1. Étape 1: formulation variationelle.

$\cancel{[H_0^1(\Omega)]^d}$ $V := \overset{def}{=} \{ \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \gamma(\vec{v}) = 0$ sur Γ_D, $div(\vec{v}) = 0 \}$.

$$\|\vec{u}\|_V := \overset{def}{=} \left(\sum_i \int_\Omega u_i^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On multiple la première équation par $v \in V$.

$$\int_\Omega -\Delta\vec{u} \cdot \vec{v} \, dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \vec{v} \, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx.$$

$$\Rightarrow \sum_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \, d\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} p \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx - \int_\Omega p \cdot div(\vec{v}) \, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx.$$

i.e. $\displaystyle\sum_i \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx$ (1).

Étape 2. Résolution de la formulation variationnelle.

$$a(\vec{u}, \vec{v}) \overset{def}{=} \sum_i \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx, \quad L(\vec{v}) := \overset{def}{=} \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx$$

① $a(\vec{u}, \vec{v})$ est continue grâce à l'inégalité de Cauchy.

② $L(\vec{v})$ est continue grâce à l'inégalité de Cauchy.

③. Si l'inégalité de Poincaré est correcte sur V, alors

$a(u,u) = \sum_i \|\nabla u_i\|_{L^2}^2 \geq C_1 \cdot \sum_i \|u_i\|_{H_1}^2 \geq C_2 \cdot \|u\|_V^2$. i.e. $a(u,u)$ est coércive.

<u>preuve de l'inégalité de Poincaré sur V:</u>

i) Si $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = 0$. on déduire $f = 0$ p.p. du fait que $\gamma(f) = 0$ sur Γ_D. i.e. $\|\nabla f\|_{L^2} = 0 \Rightarrow \|f\|_{H^1} = 0$.

ii). Si l'inégalité de Poincaré n'est pas correcte sur V.

alors $\exists\, V_n \in V$, telle que: $\|V_n\|_{H^1} = 1 > n \cdot \|\nabla V_n\|_{L^2}^2$.

Donc $\nabla V_n \xrightarrow{L^2} 0$ (2).

D'autre part, V_n sont bornée dans $H^1 \Longrightarrow \exists$ sous-suite $V_{n'} \xrightarrow{L^2} V'$ (3).

par (2) (3), $V_{n'}$ est une suite de cauchy dans H^1.

$\Longrightarrow V_{n'} \xrightarrow{H^1} V_\infty$

$\Longrightarrow \|\nabla V_\infty\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|\nabla V_{n'}\|_{L^2} = 0$ par convergence dominé.

par (1), $\|V_\infty\|_{H^1} = 0$ qui est une contradition avec le fait que :

$$\|V_\infty\|_{H^1} = \lim_{n'\to\infty} \|V_{n'}\|_{H^1} = 1 \qquad \square.$$

Étape 3. Équivalance.

soit $\vec{u}$ est la solution de (1).

i.e. $\sum_i \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx, \ \forall v \in V$ (4).

$L(v) \stackrel{def}{=} \sum_i \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx - \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx$, alors $L(v) = 0$ pour $\forall v \in V \supseteq (H^{1,\, div}_{0,\, \Gamma_D})^d$

$\xrightarrow{\text{De Rham}} \exists\, p$, t.q. $\sum_i \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx - \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx = \int_\Omega p . \mathrm{div}(\vec{v}) dx$, pour $v \in (H^1_0)^d$.

$\xrightarrow{\text{Intègre par partie}} \int_\Omega (-\Delta \vec{u} + \nabla p) . \vec{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{v} . [(\nabla \vec{u} - p Id) . \vec{n}] \, d\sigma(x) = \int_\Omega \vec{f} . \vec{v} \, dx, \ \forall v \in (H^1_0)^d$.

$\Longrightarrow -\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}$.

on déduire que $(4) \Longleftrightarrow \sum_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx = \int_\Omega \vec{f} . \vec{v} \, dx = \int_\Omega (-\Delta \vec{u} + \nabla p) . \vec{v} \, dx. \ \forall v \in V$.

$\Longrightarrow \int_{\partial\Omega} \vec{v} [(\nabla \vec{u} - p Id) . \vec{n}] \, d\sigma(x) = 0, \ \forall v \in V$.

$\Longrightarrow (\nabla \vec{u} - p Id) . \vec{n} = 0$ sur Γ_N $\square$.

