \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'} G(x, y) f(x) \varphi_j(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

f est l'une des composantes de \vec{t} , ou bien $\text{div}_{\Gamma_h}(\vec{t})$. φ_j représente l'expression correspondante pour $\vec{\varphi}_j$. Le résultat de cette intégration constitue la partie “interaction proche” de la j -ième composante du vecteur $S^h \Lambda^h$.

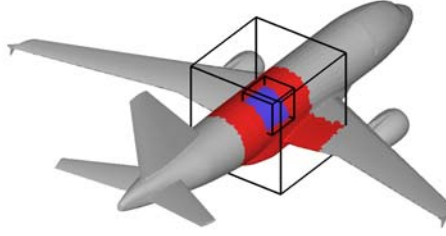


FIG. 6.6 – Interactions proches sur un Airbus A318

Cette partie du calcul est illustrée sur la figure 6.6 dans le cas d'un avion. Si \mathcal{C}' est la boîte centrale (dont l'intersection avec le maillage est en bleu), la grande boîte, et la portion rouge du maillage, constituent la zone voisine qui interagira avec \mathcal{C}' via l'équation (6.13).

Interactions Lointaines : le calcul se fait en trois étapes.

1. Initialisation : pour toute cellule \mathcal{C} , on calcule la fonction de radiation

$$(6.14) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}} e^{ik\vec{s} \cdot x} \vec{M} f(x) d\Gamma_h(x)$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} .

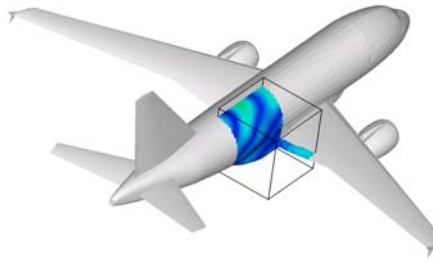


FIG. 6.7 – Initialisation de la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ à partir des courants surfaciques

La figure 6.7 illustre le fait que le calcul d'une fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ se réalise à partir des seuls courants surfaciques contenus dans $\Gamma_h \cap \mathcal{C}$. Notons que ces courants,

issus du vecteur \vec{t} donné en entrée du produit matrice-vecteur, ont un sens mathématique mais n'auront pas de sens physique tant que le solveur itératif n'aura pas convergé.

2. Transfert : pour toute cellule C' fixée, on passe en revue les cellules C non-voisine de C' pour calculer :

$$(6.15) \quad \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}) = \sum_{C \notin v(C')} T_{MM'}^L(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_C(\vec{s})$$

De la même manière que \mathcal{F}_C représente l'influence du domaine $\Gamma_h \cap C$ sur l'extérieur, la fonction $\mathcal{G}_{C'}$ représente l'influence de la partie de Γ_h loin de C' sur $\Gamma_h \cap C'$.

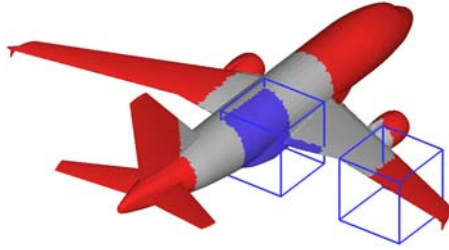


FIG. 6.8 – Transferts des fonctions de radiation entre cellules non-voisines

Sur la figure 6.8, $\Gamma_h \cap C'$ est tracé en bleu tandis que la portion non-voisine du maillage est tracée en rouge.

3. Intégration : pour toute cellule C' , et pour toute fonction de base φ_j localisée dans C' , on calcule l'intégrale :

$$(6.16) \quad \frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma_h \cap C'} \int_{\vec{s} \in S} \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} \varphi_j(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie “interaction lointaine” de la j -ième composante du vecteur $S^h \Lambda^h$, et se rajoute tout naturellement à la partie “interaction proche”.

6.3.2 Méthode multi-niveau

Premier survol : calcul à 2 niveaux

Nous présentons la méthode multi-niveau dans une version basique, ce qui nous permettra d'évoquer les concepts fondamentaux dans une relative simplicité.

Principe de base L'idée de base est d'appliquer une approche *divide-and-conquer* à la méthode multipôle, à la manière de l'algorithme de tri *quickSort* ou de la transformée de Fourier rapide. Dans l'algorithme *quickSort*, on divise le tableau à trier en deux moitiés que l'on trie séparément

avant de les fusionner. Dans l'algorithme FFT, on procède de la même manière. A chaque fois, l'opération (tri dans le premier cas, Fourier dans le second) effectuée sur chaque demi-ensemble rend triviale la même opération effectuée sur l'ensemble tout entier.

Dans notre cas, on a aussi une propriété de ce type : si on divise une cellule \mathcal{C} centrée en M en deux cellules \mathcal{C}_1 centrée en M_1 et \mathcal{C}_2 centrée en M_2 , on a la relation suivante entre fonctions de radiation définies par l'équation (6.8) :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}_1 M} \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1}(\vec{s}) + e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}_2 M} \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2}(\vec{s})$$

On va donc tenter de tirer partie de ce type de propriété pour écrire une méthode multipôle à deux niveaux.

Découpage hiérarchique On définit un découpage à deux niveaux de Γ_h (cf. figure 6.9). La grille “large” constitue le niveau 0. La grille fine constitue le niveau 1, elle est une subdivision de la précédente avec un pas deux fois plus petit.

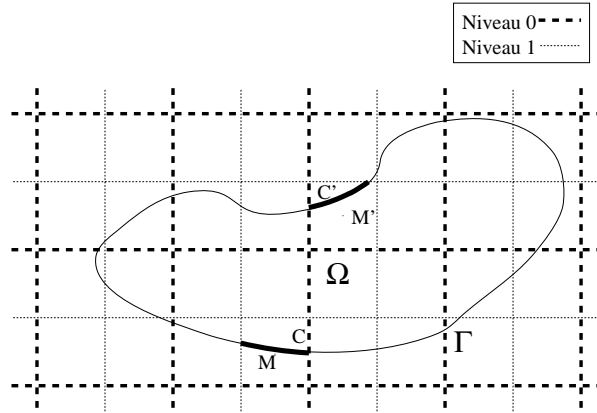


FIG. 6.9 – Découpage à deux niveaux de Γ_h

On définit une structure hiérarchique s'apparentant à un arbre entre ces deux grilles. Le niveau 0 est le haut de l'arbre, le niveau 1 le bas de l'arbre. Les cellules du niveau 1 issues de la division d'une cellule du niveau 0 sont appelés “enfants” de cette cellule. La relation inverse définit le “parent” d'une cellule. Ce type de lien est illustré par des flèches sur la figure 6.10. En trois dimensions, chaque cellule du niveau 0 a au plus huit enfants (on ne garde que les cellules ayant une intersection non-vide avec Γ_h), et chaque cellule du niveau 1 a exactement un parent.

Pour circuler au sein de cet arbre, définissons quelques notations. On indique le niveau d'une cellule par un exposant entre parenthèse à côté du nom de cette cellule : $\mathcal{C}^{(0)}$ ou $\mathcal{C}^{(1)}$. On note $p(\mathcal{C})$ le parent d'une cellule, et $e(\mathcal{C})$ l'ensemble des enfants d'une cellule. Enfin, on qualifie de voisins deux cellules ayant au moins un sommet en commun *et se trouvant au même niveau de l'arbre*. On conserve la notation $v(\mathcal{C})$ pour désigner l'ensemble des cellules voisines de \mathcal{C} .

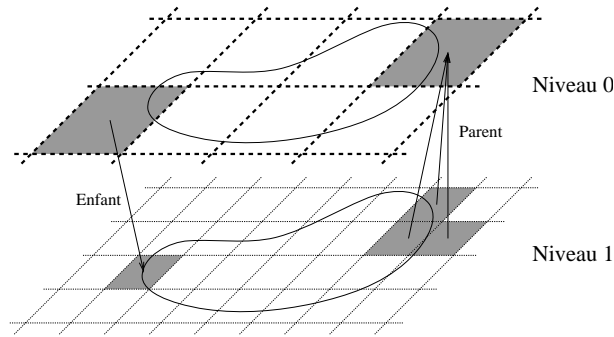
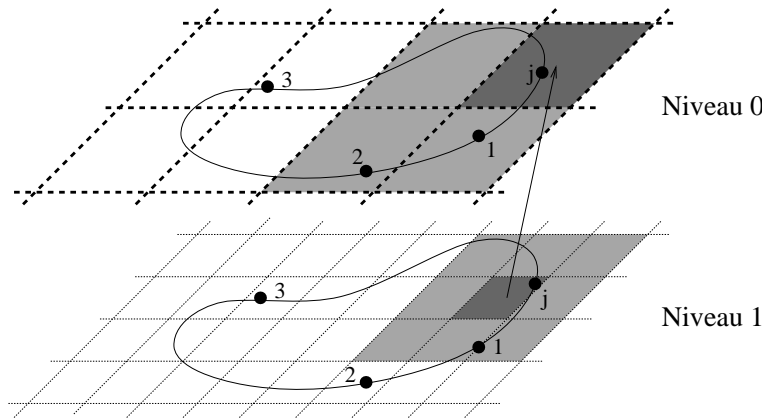


FIG. 6.10 – Structure hiérarchique

Quelles interactions à quel niveau ? Avec deux grilles, on a potentiellement deux méthodes multipôle, une au niveau 0, l’autre au niveau 1. Essayons de voir quand utiliser chacune des deux.

On se donne une cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$ ainsi qu’une fonction de base φ_j localisée dans $\mathcal{C}'^{(1)}$. Sur la figure 6.11, on a représenté en gris foncé la cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$ ainsi que son parent $p(\mathcal{C}'^{(1)})$. En gris clair, on a leurs voisins respectifs. On a également représenté par des points épais sur chacun des deux niveaux quatre degrés de liberté sur Γ_h , dont le numéro j localisé dans $\mathcal{C}'^{(1)}$.

De manière schématique, pour un niveau donné, cette zone gris clair représente la portion du maillage qui ne peut pas interagir en mode “multipôle” avec la fonction de base φ_j localisée dans la cellule gris foncé (cf. section 6.3.1). Evidemment, la zone blanche contient la portion du maillage qui peut interagir en mode “multipôle” avec φ_j .


FIG. 6.11 – Voisins de $\mathcal{C}'^{(1)}$ et de son parent $p(\mathcal{C}'^{(1)})$.

Pour traiter l’interaction d’un degré de liberté donné avec le degré de liberté j , trois cas de figure se présentent. Ils sont représentés sur la figure 6.11.

- L’interaction entre le dl 1 et le dl j ne peut se faire en mode multipôle ni au niveau 0, ni au niveau 1. On est obligé de la traiter en mode proche.

- Plus les cellules sont grandes, plus les transferts de la FMM sont lents (le nombre L augmente) mais ils sont de moins en moins nombreux : c'est ce deuxième aspect qui est le plus déterminant. Par conséquent, on va chercher à traiter les interactions en mode multipôle chaque fois que c'est permis, et ce au plus haut niveau possible (ici, au niveau 1 pour le dl 2, au niveau 0 pour le dl 3).

