

# Introduction à la géométrie différentielle

D. RENARD

6 juin 2016



# Table des matières

I	Sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ . . . . .	3
I.1	Immersion et submersion . . . . .	4
I.2	Paramétrage local. Système de coordonnées . . . . .	5
I.3	Sous-variétés définies par des graphes . . . . .	8
I.4	Sous-variétés définies par des équations . . . . .	10
I.5	Autre définition des sous-variétés . . . . .	14
I.6	Topologie des sous-variétés . . . . .	15
I.7	Changements de paramétrage . . . . .	18
I.8	Calcul différentiel sur les sous-variétés . . . . .	19
I.9	Champs de vecteurs sur les sous-variétés . . . . .	36
I.10	Equations différentielles sur les sous-variétés . . . . .	43
I.11	Exercices . . . . .	47
II	Courbes . . . . .	53
II.1	Courbes paramétrées. Arcs . . . . .	54
II.2	Théorie locale des courbes régulières . . . . .	60
II.3	Courbes périodiques . . . . .	67
II.4	Classification des sous-variétés connexes de dimension 1 . . . . .	70
II.5	Degré d'une application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ . . . . .	73
II.6	Propriétés globales des courbes . . . . .	78
II.7	Exercices . . . . .	91
II.8	Appendice : déplacements du plan et de l'espace . . . . .	92
III	Orientation. Théorèmes de séparation . . . . .	93
III.1	Orientation de $\mathbb{R}^N$ . . . . .	94
III.2	Champs de vecteurs normaux. Orientation . . . . .	95
III.3	Transversalité . . . . .	102
III.4	Le théorème de séparation de Jordan-Brouwer . . . . .	103
III.5	Exercices . . . . .	112
IV	Courbure des surfaces de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	115
IV.1	La seconde forme fondamentale . . . . .	116
IV.2	Interprétation géométrique . . . . .	119
IV.3	Etude des courbures principales . . . . .	123
IV.4	Les théorèmes de Liebmann et Jellett . . . . .	125

	IV.5	Voisinages tubulaires . . . . .	128
	IV.6	Exercices . . . . .	133
V		Géométrie intrinsèque . . . . .	135
	V.1	Métrique sur les surfaces . . . . .	136
	V.2	Théorème fondamental de la théorie des surfaces . . . . .	141
	V.3	Dérivée covariante . . . . .	144
	V.4	Géodésiques . . . . .	153
	V.5	Exponentielle . . . . .	163
	V.6	Théorème de Bonnet. . . . .	171
	V.7	Paramétrages spéciaux des surfaces . . . . .	175
	V.8	Exercices . . . . .	180
VI		Intégration sur les surfaces . . . . .	183
	VI.1	Déterminant jacobien . . . . .	183
	VI.2	Définition de l'intégrale sur les surfaces . . . . .	185
	VI.3	Propriétés de l'intégrale sur les surfaces . . . . .	189
	VI.4	Formule de changement de variables . . . . .	192
	VI.5	Théorème de Green-Ostrogradski . . . . .	196
	VI.6	Exercices . . . . .	203
VII		Théorème de Gauss-Bonnet . . . . .	205
	VII.1	Degré d'une application entre surfaces compactes . . . . .	205
	VII.2	Indice d'un zéro d'un champ de vecteurs . . . . .	213
	VII.3	La formule de Gauss-Bonnet/ Poincaré-Hopf . . . . .	218
	VII.4	Exercices . . . . .	222
VIII		Calcul différentiel . . . . .	225
	VIII.1	Généralités sur les espaces de Banach . . . . .	225
	VIII.2	Théorème de l'application ouverte et corollaires . . . . .	228
	VIII.3	Applications différentiables. Différentielle . . . . .	230
	VIII.4	Théorème des accroissements finis . . . . .	234
	VIII.5	Inversion locale . . . . .	238
	VIII.6	Equations différentielles . . . . .	243
IX		Rappels de topologie et d'analyse . . . . .	251
	IX.1	Connexité . . . . .	251
	IX.2	Homéomorphismes . . . . .	252
	IX.3	Théorème d'Ascoli-Arzelà . . . . .	252
	IX.4	Nombre de Lebesgue d'un recouvrement . . . . .	253
X		Problèmes . . . . .	255

# Préface

Ce cours est une introduction à la géométrie différentielle, où l'accent est mis sur les aspects globaux de la théorie. Il présuppose une bonne familiarité avec le calcul différentiel classique (fonctions d'ouverts de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ , équations différentielles), et a pour but d'introduire un certain nombre de notions fondamentales, à la base de la géométrie moderne (orientation, transversalité, structures riemanniennes, dérivées covariantes, courbures, géodésiques, théorie élémentaire du degré). Comme il nous semble important d'introduire ces idées sans noyer l'étudiant dans un flot de concepts nouveaux, difficiles à digérer dans un cours de 9 semaines (8 semaines depuis 2015), nous plaçons notre étude dans le cadre des sous-variétés, pour ce qui est de l'extension du calcul différentiel, puis nous nous restreignons aux courbes et aux surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , pour ce qui concerne les structures riemanniennes. Ce cadre est largement suffisant pour d'une part acquérir une bonne intuition géométrique des phénomènes et une maîtrise des techniques utilisées, qui seront mises à contribution dans des théories plus générales (variétés différentielles, géométrie riemannienne), et d'autre part pour accéder à des résultats marquants, dont certains sont parmi les plus célèbres et les plus beaux de la géométrie classique (théorèmes de points fixes de Brouwer, théorème de séparation de Jordan, *theorema egregium* de Gauss, théorème de Bonnet, de Hopf-Rinow, de Gauss-Bonnet, pour n'en citer que quelques uns).

Chaque chapitre comporte une introduction décrivant rapidement son contenu. Les deux chapitres finaux sont des appendices, le premier reprenant les principaux résultats du calcul différentiel dans les espaces de Banach, le second présentant des éléments variés de topologie et d'analyse utilisés dans le texte.

Ce cours emprunte beaucoup à trois ouvrages de la littérature : « Differential geometry of curves and surfaces » de M. P. do Carmo, « Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces » de M. Berger et B. Gostiaux, enfin et surtout « Curves and surfaces » de S. Montiel et A. Ros.

Le texte est loin d'être sous une forme aboutie. En particulier, il ne fait pas de doute que de nombreuses coquilles, points obscurs, erreurs, etc, subsistent. Toute remarque pour améliorer celui-ci est la bienvenue. Un autre manque patent pour un cours de géométrie, que nous essaierons de combler progressivement, est le manque de dessins.



# Chapitre I

## Sous-variétés de $\mathbb{R}^N$

De nombreux problèmes nécessitent de généraliser le calcul différentiel à des fonctions définies sur des entités géométriques autres que des ouverts d'un espace  $\mathbb{R}^N$ . Par exemple, on peut être amené à chercher les extrema d'une fonction dont la variable décrit l'espace des phases d'un système physique, cet espace de phases étant un certain lieu géométrique dans un espace  $\mathbb{R}^N$ , mais pas nécessairement un ouvert. De tels problèmes d'optimisation sous contrainte apparaissent naturellement en mécanique, en physique, en économie, etc.

Les sous-variétés apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et surfaces dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Elles peuvent être considérées selon différents points de vue qui font la richesse et la difficulté de la théorie. Une première étape va donc être de dégager des définitions équivalentes correspondant à ces différents points de vue, pour pouvoir choisir le plus adapté. L'outil fondamental permettant le lien entre ces points de vue est le théorème d'inversion locale. Localement, une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  ressemble à l'inclusion d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

Une fois les sous-variétés introduites, on peut définir les applications différentiables, ou de classe  $\mathcal{C}^k$  entre deux sous-variétés, et généraliser les résultats du calcul différentiel. La principale différence est que la différentielle  $df_p$  en un point  $p$  d'une telle application  $f$  entre deux sous-variétés  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est une application linéaire de l'espace tangent à  $\mathcal{S}_1$  en  $p$  vers l'espace tangent à  $\mathcal{S}_2$  en  $f(p)$ . Le domaine de définition et l'espace d'arrivée dépendent donc de  $p$ . Notons que l'une des conséquences du formalisme des sous-variétés est de pouvoir introduire facilement la notion d'espace tangent en un point, qui possède une interprétation géométrique évidente. Dans la théorie des variétés abstraites, la définition des espaces tangents constitue une difficulté initiale non négligeable. Une fois ces outils mis en place, l'extension des résultats du calcul différentiel est naturelle et guère difficile.

La théorie des équations différentielles, vue sous l'angle géométrique des champs de vecteurs et de leurs courbes intégrales, s'adapte aussi naturellement aux sous-variétés. Les points importants de cette théorie sont la définition du flot, local et global, et de ses propriétés.

Enfin, nous donnons dans ce chapitre une version du théorème de Sard. Il affirme qu'une application de classe  $\mathcal{C}^1$  a peu de valeurs critiques, ou au contraire, beaucoup de valeurs régulières. Plus précisément les valeurs critiques sont de mesure nulle dans la sous-variété but. Les ensembles de mesure nulle sur une sous-variété sont définis via les paramétrages à partir des ensembles de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^m$  pour la mesure de Lebesgue. Ce résultat sert à formaliser l'idée que certaines propriétés, ou configurations, sont « génériques ». Nous en verrons des applications dans le chapitre III à propos de la transversalité.

Dans tout ce qui suit, lorsqu'on parle d'une application ou d'une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^k$ , on suppose que  $k$  est un entier au moins égal à 1, ou bien que  $k = +\infty$ .

## I.1 Immersions et submersions

Les notions d'immersion et de submersion sont au coeur de la théorie des sous-variétés. Rappelons rapidement les points importants.

### Définition I.1.1.

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application différentiable définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $f$  est une **immersion** (resp. une **submersion**) en  $a \in \mathcal{U}$  si  $df_a$  est injective (resp. surjective) de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ . On dit que  $f$  est une **immersion** (resp. une **submersion**) si c'est une **immersion** (resp. une **submersion**) en tout point de  $\mathcal{U}$ .

Le résultat qui suit est une conséquence du théorème d'inversion locale [VIII.5.4](#).

### Proposition I.1.2.

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $a \in \mathcal{U}$  tel que  $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  soit injective. Alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $a$  dans  $\mathcal{U}$  tel que la restriction de  $f$  à  $\mathcal{U}_1$  soit une immersion en tout point, et de plus,  $f$  réalise un homéomorphisme entre  $\mathcal{U}_1$  et son image  $f(\mathcal{U}_1)$ .

Démonstration. Soit  $H$  un supplémentaire de l'image de  $df_a$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\mathbb{R}^N = df_a(\mathbb{R}^m) \oplus H.$$

On étend  $f$  en une application  $F : \mathcal{U} \times H \rightarrow \mathbb{R}^N$  en posant

$$F(q, t) = f(q) + t.$$

La restriction de  $F$  à  $\mathcal{U} \times \{0\}$  coïncide avec  $f$ . D'autre part,  $F$  est différentiable, sa différentielle en un point  $(q, t)$  étant donnée par

$$dF_{q,t} : \mathbb{R}^m \times H \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (h, w) \mapsto df_q(h) + w.$$

Ainsi, il est clair que  $dF_{(a,0)}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^m \times H$  dans  $\mathbb{R}^N$ , et le théorème d'inversion locale garantit l'existence d'un voisinage de  $(a, 0)$  dans  $\mathcal{U} \times H$  (que l'on peut prendre de la forme  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}$  où  $\mathcal{U}_1$  est un ouvert de  $\mathcal{U}$  contenant  $a$  et  $\mathcal{Y}$  un ouvert de  $H$  contenant 0) et d'un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f(a)$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que  $F$  réalise un difféomorphisme entre  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}$  et  $\mathcal{V}$ . Ceci montre que  $df_q$  est injective pour tout  $q \in \mathcal{U}_1$  et que  $f$  réalise un homéomorphisme de  $\mathcal{U}_1 \simeq \mathcal{U}_1 \times \{0\}$  sur son image  $f(\mathcal{U}_1) = F(\mathcal{U}_1 \times \{0\})$ .  $\square$



**Définition I.1.3.**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction différentiable définie sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $x \in \mathcal{V}$  est tel que  $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  n'est pas surjective,  $x$  est appelé **point critique** de  $f$  et  $a = f(x) \in \mathbb{R}^N$  est appelée **valeur critique** de  $f$ . Si  $x \in \mathcal{V}$  n'est pas un point critique, c'est un **point régulier**. Si  $a \in \mathbb{R}^N$  n'est pas une valeur critique, c'est une **valeur régulière**. C'est en particulier le cas lorsque  $a$  n'est pas dans l'image de  $f$ .

