Convolution rapide par des noyaux radiaux en deux dimensions

May 11, 2016

1 Vecteurs propres du Laplacien sur la boule unité

On étudie dans cette section les vecteurs propres radiaux du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^N$, noté $\mathbb{D}$.

1.1 Espaces de fonctions radiales

Définition 1.1. On définit l'espace $L^2_{rad}(\mathbb{D}) = \{f \in L^2(\mathbb{D}) \mid \exists g : f(x) = g(|x|) \text{ p.p. } \}$, que l'on munit du produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{D})$. C'est un espace de Hilbert, comme sous-espace fermé de l'espace $L^2(\mathbb{D})$.

Définition 1.2. On note $C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables, à support compact et radiales :

$$C^\infty_{rad}(\mathbb{D}) = \{f \in C^\infty_c(\mathbb{D}) \mid |x| = |y| \implies f(x) = f(y)\}$$

Nous avons besoin de la définition de l'intégrale sur la surface de l'hypersphère, empruntée à [2, p.78] :

Proposition 1.1. *Il existe une (unique) mesure de Borel σ sur l'ensembe $S^{N-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; |x| = 1\right\}$ telle que pour toute fonction intégrable f sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_{S^{N-1}} r^{N-1} f(ru) d\sigma(u)$$

Corollaire 1.1. *Soit $f \in C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$, alors l'intégrale de f sur le disque s'écrit :*

$$\int_{\mathbb{D}} f(x)dx = c_N \int_0^1 r^{N-1} g(r)dr$$

où c_N est une constante donnée par

$$c_N = \sigma(S^{N-1}) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

Proposition 1.2. *L'espace des fonctions $C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$ est dense dans $L^2_{rad}(\mathbb{D})$*

Preuve. On sait que l'espace $C^\infty_c(\mathbb{D})$ est dense dans $L^2(\mathbb{D})$. Soit $f \in L^2_{rad}(\mathbb{D})$ et $\varepsilon > 0$, montrons qu'on peut trouver une fonction h de $C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$ telle que $\|f - h\|_{L^2(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Nous savons qu'il existe $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{D})$ vérifiant cette relation. Posons pour tout $r \in [0, 1]$

$$h(r) = \frac{1}{c_N} \int_{S^{N-1}} \chi(ru) d\sigma(u)$$

Nous devons vérifier que h est infiniment dérivable et que $\|f - h\|_{L^2(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Pour le deuxième point, il faut appliquer l'inégalité de Jensen à la mesure $\frac{1}{c_N}\sigma$. Le premier point s'obtient par des résultats classiques de régulatité sous l'intégrale. $\square$

Définition 1.3. On définit l'espace $H^1_{rad} = \{f \in L^2_{rad} \mid \forall i \in [1,N], \partial_i f \in L^2_{rad}\}$ muni du produit scalaire
$$(u,v) = \int_D uv + \nabla u \nabla v$$
C'est un sous-espace fermé de H^1 donc un espace de Hilbert.

Proposition 1.3. *L'injection canonique de H^1_{rad} dans Lrad est compacte.*

Preuve. C'est un corollaire théorème de Rellich. En effet, si une suite de fonction radiales de H^1 est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\mathbb{D})$ et on vérifie que la limite est nécessairement radiale. □

Définition 1.4. On définit l'espace $H^1_{0,rad}$ comme l'adhérence de $C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$ dans H^1_{rad}. On remarque que $H^1_{0,rad}$ est dense dans $Lrad$ puisque $C^\infty_{rad}(\mathbb{D})$ est dense dans ces deux espaces.

Proposition 1.4. *La norme H^1_{rad} est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{H^1_{0,rad}} = \int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2$$

.