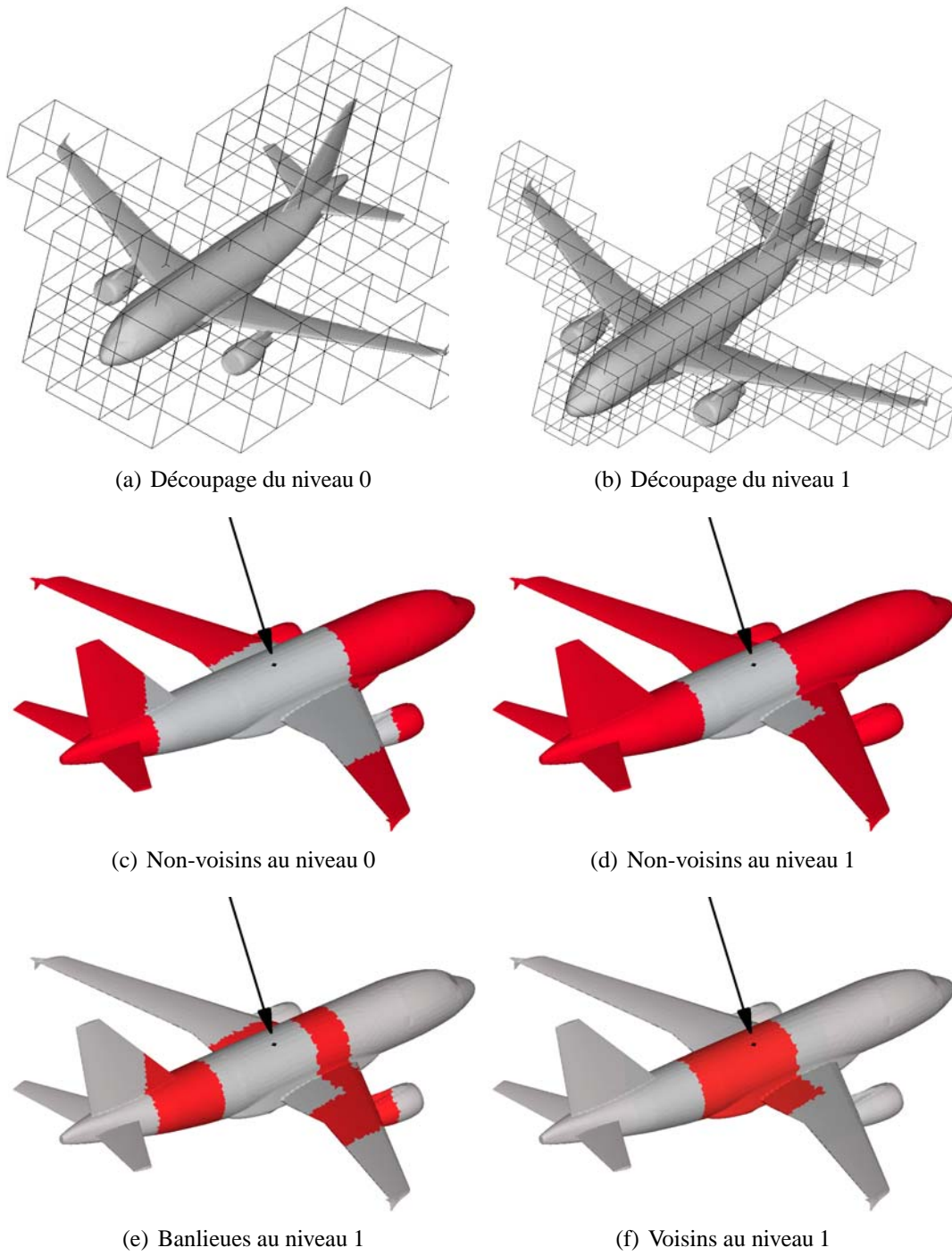


FIG. 6.13 – Méthode multipôle à deux niveaux sur un airbus A318

où l'on note $\complement \mathcal{A}$ le complémentaire d'un ensemble \mathcal{A} .

La figure 6.13 illustre ce découpage sur un cas réel. Les images 6.13a et 6.13b montrent les découpages des niveaux 0 et 1. Sur les figures suivantes, on a repéré avec une flèche un degré de liberté sur le dos de l'appareil. Les figures 6.13c et 6.13d montrent en rouge les portions de maillage considérées comme non-voisines de cette inconnue aux niveaux 0 et 1, la figure 6.13e montre les banlieues au niveau 1 du degré de liberté pointé, et la figure 6.13f montre la portion voisine au niveau 1. On voit clairement que les banlieues au niveau 1 sont obtenus par soustraction ensembliste des portions de maillage non-voisines au niveau 1 et 0.

Le calcul de la composante du produit matrice-vecteur correspondant au degré de liberté pointé se fera alors :

- via la méthode multipôle au niveau 0 pour la portion rouge de la figure 6.13c ;
- via la FMM au niveau 1 pour la portion rouge de la figure 6.13e ;
- via une méthode classique (non-multipôle) pour la portion rouge de la figure 6.13f.

Algorithme continu On va écrire un premier algorithme multipôle à deux niveaux, sans tenir compte pour l'instant des problèmes de discrétisation ou de nombre de pôles.

Pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$ fixée, et pour toute fonction de base φ_j localisée dans $\mathcal{C}'^{(1)}$, on cherche à calculer la j -ième composante du produit matrice-vecteur $(S^h \Lambda^h)$. Elle s'écrit :

$$(S^h \Lambda^h)_j = \int_{x \in \Gamma_h} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} G(x, y) \lambda_h(x) \varphi_j(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

Chacun des trois sous-ensembles identifiés sur les figures 6.12 et 6.13 va être traité séparément.

Les cellules voisines

Comme dans le cas mono-niveau, on traite tout d'abord l'interaction de $\mathcal{C}'^{(1)}$ avec ses voisines via un produit matrice-vecteur classique. Le terme correspondant s'écrit :

$$\sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in v(\mathcal{C}'^{(1)})} \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(1)}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} G(x, y) \lambda_h(x) \varphi_j(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

Les cellules banlieues

On traite ensuite l'interaction de $\mathcal{C}'^{(1)}$ avec ses banlieues via une FMM au niveau 1. Le terme correspondant s'écrit :

$$\sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in b(\mathcal{C}'^{(1)})} \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(1)}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} G(x, y) \lambda_h(x) \varphi_j(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

On utilise la décomposition du noyau (6.4), en mettant de côté la constante $ik/16\pi^2$, et en supposant L fixé. En réordonnant les intégrales, le terme précédent peut s'écrire :

$$\int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'y} \left[\sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in b(\mathcal{C}'^{(1)})} T_{\vec{M}\vec{M}'}^{L(1)}(\vec{s}) \left(\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(1)}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x) \right) \right] \varphi_j(y) d\Gamma_h(y) d\vec{s}$$

On retrouve les trois étapes de la FMM mono-niveau :

1. Initialisation des fonctions de radiation pour les cellules banlieues de $\mathcal{C}'^{(1)}$;
2. Transfert de ces fonctions vers $\mathcal{C}'^{(1)}$;
3. Intégration du résultat sur $\mathcal{C}'^{(1)}$.

Les cellules distantes

Il reste à calculer l'intégrale pour $x \in \Gamma_h \cap d(\mathcal{C}'^{(1)})$. En utilisant (6.17), le terme d'interaction s'écrit :

$$\sum_{\mathcal{C}^{(0)} \notin v(p(\mathcal{C}'^{(1)}))} \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(0)}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} G(x, y) \lambda_h(x) \varphi_j(y) d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y)$$

On utilise la décomposition du noyau (6.4) écrite au niveau 0 entre $\mathcal{C}^{(0)}$ centrée en $M^{(0)}$ et $\mathcal{C}'^{(0)}$ (parent de $\mathcal{C}'^{(1)}$) centrée en $M'^{(0)}$. On obtient :

(6.18)

$$\int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} e^{ik\vec{s}.M'^{(0)}y} \left[\sum_{\mathcal{C}^{(0)} \notin v(p(\mathcal{C}'^{(1)}))} T_{M^{(0)}\vec{M}'^{(0)}}^{L(0)}(\vec{s}) \left(\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(0)}} e^{ik\vec{s}.x\vec{M}^{(0)}} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x) \right) \right] \varphi_j(y) d\Gamma_h(y) d\vec{s}$$

On retrouve les trois étapes de la méthode multipôle au niveau 0, que l'on va légèrement adapter :

1. Initialisation des fonctions de radiation pour les cellules $\mathcal{C}^{(0)} \notin v(p(\mathcal{C}'^{(1)}))$. On va utiliser la formule suivante :

$$\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(0)}} e^{ik\vec{s}.x\vec{M}^{(0)}} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x) = \sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in e(\mathcal{C}^{(0)})} e^{ik\vec{s}.M^{(1)}\vec{M}^{(0)}} \left(\int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(1)}} e^{ik\vec{s}.x\vec{M}^{(1)}} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x) \right)$$

qui s'écrit plus simplement :

$$(6.19) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in e(\mathcal{C}^{(0)})} e^{ik\vec{s}.M^{(1)}\vec{M}^{(0)}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s})$$

On va donc d'abord initialiser les fonctions de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}$ au niveau 1, puis utiliser (6.19) pour remonter au niveau 0 et calculer $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}$.

2. Transfert de ces fonctions vers $p(\mathcal{C}'^{(1)})$. Ces transferts ont lieu au niveau 0.
3. Intégration du résultat. On note $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(0)}}$ le terme entre crochets dans (6.18). Comme pour l'initialisation, on va d'abord changer de niveau en écrivant :

$$(6.20) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s}.M'^{(0)}\vec{M}'^{(1)}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(0)}}(\vec{s})$$

Puis on intègre le résultat sur $\mathcal{C}'^{(1)}$ avec l'équation usuelle :

$$\int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}(\vec{s}) e^{ik\vec{s}.M'^{(0)}y} \varphi_j(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

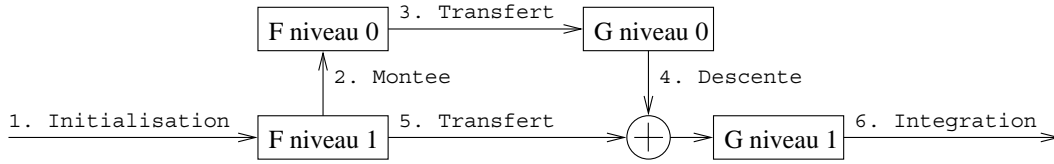


FIG. 6.14 – Algorithme FMM à deux niveaux

Synthèse

Le traitement des cellules distantes et des cellules banlieues met en jeu des phases d'initialisation et d'intégration au niveau 1 qui sont similaires, on va donc les mettre en commun. Mettant de côté les interactions proches, on voit apparaître une méthode multipôle bi-niveau en 6 étapes présentées figure 6.14.

1. *Initialisation* des fonctions de radiation $\mathcal{F}_{C^{(1)}}$ au niveau 1.
2. *Montée* : on calcule les fonctions de radiation $\mathcal{F}_{C^{(0)}}$ au niveau 0 en sommant les contributions des enfants avec (6.19).
3. *Transfert* au niveau 0 : on calcule les fonctions de radiation $\mathcal{G}_{C^{(0)}}$ sommant les contributions des cellules non-voisines.
4. *Descente* : on calcule la première partie de $\mathcal{G}_{C^{(1)}}$ en descendant la contribution du parent avec (6.20).
5. *Transfert* au niveau 1 : on rajoute à $\mathcal{G}_{C^{(1)}}$ la contribution des cellules banlieues. Ce rajout est symbolisé sur la figure 6.14 par le \oplus .
6. *Intégration* au niveau 1 des fonctions $\mathcal{G}_{C^{(1)}}$.

Montée et descente Difficultés liées au changement de niveau

L'algorithme multipôle bi-niveau met à jour deux nouveaux type d'opérations par rapport au cas mono-niveau : les montées et les descentes. Dans l'algorithme continu, ces équations se réduisent à un changement de centre, comme dans (6.19) et (6.20). Par exemple, une multiplication par $e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^{(0)} \vec{M}^{(1)}}$ transforme une fonction de radiation attachée à une cellule centrée en $M^{(0)}$ en fonction centrée en $M^{(1)}$. On appellera cette opération une *translation*, le vecteur de translation étant bien sûr $\vec{M}^{(0)} \vec{M}^{(1)}$ ici.