**Exercice I.1.4.** Le but de cet exercice est de montrer le

**Théorème du rang constant.** Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application  $\mathcal{C}^p$  d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $a \in \mathcal{U}$ .

1. Si  $f$  est une immersion en  $a$  (i.e. si  $df_a$  est injective) alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $a$  dans  $\mathcal{U}$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_1$  de  $f(a)$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\Psi : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2 \subset \mathbb{R}^m$  un difféomorphisme de  $\mathcal{W}_1$  sur un ouvert  $\mathcal{W}_2$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{W}_1$  et  $\Psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$  pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_1$ . Autrement dit, à un changement de variable au but près, toute immersion est localement égale à l'injection canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

2. Si  $f$  est une submersion en  $a$  (i.e. si  $df_a$  est surjective), alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $a$  dans  $\mathcal{U}$ , un ouvert  $\mathcal{U}_2$  de  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $\Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$  tels que

$$f \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_2$ . Autrement dit, à un changement de variable à la source près, toute submersion est égale à la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

3. Posons  $r = \text{rang}(df_a)$ . Supposons que  $df_x$  soit de rang  $r$  pour tout  $x$  dans un voisinage de  $a$ . Alors il existe

- a) un difféomorphisme  $\Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$  d'un ouvert  $\mathcal{U}_2$  de  $\mathbb{R}^n$  sur un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $a$  dans  $\mathcal{U}$ ,
- b) un difféomorphisme  $\Psi : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  d'un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_1$  de  $f(a)$  dans  $\mathbb{R}^m$  sur un ouvert  $\mathcal{W}_2$  de  $\mathbb{R}^m$ ,

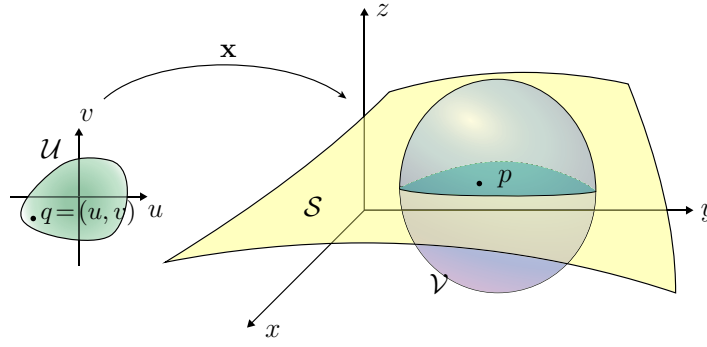
vérifiant  $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{W}_1$  et

$$\Psi \circ f \circ \Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_2, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_2$ .

## I.2 Paramétrage local. Système de coordonnées

Une première façon de voir les sous-variétés est celle de nappe paramétrée. Une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  est un objet paramétré localement par des ouverts de  $\mathbb{R}^m$ .

FIGURE I.1 – Paramétrage local (ici  $m = 2$ ,  $N = 3$ )**Définition I.2.1.**

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  est une **sous-variété de dimension  $m$  de classe  $\mathcal{C}^k$**  si pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une application  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  tels que :

1. l'application  $\mathbf{x}$  est différentiable de classe  $\mathcal{C}^k$ ,
2. l'application  $\mathbf{x}$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ ,
3. (condition de régularité) en tout point  $q \in \mathcal{U}$ , la différentielle  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$  est injective (autrement dit,  $\mathbf{x}$  est une immersion).

L'application  $\mathbf{x}$  est un **paramétrage local** de la sous-variété  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Son inverse  $\mathbf{x}^{-1} : \mathcal{V} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U}$ , est une **carte** ou encore un **système de coordonnées** (locales) de la sous-variété  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

La **codimension** d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  est  $N - m$ . Une sous-variété de codimension 1 est appelée **hypersurface**. Dans le cas  $m = 2$ , on parlera de **surface**.

Au point 2, la topologie sur  $\mathcal{S}$  est celle induite par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^N$ .

**Remarques I.2.2.**

1. La condition 3 implique que  $m \leq N$ .
2. Nous n'insisterons pas toujours sur les hypothèses de régularité minimales requises pour définir les notions et obtenir les résultats qui suivent. Le lecteur pourra soit supposer que les sous-variétés considérées sont toujours lisses (i.e.  $k = \infty$ ) et que toutes les applications sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , soit s'il est courageux, déterminer pour quelles classes de régularité les énoncés ont un sens et sont valides.
3. On peut remplacer  $\mathbb{R}^N$  dans la définition ci-dessus par n'importe quel espace vectoriel réel de dimension finie  $E$ .

**Exemple I.2.3.** Un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . En tout point de  $\mathcal{U}$ , on peut choisir comme paramétrage local l'inclusion de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Exemple I.2.4.** Une sous-variété de dimension 0 de  $\mathbb{R}^N$  est un ensemble discret.

**Exemple I.2.5.** Un sous-espace vectoriel ou affine de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $m$  est une sous-variété.

**Exemple I.2.6.** Un ouvert d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  (de même classe de régularité et de même dimension).

**Exemple I.2.7.** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des sous-variétés, respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ . Alors  $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ .

**Exemple I.2.8.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $\Phi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^N$  sur lui-même. Alors  $\Phi(\mathcal{S})$  est encore une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ .

**Exemple I.2.9.** Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une application différentiable définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $q \in \mathcal{U}$  tel que  $df_q$  soit injective. D'après la proposition I.1.2, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $q$  dans  $\mathcal{U}$  tel que la restriction de  $f$  à  $\mathcal{U}_1$  soit une immersion en tout point réalisant un homéomorphisme sur son image. Ainsi  $\mathcal{S} = f(\mathcal{U}_1)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  paramétrée par  $f : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ .

**Exercice I.2.10.** Montrer que le cercle  $C(a, r)$  de centre  $a$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous verrons bientôt de nombreux autres exemples de sous-variétés. Voici maintenant quelques exemples d'ensembles qui ne sont pas des sous-variétés :

**Exemple I.2.11.**  $\mathcal{S} = [0; +\infty[$ . Tout voisinage ouvert connexe de 0 est de la forme  $[0; a[$ ,  $a > 0$ , qui n'est jamais homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ . C'est évident si  $m = 0$ . Pour  $m = 1$ , on remarque que  $[0; a[ \setminus \{0\}$  est connexe, alors que  $\mathbb{R} \setminus \{x\}$  a deux composantes connexes pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $m \geq 2$ ,  $[0; a[ \setminus \{b\}$  a deux composantes connexes pour tout  $b \in ]0; a[$ , alors que  $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$  n'en a qu'une pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemple I.2.12.**  $\mathcal{S} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ . Tout voisinage connexe de  $(0, 0)$  dans  $\mathcal{S}$  est encore homéomorphe à  $\mathcal{S}$ . Or  $\mathcal{S} \setminus \{(0, 0)\}$  possède 4 composantes connexes, ce qui montre que  $\mathcal{S}$  ne peut être homéomorphe à un  $\mathbb{R}^m$ .

**Exercice I.2.13.**  $\mathcal{S} = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$ . Le point  $(0, 0)$  est un point de rebroussement de première espèce. Montrer que l'on ne peut pas trouver de paramétrage local en ce point qui vérifie le point 3 de la définition.

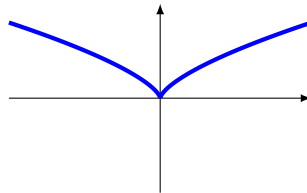


FIGURE I.2 – Point singulier

**Exemple I.2.14.** Voici un contre-exemple où le paramétrage  $\mathbf{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  est une immersion en tout point, mais l'image n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  à cause du point multiple en  $(0, 0)$ .

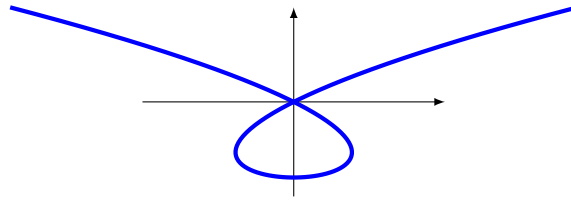


FIGURE I.3 – Point multiple

**Exemple I.2.15.** Dans cet exemple, le paramétrage  $\mathbf{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$  est une immersion en tout point, et de plus injectif. Néanmoins, l'image n'est pas une sous-variété à cause du point  $(0,0)$  qui n'admet pas de paramétrage local satisfaisant la condition 2 de la définition.

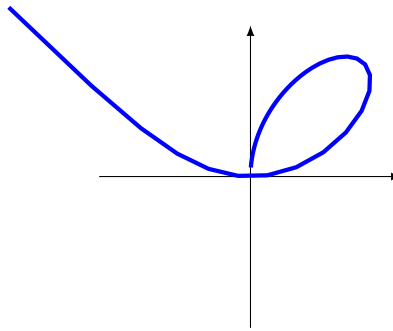


FIGURE I.4 – Le folium de Descartes

**Remarque I.2.16.** On ne suppose pas qu'une sous-variété est connexe. Toute composante connexe de  $\mathcal{S}$  est encore une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de même classe de régularité et de même dimension.

**Remarque I.2.17.** On ne suppose pas qu'une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  soit fermée dans  $\mathbb{R}^N$ . Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , la spirale définie par le paramétrage

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto (e^s \cos s, e^s \sin s)$$

a dans son adhérence le point  $(0,0)$  qui n'est pas un point de la sous-variété. Comme autre exemple, on peut citer celui d'une droite privée d'un point.

### I.3 Sous-variétés définies par des graphes

Une manière très simple de construire des sous-variétés est de considérer les graphes des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre espace vectoriel de dimension finie.

**Proposition I.3.1.**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  une fonction différentiable de classe  $\mathcal{C}^k$  définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Le graphe de  $f$

$$\mathbf{Graphe}(f) = \{(u, f(u)), (u \in \mathcal{U})\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} = \mathbb{R}^N$  de dimension  $m$ .

Démonstration. Le graphe de  $f$  est une sous-variété, un paramétrage global étant

$$\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad u \mapsto (u, f(u)). \quad \square$$

Soit  $A$  un isomorphisme linéaire de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$  dans lui-même. Il est évident qu'avec les notations de la proposition, l'ensemble

$$\mathcal{S} = A(\mathbf{Graphe}(f)) = \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}$$

est encore une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  (c'est un cas particulier de l'exemple 1.2.8). Comme la définition d'une sous-variété est de nature locale, on obtient

**Proposition I.3.2.**

Soit  $\mathcal{S}$  une partie de  $\mathbb{R}^N$  et supposons que pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$ , un isomorphisme linéaire  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$  et une application  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tels que

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V} \cap \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}.$$

Alors  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Réciproquement, une sous-variété peut-être vue localement comme un graphe, « à un isomorphisme linéaire près » de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$ .