Preuve. C'est une conséquence classique de l'inégalité de Poincaré. □

1.2 Distributions radiales

Définition 1.5. On dit qu'une distribution T est radiale si pour toute fonction test φ et pour toute rotation R (c'est-à-dire $RR^T = I_N$ et $\det(R) = 1$), on a

$$\langle T, R\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Proposition 1.5. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, et pour toute matrice A inversible, si l'on note $\sigma_A\varphi(x) = \varphi(Ax)$, on a*
$$\mathcal{F}(\sigma_A\varphi) = |\det(A^{-T})| A^{-T}\mathcal{F}(\varphi)$$

Corollaire 1.2. *La transformée de Fourier commute avec les rotations.*

Corollaire 1.3. *La transformée de Fourier d'une distribution radiale est une distribution radiale.*

Définition 1.6. On définit l'application Rad par
$$\begin{array}{llll} \mathrm{Rad} : & \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \\ & \varphi & \longmapsto & \dfrac{1}{c_N}\displaystyle\int_{S^{n-1}} \varphi \end{array}$$

Proposition 1.6. *Pour toute distribution radiale T et toute fonction test φ, on a*

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \mathrm{Rad}\varphi\rangle$$

1.3 Base de vecteurs propres radiaux du Laplacien

Théorème 1.1. *Il existe une base de L^2_{rad} formée de fonctions radiales de classe $C^\infty(\mathbb{D})$ qui sont des vecteurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet sur la boule unité i.e.*

$$\exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^\infty(\mathbb{D}), \quad (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+ : \quad \Delta e_n = -\lambda_n e_n$$

avec $|x| = 1 \implies e_n(x) = 0$ où (e_n) est une base hilbertienne de L^2_{rad}. La suite des valeurs propres λ_n tend vers $+\infty$.

Preuve. Nous avons vérifié dans la sous-section précédente toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème 7.3.2 de [1, p. 219]. Nous en déduisons l'existence d'une base Hilbertienne de $L^2_{rad}(\mathbb{D})$ formée des vecteurs propres du Laplacien sur $H^1_{0,rad}$ et la suite des valeurs propres positives tend vers l'infini. La régularité des vecteurs propres provient du théorème de régularité elliptique. □

Proposition 1.7. *Notons g_n les fonctions définies sur $[0,1]$ par $g_n(|x|) = e_n(x)$. Les fonctions g_n sont solutions de l'équation différentielle du second ordre :*

$$g_n''(r) + \frac{N-1}{r} g_n'(r) + \lambda_n g_n(r) = 0 \quad \text{sur } (0,1) \tag{1}$$

Preuve. Cela vient de l'expression classique du Laplacien en coordonnées sphériques. □

Proposition 1.8. *Les fonctions g_n vérifient $g_n'(0) = 0$*

Preuve. Cela vient de la dérivabilité et la parité de la restriction de e_n sur un diamètre de la boule unité. On peut aussi remarquer que si ce n'était pas le cas, l'équation différentielle (1) entraînerait que $g_n'' + \lambda_n g_n$ n'est pas continue en 0 alors qu'on sait que g_n est de classe C^∞. □

Proposition 1.9. *Il existe une unique fonction J de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ radiale vérifiant*

$$-\Delta f = f \tag{2}$$

Cette fonction est donnée par

$$J(x) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{ix\cdot u} d\sigma(u) \tag{3}$$

Preuve. Pour l'existence, on peut remarquer que la définition (3) fournit bien une solution de classe C^2 de (2), par régularité sous l'intégrale. L'unicité peut se voir de plusieurs manières, dont une qui fournit une justification de la formule (3). Considérons une solution de (2), et écrivons l'équation qu'elle vérifie dans le domaine de Fourier. On obtient

$$|\xi|^2 \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

soit $\hat{f}(\xi)(|\xi|^2 - 1) = 0$. □

Corollaire 1.4. *Les espaces propres du Laplacien avec condition de Dirichlet sur $L^2_{rad}(\mathbb{D})$ sont de dimension* 1*.*

Preuve. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, une solution f de (1) est déterminée de manière unique par les valeurs $f(0)$ et $f'(0)$. Considérons u et v deux vecteurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet, associés à la même valeur propre λ. Leur partie radiale notée abusivement u et v vérifient donc la même la même équation différentielle du second ordre. Remarquons que $v(0) \neq 0$ (sinon v serait identiquement nulle) donc on peut définir $w(r) = \frac{u(0)}{v(0)} v(r)$. w est alors également solution de la même équation différentielle que u et par construction, $w(0) = u(0)$. D'autre part, $u'(0) = w'(0) = 0$ donc $u = w$. On en déduit que u et v sont proportionnelles. □

References

[1] G Allaire. Analyse numérique et optimisation: Une introduction à la modélisation mathématique eta la simulation numérique. *Mathematiques appliquees. Ecole polytechnique, Palaiseau*, page 25, 2005.

[2] Gerald B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.