Lorsqu'on passe de l'algorithme continu à l'algorithme discret, on doit tenir compte du nombre de pôles aux niveaux 0 et 1, notés $L^{(0)}$ et $L^{(1)}$. Ce nombre de pôles est calculé à partir du pas du découpage, il dépend donc du niveau. Quelle que soit la manière choisie pour calculer L , on aura toujours $L^{(0)} > L^{(1)}$. Si on choisit d'utiliser la formule simple $L = kr$ (où $r = \sqrt{3}a$ est le diamètre d'une cellule), alors $L^{(0)}$ sera le double de $L^{(1)}$.

Si le changement de niveau s'accompagne d'un changement du nombre de pôles, il s'accompagne aussi d'un changement de discrétisation de la sphère unité \mathcal{S} . Cette dernière est choisie pour pouvoir intégrer exactement les fonctions de largeur de bande $2L$.

On note $(\vec{s}_{k'}^{(0)}, \omega_{k'}^{(0)})$ et $(\vec{s}_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})$ les quadratures respectivement des niveaux 0 et 1. On doit donc être capable de passer de l'une à l'autre de ces quadratures de la manière la plus précise possible.

Extrapolation

On appelle extrapolation le passage de la grille $(\vec{s}_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})$ à la grille $(\vec{s}_{k'}^{(0)}, \omega_{k'}^{(0)})$. On oublie provisoirement le changement de centre qui va normalement de pair avec le passage d'une cellule à la cellule parent. Nous allons voir dans un premier temps l'algorithme basique pour réaliser cette opération, puis nous présenterons l'algorithme rapide utilisé dans notre implémentation FMM.

Algorithme basique Soit une cellule $\mathcal{C}^{(1)}$ au niveau 1, et la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}$ définie par :

$$(6.21) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(1)}} e^{ik\vec{s} \cdot x \vec{M}^{(1)}} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x)$$

On ne connaît cette fonction que par ses valeurs sur la grille $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}_k^{(1)})$. On sait néanmoins que c'est une fonction de largeur de bande $L^{(1)}/2$ (à une erreur ϵ près). En effet, on a tronqué la série (6.12) au rang $L^{(1)}$ dans le cas où \vec{r} défini par (6.9) vérifiait seulement la condition (6.11) : $|\vec{r}| \leq \sqrt{3}a$ (où a est l'arête du découpage au niveau considéré). Ici le vecteur dans l'exponentielle relie un point de $\mathcal{C}^{(1)}$ à son centre, donc il vérifie la condition plus restrictive : $|x\vec{M}^{(1)}| \leq \sqrt{3}a/2$. On peut alors tronquer la série au rang $L^{(1)}/2$ tout en conservant la même erreur ϵ .

Partant de là, on peut écrire $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}$ sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}) = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}/2}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s})$$

Pour calculer les coefficients $A_{l,m}$, il suffit d'utiliser l'orthonormalité des harmoniques sphériques, qui permet d'écrire :

$$(6.22) \quad A_{l,m} = \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}) Y_{l,m}^*(\vec{s}) d\vec{s}$$

On a au niveau 1 une quadrature de \mathcal{S} qui intègre exactement les fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ de largeur de bande $\leq 2L^{(1)}$. Ici, la fonction sous le signe intégrale est de largeur de bande seulement $L^{(1)}/2 + l \leq L^{(1)}$. Donc notre quadrature l'intègre exactement, et on a même "de la marge". On va utiliser cette marge, et considérer désormais $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}$ comme une fonction de largeur de bande $L^{(1)}$. On y gagne en précision, et on verra par la suite qu'il n'y a pas de surcoût associé à ce changement. La fonction intégrée $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}} Y_{l,m}^*$ est alors de largeur de bande $L^{(1)} + l \leq 2L^{(1)}$, et notre quadrature l'intègre exactement :

$$(6.23) \quad A_{l,m} = \sum_{\vec{s}_k^{(1)}} \omega_k^{(1)} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}_k^{(1)}) Y_{l,m}^*(\vec{s}_k^{(1)})$$

Une fois calculés les coefficients $(A_{l,m})$ pour $-l \leq m \leq l$ et $0 \leq l \leq L^{(1)}$, on peut calculer $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}$ sur la grille du niveau 0 en écrivant tout simplement :

$$(6.24) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}_{k'}^{(0)}) = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s}_{k'}^{(0)})$$

Sachant que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}$ est de largeur de bande $L^{(0)}$, cette équation revient à compléter les coefficients $(A_{l,m})$ par des zéros pour $L^{(1)} < l \leq L^{(0)}$. En insérant (6.23) dans (6.24), on obtient :

$$(6.25) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}_{k'}^{(0)}) = \sum_{\vec{s}_k^{(1)}} \left[\sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}}} Y_{l,m}^*(\vec{s}_k^{(1)}) Y_{l,m}(\vec{s}_{k'}^{(0)}) \right] \omega_k^{(1)} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}_k^{(1)})$$

Cette opération est donc un simple produit matrice-vecteur, par une matrice dont le nombre de colonnes est le nombre de points de quadrature au niveau 1, et dont le nombre de lignes est le nombre de points de quadrature au niveau 0.

Cette matrice est plus simple qu'il n'y paraît, puisque le terme entre crochets peut s'écrire :

$$(6.26) \quad \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}}} Y_{l,m}^*(\vec{s}_k^{(1)}) Y_{l,m}(\vec{s}_{k'}^{(0)}) = \sum_{0 \leq l \leq L^{(1)}} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta) \\ = \frac{L^{(1)}+1}{4\pi(1-\cos \theta)} (P_{L^{(1)}}(\cos \theta) - P_{L^{(1)}+1}(\cos \theta))$$

où l'on note θ l'angle que font les vecteurs unitaires $\vec{s}_{k'}^{(0)}$ et $\vec{s}_k^{(1)}$:

$$\cos \theta = \vec{s}_{k'}^{(0)} \cdot \vec{s}_k^{(1)}$$

La deuxième formule ci-dessus n'est valable que si $\cos \theta \neq 1$. Le nombre d'opérations de cette extrapolation est égal au produit des tailles des quadratures de \mathcal{S} aux niveau 0 et 1, soit environ $4(L^{(0)}L^{(1)})^2$ avec notre discrétisation usuelle. Cette formulation de l'extrapolation est la plus simple à implémenter, il existe une méthode pour accélérer ces calculs que l'on ne présentera pas ici.

Réduction

On appelle réduction le passage de la grille $(\vec{s}_{k'}^{(0)}, \omega_{k'}^{(0)})$ à la grille $(\vec{s}_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})$. Comme pour l'extrapolation, on met entre parenthèse le changement de centre qui va normalement de pair avec le passage d'une cellule à une des cellules enfants.

Soit une cellule $\mathcal{C}^{(0)}$ au niveau 0, et la fonction de radiation $\mathcal{G}_{\mathcal{C}^{(0)}}$ définie par :

$$\mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}) = \sum_{C^{(0)} \notin v(C'(0))} T_{M^{(0)} \vec{M}'^{(0)}}^{L^{(0)}}(\vec{s}) \mathcal{F}_{C^{(0)}}(\vec{s})$$

On ne connaît cette fonction que par ses valeurs sur la grille $\mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}_{k'}^{(0)})$. On sait néanmoins que c'est une fonction de largeur de bande $L^{(0)}$ (à une erreur ϵ près). En effet, la fonction de transfert $T_{M^{(0)} \vec{M}'^{(0)}}^{L^{(0)}}$ est de largeur de bande $L^{(0)}$, donc on peut négliger les harmoniques de rang supérieur.

Partant de là, on peut écrire $\mathcal{G}_{C'(0)}$ sous la forme :

$$\mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}) = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(0)}}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s})$$

Pour calculer les coefficients $A_{l,m}$, il suffit d'utiliser l'orthonormalité des harmoniques sphériques, qui permet d'écrire :

$$(6.27) \quad A_{l,m} = \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}) Y_{l,m}^*(\vec{s}) d\vec{s}$$

La fonction à calculer $\mathcal{G}_{C'(1)}$ étant amenée à être ajoutée au résultat des transferts au niveau 1 (de largeur de bande $L^{(1)}$) avant d'être intégrée, seuls les coefficients $A_{l,m}$ avec $0 \leq l \leq L^{(1)}$ nous intéressent. Sous cette condition, dans (6.27) la fonction sous le signe intégrale est de largeur de bande maximale $L^{(0)} + L^{(1)} < 2L^{(0)}$, donc notre quadrature au niveau 0 l'intègre exactement :

$$(6.28) \quad A_{l,m} = \sum_{\vec{s}_{k'}^{(0)}} \omega_{k'}^{(0)} \mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}_{k'}^{(0)}) Y_{l,m}^*(\vec{s}_{k'}^{(0)})$$

Une fois calculés les coefficients ($A_{l,m}$) pour $-l \leq m \leq l$ et $0 \leq l \leq L^{(1)}$, on peut calculer $\mathcal{G}_{C'(1)}$ sur la grille du niveau 1 en écrivant tout simplement :

$$(6.29) \quad \mathcal{G}_{C'(1)}(\vec{s}_k^{(1)}) = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s}_k^{(1)})$$

Sachant que $\mathcal{G}_{C'(0)}$ est de largeur de bande $L^{(0)}$, cette équation revient à annuler les coefficients ($A_{l,m}$) pour $L^{(1)} < l \leq L^{(0)}$. En insérant (6.28) dans (6.29), on obtient :

$$\mathcal{G}_{C'(1)}(\vec{s}_k^{(1)}) = \sum_{\vec{s}_{k'}^{(0)}} \left[\sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq L^{(1)}}} Y_{l,m}^*(\vec{s}_{k'}^{(0)}) Y_{l,m}(\vec{s}_k^{(1)}) \right] \omega_{k'}^{(0)} \mathcal{G}_{C'(0)}(\vec{s}_{k'}^{(0)})$$

Cette opération est donc un produit matrice-vecteur par la matrice transposée de celle utilisée pour les montées.

Changement de centre

Le changement de niveau dans l'algorithme multipôle associe toujours un changement de quadrature de \mathcal{S} et un changement de centre de radiation (On a choisit d'appeler "translation" l'opération de changement de centre). Dans le cas d'une montée, cela se voit dans (6.19). Pour une descente, c'est la formule (6.20). A chaque fois, on a la possibilité de faire la translation avant ou après le changement de grille (extrapolation ou réduction).

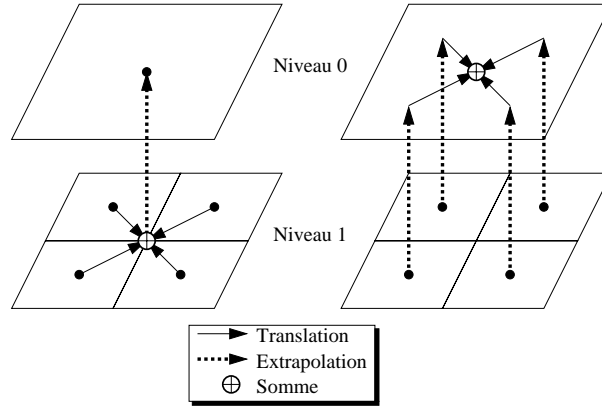


FIG. 6.15 – Phase de montée

Si on note \mathcal{X} l'opérateur d'extrapolation, la montée peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}) = \mathcal{X} \left[\sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in e(\mathcal{C}^{(0)})} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^{(1)} \vec{M}^{(0)}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}) \right], \\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in e(\mathcal{C}^{(0)})} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}^{(1)} \vec{M}^{(0)}} \mathcal{X} [\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s})] \end{cases}$$

La première équation correspond au schéma de gauche sur la figure 6.15, la seconde au schéma de droite. Une translation augmente la largeur de bande de la fonction traduite, donc si la translation précède le changement de grille, le calcul est en théorie moins précis que si on fait le contraire. On pourrait compenser en augmentant le nombre d'harmoniques sphériques conservées, mais là encore, en pratique, on ne voit pas de différence.