**Proposition I.3.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^N$ . Alors pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$ , un isomorphisme linéaire  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$  et une application  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V} \cap \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}.$$

Démonstration. Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$  un paramétrage local en  $p$ . Soit  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Soit  $A$  un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^N$  dans lui-même tel que  $A^{-1}(d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ . Alors  $d(A^{-1} \circ \mathbf{x})_q = A^{-1} \circ d\mathbf{x}_q$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ . Écrivons

$A^{-1} \circ \mathbf{x}$  sous la forme  $A^{-1} \circ \mathbf{x}(u) = (i(u), j(u))$ ,  $i(u) \in \mathbb{R}^m$ ,  $j(u) \in \mathbb{R}^{N-m}$ . Par construction,  $dj_q = 0$  et  $di_q$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Le théorème d'inversion locale donne l'existence d'un ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $\mathbb{R}^m$  contenant  $q$  (que l'on suppose inclus dans  $\mathcal{U}$ ) et d'un ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $i$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{U}'$  sur  $\mathcal{U}_1$ . Soit  $\Phi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}'$  son inverse. Soit  $u_1 \in \mathcal{U}_1$  et posons  $u = \Phi(u_1)$  (et donc  $u_1 = i(u)$ ). On a alors

$$A^{-1} \circ \mathbf{x} \circ \Phi(u_1) = A^{-1} \circ \mathbf{x}(u) = (i(u), j(u)) = (u_1, j \circ \Phi(u_1)).$$

Posons  $f = j \circ \Phi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ . Alors  $\mathbf{x}(\mathcal{U}') = \{A(u_1, f(u_1)); (u_1 \in \mathcal{U}')\}$ .  $\square$

**Remarque I.3.4.** Les deux propositions qui précèdent fournissent donc une autre définition d'une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  : c'est une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant les hypothèses de la proposition I.3.2.

## I.4 Sous-variétés définies par des équations

Certaines sous-variétés peuvent être définie comme l'ensemble des points de l'espace ambiant solutions d'une équation. Par exemple, le cercle unité dans  $\mathbb{R}^2$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  du plan tels que  $x^2 + y^2 = 1$ . En revanche, l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  solutions de  $xy = 0$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . La proposition suivante donne un critère sur l'équation pour que l'ensemble de ses solutions soit une sous-variété.

### Proposition I.4.1.

Soient  $N$  et  $m$  deux entiers,  $N > m$ . Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  une fonction différentiable définie sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^N$ .

1. Soit  $p \in \mathcal{V}$  tel que  $df_p$  soit surjective. Posons  $a = f(p)$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_1$  de  $p$  dans  $\mathcal{V}$  tel que  $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$  est une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ .
- 2 Soit  $a$  une valeur régulière de  $f$ . Alors  $\mathcal{S} = f^{-1}(\{a\})$  est une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ .

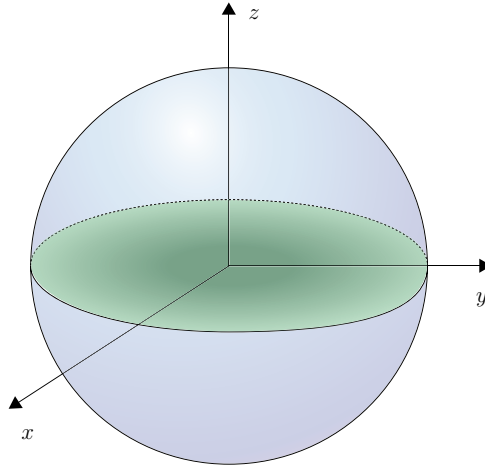
Démonstration. Soit  $p$  un point de  $f^{-1}(\{a\})$  tel que la différentielle de  $f$  en  $p$  soit surjective. Soit  $E \subset \mathbb{R}^N$  le noyau de  $df_p$  et soit  $F$  un sous-espace supplémentaire. Comme  $df_p$  est surjective, d'après le théorème du rang,  $E$  est de dimension  $m$ . Il existe donc un isomorphisme linéaire  $\varphi$  entre  $E$  et  $\mathbb{R}^m$ . Tout point de  $\mathcal{V}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $p + x + y$ , avec  $x \in E$  et  $y \in F$ . On peut donc définir

$$\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad p + x + y \mapsto (\varphi(x), f(p + x + y))$$

pour tout  $x \in E$  et tout  $y \in F$  tels que  $p + x + y \in \mathcal{V}$ . La différentielle de  $\Psi$  en  $p$  est

$$d\Psi_p(v + w) = (\varphi(v), df_p(v + w)) = (\varphi(v), df_p(w)), \quad (v \in E, w \in F).$$

Le théorème du rang implique que la restriction de  $df_p$  à  $F$  réalise un isomorphisme entre  $F$  et  $\mathbb{R}^{N-m}$ . On voit donc que  $d\Psi_p$  est un isomorphisme entre  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$ . On applique le théorème d'inversion locale : il existe un ouvert  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$  contenant  $p$ , et des ouverts  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$  respectivement de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^{N-m}$ , avec  $0 \in \mathcal{U}$  et  $a \in \mathcal{W}$  tels que

FIGURE I.5 – Sphère :  $\sum_i x_i^2 = 1$ 

$\Psi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{W}$  soit un difféomorphisme. Soit  $\iota_1$  l'injection canonique de  $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U} \times \{a\}$  dans  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ . Il est clair que l'application  $\psi = \Psi^{-1} \circ \iota_1$  est différentiable et injective. De plus  $f(\psi(x)) = f(\Psi^{-1}((x, a))) = a$  car  $f = p_2 \circ \Psi$ , où  $p_2$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$  sur  $\mathbb{R}^{N-m}$ . Ainsi  $\psi(\mathcal{U}) = f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$  et  $\psi$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S} = f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$  au voisinage de  $p$ .

Le deuxième point découle immédiatement du premier, puisque par définition d'une valeur régulière,  $df_p$  est surjective pour tout  $p \in \mathcal{S} = f^{-1}(\{a\})$ . La construction précédente fournit un paramétrage local en  $p$  pour tout  $p \in \mathcal{S}$ .  $\square$

**Exemple I.4.2.** On voit facilement que la sphère  $\mathbb{S}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , car  $\mathbb{S}^n = f^{-1}(\{1\})$  où  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|^2$  est différentiable, de différentielle

$$df_x(v) = 2\langle x, v \rangle, (x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}), (v \in \mathbb{R}^{n+1})$$

donc est une submersion en tout point  $x$ .

**Exemple I.4.3.** Plus généralement, toutes les quadriques de  $\mathbb{R}^N$ , définies par une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^N a_i$$

où les  $a_i$  sont dans  $\mathbb{R}$ , sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$ .

**Exemple I.4.4** (Le tore). Soit  $\mathcal{S}$  le tore d'axe  $D = \{x = y = 0\}$  dont les distances respectivement minimale et maximale à l'axe sont  $a - r$  et  $a + r$ , où  $a$  et  $r$  sont deux réels tels que  $0 < r < a$ , défini par l'équation  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ . On a donc  $\mathcal{S} = f^{-1}(\{r^2\})$  où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$ . La fonction  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{S} \setminus D$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

La différentielle  $df_p$  ne s'annule donc pas en  $p \in \mathcal{S}$ , ce qui montre que  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . On notera  $\mathbb{T}^2$  le tore obtenu en prenant  $a = 2$  et  $r = 1$ .

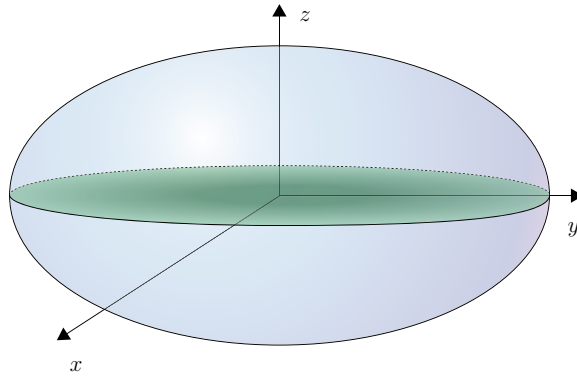


FIGURE I.6 – Ellipsoïde :  $\sum_i a_i x_i^2 = 1$ ,  $a_i > 0$

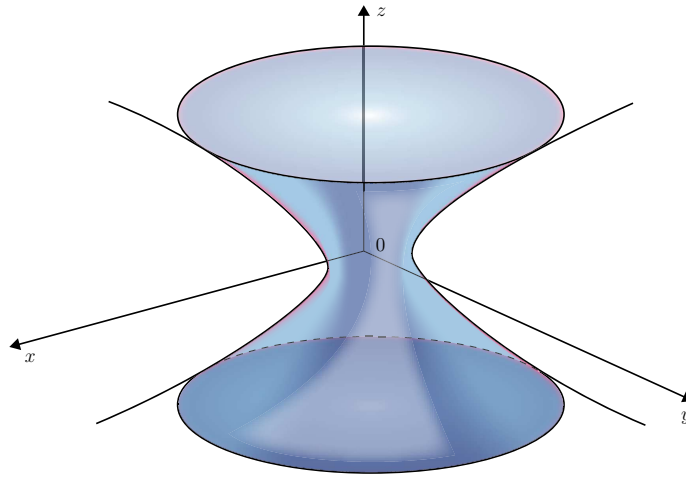


FIGURE I.7 – Hyperboloïde à une nappe :  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

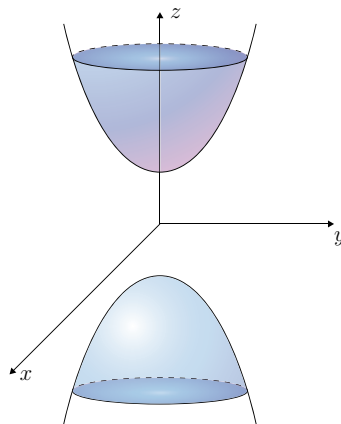
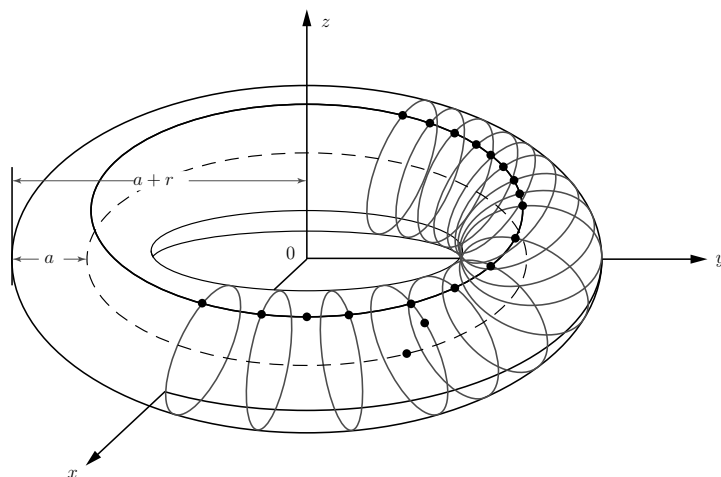


FIGURE I.8 – Hyperboloïde à deux nappes :  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$



FIGURE I.9 – Tore :  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ 

Comme la définition d'une sous-variété est de nature locale, et que par une translation, on peut sans perte de généralité supposer que  $a = 0$  dans la proposition ci-dessus, on obtient :

**Proposition I.4.5.**

Soit  $\mathcal{S}$  une partie de  $\mathbb{R}^N$  et supposons que pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une fonction  $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  dont 0 est valeur régulière tels que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \{x \in \mathcal{V} \mid \Psi(x) = 0\}.$$

Alors  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Réciproquement une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  peut être définie localement par une équation du type  $\Psi(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  et 0 valeur régulière de  $\Psi$ .

**Proposition I.4.6.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^N$ . Alors pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une fonction  $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tels que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \{x \in \mathcal{V} \mid \Psi(x) = 0\},$$

et 0 est une valeur régulière de  $\Psi$ .

