Approximation des fonctions radiales par des vecteurs propres du laplacien radial

April 27, 2016

1 Vecteurs propres du laplacien radial

On se place en dimension $N \geq 2$. On considère une fonction radiale $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. On pose $f(r) = U(re_1)$ où e_1 est un vecteur quelconque de norme 1. Le Laplacien de u en un point $x \in \mathbb{R}^N$ de module r s'écrit alors

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} f'(r) \right)$$

. Cette expression justifie les définitions et résultats que nous montrons ici.

Proposition 1.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. L'espace $V_N = \left\{ u \in L^2(-1,1) \;\middle|\; \int_0^1 r^{N-1} u^2(r) < +\infty \right\}$ muni du produit scalaire*

$$\langle u|v \rangle_{V_N} = \int_0^1 r^{N-1} u(r) v(r) dr$$

est un espace de Hilbert.

Preuve. On a $V_N = L^2([0,1], x^{N-1}dx)$. Or $L^2_\mu(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour toute mesure μ. □

Proposition 1.2. *Soit $N \in \mathbb{N}$. L'espace $H_N = \{u \in V_N \mid u' \in V_N\}$ est un sous-espace dense de V_N. Muni du produit scalaire*

$$\langle u|v \rangle_{H_N} = \langle u|v \rangle_{V_N} + \int_0^1 r^{N-1} u'(r) v'(r) dr$$

il a aussi une structure d'espace de Hilbert.

Preuve. H_N contient l'ensemble des fonctions C^∞ qui est dense dans V_N. □

Proposition 1.3. *L'injection canonique de H_N dans V_N est compacte.*

Preuve. On applique le fait que l'injection $H^1(B(0,1)) \hookrightarrow L^2(B(0,1))$ est compacte Si f_n est une suite bornée de H_N, on définit la fonction G_n de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est radiale et vérifie $G(x) = f_n(|x|)$. $G \in H^1(B_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(0,1))$ et est bornée dans cet espace. On peut en extraire une suite convergente. La suite f_n une fois qu'on a extrait la même sous-suite, est de Cauchy donc converge dans V_N puisque V_N est complet. □

Définition 1.1. On note $H_{0,N}$ l'adhérence de l'espace $C_c^\infty([0,1[)$ dans H_N pour la norme $\|\cdot\|_{H_N}$

Proposition 1.4. *Sur $H_{0,N}$, la norme $\|\cdot\|_{H_N}$ est équivalente à la norme homogène*

$$\|u\|_{H_{0,N}} = \int_0^1 r^{N-1} |u'(r)|^2 dr$$

Preuve. Application de l'inégalité de Poincaré à une fonction radiale dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

Définition 1.2. On note $H^2_N = \left\{ u \in H_{0,N} \;\middle|\; \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} u'(r) \right) \in V_N \right\}$. C'est un sous-espace dense de V_N.

Proposition 1.5. *Soit*

$$P \; : \; \begin{array}{ccc} H^2_N \cap H_{0,N} & \longrightarrow & V_N \\ u & \longmapsto & -\dfrac{1}{r^{N-1}}\dfrac{d}{dr}\left(r^{N-1}u'(r)\right) \end{array}$$

P est auto-adjoint positif sur V_N, et il existe une suite croissante tendant vers l'infini de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V_N formée de vecteurs propres de P c'est-à-dire

$$Pe_n = \lambda_n e_n$$

. Les vecteurs propres sont des fonctions infiniment dérivables.

Preuve. Pour le montrer on se place dans $\mathbb{R}^N$ et on travaille avec les fonctions radiales correspondantes comme dans les preuves précédentes. P coïncide avec le Laplacien. On montre qu'il est auto-adjoint à l'aide du principe de régularité elliptique. □

Proposition 1.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ La fonction*

$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc} B_{\mathbb{R}^N}(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e_n(|x|) \end{array}$$

est un élément de $H^2(B_{\mathbb{R}^N}(0,1)) \cap H^1_0(B_{\mathbb{R}^N}(0,1))$ et vérifie $-\Delta f_n = \lambda_n f_n$. Réciproquement, à toute valeur propre radiale du Laplacien avec conditions de Dirichlet, correspond un vecteur propre de P.

Proposition 1.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur propre e_n associé à la valeur propre λ_n vérifie :*

$$e_n(|x|) = C\int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{ix\cdot\sqrt{\lambda_n}\xi} d\xi$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Expression du laplacien en Fourier. □

Corollaire 1.1. *Pour tout $N \geq 2$ La fonction*

$$e \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{ir\xi\cdot u_1} d\xi \end{array}$$

admet une infinité de zéros, notés $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rangés dans l'ordre croissant. Toutes les valeurs propres de P sont isolées, et les vecteurs propres de P sont donnés par

$$e_n \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & C_n e(\rho_n r) \end{array}$$

où C_n sont des constantes de normalisation. Les constantes C_n sont de plus uniformément bornées.

Proposition 1.8.

- *Lorsque $N = 2$, la fonction e est proportionnelle à*

$$e \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & J_0(r) \end{array}$$

  où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce.

- *Lorsque $N = 3$, la fonction e est proportionnelle à*

$$e \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \mathrm{sinc}(r) \end{array}$$

  où sinc est la fonction sinus cardinal. Dans ce cas, les zéros de e sont $\rho_n = n\pi$.

Proposition 1.9. *On a l'équivalent suivant pour les valeurs propres de P :*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$$

Preuve. Par récurrence sur la dimension N. Entre deux zéros de e en dimension N, se trouve un zéro de e en dimension $N+1$ (théorème de Rolle, dérivation sous l'intégrale). Or pour la dimension 3, on connaît les zéros de e qui sont donnés par $\rho_n = n\pi$. □

2 Décomposition en série de Fourier généralisée

Tout élément $f \in V_N$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f | e_n \rangle_{V_N} e_n$$

décomposition à laquelle je me réfère en tant que "Série de Fourier généralisée" par la suite.

Proposition 2.1. *Pour toute fonction f de H_N, on a*

- *f est continue*

-

Preuve. Il faut remarquer que $\langle f | e_n \rangle = -\frac{1}{\lambda_N} \langle f | e_n \rangle$. Prouver la majoration des C_N. Utiliser que l'inverse de la racine est dans L1. □

Proposition 2.2. *(Décroissance des coefficients pour les fonctions régulières) Soit f une fonction dans H_N^2. Alors on a*

Pour calculer rapidement des sommes de la forme

$$p(x) = \sum_{y \in Y} G(|x - y|)q(y) \tag{1}$$

Il est utile de trouver une décomposition du noyau G sous la forme

$$G(r) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_p H_p(r) \tag{2}$$

où les fonctions H_p sont des vecteurs propres radiaux de l'opérateur Laplacien avec conditions de Dirichlet sur une boule centrée en 0.