Il y a en revanche une nette différence en terme de temps d'exécution. Dans l'algorithme multipôle, l'opération "montée" envoie toutes les fonctions de radiation des enfants de $\mathcal{C}^{(0)}$ vers celle-ci. On peut donc :

- soit traduire chaque enfant puis sommer et extrapoler le résultat ;
- soit extrapoler chaque enfant puis traduire et sommer.

La différence est dans le nombre d'extrapolations (la phase la plus coûteuse ici). La première méthode met en œuvre une extrapolation pour tous les enfants, contre une extrapolation par

enfant dans la seconde. Cette dernière est donc sensiblement plus lente. De même, dans le cas de la descente, on a intérêt à réduire la fonction de radiation du parent avant de la translater vers chacun des enfants.

Algorithme à deux niveaux Nous allons récapituler tous les points évoqués dans cette section, et écrire complètement l'algorithme multipôle à deux niveaux pour la formulation EFIE. On se donne un courant surfacique scalaire $\lambda_h(x)$ en entrée, et un découpage de Γ_h à travers deux grilles imbriquées. Le produit $S^h \Lambda^h$ se réalise en deux parties :

Interactions proches : elles sont traitées au niveau 1, exactement comme dans le cas mono-niveau (cf. équation (6.13)).

Interactions Lointaines : le calcul se fait en six étapes.

1. Initialisation : pour toute cellule $\mathcal{C}^{(1)}$ du niveau 1, on calcule la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}^{(1)}} e^{ik\vec{s} \cdot x} \vec{M}^{(1)} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x)$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau 1.

2. Montée : pour toute cellule $\mathcal{C}^{(0)}$ du niveau 0, on calcule la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}$ à partir de celles des enfants :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in e(\mathcal{C}^{(0)})} e^{ik\vec{s} \cdot M^{(1)} \vec{M}^{(0)}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s})$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau 0.

3. Transfert au niveau 0 : pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(0)}$ fixée, on passe en revue les cellules $\mathcal{C}^{(0)}$ non-voisine de $\mathcal{C}'^{(0)}$ pour calculer :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(0)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(0)} \notin v(\mathcal{C}'^{(0)})} T_{M^{(0)} \vec{M}'^{(0)}}^{L^{(0)}}(\vec{s}) \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(0)}}(\vec{s})$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau 0.

4. Descente : pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$ du niveau 1, on calcule la première partie de la fonction de radiation $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}$ à partir du parent :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s} \cdot M'^{(0)} \vec{M}'^{(1)}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(0)}}(\vec{s})$$

5. Transfert au niveau 1 : pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$ du niveau 1, on calcule la deuxième partie de la fonction de radiation $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}$ en passant en revue les cellules banlieues $\mathcal{C}^{(1)}$ pour calculer :

$$\sum_{\mathcal{C}^{(1)} \in b(\mathcal{C}'^{(1)})} T_{M^{(1)} \vec{M}'^{(1)}}^{L^{(1)}}(\vec{s}) \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(1)}}(\vec{s})$$

sur la quadrature de \mathcal{S} associée au nombre de pôles $L^{(1)}$. Cette somme se rajoute à la partie de $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}$ calculée dans la phase “descente”.

6. Intégration : pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(1)}$, et pour toute fonction de base φ_j localisée dans $\mathcal{C}'^{(1)}$, on calcule l'intégrale :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(1)}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(1)}}(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{M}'^{(1)}y} \varphi_j(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie “interaction lointaine” de la j -ième composante du vecteur $S^h \Lambda^h$, et se rajoute naturellement à la partie “interaction proche”.

Extension à plusieurs niveaux

L'étude de la FMM à deux niveaux a permis de souligner les principales nouveautés de l'algorithme multi-niveau par rapport à la version mono-niveau. Nous allons maintenant étudier le cas général d'une FMM à n niveaux ($n \geq 2$).

Construction d'un octree Méthode Pour construire les structures dont on a besoin, l'idée est de procéder de manière récursive. On va simultanément créer une suite de découpages imbriqués et une structure d'arbre associée. Le découpage de Γ_h en grilles imbriquées est représenté en version 2D sur la figure 6.16, et en 3D sur la figure 6.17.

On commence donc par créer le niveau 0 du découpage en englobant Γ_h dans une boîte cubique suffisamment grande. Cette boîte est ensuite divisée en huit boîtes identiques. On ne conserve alors que celles de ces boîtes ayant une intersection non-vide avec Γ_h . Elles constituent le niveau 1 de l'arbre. On répète ce processus de division pour obtenir le niveau 2 de l'arbre. A chaque nouveau niveau créé, la taille des boîtes est divisée par deux par rapport au niveau précédent.

On arrête d'itérer soit quand on a construit un nombre de niveaux fixé par avance, soit lorsque la taille des boîtes atteint un certain seuil. Dans le cadre d'une méthode multipôle, ce critère s'exprime en nombre de longueurs d'onde. Une troisième méthode d'arrêt consiste à fixer la taille des plus petites boîtes, puis à multiplier celle-ci par deux jusqu'à dépasser la taille de l'objet. On détermine ainsi la taille de la boîte initiale, ainsi que le nombre de niveaux. C'est la méthode que l'on a choisie dans notre implémentation. La taille des plus petites boîtes est un paramètre important dans la précision de la méthode, il est donc utile de pouvoir la contrôler.

La figure 6.18 représente le résultat d'un découpage multi-niveau appliqué à un maillage d'airbus A318 comportant 23676 inconnues. Les boîtes ont des arêtes dont la dimension varie de 16 longueurs d'onde (au niveau 0) à une demi longueur d'onde (au niveau 5). Le niveau 6 n'a pas été représenté, bien qu'il soit utilisé en pratique.

Quelques points de vocabulaire

Dans l'arbre obtenu, chaque cellule possède au plus huit enfants, d'où le nom d'octree. L'équivalent 2D représenté figure 6.16 s'appelle un quadtree. Il n'y a aucun quadtree dans notre code FMM, on s'en sert ici dans un but purement illustratif. Le niveau 0 comporte une seule cellule, c'est la “racine” de l'arbre. Les cellules du dernier niveau s'appellent les “feuilles” de l'arbre. Comme tout arbre qui se respecte, la racine constitue le “haut” de l'arbre, et les feuilles

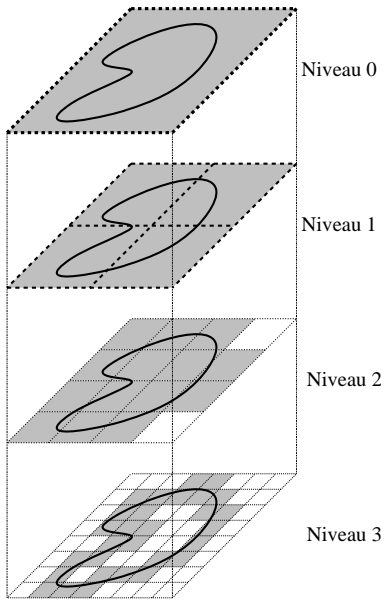


FIG. 6.16 – Découpage multi-niveau de Γ_h (version 2D)

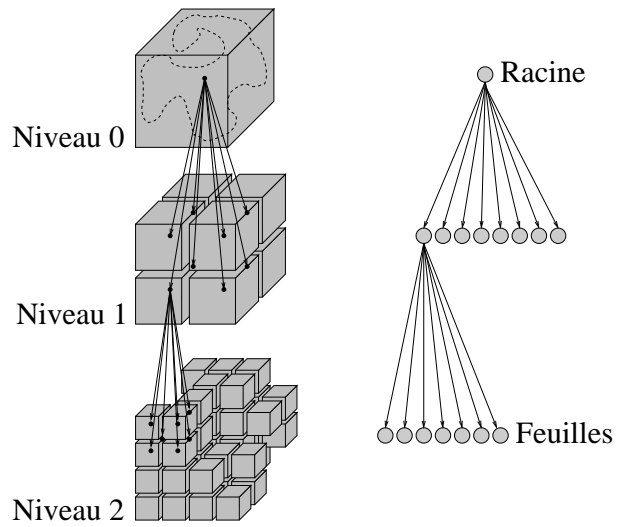


FIG. 6.17 – Découpage multi-niveau de Γ_h (version 3D) et arbre associé

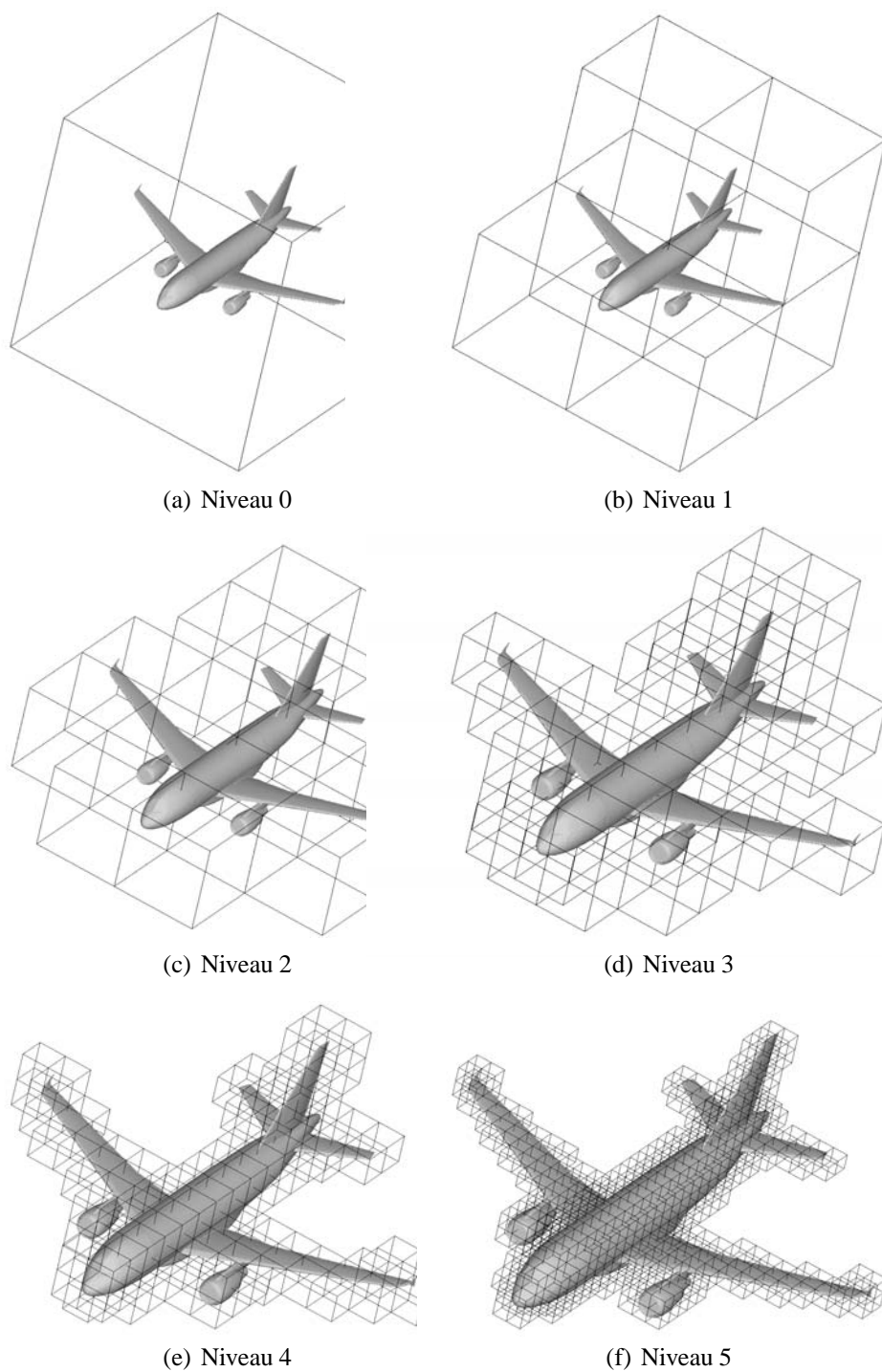


FIG. 6.18 – Découpage multi-niveau d'un airbus A318

le “bas”. On “remonte” dans l’arbre lorsque le numéro de niveau décroît, et inversement une descente correspond à une incrémentation du numéro de niveau.