Démonstration. Soit  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $p$ . L'image de la différentielle de  $\mathbf{x}$  au point  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$  est un sous-espace

vectorel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $H$  un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m) \oplus H = \mathbb{R}^N.$$

Le sous-espace  $H$  ayant dimension  $N - m$ , il est isomorphe à  $\mathbb{R}^{N-m}$ . Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^{N-m} \longrightarrow H$$

un isomorphisme. On considère maintenant l'application

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (u, t) \mapsto \mathbf{x}(u) + \varphi(t).$$

L'application  $\Phi$  est continûment différentiable et sa différentielle au point  $(q, 0)$  est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale montre qu'il existe un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $p$  et une application  $\Psi_1$  différentiable de  $\mathcal{V}$  dans un ouvert  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} \simeq \mathbb{R}^N$ ,  $q \in \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}_2$  ouvert contenant 0 dans  $\mathbb{R}^{N-m}$  et tels que  $\Phi : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}$  et  $\Psi_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  soient inverses l'un de l'autre. L'image par  $\Psi_1$  de l'intersection de la variété  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{V}$  est incluse dans  $\mathcal{U} \times \{0\}$ , si l'ouvert  $\mathcal{V}$  est choisi suffisamment petit. Composons  $\Psi_1$  par l'application linéaire  $p_2$ , projection canonique de  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m}$  sur  $\mathbb{R}^{N-m}$ . Si  $\Psi$  est l'application composée  $p_2 \circ \Psi_1$  définie sur  $\mathcal{V}$ , on a

$$\Phi((u, t)) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t) \Leftrightarrow (u, t) = \Psi_1(\mathbf{x}(u) + \varphi(t)),$$

d'où

$$t = p_2(u, t) = \Psi(\mathbf{x}(u) + \varphi(t)).$$

La variété  $\mathcal{S}$  est définie par l'équation  $\Psi(x) = 0$ , au voisinage de  $p$ , c'est-à-dire que

$$(\forall x \in \mathcal{V}), \quad [x \in \mathcal{S}] \Leftrightarrow [\Psi(x) = 0].$$

Comme  $\Psi$  est composé de  $\Psi_1$ , qui est un difféomorphisme, et de  $p_2$  qui est linéaire surjective, sa différentielle en tout point est surjective, et donc en particulier 0 est une valeur régulière de  $\Psi$ .  $\square$

**Remarque I.4.7.** Les deux propositions qui précèdent fournissent donc une autre définition d'une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  : c'est une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant les hypothèses de la proposition I.4.5.

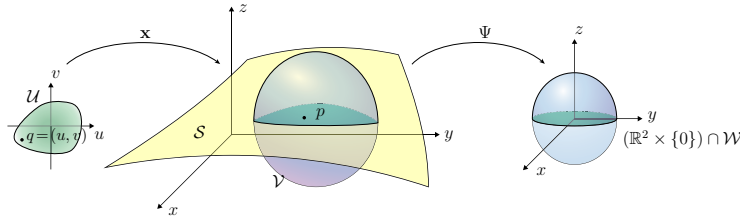
## I.5 Autre définition des sous-variétés

On trouve souvent dans la littérature une autre définition des sous-variétés de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^N$ , qui exprime le fait que localement une telle sous-variété est « à difféomorphisme près » l'inclusion d'un sous-espace de dimension  $m$ . Cette définition est proche de celle donnée en I.2.

### Proposition I.5.1.

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$  et  $\mathcal{S}$  une partie de  $\mathbb{R}^N$ . Alors  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de dimension  $m$  de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$ , un ouvert  $\mathcal{W}$  dans  $\mathbb{R}^N$  et un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme  $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  tels que

$$\Phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{W}.$$

FIGURE I.10 – Redressement local (ici  $m = 2$ ,  $N = 3$ )

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{S}$  soit une sous-variété et soient  $p$  un point de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{V}$  un voisinage ouvert de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$ , et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Posons  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$  et quitte à translater, supposons  $q = 0$ . Soit  $H$  un supplémentaire de l'image de  $d\mathbf{x}_q$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\mathbb{R}^N = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m) \oplus H.$$

C'est un sous-espace de dimension  $N - m$  de  $\mathbb{R}^N$ . Choisissons un isomorphisme linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow H.$$

On étend  $\mathbf{x}$  en une application  $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N$  en posant

$$F(u, t) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t).$$

L'application  $F$  est continûment différentiable et  $dF_{(q,0)}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} \simeq \mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Ainsi, le théorème d'inversion locale garantit l'existence d'un voisinage de  $(q, 0)$  dans  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m}$  (que l'on peut prendre de la forme  $\mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$  où  $\mathcal{U}'$  est un ouvert de  $\mathcal{U}$  contenant  $q$  et  $\mathcal{Y}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{N-m}$  contenant 0) et d'un voisinage  $\mathcal{V}'$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que  $F$  réalise un difféomorphisme entre  $\mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$  et  $\mathcal{V}'$ . On peut aussi supposer que ces ouverts sont choisis suffisamment petits, de sorte que  $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ . Posons  $\Phi = F^{-1} : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$ . On a alors  $\Phi(\mathcal{V}' \cap \mathcal{S}) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap (\mathcal{U}' \times \mathcal{Y})$ . Ceci montre que la condition locale voulue est vérifiée en  $p$ .

Réciproquement, soient  $p$  un point de  $\mathcal{S}$ , et  $\Phi, \mathcal{W}, \mathcal{V}$  comme l'énoncé de la proposition. On a donc  $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\} \cap \mathcal{W})$ . Posons  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap \mathcal{W}$ . C'est un ouvert du sous-espace  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^N$ . En identifiant  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  et  $\mathbb{R}^m$ , on voit  $\mathcal{U}$  comme un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et si  $\mathbf{x}$  désigne la restriction de  $\Phi^{-1}$  à  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ .  $\square$

## I.6 Topologie des sous-variétés

### I.6.1 Généralités

Nous faisons dans cette section quelques remarques sur la topologie des sous-variétés dont certaines font appel à des notions de topologie générale peut-être peu familières à certains lecteurs. Ces remarques n'étant pas indispensables dans la suite, nous ne développons pas ces notions ici.

Les sous-variétés d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^N$  (muni de sa structure euclidienne standard) héritent de la structure d'espace métrique de l'espace ambiant. Ce sont donc en particulier des espaces topologiques **séparés**, dont la topologie admet une **base dénombrable**. Une

autre façon naturelle de définir une topologie sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  est d'utiliser les paramétrages locaux (pour les variétés abstraites, il n'y a pas d'autre moyen). En effet, les paramétrages locaux en un point forment une base de voisinages de ce point, et la réunion de toutes ces bases de voisinages forme une base de la topologie. Bien entendu, les deux manières de définir la topologie d'une sous-variété (induite de l'espace euclidien ambiant ou par les paramétrages) coïncident (ceci vient de la condition 2 dans la définition I.2.1, les détails sont en exercice ci-dessous). En particulier, on voit que toute sous-variété est recouverte par un nombre dénombrable de paramétrages. Bien entendu, une variété compacte peut toujours être recouverte par un nombre fini de paramétrages.

D'autre part, la seconde manière de définir la topologie nous donne immédiatement d'autres propriétés de celle-ci. En effet, soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local en  $p$ . Quitte à le réduire, on peut supposer que  $\mathcal{U}$  est une boule ouverte de  $\mathbb{R}^m$ , et donc homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ . Une sous-variété de dimension  $m$  est donc **localement homéomorphe** à  $\mathbb{R}^m$  : tout point admet un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ . En particulier, une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  est **localement connexe** par arcs, et donc connexe par arcs si elle est connexe (voir section IX.1). Elle est aussi **localement compacte** (tout point admet un voisinage ouvert compact).

**Exercice I.6.1.** Montrer que la topologie induite de l'espace  $\mathbb{R}^N$  ambiant et la topologie donnée par les paramétrages locaux sur une sous-variété coïncident.

## I.6.2 Partitions de l'unité

Nous allons utiliser les propriétés de la topologie des sous-variétés vues dans la section précédente pour démontrer l'existence de partitions de l'unité. Pour cela, introduisons un peu de vocabulaire.

### Définition I.6.2.

Un **recouvrement** dans un espace topologique  $X$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de parties de  $X$  telles que  $X = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ . Un recouvrement  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de  $X$  est dit ouvert si les  $\mathcal{U}_i$  sont des ouverts. Un recouvrement  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de  $X$  est dit **localement fini** si tout point de  $X$  possède un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments du recouvrement.

Etant donné un recouvrement  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  d'un espace topologique  $X$ , on dit qu'un recouvrement  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_j)_{j \in J}$  est **subordonné** au recouvrement  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  si chaque  $\mathcal{V}_j$  est contenu dans l'un des  $\mathcal{U}_i$ .

Une **partition de l'unité** (de classe  $\mathcal{C}^k$ ) d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  consiste en la donnée d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{S}$ , et d'une famille de fonctions  $(\psi_i)_{i \in I}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  à valeurs réelles positives, telle que

**PU1.** Pour tout  $i \in I$ , le support  $\text{Supp}(\psi_i)$  de  $\psi_i$  est inclus dans  $\mathcal{U}_i$ .

**PU2.** Le recouvrement  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{S}$  est localement fini.

**PU3.** Pour tout  $x \in \mathcal{S}$ ,  $\sum_i \psi_i(x) = 1$ .

Remarquons que la somme est en fait une somme finie d'après les deux premières propriétés.

**Théorème I.6.3.**

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathcal{S}$ . Alors il existe une famille (dénombrable) de paramétrages locaux  $\mathbf{x}_j : B(0, 3) \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $j \in J$ , tel que  $(\mathbf{x}_j(B(0, 3)))_{j \in J}$  forme un recouvrement ouvert localement fini de  $\mathcal{S}$  subordonné à  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in I}$  et telle que les ouverts  $(\mathbf{x}_j(B(0, 1)))_{j \in J}$  recouvrent  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{O}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base de la topologie de  $\mathcal{S}$  constituée d'ouverts  $\mathcal{O}_k$  tels que  $\overline{\mathcal{O}_k}$  soit compact dans  $\mathcal{S}$ . Une telle base de la topologie existe car comme nous l'avons vu dans la section précédente, une sous-variété est localement compacte à base dénombrable de voisinage.

Construisons inductivement une suite  $A_1, A_2, \dots$  de parties compactes de  $\mathcal{S}$  dont la réunion est  $\mathcal{S}$  (en particulier, on voit que  $\mathcal{S}$  est  $\sigma$ -compacte, ou **dénombrable à l'infini**) telle que  $A_i$  est contenue dans l'intérieur de  $A_{i+1}$ . Prenons  $A_1 = \overline{\mathcal{O}_1}$ . Supposons avoir construit  $(A_1, \dots, A_n)$  avec les propriétés voulues. Soit  $j$  le plus petit entier tel que  $A_n$  est contenue dans  $\bigcup_{k \leq j} \mathcal{O}_k$ . On prend alors

$$A_{n+1} = \bigcup_{k \leq j} \overline{\mathcal{O}_k} \cup \overline{\mathcal{O}_{j+1}}.$$

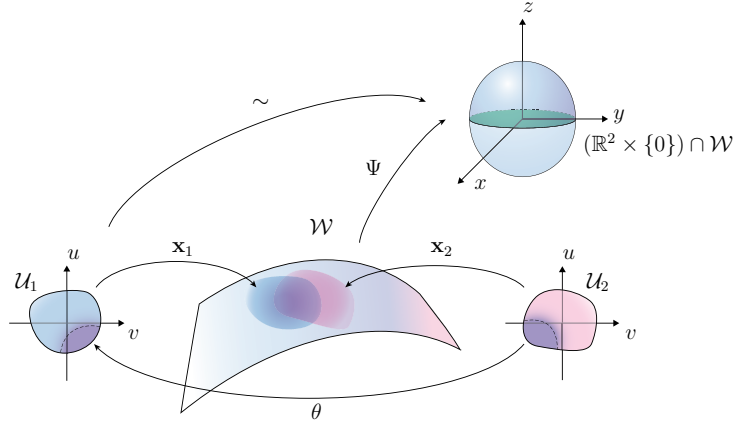
Il est facile de voir que cette construction donne une suite de parties compactes ayant les propriétés voulues.