2. Il n'est pas facile de trouver des fonctions de base de sous-espace discret de V avec la contrainte $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

3. on multiple la première par v et la seconde par q :

$$\int_\Omega -\Delta\vec{u}\cdot\vec{v}\,dx + \int_\Omega \nabla p\cdot\vec{v}\,dx + \int_\Omega div(\vec{u})\cdot q\,dx = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx.$$

i.e. $$\int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx = \int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla\vec{v} + q\,div(\vec{u}) - p\,div(\vec{v})\,dx + \int_{\partial\Omega} \vec{v}\left[(pId-\nabla\vec{u})\cdot\vec{n}\right]d\sigma(x)$$

$$= \int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla\vec{v} + q\,div(\vec{u}) - p\,div(\vec{v})\,dx.$$

FV1 | Trouver $(u,p)\in V\times L^2(\Omega)$, t.q.

$$\int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla\vec{v} + q\,div(\vec{u}) - p\,div(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx, \quad \forall (v,p)\in V\times L^2(\Omega).$$

<u>L'équivalance de FV1 :</u>

$$\int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx = \int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla\vec{v} + q\,div(\vec{u}) - p\,div(\vec{v}) = \int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla 0 + q\,div(\vec{u}) - p\,div(0)$$

$\Rightarrow \int_\Omega q\,div(\vec{u})\,dx = 0$ pour $\forall q\in L^2(\Omega)$. Donc $div(\vec{u})=0$.

On déduire : $$\int_\Omega \nabla\vec{u}:\nabla\vec{v} - \cancel{q\,div(\vec{u})} - p\,div(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx, \quad \forall (v,q)\in V\times L^2(\Omega).$$

Intègre par partie : $$\int_\Omega (-\Delta\vec{u} + \nabla p)\cdot\vec{v} + \int_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\left[(\nabla\vec{u}-pId)\cdot\vec{n}\right]d\sigma(x) = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx.$$

$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta\vec{u}+\nabla p)\cdot\vec{v} = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx$ pour $\forall \vec{v}\in H_0^1(\Omega)$.

Donc $-\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}$.

On déduire que $\int_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\left[(\nabla\vec{u}-pId)\cdot\vec{n}\right]d\sigma(x) = 0$ pour $\forall$ ~~$(v,p)\in V\times L^2(\Omega)$~~ $v\in V$.

qui implie que $(\nabla\vec{u}-pId)\cdot\vec{n}$ sur Γ_N. □

4. $-\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{2,ij} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - p\delta_{ij} \right)$

$$= -\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot \delta_{ij} \right)$$

$$= -\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_j}.$$

5. $\forall (v, q) \in V \times \cancel{}\, H^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega -\Delta \vec{u} \cdot \vec{v}\, dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \vec{v}\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\vec{u}) \cdot q\, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}\, dx.$$

Intègre par partie : $\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}\, dx = \int_\Omega \left(\nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} + q\, \mathrm{div}(\vec{u}) - p\, \mathrm{div}(\vec{v}) \right) dx + \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \left[(p\, Id - \nabla \vec{u}) \cdot \vec{n} \right] d\sigma(x)$

(condition du bord) $= \int_\Omega \left(\nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} + q\, \mathrm{div}(\vec{u}) - p\, \mathrm{div}(\vec{v}) \right) + \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \left(\nabla^T \vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\sigma(x).$

Comme $\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \left(\nabla^T \vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\sigma(x) = \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} v_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot n_j\, d\sigma(x)$

$$= \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx$$

$$= \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx + \sum_{i,j} \int_\Omega v_i \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\, dx$$

$$= \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \quad (\text{car } \mathrm{div}(\vec{u}) = 0.)$$

On déduire que : $\int_\Omega \left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} \right) : \nabla \vec{v} - p\, \mathrm{div}(\vec{v}) + q\, \mathrm{div}(\vec{u})\, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}\, dx.$

(FV) | Trouver $(u, p) \in V \times H^1(\Omega)$. t.q.

$$\int_\Omega \left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} \right) : \nabla \vec{v} - p\, \mathrm{div}(\vec{v}) + q\, \mathrm{div}(\vec{u})\, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}\, dx$$

pour $\forall (v, q) \in V \times H^1(\Omega)$.

l'équivalance de FV' :

Fixe $v \in V$ on trouve $\int_\Omega \cancel{\xi}\, q\, \mathrm{div}(\vec{u})\, dx = 0$ pour $\forall q \in H^1(\Omega)$.