Enfants : on appelle toujours “enfants” de \mathcal{C} , et l’on note $e(\mathcal{C})$ les cellules issues de la subdivision de \mathcal{C} . Une cellule possède au plus huit enfants. Les feuilles n’ont pas d’enfant, les autres cellules ont toujours au moins un enfant (sinon cela impliquerait que cette cellule ne coupe pas Γ_h).

Parent : c’est bien sûr la relation inverse. Toutes les cellules ont exactement un parent, sauf la racine qui n’en a pas. On note $p(\mathcal{C})$ le parent de \mathcal{C} .

Voisines : on appelle voisines de \mathcal{C} toutes les cellules du même niveau de l’arbre que \mathcal{C} ayant au moins un sommet en commun avec \mathcal{C} . Le nombre de voisines d’une cellule est toujours au moins un (elle-même), et au plus $3 \times 3 \times 3 = 27$. Aux niveaux 0 et 1, toutes les cellules sont voisines. Deux cellules situées à des niveaux différents ne seront pas considérées comme voisines, même si elles se touchent. On note $v(\mathcal{C})$ l’ensemble des cellules voisines de \mathcal{C} .

Banlieues : on appelle banlieues des cellules qui ne sont pas voisines mais dont les parents respectifs le sont. Cette définition implique que deux cellules banlieues sont toujours au même niveau de l’arbre. Aux niveaux 0 et 1, aucune cellule n’est banlieue (puisqu’elles sont toutes voisines). Le nombre de banlieues peut être zéro, mais n’excède jamais $8 \times 27 - 27 = 189$. En effet, le parent de \mathcal{C} a au plus 27 voisines, qui ont chacune au plus 8 enfants, soit 8×27 “candidats”, parmi lesquels il faut ôter les voisines de \mathcal{C} , d’où le résultat de 189 (cf. figure 6.19 sur laquelle pour simplifier on a conservé toutes les cellules). On note $b(\mathcal{C})$ l’ensemble des cellules banlieues de \mathcal{C} . Soulignons que les banlieues d’une cellule \mathcal{C} ne sont pas les “voisins de ses voisins”.

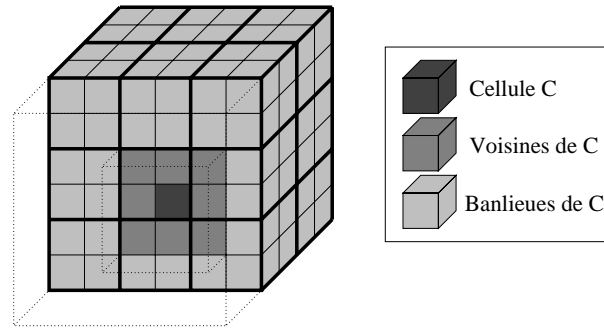


FIG. 6.19 – Voisins et banlieues dans un octree

Sur la figure 6.20, on a représenté (dans le cas de l’airbus A318) en rouge les portions de maillage non-voisines et/ou banlieues aux niveaux 0 à 4 par rapport à un degré de liberté de référence (pointé par la flèche). Remarquons qu’aux niveaux 0 et 1 ces ensembles sont vides, et qu’au niveau 2 ils sont égaux.

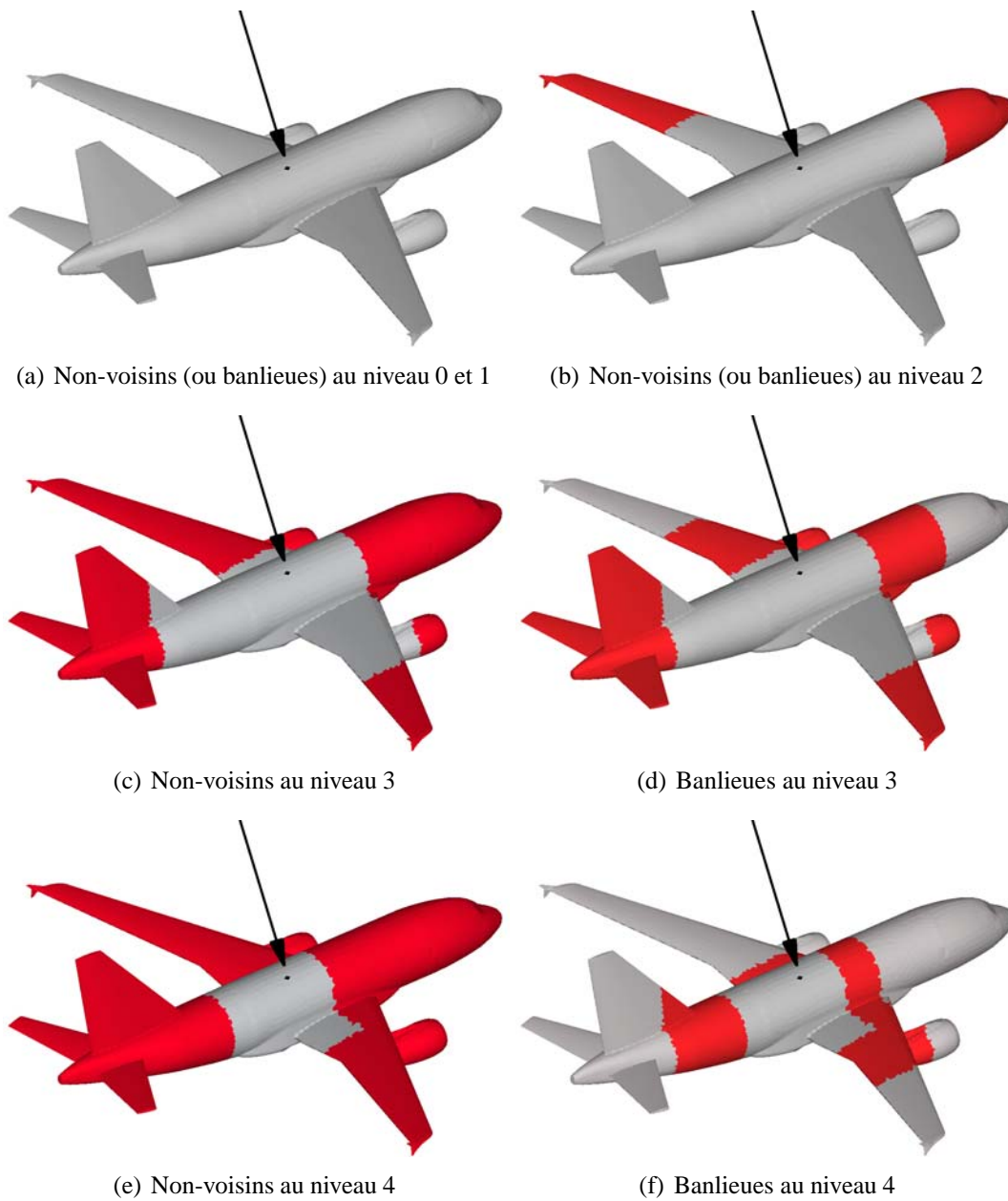


FIG. 6.20 – Découpage multi-niveau d'un airbus A318

Algorithme multi-niveau complet **Conception** On découpe notre objet à l'aide d'un octree, soit N le nombre de niveaux de cet arbre. La racine est le niveau 0, les feuilles forment le niveau $N - 1$. Comparons de manière synthétique les deux algorithmes FMM déjà étudiés. D'une part, l'algorithme FMM à un niveau (le niveau $N - 1$ en l'occurrence) comporte trois étapes (figure 6.21) :

1. Initialisation au niveau $N - 1$.
2. Transfert au niveau $N - 1$ entre cellules non-voisines.
3. Intégration au niveau $N - 1$.

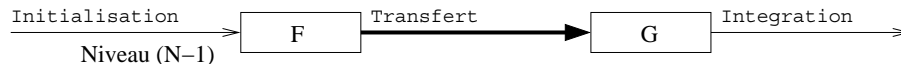


FIG. 6.21 – Algorithme FMM à un niveau

D'autre part, l'algorithme FMM à deux niveaux (les niveaux $N - 1$ et $N - 2$) comporte six étapes (figure 6.22) :

1. Initialisation au niveau $N - 1$.
2. Montée vers le niveau $N - 2$.
3. Transfert au niveau $N - 2$ entre cellules non-voisines.
4. Descente au niveau $N - 1$.
5. Transfert au niveau $N - 1$ entre cellules banlieues.
6. Intégration au niveau $N - 1$.

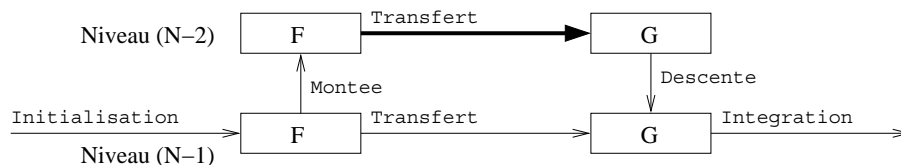


FIG. 6.22 – Algorithme FMM à 2 niveaux

Les étapes initiale et finale sont les mêmes. Pour passer du premier l'algorithme au second, on a simplement remplacé :

| Transfert au niveau d entre cellules non-voisines

par :

| Montée vers le niveau $d - 1$
 | Transfert au niveau $d - 1$ entre cellules non-voisines
 | Descente au niveau d
 | Transfert au niveau d entre cellules banlieues

avec $d = N - 1$ bien sûr. On peut utiliser une substitution de ce type sur l'étape 3 (avec $d = N - 2$) et obtenir ainsi un algorithme à 3 niveaux. Cette opération est en fait exactement celle qui a été détaillée lors de la description de la FMM à deux niveaux à la section 6.3.2 consacrée à l'algorithme continu. On retrouve en effet ici la distinction entre cellules banlieues et cellules distantes.

La méthode proposée ci-dessus ne s'applique plus lorsqu'on arrive au niveau $d = 2$. Il n'y a pas de cellules non-voisines au niveau 1, donc l'étape "Transfert au niveau 2 entre cellules non-voisines" ne pourra jamais être transformée. Une autre manière de justifier cela est de dire qu'au niveau 2, "banlieue" est synonyme de "non-voisine". Dans notre exploration de l'arbre, on ne dépasse donc jamais le niveau 2. Cela correspond à l'algorithme multipôle "complet". On appellera "niveau plafond" et on notera N_{plaf} le plus haut niveau exploré dans l'arbre lors du calcul multipôle. Ce niveau sera toujours compris entre 2 (algorithme complet) et $N - 1$ (algorithme mono-niveau).

Algorithme complet

Nous allons écrire l'algorithme multipôle multi-niveau dans le cas de la formulation EFIE. On se donne un courant surfacique scalaire $\lambda_h(x)$ en entrée, et un découpage récursif de Γ_h à l'aide d'une octree à N niveaux ($N \geq 3$). Les niveaux sont numérotés $0, 1, \dots, N - 1$. On note N_{plaf} le niveau plafond.