Pour tout  $x \in \mathcal{S}$ , il existe un paramétrage local en  $x$   $\mathbf{x}_x : B(0, 3) \rightarrow \mathcal{S}$  dont l'image est arbitrairement petite. On suppose donc celle-ci contenue dans l'un des ouverts du recouvrement  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ . Pour tout entier  $k$  et pour tout  $x$  dans l'ouvert  $\mathring{A}_{k+2} \setminus A_{k-1}$ , on prend  $\mathbf{x}_x : B(0, 3) \rightarrow \mathcal{S}$  dont l'image est dans cet ouvert. Le compact  $A_{k+1} \setminus \mathring{A}_k$  est recouvert par les  $\mathbf{x}_x(B(0, 1))$  et donc par compacité, par un nombre fini d'entre eux. En prenant l'union dénombrable sur  $k$  de tous ces ouverts, on obtient un recouvrement ouvert de  $\mathcal{S}$  ayant les propriétés voulues.  $\square$

**Corollaire I.6.4.**

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathcal{S}$ . Alors il existe une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{x}_j : B(0, 3) \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $j \in J$ , une famille de paramétrages locaux comme dans le théorème. Pour tout  $j \in J$ , soit  $\phi_j$  une fonction sur  $\mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  à valeurs dans  $[0; 1]$  telle que  $\phi_j(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbf{x}_j(B(0, 1))$  et  $\phi_j(x) = 0$  si  $x \notin \mathbf{x}_j(B(0, 3))$ . Voici comment construire une telle fonction. Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , prenant ses valeurs entre 0 et 1, de support dans  $\bar{B}(0, 2)$  et valant 1 sur  $\bar{B}(0, 1)$  (voir [5], I.4 pour la construction de telles fonctions). Pour tout  $j \in J$ , définissons  $\phi_j$  sur  $\mathcal{S}$  par  $\phi_j(p) = 0$  si  $p \notin \mathbf{x}_j(B(0, 3))$ ,  $\phi_j = f \circ \mathbf{x}_j^{-1}$  sur  $\mathbf{x}_j(B(0, 3))$ . Cette fonction est de même classe que les paramétrages et vérifie les propriétés voulues. On pose alors  $\phi = \sum_j \phi_j$ . La somme est

FIGURE I.11 – Changement de paramétrage (ici  $m = 2$ ,  $N = 3$ )

finie lorsqu'on l'évalue en un point  $x$  de  $\mathcal{S}$  et à valeurs strictement positives. On pose alors  $\psi_j = \phi_j/\phi$ . On vérifie immédiatement que la famille  $(\psi_j)_{j \in J}$  est une partition de l'unité vérifiant les propriétés souhaitées.  $\square$

**Remarque I.6.5.** Dans la démonstration du théorème I.6.3, nous avons établi au passage qu'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  est  $\sigma$ -compacte, c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts. On en déduit que de tout recouvrement de  $\mathcal{S}$  par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable.

## I.7 Changements de paramétrage

Une sous-variété n'a pas de paramétrages privilégiés. Les objets ou les propriétés (différentielles, champs de vecteurs, etc) que nous allons étudier ne dépendent pas d'un choix de paramétrage (néanmoins, un choix judicieux peut souvent faciliter les calculs). Le résultat suivant nous permet d'assurer que le passage d'un paramétrage à un autre se fait toujours par une transformation suffisamment régulière.

### Proposition I.7.1.

Soit  $p$  un point d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soient

$$\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}$$

deux paramétrages de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $p$ . Notons  $\mathcal{W} = \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1) \cap \mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)$ . C'est un voisinage de  $p$  dans  $\mathcal{S}$ , et le changement de paramétrage

$$\theta = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_2^{-1}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{x}_1^{-1}(\mathcal{W})$$

est un homéomorphisme. Si les deux paramétrages sont de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , le changement de paramétrage est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

*Démonstration.* Comme  $\theta$  est obtenu par composition de deux homéomorphismes, c'est un homéomorphisme. On ne peut pas conclure par cet argument que c'est un difféomorphisme,

puisque  $\mathbf{x}_1^{-1}$  est défini sur l'ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$  et que l'on ne sait pas encore ce que signifie pour une fonction sur  $\mathcal{S}$  d'être différentiable en un point. En revanche, puisque  $\theta$  est un homéomorphisme, il suffit de vérifier que c'est localement un difféomorphisme.

Reprenons des éléments de la démonstration de la proposition I.5.1. Posons  $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p) \in \mathcal{U}_1$ . Nous avons étendu  $\mathbf{x}_1$  en une application  $F : \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N$  en posant

$$F(u, t) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t),$$

où  $\varphi$  est un isomorphisme linéaire entre  $\mathbb{R}^{N-m}$  et un supplémentaire de l'image de  $d(\mathbf{x}_1)_{q_1}$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous avons ensuite montré grâce au théorème d'inversion locale que  $F$  se restreint en un difféomorphisme d'un voisinage de  $(q_1, 0) \in \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m}$  sur son image et appelé  $\Phi = F^{-1}$  le difféomorphisme inverse.

Si l'on note  $P$  la projection de  $\mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m}$  sur  $\mathcal{U}_1$ , on a alors  $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 = P \circ \Phi \circ \mathbf{x}_2$  dans un voisinage de  $q_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(p) \in \mathcal{U}_2$ , où de plus  $\Phi \circ \mathbf{x}_2$  a valeurs dans  $\mathcal{U}_1 \times \{0\}$ . Sous cette forme, il apparaît clairement que  $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2$  est un difféomorphisme local en  $p$ .  $\square$

## I.8 Calcul différentiel sur les sous-variétés

Dans cette section, nous généralisons les outils du calcul différentiel aux sous-variétés.

### I.8.1 Applications différentiables sur les sous-variétés

Commençons par définir une notion de fonction différentiable.

#### Définition I.8.1.

Soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de dimension  $m$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $p \in \mathcal{S}$  si pour tout paramétrage  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  avec  $p \in \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}$ , la fonction  $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . On dit que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{S}$  si elle est différentiable en tout point de  $\mathcal{S}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \leq k$ , sur  $\mathcal{S}$  si pour tout paramétrage  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  la fonction  $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Remarque I.8.2.** D'après la proposition I.7.1, pour que  $f$  soit différentiable en  $p \in \mathcal{S}$ , il suffit que  $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  soit différentiable en  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$  pour un paramétrage local  $\mathbf{x}$ . De même, si  $r \leq k$ , pour que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^r$  dans un voisinage de  $p$ , il suffit que  $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  soit de classe  $\mathcal{C}^r$  pour un paramétrage local  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

**Exercice I.8.3.** Montrer que pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^r$  sur  $\mathcal{S}$  et tout  $p \in \mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une fonction  $F$  de classe  $\mathcal{C}^r$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  soit la restriction de  $F$  à  $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ .

Montrer que l'on peut construire une telle fonction  $F$  sur tout un voisinage de  $\mathcal{S}$  (utiliser des partitions de l'unité).



**Remarque I.8.4.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $n \in \mathbb{N}^\times$ . On peut étendre immédiatement les définitions de fonction différentiable en un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  ou de fonction de classe  $\mathcal{C}^r$  sur  $\mathcal{S}$  aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Définissons maintenant plus généralement les applications différentiables entre sous-variétés. Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ). Notons que puisque  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont des espaces topologiques (les topologies étant induites des espaces ambiants), on peut parler d'application continue de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ .

**Définition I.8.5.**

Soit  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application continue entre les sous-variétés (supposées de classe au moins  $\mathcal{C}^r$ , ( $r \geq 1$ ))  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ .

On dit que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  (resp. différentiable en  $p \in \mathcal{S}_1$ ) si quels que soient les paramétrages

$$\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1, \quad \mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , l'application  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$  définie sur  $\mathbf{x}_1^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)) \cap \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1))$  à valeurs dans  $\mathcal{U}_2$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  (resp. différentiable en  $\mathbf{x}_1^{-1}(p)$ ).

**Exemple I.8.6.** Les paramétrages locaux d'une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^r$  sont des applications de classes  $\mathcal{C}^r$ .

**Remarques I.8.7.**

1. La proposition I.7.1 montre que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  si l'on peut trouver pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$  des paramétrages locaux  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  respectivement de  $\mathcal{S}_1$  en  $p$  et de  $\mathcal{S}_2$  en  $\varphi(p)$  tels que  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$  soit de classe  $\mathcal{C}^r$  sur  $\mathbf{x}_1^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)) \cap \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1))$ .
2. On peut voir  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  comme une application de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathbb{R}^{N_2}$ , et parler en tant que telle de sa différentiabilité en un point ou son caractère  $\mathcal{C}^r$  (cf. remarque I.8.4). Nous laissons le lecteur vérifier  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  au sens de la définition ci-dessus si et seulement si  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  est de classe  $\mathcal{C}^r$  au sens de la remarque I.8.4).
3. On vérifie facilement que la composée de deux applications différentiables (resp. de classe  $\mathcal{C}^r$ ) est une application différentiable (resp. de classe  $\mathcal{C}^r$ ).
4. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^r$  tracée dans une sous-variété  $\mathcal{S}_1$  (de classe au moins  $\mathcal{C}^r$ ) de  $\mathbb{R}^{N_1}$ . C'est donc une application de classe  $\mathcal{C}^r$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^{N_1}$  dont l'image est dans  $\mathcal{S}_1$ , que l'on peut aussi voir comme une application de classe  $\mathcal{C}^r$  de la sous-variété  $I$  dans la sous-variété  $\mathcal{S}_1$  au sens de la définition ci-dessus, d'après le point 2. Soit  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^r$ . Le point 3 montre alors que  $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$  est de classe  $\mathcal{C}^r$ .

## I.8.2 Espace tangent

Intuitivement, il est naturel de définir l'espace tangent en un point  $p$  d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  comme l'espace des vecteurs tangents en  $p$  aux courbes tracées sur  $\mathcal{S}$  passant par  $p$ . Il n'est pas clair que ceci forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$ , mais en utilisant les paramétrages locaux de  $\mathcal{S}$ , nous allons voir que tel est le cas.



**Définition I.8.8.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que  $\vec{v}$  est un **vecteur tangent** à  $\mathcal{S}$  en  $p$  s'il existe une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0, dont la trace est contenue dans  $\mathcal{S}$ , telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = \vec{v}$ .

On appelle **espace tangent** à  $\mathcal{S}$  en  $p$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

L'espace tangent en un point  $q$  d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$  est tout simplement l'espace vectoriel ambiant  $\mathbb{R}^m$ . Faisons le lien grâce aux paramétrages locaux.

**Proposition I.8.9.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $p \in \mathcal{S}$  et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local en  $p$ . Posons  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Alors l'espace tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$  s'identifie à l'image de  $\mathbb{R}^m$  par l'application  $d\mathbf{x}_q$ . En particulier c'est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ .

*Démonstration.* Soit  $\vec{v}$  un vecteur tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$ , c'est-à-dire qu'il existe une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la trace est contenue dans  $\mathcal{S}$ , définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = \vec{v}$ . Quitte à réduire  $I$ , on peut supposer que la trace de  $\alpha$  est dans  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ . La courbe  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$ ,  $I \rightarrow \mathcal{U}$  est alors de classe  $\mathcal{C}^1$ , d'après remarque I.8.7, point 4 et l'exemple I.8.6.

Par définition de la différentielle,  $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = \vec{v}$ , ce qui montre que  $\vec{v} \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m)$ .