$\Rightarrow \mathrm{div}(\vec{u}) = 0$.

Ainsi, $\int_{\partial\Omega} \vec{v}(\nabla^T\vec{u}.\vec{n})\, d\sigma(x) = \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \nabla^T\vec{u} : \nabla\vec{v}\, dx$

par le même procedure.

On dédnire : $\int_\Omega \vec{f}.\vec{v}dx = \int_\Omega (\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}) : \nabla\vec{v} - p\,\mathrm{div}(\vec{v}) + q\,\mathrm{div}(\vec{u})\, dx$

$$= \int_\Omega (-\Delta\vec{u} + \nabla p).\vec{v}\, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{v}[(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u} - pId).\vec{n}]\, d\sigma(x)$$

pour $\forall (v,p) \in V \times H^1(\Omega)$.

prendre $p \in H_0^1(\Omega)$ on dédnire $-\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}$, ce qui nous permet de conclure que $(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u} - pId).\vec{n} = 0$ au sens des traces sur T_N. $\square$

(FV') n'est pas symétrique ~~donc n'a pas une interprétation énergétique~~.

Coercivité : i) $\int_\Omega (\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}) : \nabla\vec{u} = 0 \Rightarrow u = 0$.

preuve : $0 = \int_\Omega (\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}) : \nabla\vec{u}\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}) : (\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u})\, dx = \frac{1}{2}\|e(\vec{u})\|_{L^2}$

$\Rightarrow \|e(\vec{u})\|_{L^2} = 0$ donc $u = 0$. $\square$

ii) $\exists C > 0$, t.q $\|V\|_{H^1(\Omega)} \le C \cdot \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout fonction $v \in (H^1_{0,T_N})^d$

preuve : Sinon, $\exists V_n \in V$, telle que $\|V_n\|_{H^1} = 1 > n \cdot \|e(V_n)\|_{L^2} \Rightarrow e(V_n) \xrightarrow{L^2} 0$.

D'autre part, V_n est bornée dans $H^1 \Rightarrow \exists$ Sous-suite $V_{n'} \xrightarrow{L^2} V'$

Grâce à l'inégalité de Korn, $\|V_{n'} - V_{p'}\|^2_{H^1} \le C \cdot (\|V_{n'} - V_{p'}\|^2_{L^2} + \|e(V_{n'}) - e(V_{p'})\|^2_{L^2})$

$\Rightarrow V_{n'}$ est une suite de Cauchy dans H^1.

Donc $V_{n'} \xrightarrow{H^1} V_\infty$

$\|e(V_\infty)\|_{L^2} = \lim_{n'\to\infty} \|e(V_{n'})\| = 0$ ~~du~~, par i). on deduire que $V_\infty = 0$.

contraire à ~~a~~ fait que $\|V_\infty\|_{H'} = \lim_{n'\to\infty} \|V_{n'}\|_{H^1} = 1$. $\square$.

ce qui nous permet de conclure que :

$$\|u\|_{H'} \leq C\cdot \|e(v)\|_{L^2} = C' \int_\Omega \frac{(\nabla\vec{u}+\nabla^T\vec{u}):(\nabla\vec{u}+\nabla^T\vec{u})}{2} dx = a((u,p),(u,p))$$

est coercive.

6. $\sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji} B_{ji} = \sum_{i,j} A_{ij}(-B_{ij}) = -\sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$. Donc $\sum A_{ij} B_{ij} = 0$.

FV2 | Trouver $(u,p) \in V \times H^1(\Omega)$, t.q.

$$\int_\Omega \frac{(\nabla\vec{u}+\nabla^T\vec{u})\cdot(\nabla\vec{v}+\nabla^T\vec{v})}{2} - p\,\mathrm{div}(\vec{v}) - q\,\mathrm{div}(\vec{u})\,dx = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx$$

pour $\forall (v,q) \in V \times H^1(\Omega)$

(FV2) $\Leftrightarrow$ (FV') du fait que $\nabla\vec{u}+\nabla^T\vec{u}$ est symétrique, $\nabla\vec{v}-\nabla^T\vec{v}$ est antisymétrique,

et que $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$ pour (u,p) est solution de (FV2) ~~ou~~ qu (FV').

La forme bilinear n'est pas coercive.

7. (FV1) et (FV2) n'ont pas les même solution du fait que les

conditions au bord sur T_N sont differentes.

Quand $T_N = \phi$, les solutions de (FV1) et (FV2) sont les même.