Le produit $S^h \Lambda^h$ se réalise en deux parties :

Interactions proches : elles sont traitées au niveau $N - 1$, exactement comme dans le cas mono-niveau (cf. équation (6.13)).

Interactions lointaines : il y a cinq phases dans ce calcul.

1. Initialisation : pour toute cellule $\mathcal{C}^{(N-1)}$ du niveau $N - 1$, on calcule la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(N-1)}}(\vec{s}) = \int_{x \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}^{(N-1)}} e^{ik\vec{s} \cdot x} M^{(\vec{N}-1)} \lambda_h(x) d\Gamma_h(x)$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau $N - 1$.

2. Montées : pour tous les niveaux $d = N - 2, \dots, N_{plaf}$ (dans cet ordre), et pour toute cellule $\mathcal{C}^{(d)}$ du niveau d , on calcule la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}$ à partir de celles des enfants :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d+1)} \in e(\mathcal{C}^{(d)})} e^{ik\vec{s} \cdot M^{(d+1)} M^{(d)}} \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d+1)}}(\vec{s})$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau d . Il y a $N - N_{plaf} - 1$ étapes de montées.

3. Transferts : le niveau plafond est traité à part.

Pour le niveau $d = N_{plaf}$, et pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(d)}$ fixée, on passe en revue les cellules $\mathcal{C}^{(d)}$ non-voisines de $\mathcal{C}'^{(d)}$ pour calculer :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d)} \notin v(\mathcal{C}'^{(d)})} T_{M^{(d)} \vec{M}'^{(d)}}^{L^{(d)}}(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s})$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau d .

Pour tous les autres niveaux $d = N - 1, \dots, N_{plaf} + 1$, et pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(d)}$ fixée, on passe en revue les cellules $\mathcal{C}^{(d)}$ *banlieues* de $\mathcal{C}'^{(d)}$ pour calculer la première partie de la fonction $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$:

$$(6.30) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = \sum_{\mathcal{C}^{(d)} \in b(\mathcal{C}'^{(d)})} T_{M^{(d)} \vec{M}'^{(d)}}^{L^{(d)}}(\vec{s}) \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{(d)}}(\vec{s})$$

en tout point \vec{s} de notre quadrature de \mathcal{S} pour le niveau d .

Il y a en tout $N - N_{plaf}$ étapes de transfert.

4. Descentes : pour tous les niveaux $d = N_{plaf} + 1, \dots, N - 1$ (dans cet ordre), et pour toute cellule du niveau d notée $\mathcal{C}'^{(d)}$, on calcule la deuxième partie de la fonction de radiation $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$ à partir du parent :

$$(6.31) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}(\vec{s}) = e^{ik\vec{s} \cdot M'^{(d-1)} M'^{(d)}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d-1)}}(\vec{s})$$

sur la quadrature de \mathcal{S} associée au nombre de pôles $L^{(d)}$. Cette somme se rajoute à la partie de $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$ calculée dans la phase “transfert”. Il y a $N - N_{plaf} - 1$ étapes de descentes.

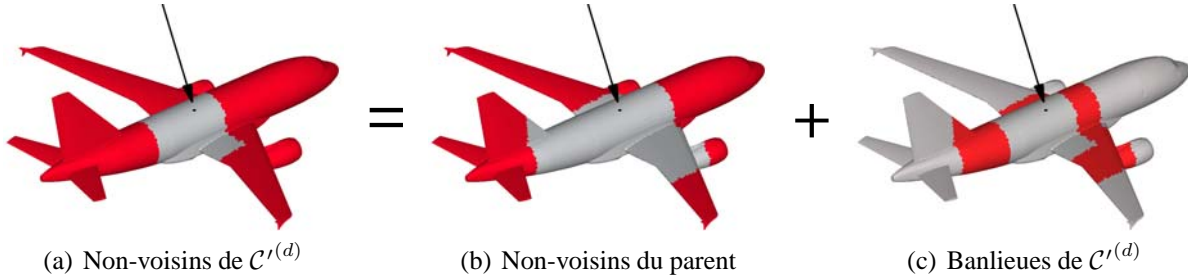


FIG. 6.23 – Contribution du parent et des banlieues pour le calcul de $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$

Sur la figure 6.23, on a repéré par une flèche une inconnue située dans $\mathcal{C}'^{(d)}$. La fonction $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(d)}}$ représente l’action sur $\mathcal{C}'^{(d)}$ de toute la partie non-voisine du maillage (en rouge sur la figure 6.23a). Elle est la somme deux contributions :

- l’une provient du parent de $\mathcal{C}'^{(d)}$ via l’équation (6.31). Elle prend en compte l’influence de toute la partie du maillage non-voisine du parent (en rouge sur 6.23b).
- l’autre provient des banlieues de $\mathcal{C}'^{(d)}$ via l’équation (6.30). Elle prend en compte l’influence de toute la partie du maillage banlieue (en rouge sur 6.23c).

5. Intégration : pour toute cellule $\mathcal{C}'^{(N-1)}$, et pour toute fonction de base φ_j localisée dans $\mathcal{C}'^{(N-1)}$, on calcule l’intégrale :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \int_{y \in \Gamma_h \cap \mathcal{C}'^{(N-1)}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{C}'^{(N-1)}}(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot M'^{(N-1)} y} \varphi_j(y) d\vec{s} d\Gamma_h(y)$$

Le résultat de cette intégration constitue la partie “interaction lointaine” de la j -ième composante du vecteur $S^h \Lambda^h$, et se rajoute naturellement à la partie “interaction proche”.

Il y a en tout $3(N - N_{plaf})$ étapes dans ce calcul, où $(N - N_{plaf})$ est le nombre de niveaux effectivement utilisés par la FMM. On retrouve donc les 3 étapes de la méthode utilisant 1 niveau, et les 6 étapes de la méthode à 2 niveaux. Les figures 6.21 à 6.25 schématisent les différents algorithmes possibles en fonction du choix du niveau plafond.

Au niveau plafond, les transferts ont lieu entre toutes les cellules non-voisines, alors qu’aux autres niveaux, les transferts n’ont lieu qu’entre cellules banlieues. C’est la seule chose à prendre en compte lorsqu’on fait varier le niveau plafond. Cela traduit le fait qu’au niveau plafond, il faut traiter toutes les interactions n’ayant pas encore été traitées aux niveaux inférieurs. On a symbolisé cela sur les graphiques 6.21 à 6.25 en mettant une flèche plus épaisse pour les transferts au plus haut niveau exploré.

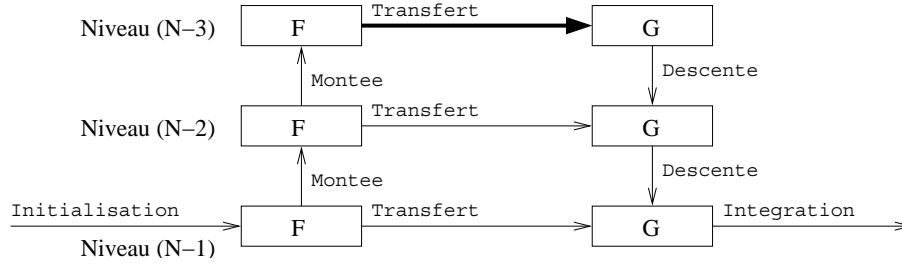


FIG. 6.24 – Algorithme FMM à 3 niveaux ($N_{plaf} = N - 3$)

Remarquons que l’on peut, si on le souhaite, calculer les fonctions de radiation \mathcal{F} et \mathcal{G} au niveau 0 et 1. Mais \mathcal{G} représentant l’action des cellules non-voisines, elle sera nulle, et \mathcal{F} représentant l’action sur les cellules non-voisines, elle ne sera pas nulle, mais ne servira à rien dans la suite du calcul. C’est pourquoi les niveaux 0 et 1 sont en pointillé sur la figure 6.25.

En résumé, nous avons présenté une méthode permettant d’accélérer les produits matrice-vecteur issus de la résolution itérative des équations de Maxwell par formulations intégrales. Là où une méthode classique requiert un temps d’exécution et une taille de stockage en n_{dl}^2 , la méthode multipôle à un niveau ramène ces quantités à $n_{dl}^{3/2}$, et la méthode multipôle multi-niveau complète à $n_{dl} \log n_{dl}$. En choisissant correctement le nombre de pôles, on peut obtenir un écart relatif de l’ordre de 10^{-3} entre produit multipôle et produit classique.

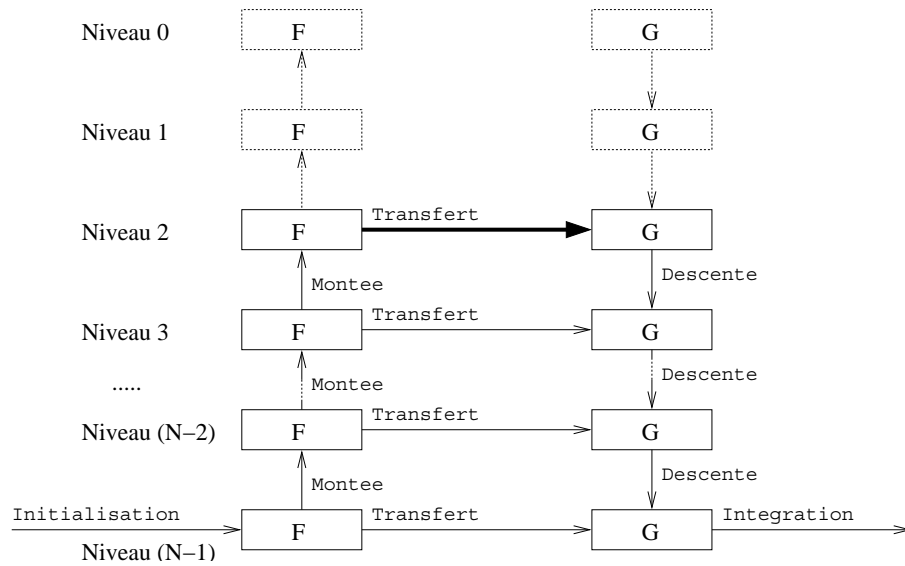


FIG. 6.25 – Algorithme FMM multi-niveau complet ($N_{plaf} = 2$)

Annexe A

Formulaire et rappels mathématiques

A.1 Opérateurs de dérivation dans \mathbb{R}^3

Dans cette annexe, nous donnons les formes explicites des opérateurs de dérivation usuels dans différents systèmes de coordonnées.