Réciproquement, si  $\vec{v} = d\mathbf{x}_q(\vec{w})$  pour un certain  $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ , on peut considérer la courbe

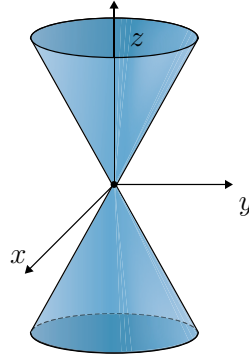
$$\beta : I \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto t\vec{w} + q$$

où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0. Posons  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ . On a par définition de la différentielle  $\vec{v} = \alpha'(0)$ . Ceci montre que  $\vec{v}$  est un vecteur tangent en  $p$  à  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Définition I.8.10.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété. On note  $T_p\mathcal{S}$  l'espace tangent à  $\mathcal{S}$  en un point  $p \in \mathcal{S}$ . C'est un sous-espace vectoriel de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$ . On note  $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$  le sous-espace tangent affine à  $\mathcal{S}$  en  $p$ , c'est-à-dire le sous-espace affine passant par  $p$  et parallèle à  $T_p\mathcal{S}$ .

De la discussion qui précède, on tire le résultat suivant qui est surtout pour nous le prétexte à introduire des notations utiles.

FIGURE I.12 – Cône  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ **Corollaire I.8.11.**

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Notons  $u = (u_1, \dots, u_m)$  la variable d'une fonction définie sur  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ . Soit  $(e_1, \dots, e_m)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . Posons

$$(I.8.1) \quad \mathbf{x}_{u_i}(u) = d\mathbf{x}_u(e_i) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{x}(u + te_i) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}(u)$$

Alors pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $(\mathbf{x}_{u_1}(u), \dots, \mathbf{x}_{u_m}(u))$  est une base de  $T_{\mathbf{x}(u)}\mathcal{S}$ .

**Exercice I.8.12.** Montrer que le cône  $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  dans  $\mathbb{R}^3$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition I.8.13.**

Si  $\mathcal{S} = \{(u, f(u))\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  définie par le graphe d'une application

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$$

comme dans la section I.3, alors l'espace tangent en  $p = (u, f(u))$  est le graphe de  $df_u$ .

Si  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  définie par

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid F(x) = 0\},$$

où 0 est valeur régulière de  $F$ , alors pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $T_p\mathcal{S} = \ker dF_p$ .

**Exercice I.8.14.** Démontrer la proposition.

### I.8.3 Différentielle d'une application différentiable

Grâce à la notion d'espace tangent, nous allons définir la notion de différentielle d'une application entre sous-variétés. Soit  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application continue entre les sous-variétés  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ).

Définissons maintenant la différentielle de  $\varphi$  en un point  $p \in \mathcal{S}_1$  où elle est différentiable. Soit  $\vec{v}$  un vecteur tangent à  $\mathcal{S}_1$  en  $p$ . Par définition,  $\vec{v} = \alpha'(0)$  où  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$  est une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 dans  $\mathcal{S}$  telle que  $\alpha(0) = p$ . Considérons la courbe  $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$ . Elle vérifie  $\beta(0) = \varphi(p)$  et son vecteur tangent en  $\varphi(p)$ ,  $\beta'(0)$  est donc dans  $T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$ .

Reprenons maintenant des éléments de la démonstration de la proposition I.8.9. Le vecteur tangent  $\vec{v} = \alpha'(0)$  s'écrit  $d\mathbf{x}_q(\vec{w})$ , où  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$  est un paramétrage local en  $p$  tel que  $\mathbf{x}(q) = p$  et ceci pour un unique  $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ . Il est clair qu'avec ces notations,  $\beta'(0) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$ , ce qui montre que  $\beta'(0)$  ne dépend pas du choix de la courbe  $\alpha$ , mais aussi que  $d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$  ne dépend pas du paramétrage choisi et que  $\vec{v} \mapsto \beta'(0) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$  est linéaire.

#### Définition I.8.15.

Soit  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application continue entre les sous-variétés  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  et  $p$  un point de  $\mathcal{S}_1$  où elle est différentiable. Alors il existe une application linéaire

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

caractérisée par l'une des propriétés suivantes :

1. si  $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$  s'écrit  $\vec{v} = d\mathbf{x}_q(\vec{w})$ , où  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$  est un paramétrage local en  $p$  tel que  $\mathbf{x}(q) = p$  avec  $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ , alors  $d\varphi_p(\vec{v}) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$ .
2. si  $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$  s'écrit  $\vec{v} = \alpha'(0)$ , où  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$  est une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 dans  $\mathcal{S}$  telle que  $\alpha(0) = p$ , alors  $d\varphi_p(\vec{v}) = \beta'(0)$  où  $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$ .

L'application linéaire  $d\varphi_p$  est appelée la différentielle de  $\varphi$  au point  $p$ .

**Remarques I.8.16.** Plaçons nous dans le cas où  $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{N_2}$ .

1. Si  $\mathcal{S}_1$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on a pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $T_p\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}^N$  et l'on retrouve la définition usuelle de  $d\varphi$ .

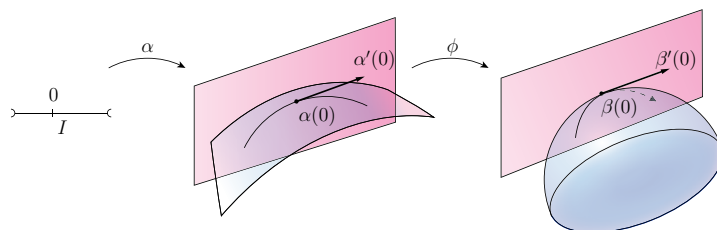


FIGURE I.13 – Différentielle

2. Si  $\varphi$  est la restriction d'une fonction différentiable  $F$  définie sur un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathbb{R}^{N_1}$ ,  $d\varphi_p$  est la restriction de  $dF_p$  à  $T_p\mathcal{S}_1$ .

3. Si  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$  est un paramétrage local en  $p$  avec  $\mathbf{x}(q) = p$ , l'application linéaire  $d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  est caractérisée par la propriété suivante

$$\varphi(\mathbf{x}(q+h)) = \varphi(p) + d\varphi_p(d\mathbf{x}_q(h)) + o(h)$$

(comme fonction de  $h$  définie dans un voisinage approprié de 0 dans  $\mathbb{R}^m$ ).

Les différentielles se composent de la manière habituelle.

**Proposition I.8.17.**

Soient  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$  des sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$ ,  $\mathbb{R}^{N_2}$  et  $\mathbb{R}^{N_3}$ ) et supposons que les applications

$$\varphi_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2, \quad \varphi_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3,$$

sont telles que  $\varphi_1$  est différentiable en  $p$ , et  $\varphi_2$  différentiable en  $\varphi_1(p)$ . Alors  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  est différentiable en  $p$ , et

$$d(\varphi_2 \circ \varphi_1)_p = d(\varphi_2)_{\varphi_1(p)} \circ d(\varphi_1)_p.$$

Démonstration. Ceci résulte des formules habituelles du calcul différentiel et de la définition I.8.15.  $\square$

**Notations I.8.18.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ). On note  $\mathcal{C}^r(\mathcal{W}_1, \mathcal{S}_2)$  l'espace des applications de classe  $\mathcal{C}^r$  d'un ouvert  $\mathcal{W}_1$  de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ .

**Exercice I.8.19.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

1. Montrer que l'inclusion  $i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Montrer que les applications constantes  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
3. Montrer que l'application identique  $\text{Id}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
4. Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $\mathcal{S}$ . Montrer que la restriction à  $\mathcal{S}$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^r$  sur  $\mathcal{V}$  est de classe  $\mathcal{C}^r$ .

**Exemple I.8.20.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $P$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^N$  passant par le point  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ , et soit  $a \in \mathbb{R}^N$  un vecteur normal unitaire à  $P$  en  $p_0$  (c'est-à-dire  $\langle x - p_0, a \rangle = 0$  pour tout  $x \in P$  et  $\|a\| = 1$ ). La fonction hauteur

$$h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  car c'est la restriction d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  définie sur l'espace  $\mathbb{R}^N$ . Sa différentielle en  $p \in \mathcal{S}$  est donnée par :

$$dh_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle v, a \rangle.$$

**Exemple I.8.21.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $p_0 \in \mathbb{R}^N$ . La fonction distance au carré

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = \|p - p_0\|^2$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  car c'est la restriction d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  définie sur l'espace  $\mathbb{R}^N$ . Sa différentielle en  $p \in \mathcal{S}$  est donnée par

$$df_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto 2\langle v, p - p_0 \rangle.$$

**Exemple I.8.22.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $p_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{S}$ . La fonction distance

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - p_0\|$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  car c'est la restriction d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  définie sur l'espace  $\mathbb{R}^N \setminus \{p_0\}$ .

**Exercice I.8.23.** Calculer la différentielle en un point  $p \in \mathcal{S}$  de la fonction distance de l'exemple précédent.

## I.8.4 Difféomorphisme local. Inversion locale

Ayant défini les applications différentiables entre sous-variétés et leur différentielles, on peut étendre certaines notions du calcul différentiel. Commençons par la notion de difféomorphisme.

### Définition I.8.24.

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) de classe au moins  $\mathcal{C}^k$  et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ . On dit que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^k$ -**difféomorphisme** si c'est un homéomorphisme et si  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ . On dit alors que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphes.

Un des problèmes fondamentaux de la topologie différentielle est la classification des variétés à difféomorphisme près. Un résultat important de H. Whitney (1936) nous dit que toute variété différentiable abstraite de dimension  $m$  est difféomorphe à une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2m}$ , de sorte le problème se ramène à celui de la classification des sous-variétés. C'est d'ailleurs dans cet article de 1936 que la définition rigoureuse des variétés abstraites

apparaît pour la première fois, même si des notions approximatives étaient utilisées depuis Riemann, en particulier dans les travaux de H. Weyl et en relativité générale.

Voici quelques résultats de classification. Nous n'explicitons pas tous les termes employés.

**Dimension 1.** La seule variété compacte connexe de dimension 1 est le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Il existe une seule autre sous-variété connexe de dimension 1 non compacte,  $\mathbb{R}$ . (voir section II.4).

**Dimension 2.** La classification des variétés compactes connexes de dimension 2 est donnée par la liste suivante : la sphère  $\mathbb{S}^2$ , le tore à  $g$  trous,  $g \geq 1$ , le plan projectif, le plan projectif recollé avec un tore à  $g$  trous. Le cas non compact est plus compliqué, car on peut avoir une infinité de trous, ainsi que des « pointes ».

**Dimension 3.** Le mathématicien G. Perelman a montré récemment que la seule variété compacte de dimension 3 connexe et simplement connexe (c'est-à-dire que tout lacet y est homotope à un lacet constant) est la sphère  $\mathbb{S}^3$ , résolvant ainsi la célèbre conjecture de Poincaré.

**Proposition I.8.25.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

un difféomorphisme. Alors pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

est un isomorphisme, d'inverse

$$d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2 \longrightarrow T_p\mathcal{S}_1.$$

En particulier, les dimensions de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont les mêmes.

Démonstration. C'est évident par la formule de composition des différentielles.  $\square$

**Théorème I.8.26 (Inversion locale).**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) de classe au moins  $\mathcal{C}^k$ , soit  $p \in \mathcal{S}_1$ , soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

soit un isomorphisme linéaire. Alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_1$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}_1$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_2$  de  $\varphi(p)$  dans  $\mathcal{S}_2$  tel que  $\varphi(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$  et la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{V}_1$  réalise un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $\mathcal{V}_1$  sur  $\mathcal{V}_2$ .

Démonstration. Soient  $\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$  et  $\mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$  des paramétrages locaux de  $\mathcal{S}_1$  en  $p$  et de  $\mathcal{S}_2$  en  $\varphi(p)$  respectivement, tels que  $\mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1) \subset \varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2))$ . On peut appliquer le théorème d'inversion locale VIII.5.4 à

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2$$

et en déduire le résultat voulu.  $\square$

On en déduit le résultat suivant qui complète la proposition I.3.3.