On introduit l'opérateur ∇ (nabla) qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . On note les opérateurs de dérivation à l'aide de cet opérateur. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{gradient de } f & : \quad \overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f \\ \text{divergence de } \vec{A} & : \quad \text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \\ \text{rotationnel de } \vec{A} & : \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A} \\ \text{Laplacien de } f & : \quad \Delta f = \nabla^2 f \end{aligned}$$

A.1.1 Coordonnées cartésiennes

Étant donné un champ de vecteur \vec{A} , on note (A_1, A_2, A_3) ses composantes dans cette base.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \\ \nabla \wedge \vec{A} &= \vec{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{aligned}$$

A.1.2 Coordonnées cylindriques

En tout point de \mathbb{R}^3 de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) , on dispose d'un repère orthonormé $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$. Un champ vectoriel \vec{A} s'écrit en ce point : $\vec{A} = \vec{e}_\rho A_\rho + \vec{e}_\phi A_\phi + \vec{e}_z A_z$.

$$\begin{aligned}\nabla f &= \vec{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \wedge \vec{A} &= \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

A.1.3 Coordonnées sphériques

En tout point de \mathbb{R}^3 de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on dispose d'un repère orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. On note $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ les composantes d'un champ vectoriel \vec{A} dans ce repère.

$$\begin{aligned}\nabla f &= \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \wedge \vec{A} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) \right) \\ &\quad + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Noter que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r f)$$

A.2 Formules de calcul vectoriel

- (A.1) $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$
- (A.2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$
- (A.3) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
- (A.4) $\vec{\xi} \wedge (\vec{\xi} \wedge \vec{a}) = (\vec{\xi} \cdot \vec{a})\vec{\xi} - |\vec{\xi}|^2 \vec{a}$
- (A.5) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$
- (A.6) $\nabla \wedge \nabla \psi = \vec{0}$
- (A.7) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) = 0$
- (A.8) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$
- (A.9) $\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{a}$
- (A.10) $\nabla \wedge (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \wedge \vec{a} + \psi \nabla \wedge \vec{a}$
- (A.11) $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a})$
- (A.12) $\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b})$
- (A.13) $\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$

A.3 Formules d'intégration par partie

Dans cet annexe, Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière et \vec{n} la normale extérieure. Dans la suite, φ , ψ et \vec{a} sont des champs scalaires ou vectoriel assez réguliers.

$$(A.14) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} f n_i d\Gamma$$

C'est la formule de base de laquelle on déduit toutes les autres.

$$(A.15) \quad \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{a} dx = \int_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

$$(A.16) \quad \int_{\Omega} \nabla \psi dx = \int_{\Gamma} \psi \vec{n} d\Gamma$$

$$(A.17) \quad \int_{\Omega} \nabla \wedge \vec{a} dx = \int_{\Gamma} \vec{n} \wedge \vec{a} d\Gamma$$

$$(A.18) \quad \int_{\Omega} (\varphi \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \varphi \cdot \vec{a}) dx = \int_{\Gamma} \varphi \vec{a} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

$$(A.19) \quad \int_{\Omega} (\varphi \nabla \wedge \vec{a} + \nabla \varphi \wedge \vec{a}) dx = \int_{\Gamma} \varphi (\vec{n} \wedge \vec{a}) d\Gamma$$

$$(A.20) \quad \int_{\Omega} (\vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b}) dx = \int_{\Gamma} (\vec{b} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} d\Gamma$$

$$(A.21) \quad \int_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dx = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

$$(A.22) \quad \int_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dx = \int_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma$$

A.4 Opérateurs différentiels surfaciques

Dans ce paragraphe, nous introduisons de façon élémentaire, et «avec les mains», les opérateurs différentiels sur une surface régulière Γ , dont nous aurons besoin dans ce chapitre. Le lecteur se référera à un cours de géométrie différentielle pour une présentation plus rigoureuse et plus de détails.

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^3$, on note $\delta(x, \Gamma)$ la distance de x à Γ :

$$\delta(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$$

Comme Γ est une surface régulière, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $\delta(x, \Gamma) < \delta_0$, il existe un unique $x_\Gamma \in \Gamma$ tel que

$$|x - x_\Gamma| = \delta(x, \Gamma)$$

x_Γ est la projection orthogonale de x sur Γ : $x_\Gamma = \Pi(x)$. On introduit alors la notion de voisinage tubulaire

$$\Omega_{\delta_0} = \{x \in \mathbb{R}^3; \delta(x, \Gamma) < \delta_0\} = \Omega_{\delta_0}^+ \cup \Omega_{\delta_0}^- \cup \Gamma$$

avec

$$\Omega_{\delta_0}^+ = \{x \in \Omega^e : \delta(x, \Gamma) < \delta_0\}$$

et

$$\Omega_{\delta_0}^- = \{x \in \Omega^i : \delta(x, \Gamma) < \delta_0\}$$

Dans Ω_{δ_0} , la fonction $\delta(x, \Gamma)$ est régulière. On introduit le champ de vecteurs

$$\vec{n}(x) = \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} \delta(x, \Gamma) & \text{si } x \in \Omega_{\delta_0}^+ \\ -\overrightarrow{\text{grad}} \delta(x, \Gamma) & \text{si } x \in \Omega_{\delta_0}^- \end{cases}$$

Ce champ prolonge continuellement la normale unitaire \vec{n} sur Γ sortante de Ω^i , et pour tout $x \in \Omega_{\delta_0}$ on a

$$\vec{n}(x) = \vec{n}(x_\Gamma) \quad \text{avec } x_\Gamma = \Pi(x)$$

Le voisinage tubulaire peut être paramétré ainsi :

$$\Omega_{\delta_0} = \{x = x(x_\Gamma, s) = x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma), \text{ avec } x_\Gamma \in \Gamma, -\delta_0 < s < \delta_0\}$$

et

$$\Omega_{\delta_0}^+ = \{x = x(x_\Gamma, s) = x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma), \text{ avec } x_\Gamma \in \Gamma, 0 < s < \delta_0\}$$

$$\Omega_{\delta_0}^- = \{x = x(x_\Gamma, s) = x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma), \text{ avec } x_\Gamma \in \Gamma, -\delta_0 < s < 0\}$$

Pour tout $-\delta_0 < s < \delta_0$, on introduit la surface

$$\Gamma_s = \{x = x(x_\Gamma, s) = x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma), \text{ avec } x_\Gamma \in \Gamma\}$$

Le champ \vec{n} est normal à Γ_s . Remarquons que

$$\vec{n}(x) = \overrightarrow{\text{grad}} s(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_{\delta_0}$$

La dérivée par rapport à s d'une fonction régulière définie dans le voisinage tubulaire, est confondue avec la dérivée normale sur Γ_s . Soit maintenant φ une fonction régulière sur Γ . On note $\tilde{\varphi}$ la fonction définie dans le voisinage tubulaire de façon constante suivant la normale :

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) = \varphi(x_\Gamma)$$

On définit l'opérateur **gradient surfacique (ou tangent)** noté $\overrightarrow{\text{grad}}_\Gamma$ ou $\vec{\nabla}_\Gamma$ de la façon suivante :

$$(A.23) \quad \vec{\nabla}_\Gamma \varphi = \overrightarrow{\text{grad}}_\Gamma \varphi = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\varphi}|_\Gamma$$

c'est le gradient de $\tilde{\varphi}$ évalué sur Γ .

De la même façon, on définit l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma_s}$. On démontre que pour une fonction quelconque u régulière définie dans le voisinage tubulaire, on a en tout point $x = x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)$ (en particulier pour $s = 0$) :

$$(A.24) \quad \overrightarrow{\text{grad}} u = \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma_s} u + \frac{\partial u}{\partial s} \vec{n}$$

On définit l'opérateur **rotationnel surfacique (ou tangent) d'un champ scalaire** de la façon suivante :

$$(A.25) \quad \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \varphi = \overrightarrow{\text{rot}}(\tilde{\varphi}\vec{n})|_\Gamma$$

Le champ de normale étant un gradient, son rotationnel est nul. Donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\tilde{\varphi}\vec{n}) = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\varphi} \wedge \vec{n}$$

d'où

$$(A.26) \quad \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \varphi = \overrightarrow{\text{grad}}_\Gamma \varphi \wedge \vec{n}$$

Soit maintenant un champ tangent \vec{u} défini sur Γ . On le prolonge dans le voisinage tubulaire de la façon suivante :

$$\tilde{\vec{u}}(x) = \vec{u}(x_\Gamma) \quad \text{avec } x_\Gamma = \Pi(x)$$

On définit alors la **divergence surfacique du champ de vecteurs** \vec{u} par :

$$(A.27) \quad \text{div}_\Gamma \vec{u} = \text{div} \tilde{\vec{u}}|_\Gamma$$

Le **rotationnel surfacique du champ de vecteurs** \vec{u} est un champ scalaire défini par :

$$(A.28) \quad \text{rot}_\Gamma \vec{u} = (\overrightarrow{\text{rot}} \tilde{\vec{u}} \cdot \vec{n})|_\Gamma$$

C'est un champ scalaire. On démontre que

$$(A.29) \quad \text{rot}_\Gamma \vec{u} = \text{div}_\Gamma (\vec{u} \wedge \vec{n})$$

On démontre que pour un champ de vecteur quelconque \vec{u} régulier défini dans le voisinage tubulaire, on a sur Γ :

$$(A.30) \quad (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = \text{rot}_{\Gamma} \vec{u}_{\Gamma}$$

où \vec{u}_{Γ} est la composante tangentielle de la trace de \vec{u} sur Γ .

On peut alors introduire l'opérateur **Laplacien surfacique scalaire** ou **opérateur de Laplace-Beltrami** :

$$(A.31) \quad \Delta_{\Gamma} \varphi = \text{div}_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \varphi = - \text{rot}_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi$$

L'opérateur **Laplacien tangentiel vectoriel** ou **opérateur de Hodge** qui agit sur des champs de vecteurs tangents est défini par :

$$(A.32) \quad \Delta_{\Gamma} \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \text{div}_{\Gamma} \vec{u} - \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \vec{u}$$

On a les relations :

$$(A.33) \quad \text{div}_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi = 0$$

$$(A.34) \quad \text{rot}_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \varphi = 0$$

On a les formules d'intégration par partie suivantes (Γ est une surface fermée !) :

$$(A.35) \quad \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \varphi(x) \cdot \vec{u}(x) d\Gamma(x) = - \int_{\Gamma} \varphi(x) \text{div}_{\Gamma} \vec{u}(x) d\Gamma(x)$$

$$(A.36) \quad \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi(x) \cdot \vec{u}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \text{rot}_{\Gamma} \vec{u}(x) d\Gamma(x)$$

$$(A.37) \quad \int_{\Gamma} \psi(x) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi(x) d\Gamma(x) = - \int_{\Gamma} \varphi(x) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} \psi(x) d\Gamma(x)$$

$$(A.38) \quad - \int_{\Gamma} (\Delta_{\Gamma} \varphi(x)) \psi(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \varphi(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\Gamma} \psi(x) d\Gamma(x)$$

$$(A.39) \quad - \int_{\Gamma} (\Delta_{\Gamma} \vec{u}(x)) \cdot \vec{v}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \text{div}_{\Gamma} \vec{u}(x) \text{div}_{\Gamma} \vec{v}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \vec{u}(x) \text{rot}_{\Gamma} \vec{v}(x) d\Gamma(x)$$

A.5 Analyse fonctionnelle

A.5.1 Espaces de Hilbert

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, *i.e.* toutes les suites de Cauchy convergent. Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach particuliers très pratiques.

Un espace pré-Hilbertien H est un K -espace vectoriel muni d'un **produit scalaire** $\langle u, v \rangle$, avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire, si $K = \mathbb{R}$, sesquilineaire, si $K = \mathbb{C}$, *i.e.* linéaire à gauche et anti-linéaire à droite :

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\mu_1} \langle u_1, v_1 \rangle + \lambda_1 \overline{\mu_2} \langle u_1, v_2 \rangle + \lambda_2 \overline{\mu_1} \langle u_2, v_1 \rangle + \lambda_2 \overline{\mu_2} \langle u_2, v_2 \rangle$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique si $K = \mathbb{R}$, hermitienne si $K = \mathbb{C}$, *i.e.* $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, définie positive, *i.e.*

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in H \quad \text{et} \quad \langle u, u \rangle = 0 \quad \text{si } u = 0$$

Un produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\langle u, v \rangle \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} \quad \forall u, v \in H$$

et $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ définit une norme. Dans le cas où H est complet pour cette norme, on dit que H est un **espace de Hilbert**.

Une suite x_n dans H converge vers x , et on note $x_n \rightarrow x$, si la suite réelle $\|x_n - x\|$ converge vers 0. On dit que la **suite x_n converge faiblement vers x , et on note $x_n \rightharpoonup x$** si

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$$

Une suite (fortement) convergente est faiblement convergente vers la même limite. La réciproque n'est pas vraie. On montre que toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement.