**Corollaire I.8.27.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $p \in \mathcal{S}$ . Soit  $P$  le sous-espace affine passant par  $p$  et parallèle à  $T_p\mathcal{S}$ . Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $P$ , un sous-espace vectoriel  $H$  de dimension  $N - m$  de  $\mathbb{R}^N$  et une fonction différentiable  $h : \mathcal{V} \rightarrow H$  tels que  $\mathcal{W}$  est le graphe de  $h$ .

Démonstration. Soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  la projection orthogonale sur  $P$ . C'est clairement une application différentiable de  $\mathcal{S}$  dans  $P$ , car c'est la restriction d'une application différentiable (et même linéaire) de  $\mathbb{R}^N$  dans lui-même. En particulier, on a

$$df_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_pP = T_p\mathcal{S}, \quad v \mapsto df_p(v) = v.$$

Comme  $df_p$  est l'identité de  $T_p\mathcal{S}$ , le théorème des fonctions implicites s'applique, et il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $P$  tel que  $f$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{W}$  sur  $\mathcal{V}$ , d'inverse  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ . On note  $\pi$  la projection orthogonale sur  $H = (T_p\mathcal{S})^\perp$  et l'on pose

$$h : \mathcal{V} \rightarrow H, \quad h(u) = \pi(g(u)).$$

Tout  $x \in \mathcal{W}$  s'écrit  $x = g(u)$ ,  $u \in \mathcal{V}$  et

$$x = f(x) + \pi(x) = u + \pi(g(u)).$$

Ceci montre le résultat, étant entendu un léger abus de langage : on identifie  $\mathbb{R}^N$  à  $T_p\mathcal{S} \times H$  par  $T_p\mathcal{S} \times H \simeq T_p\mathcal{S} \oplus H = \mathbb{R}^N$ .  $\square$

Etendons maintenant les notions d'immersion et de submersion aux applications entre sous-variétés.

**Définition I.8.28.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) et  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$ . On dit que  $\varphi$  est une **immersion** (resp. une **submersion**) au point  $p \in \mathcal{S}_1$  si sa différentielle

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

est injective (resp. surjective). On dit que  $\varphi$  est une immersion (resp. une submersion) si c'est une immersion (resp. une submersion) en tout point  $p \in \mathcal{S}_1$ .

**Proposition I.8.29.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ),  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$ .

1. Supposons que  $\varphi$  soit une submersion en  $p \in \mathcal{S}_1$ . Alors il existe un voisinage  $\mathcal{W}_1$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}_1$  tel que  $\mathcal{W}_1 \cap \varphi^{-1}(\{\varphi(p)\})$  soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^{N_1}$ , incluse dans  $\mathcal{S}_1$ .
2. Supposons que  $\varphi$  soit une immersion en  $p \in \mathcal{S}_1$ . Alors il existe un voisinage  $\mathcal{W}_1$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}_1$  tel que  $\varphi(\mathcal{W}_1)$  soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^{N_2}$ , incluse dans  $\mathcal{S}_2$ .

*Démonstration.* Pour le premier point, on peut, grâce à la proposition I.5.1, supposer que  $\mathcal{S}_2 = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{V}_2$ ,  $\mathcal{V}_2$  ouvert de  $\mathbb{R}^{N_2}$ , et utiliser alors le point 1 de la proposition I.4.1. Pour le second point, on suppose cette fois que  $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_1$  ouvert de  $\mathbb{R}^{N_1}$ , et on utilise l'exemple I.2.9.  $\square$

**I.8.5 Points critiques. Maxima et minima locaux**

Les résultats suivants du calcul différentiel sur les sous-variétés découlent aisément de leur analogues en calcul différentiel ordinaire (sur des ouverts de  $\mathbb{R}^m$ ) en utilisant des paramétrages locaux.

**Théorème I.8.30.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) avec  $\mathcal{S}_1$  connexe, et soit

$$f : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application différentiable telle que  $df_p = 0$  pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ . Alors  $f$  est constante.

**Théorème I.8.31.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable de  $\mathcal{S}$  à valeurs réelles. Si  $p$  est un extrémum local de  $f$ , alors  $df_p = 0$  sur  $T_p\mathcal{S}$ .

On introduit donc pour les fonctions différentiables définies sur des sous-variétés la notion de point critique, comme en calcul différentiel usuel.



**Définition I.8.32.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ), et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

une application différentiable. Si, en un point  $p \in \mathcal{S}_1$ , la différentielle

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

n'est pas surjective, on dit que  $p$  est un **point critique** de  $\varphi$ .

Dans le cas d'une fonction différentiable  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ , remarquons que  $p \in \mathcal{S}$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $df_p$  s'annule.

On définit de même comme dans la définition I.1.3 les **points réguliers**, **valeurs critiques** et **valeurs régulières**.

**Exemple I.8.33.** Dans le contexte ci-dessus, supposons que  $f$  soit la restriction à  $\mathcal{S}$  d'une fonction différentiable  $g$  définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $\mathcal{S}$ . Alors  $p \in \mathcal{S}$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $dg_p(T_p\mathcal{S}) = 0$ , autrement dit  $T_p\mathcal{S} \subset \ker dg_p$ .

**Exemple I.8.34.** Si  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ ,  $p$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $d(f \circ \mathbf{x})_q = 0$ , où  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ .

**Proposition I.8.35.**

Soit  $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$  une application différentiable définie sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^N$  dont 0 est valeur régulière et soit  $\mathcal{S}$  la sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  définie par

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{V} \mid F(x) = 0\}.$$

Soit  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable définie sur  $\mathcal{V}$  et soit  $f$  la restriction de  $g$  à  $\mathcal{S}$ . Posons  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{N-m}(x))$ . Alors un point  $p \in \mathcal{S}$  est point critique de  $f$ , c'est-à-dire  $df_p = 0$ , si et seulement s'il existe des réels  $w_1, \dots, w_{N-m}$  tels que

$$dg_p = w_1 d(F_1)_p + \dots + w_{N-m} d(F_{N-m})_p.$$

Les composantes du vecteur  $w = (w_1, \dots, w_{N-m})$  s'appellent les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. L'espace tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$  est  $\ker dF_p$  (Proposition I.8.13). Le point  $p$  est donc un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\ker dF_p \subset \ker dg_p,$$

autrement dit si la forme linéaire  $dg_p$  s'annule sur  $\ker dF_p$ . Mais remarquons que si  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{N-m}(x))$ , alors  $\ker dF_p$  est l'intersection des noyaux des formes

linéaires  $d(F_1)_p, \dots, d(F_{N-m})_p$ . Un résultat standard d'algèbre linéaire (à faire absolument en exercice) nous dit que  $dg_p$  s'annule sur l'intersection des  $\ker d(F_i)_p$  si et seulement si  $dg_p$  est combinaison linéaire des  $d(F_i)_p$ , i.e. s'il existe des réels  $w_1, \dots, w_{N-m}$  tels que

$$dg_p = w_1 d(F_1)_p + \dots + w_{N-m} d(F_{N-m})_p.$$

□

**Exercice I.8.36** (Diagonalisation des matrices symétriques). Soit  $A$  un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ , c'est-à-dire vérifiant

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle, \quad (v, w \in \mathbb{R}^N).$$

Considérons la fonction

$$f : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle Av, v \rangle.$$

Montrer que  $v$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $Av = f(v)v$ . En déduire que  $A$  admet un vecteur propre. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormale de  $\mathbb{R}^N$ .

**Exercice I.8.37.** Reprenons l'exemple I.8.21. Soient  $\mathcal{S}$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^N$  et

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = \|p - p_0\|^2.$$

On suppose  $\mathcal{S}$  compacte. Montrer qu'il existe une droite normale à  $\mathcal{S}$  passant par  $p_0$  (c'est-à-dire qu'il existe un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  tel que  $p - p_0$  est orthogonal à  $T_p\mathcal{S}$ ).

Montrer que si toutes les droites normales à la surface  $\mathcal{S}$  se rencontrent en un point  $p_0$ , alors  $\mathcal{S}$  est contenue dans une sphère.

## I.8.6 Hessienne

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) et

$$f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ . On suppose  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  et  $f$  de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ . On ne peut pas en général définir une notion de différentielle seconde de  $f$ . En effet, la différentielle première en un point  $p$  est une application linéaire de  $T_p\mathcal{S}_1$  dans  $T_p\mathcal{S}_2$ . Comme  $T_p\mathcal{S}$  dépend de  $p$ , on ne peut définir  $df$  comme une application de  $\mathcal{S}$  dans un espace vectoriel fixe, et donc définir sa différentielle.

Si  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}_1$  en  $p$ ,  $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  admet une différentielle seconde en  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$

$$q \mapsto d(d(f \circ \mathbf{x}))_q, \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2})) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}).$$

On pourrait être tenté d'utiliser ce fait pour définir malgré tout une différentielle seconde à  $f$  en  $p$ . Cet espoir est ruiné par le fait qu'une telle définition ne saurait être indépendante

du paramétrage local choisi. En effet, si  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}$  est un difféomorphisme entre un autre ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathcal{U}$ , le paramétrage local

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \circ h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}$$

donne :

$$d(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x} \circ h)_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x})_{h(q_1)} \circ dh_{q_1}, \quad (q_1 \in \mathcal{U}_1).$$

Ainsi  $q_1 \mapsto d(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1}$  est obtenu comme composition de

$$q_1 \mapsto (d(f \circ \mathbf{x})_{h(q_1)}, dh_{q_1}), \quad \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$$

et de l'application naturelle de composition (bilinéaire)

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}).$$

Ceci donne avec  $p = \mathbf{x}_1(q_1)$  :

$$(I.8.2) \quad d(d(f \circ \mathbf{x}_1))_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x})_q \circ (d(dh))_{q_1} + (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}).$$

Cette équation s'interprète ainsi : le membre de gauche est une application bilinéaire de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{N_2}$ . Le premier terme du membre de droite est la composée de  $(d(dh))_{q_1}$  qui est une application bilinéaire de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  et de  $d(f \circ \mathbf{x})_q$  qui est une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{N_2}$ . Le second terme du membre de droite est la composée de  $(dh_{q_1}, dh_{q_1})$ , une application linéaire de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans lui-même et de  $(d(d(f \circ \mathbf{x})))_q$ , une application bilinéaire de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{N_2}$ .

En revanche, si  $df_p$  s'annule, on a  $d(f \circ \mathbf{x})_q = df_p \circ d\mathbf{x}_q = 0$ , et donc

$$(I.8.3) \quad \begin{aligned} d(d(f \circ \mathbf{x}_1))_{q_1} &= d(f \circ \mathbf{x})_q \circ (d(dh))_{q_1} + (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}) \\ &= (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}). \end{aligned}$$

Ceci permet de définir pour tout  $v, w \in T_p \mathcal{S}$ ,

$$(I.8.4) \quad d^2 f_p(v, w) = d(df)_p(v, w) = (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(d(\mathbf{x}^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}^{-1})_p(w)).$$

La formule (I.8.3) montre que cette définition est indépendante du paramétrage, car

$$\begin{aligned} &(d(d(f \circ \mathbf{x}_1)))_{q_1}(d(\mathbf{x}_1^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}_1^{-1})_p(w)) \\ &= (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(dh_{q_1}, dh_{q_1})(d(h^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1})_p(v), d(h^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1})_p(w)) \\ &= (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(d(\mathbf{x}^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}^{-1})_p(w)). \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{S}$ . Comme nous venons de le voir, on ne peut en général pas définir de différentielle seconde de  $f$  en un point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , sauf dans le cas où  $p$  est un point critique de  $f$ .

#### Définition I.8.38.

Supposons que  $p$  est un point critique de la fonction  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Posons alors, quels que soient  $v, w \in T_p \mathcal{S}$ ,

$$d^2 f_p(v, w) = d(df)_p(v, w) = (d(d(f \circ \mathbf{x})))_q(d\mathbf{x}_p^{-1}(v), d\mathbf{x}_p^{-1}(w))$$

où  $\mathbf{x}$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . On a montré que cette définition est indépendante du paramétrage choisi.