Une forme bilinéaire (ou sesquilineaire) $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est **continue** s'il existe $C > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

Attention : dans la pratique, nous sommes souvent en présence de plusieurs espace imbriqués avec des normes différentes. Il est important de rappeler pour quelle norme, une forme est coercive. On dira par exemple qu'elle H -coercive si elle l'est pour la norme de H .

Remarque 14. La définition de la coercivité la plus couramment utilisée ne fait pas intervenir le module. C'est le cas pour les formes bilinéaires et les formes hermitiennes. Dans le cas d'une forme sesquilineaire générale, $a(u, u)$ n'est pas forcément réel, d'où le module dans la définition.

On note H' le dual topologique de H , i.e. l'espace des formes (anti-)linéaires continues sur H . Pour u fixé, l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme (anti-)linéaire continue sur H qu'on va noter Au . La linéarité et continuité de a par rapport à u implique que A est une application linéaire continue de H dans H' .

Théorème 16 (de représentation de Riesz-Fréchet). *Pour tout $f \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel*

$$\langle u, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H$$

De plus

$$\|u\|_H = \|f\|_{H'}$$

Grâce à l'isométrie $f \mapsto u$, on peut identifier H' et H . Mais on fera attention à ne pas faire cette identification quand on est en présence de plusieurs espaces de Hilbert imbriqués comme on va le voir dans le paragraphe suivant.

Définition 3. *Soit E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire non-borné de E dans F est une application linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeurs dans F . $D(A)$ est appelé de domaine de A . On dit que A est borné s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad u \in D(A)$$

A.5.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables définies sur Ω à valeur dans $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de carré intégrable (au sens de Lebesgue). Il est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

qui en fait un espace de Hilbert. On identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et D^α l'opérateur de dérivée partielle suivant :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Pour m entier positif, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ } |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée $|\alpha|$ ième de u au sens des distributions :

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

où $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Notons que si $u \in H^m(\Omega)$ alors $\partial u / \partial x_i \in H^{m-1}(\Omega)$.

On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Formellement, il s'agit de l'espace des fonctions $H^m(\Omega)$ nulles au bord ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$. Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Pour $m > 0$, on peut définir $H^{-m}(\Omega)$ comme le dual de $H_0^m(\Omega)$. On a ainsi les inclusions $H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$. $L^2(\Omega)$, qui est le seul espace de Sobolev qu'on identifie avec son dual est dit espace pivot.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier permet de donner une définition équivalente des espaces de Sobolev :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_m = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

$\|\cdot\|_m$ étant une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$. Dans cette définition, nous pouvons remplacer l'entier positif m par un réel s quelconque et définir ainsi $H^s(\mathbb{R}^n)$. Cette fois, $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. On peut ensuite étendre cette définition à des ouverts réguliers Ω ainsi qu'à des surfaces Γ de \mathbb{R}^n , en utilisant des techniques de décomposition de l'unité et de cartes locales. Ces espaces peuvent s'obtenir par les techniques d'interpolation d'espaces introduites par Jacques-Louis Lions, mais ceci dépasse le cadre de ce chapitre de rappels.

Nous voyons que pour $s > t$, $H^s(\Omega) \subset H^t(\Omega)$, i.e. plus s croît, plus on est régulier. On démontre que $\cap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. On peut ainsi définir les traces sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ d'une fonction de $H^m(\Omega)$ et celles de certaines de ces dérivées pour m assez grand. Par exemple, on peut définir une application linéaire continue

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

tel que si $u \in H^1(\Omega)$ est continue dans Ω jusqu'au bord, ce qui n'est pas toujours le cas en dimension 3 par exemple, $\gamma_0(u)$ est la restriction de u sur le bord Γ . Et ainsi,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$$

On peut définir l'application trace de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\Gamma)$ pour $s > 1/2$. Ainsi par exemple, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ n'a pas de trace sur la frontière !

Pour terminer, citons les deux résultats importants suivants :

Lemme 4 (Poincaré). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans une direction. Il existe une constante $C > 0$, tel que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 17 (Rellich). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . L'injection canonique $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. En imposant des conditions de régularité sur Ω , l'injection canonique $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est également compacte.*

A.5.3 Théorème de Lax-Milgram

C'est un cas particulier du théorème de projection sur les convexes fermés dans les espaces de Hilbert.

Théorème 18 (Lax-Milgram). *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire (sesquilinéaire) continue et coercive sur $H \times H$. Alors pour tout $f \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$(A.40) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H$$

Ce théorème donne une condition suffisante pour résoudre un problème linéaire du type

$$(A.41) \quad Au = f$$

pour $A : H \rightarrow H'$ linéaire continue et f donné dans H' . C'est un outil simple et puissant pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques. (A.41) est le problème d'EDP et (A.40) sa formulation variationnelle. Ces deux formulations sont équivalentes.

Prenons par exemple le problème de Dirichlet pour le Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Le problème écrit avec les opérateurs est le suivant : $H = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta : H \rightarrow H'$ et pour tout $f \in H'$, on cherche $u \in H$ tel que $Au = f$.

La formulation variationnelle peut se retrouver facilement, en remarquant que pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(-\Delta u, \varphi) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans H , on définit alors la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{pour } u, v \in H_0^1(\Omega)$$

et le problème variationnel est le suivant : trouver $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H$$

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est clairement continue sur $H \times H$ et d'après le lemme de Poincaré, elle est H -coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique au problème. De plus, il existe une constante $C > 0$, tel que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

A.5.4 Alternative de Fredholm

Définition 4 (Opérateur compact). *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact ssi l'image par T de la boule unité est relativement compacte, i.e. si (x_n) est suite bornée alors la suite (Tx_n) admet une sous-suite convergente.*

Théorème 19 (Alternative de Fredholm). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Alors*

1. $\ker(I - T)$ est de dimension finie ;
2. L'image est fermée, plus précisément : $\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$;
3. $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = H$;
4. $\dim \ker(I - T) = \dim \ker(I - T^*)$

En résolvant l'équation $u - Tu = f$, l'alternative est la suivante :

***ou bien** on a l'unicité et donc l'existence d'une solution u qui dépend continuellement de f ;*

***ou bien** l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non-homogène admet une solution ssi f vérifie n **conditions d'orthogonalité**, i.e. $f \in \text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$ qui est de dimension finie.*

Pour un opérateur qui est une perturbation compacte de l'identité, tout se passe comme en dimension finie : injectivité implique la bijectivité ! Dans la pratique, on utilise souvent ce résultat pour étudier la perturbation compact d'un opérateur inversible : $A = A_0 + A_1 : H_1 \rightarrow H_2$ avec A_0 inversible et $A_0^{-1}A_1$ compact. On utilise également ce résultat sous une forme variationnelle. Il prend la forme suivante :

Corollaire 1. *Soit une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) de la forme $a(\cdot, \cdot) = a_0(\cdot, \cdot) + a_1(\cdot, \cdot)$. On suppose que*

1. $a_0(\cdot, \cdot)$ et $a_1(\cdot, \cdot)$ sont continue sur $H \times H$;
2. $a_0(\cdot, \cdot)$ est H -coercive ;
3. $a_1(\cdot, \cdot)$ est continue
4. $a_1(\cdot, \cdot)$ est tel si (u_n) et (v_n) sont deux suites faiblement convergente dans H , $u_n \rightharpoonup u$ et $v_n \rightharpoonup v$ alors

$$a_1(u_n, v_n) \rightarrow a_1(u, v) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

alors si la proposition suivante

$$(a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H) \implies u = 0$$

est vraie, alors pour tout $f \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall u \in H$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $f \in H'$, la solution u du problème variationnel vérifie :

$$\|u\|_H \leq C \|f\|_{H'}$$

A.5.5 Lemme de Grönwall

Ce lemme est un outil important pour obtenir diverses estimations lors de l'étude des équations différentielles ordinaires. En particulier, il permet de démontrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

Lemme 5. *Si ϕ et ψ sont deux fonctions continues positives sur $[t_0, t_1]$ vérifiant l'inégalité :*

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1$$

avec K et L deux constantes positives. Alors

$$\phi(t) \leq K \exp L \int_{t_0}^t \phi(s)ds \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1$$

A.5.6 Le théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est un outil fondamental pour résoudre les équations d'évolution linéaires dans les espaces de Banach. Lorsque cet espace est lui même un espace fonctionnel, espace de Sobolev par exemple, ce théorème s'applique aux équations aux dérivées partielles d'évolution. Si u désigne l'inconnue d'une telle équation, on ne considère plus que l'on cherche une fonction des deux variables x et t

$$(x, t) \mapsto u(x, t),$$

mais plutôt une fonction du temps à valeurs dans un espace de fonctions de la variable x :

$$t \mapsto u(., t),$$

où $u(., t)$ désigne la fonction $x \mapsto u(x, t)$. C'est précisément la démarche que nous allons appliquer à l'équation des ondes. Nous nous contenterons du cadre hilbertien, suffisant pour notre propos. Dans ce court paragraphe nous ne ferons qu'énoncer le théorème, on se référera à un ouvrage d'analyse pour la démonstration.

Rappelons d'abord qu'un opérateur non borné A dans un espace de Hilbert H , muni d'un produit scalaire $(., .)_H$, est caractérisé comme étant une application linéaire d'un sous-espace $D(A)$ de H , appelé domaine de A , dans H . Le théorème de Hille-Yosida fait appel à la notion d'opérateur maximal monotone.

Définition 5. *Un opérateur A dans H de domaine $D(A)$ est dit maximal monotone si et seulement si :*

- (i) $A + I$ est surjectif de $D(A)$ dans H .
- (ii) $\forall u \in D(A), (Au, u)_H \geq 0$.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'équation d'évolution dans H :

$$(A.42) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow D(A) \subset H, \\ \frac{du}{dt} + Au = F, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad t > 0,$$

où $F(t)$ est une fonction donnée de \mathbb{R}^+ dans H . Par définition, on appellera solution classique, ou solution forte, de (A.42), toute fonction u vérifiant :

$$(A.43) \quad \begin{cases} t \rightarrow u(t) \in C^1(0, T; H), \\ \forall t \geq 0, \quad u(t) \in D(A), \\ t \rightarrow Au(t) \in C^0(0, T; H), \end{cases}$$

et vérifiant l'équation $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t)$ pour tout $t \geq 0$ et satisfaisant $u(0) = u_0$.

Si l'on munit $D(A)$ de la topologie hilbertienne associée à la norme du graphe :

$$\|u\|_{D(A)}^2 = \|u\|^2 + \|Au\|^2,$$

la propriété (A.43) se réécrit simplement.

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(A)).$$

Remarque 36. *Le lecteur notera que l'existence d'une solution classique de (A.42) nécessite que $F \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$ et que $u_0 \in D(A)$.*

Théorème 18. (Hille-Yosida)

On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A + \lambda I$ soit maximal monotone. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $F(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$, le problème (A.42) admet une unique solution classique (ou solution forte) :

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}; D(A)).$$

Remarque 37. *On demande à $F(t)$ la régularité $C^1(\mathbb{R}^+; H)$ alors qu'on aurait pu attendre $C^0(\mathbb{R}^+; H)$ (voir remarque 36). On notera que si la somme*

$$\frac{du}{dt} + Au \in C^1(\mathbb{R}^+; H),$$

on a seulement pour chaque terme

$$\frac{du}{dt} \in C^0(\mathbb{R}^+; H) \text{ et } Au \in C^0(\mathbb{R}^+; H).$$



ÉDITION 2007

Achevé d'imprimer le 21 septembre 2007 sur les presses
du Centre Poly-Média de l'École Polytechnique



Dépôt légal : 3^e trimestre 2007
N° ISBN 978 – 2 – 7302 – 1436 – 0

IMPRIMÉ EN FRANCE