Il découle des propriétés des différentielles secondes en calcul différentiel ordinaire que  $d^2f_p$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $T_p\mathcal{S}$ . On appelle cette forme la **hessienne** de  $f$  au point critique  $p$ . D'autre part, si la fonction  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local en  $p$ , alors  $d^2f_p$  est négative (resp. positive) et réciproquement, si  $d^2f_p$  est définie négative (resp. définie positive), alors  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local isolé en  $p$ .

**Exercice I.8.39.** Soient  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  entre deux sous-variétés  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ ,  $p$  un point de  $\mathcal{S}_1$  où la différentielle de  $f$  s'annule et  $d^2f_p$  la hessienne de  $f$  en  $p$ . Montrer que si  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^2$  tracée sur  $\mathcal{S}_1$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v \in T_p\mathcal{S}_1$ , alors

$$d^2f_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} [f(\alpha(t))].$$

**Exercice I.8.40 (Lemme de Morse).** Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{S}$  et  $p$  un point critique de  $f$ . On suppose que la hessienne de  $f$  en  $p$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $T_p\mathcal{S}$ , de signature  $(p, q)$  (on a donc  $p + q = m$ ).

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  de  $\mathcal{S}$  en  $p$  tel que

$$f(\mathbf{x}(q)) = f(q) + \sum_{i=1}^p u_i^2 - \sum_{i=p+1}^m u_i^2, \quad (q = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}).$$

On note  $\text{Sym}_m$  l'espace vectoriel des matrices symétriques  $m \times m$ .

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où  $\mathcal{S}$  est un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $p = 0$ ,  $f(0) = 0$  et  $d^2f_p$  est représentée par la matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ . On se place dans ce cas dans la suite.
2. Montrer qu'il existe une application  $B : \mathcal{V} \rightarrow \text{Sym}_m$ ,  $q \mapsto B(q) = (b_{ij}(q))_{ij}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que pour tout  $q = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{V}$ ,

$$f(q) = \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(q) u_i u_j.$$

3. Soit  $A = \text{Diag}(a_1, \dots, a_m)$  une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $a_i = \pm 1$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $A$  dans  $\text{Sym}_m$  et une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$

$$p : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$$

telle que  $p(A) = I_m$  et si  $p(B) = Q$ , alors  $B = {}^tQAQ$ .

**Indication :** on pourra raisonner par récurrence sur la dimension  $m$  et supposer le résultat vrai au rang  $m - 1$ . Si  $B = (b_{ij})_{ij} \in \text{Sym}_m$  est proche de  $A$ , poser

$$T = \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

et vérifier que  ${}^tBTB$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & B_1 & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ , où  $B_1 \in \text{Sym}_{m-1}$  est proche

de  $A_1 = \text{Diag}(a_2, \dots, a_m)$ .

4. On pose  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $q \mapsto p(B(q))^{-1}(q)$  où  $p$  est définie au 3 et  $B$  au 2. Montrer que  $f(q) = {}^t\varphi(q)A\varphi(q)$  et que  $d\varphi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$ . Conclure.

### I.8.7 Théorème de Sard

Nous énonçons dans cette section une version du théorème de Sard pour les sous-variétés. Nous commençons par définir les parties de mesures nulles sur les sous-variétés, la notion étant supposée connue sur  $\mathbb{R}^m$  muni de la mesure de Lebesgue (cf. [7]).

#### Définition I.8.41.

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ . On dit qu'une partie  $A$  de  $\mathcal{S}$  est de **mesure nulle** si pour tout paramétrage  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ , l'ensemble  $\mathbf{x}^{-1}(A)$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $\mathbb{R}^m$ .

La proposition suivante résume quelques propriétés immédiates des parties de mesures nulles d'une sous-variété.

#### Proposition I.8.42.

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $A$  une partie de  $\mathcal{S}$ . Alors :

- A. La partie  $A$  est de mesure nulle s'il existe une famille de paramétrages  $\mathbf{x}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $i \in I$  dont les images recouvrent  $\mathcal{S}$  et telle que  $\mathbf{x}_i^{-1}(A)$  est de mesure nulle pour tout  $i \in I$ .
- B. Si  $A$  est de mesure nulle, son intérieur est vide.
- C. Si  $A$  est réunion dénombrable de parties de  $\mathcal{S}$  de mesure nulle, alors  $A$  est de mesure nulle.

Rappelons, concernant la propriété **A**, que de tout recouvrement d'une sous-variété par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable (car une sous-variété est  $\sigma$ -compacte, cf. Section I.6.2).

Voici la version du théorème de Sard qui nous sera utile dans la suite. Le théorème de Sard montre qu'une application de classe  $\mathcal{C}^1$  possède peu de valeurs critiques, ou autrement dit, beaucoup de valeurs régulières.

**Théorème I.8.43** (Théorème de Sard).

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) de même dimension  $m$ , et soit

$$f_i : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2,$$

une famille dénombrable d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ . Alors l'ensemble des valeurs critiques de la famille  $(f_i)_{i \in I}$  (l'ensemble des points de  $\mathcal{S}_2$  qui sont valeur critique d'au moins une des  $f_i$ ) est de mesure nulle dans  $\mathcal{S}_2$ . En conséquence, l'ensemble des valeurs régulières des  $f_i$  est partout dense dans  $\mathcal{S}_2$ .

*Démonstration.* Grâce aux propriétés des ensembles de mesure nulle sur les sous-variétés énoncées dans la proposition ci-dessus, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'une application  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

**Lemme I.8.44.**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ . Pour tout compact convexe  $K \subset \mathcal{U}$ , il existe une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  de limite nulle en  $0^+$  telle que quels que soient  $x, y \in K$ ,

$$\|f(x) - f(y) - df_y(x - y)\| \leq g(\|x - y\|) \|x - y\|.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y) - df_y(x - y)\| &= \left\| \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} [f(y + t(x - y))] - df_y(x - y) \right) dt \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 (df_{y+t(x-y)}(x - y) - df_y(x - y)) dt \right\| \leq \int_0^1 \|df_{y+t(x-y)}(x - y) - df_y(x - y)\| dt \end{aligned}$$

Or  $(x, y, t) \mapsto \|df_{y+t(x-y)} - df_y\|$  est bornée sur  $K \times K \times [0; 1]$ . Posons

$$g(s) = \sup \{ \|df_{y+t(x-y)} - df_y\| ; (x, y, t) \in K \times K \times [0; 1], \|x - y\| \leq s \},$$

avec la convention que  $\sup \emptyset = 0$ . On en déduit

$$\|f(x) - f(y) - df_y(x - y)\| \leq g(\|x - y\|) \|x - y\|.$$

De la continuité uniforme de  $df$  sur le compact  $K$ , il résulte que  $g$  tend vers 0 en  $0^+$ . Remarquons au passage que la fonction  $g$  est croissante.  $\square$

*Démonstration du théorème.* L'ouvert  $\mathcal{U}$  est réunion dénombrable de cubes compacts. En effet  $\mathbb{R}^m$  admet un ensemble de points dénombrable dense, par exemple les points à coordonnées rationnelles. Il en est donc de même de  $\mathcal{U}$ . Soit  $\{x_i ; i \in I\}$  un tel ensemble. Comme  $\mathcal{U}$  est ouvert, pour tout  $i \in I$ , il existe un cube centré en  $x_i$  dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, contenu dans  $\mathcal{U}$ , et  $\mathcal{U}$  est réunion de ces cubes. Comme une union dénombrable d'ensemble de mesure nulle est nulle, il suffit de démontrer le théorème en remplaçant  $\mathcal{U}$  par un cube. A translation et homothétie près sur la variable, on peut supposer qu'il s'agit du cube unité  $K = [0; 1]^m$ .

Rappelons qu'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est de mesure nulle si pour  $\epsilon > 0$ , on peut le recouvrir par une union dénombrable de parallélépipèdes dont la somme des volumes est inférieure à  $\epsilon$ . Nous allons utiliser ce critère pour montrer que  $f(A)$  est de mesure nulle, où  $A = \{a \in K \text{ point critique de } f\}$ . Soit  $M = \sup_{x \in K} \|df_x\|$ . D'après le théorème des accroissements finis, quel que soient  $x \in K$  et  $a \in A$ , on a

$$(I.8.5) \quad \|f(x) - f(a)\| \leq M \|x - a\|.$$

De plus  $df_a$  est de rang au plus  $m-1$  puisque  $a$  est un point critique. Soit  $F_a$  un hyperplan affine contenant  $f(a) + \text{Im}(df_a)$ . Pour tout  $x \in K$ , la distance de  $f(x)$  à  $F_a$  vérifie

$$d(f(x), F_a) \leq \|f(x) - (f(a) + df_a(x - a))\|,$$

puis en appliquant le lemme

$$(I.8.6) \quad d(f(x), F_a) \leq g(\|x - a\|) \|x - a\|.$$

Supposons que  $x \in K \cap B(a, \eta)$ . On a donc d'après (I.8.5) et (I.8.6), comme  $g$  est croissante,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\eta, \quad d(f(x), F_a) \leq g(\eta)\eta.$$

On voit donc que  $f(x)$  est dans l'intersection de la boule de centre  $f(a)$  et de rayon  $M\eta$  et de l'épaississement de l'hyperplan  $F_a$  de demi-épaisseur  $g(\eta)\eta$ . Cette intersection est contenue dans un parallélépipède, produit d'un cube de  $F_a$  de rayon  $2M\eta$  et d'un intervalle de longueur  $2g(\eta)\eta$ . Finalement, on peut conclure que

$$(I.8.7) \quad \text{Vol}(f(B(a, \eta) \cap K)) \leq 2^m g(\eta) \eta^m M^{m-1}.$$

Subdivisons le cube  $K = [0; 1]^m$  en  $d^m$  cubes de côté  $\frac{1}{d}$ . Si un tel cube  $C$  contient un point critique  $a$ , ce cube est dans la boule  $B(a, \frac{\sqrt{m}}{d})$ , donc d'après (I.8.7)

$$\text{Vol}(f(C)) \leq 2^m g \left( \frac{\sqrt{m}}{d} \right) \left( \frac{\sqrt{m}}{d} \right)^m M^{m-1}.$$

Comme il y a au plus  $d^m$  cubes contenant un point critique, on a recouvert  $f(A)$  par des parallélépipèdes dont la somme des volumes est inférieure à

$$d^m 2^m g \left( \frac{\sqrt{m}}{d} \right) \left( \frac{\sqrt{m}}{d} \right)^m M^{m-1} = 2^m g \left( \frac{\sqrt{m}}{d} \right) \sqrt{m}^m M^{m-1}.$$

Comme la limite de cette quantité lorsque  $d$  tend vers  $+\infty$  est nulle, on conclut que  $f(A)$  est de mesure nulle.  $\square$

#### Corollaire I.8.45.

L'ensemble des valeurs régulières d'une famille  $(f_i)_{i \in I}$  d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux sous-variétés  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  de même dimension est dense dans  $\mathcal{S}_2$ . En particulier, il existe toujours des valeurs régulières.

**Remarque I.8.46.** Le théorème de Sard est valide pour des sous-variétés de dimensions différentes. Il est facile dans le cas  $\dim \mathcal{S}_1 < \dim \mathcal{S}_2$ , en fait dans ce cas  $f(\mathcal{S}_1)$  est de mesure nulle. Le cas  $\dim \mathcal{S}_1 > \dim \mathcal{S}_2$  est assez technique, voir par exemple [3]. Le cas d'égale dimension est le seul dont nous aurons à faire usage.

**Exercice I.8.47.** (Fonctions de Morse)

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est une fonction de Morse si la hessienne en tout ses points critiques est non dégénérée. Montrer que pour presque tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , la fonction

$$f_a : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + \langle a, x \rangle$$

est une fonction de Morse.

## I.9 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

### I.9.1 Champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$

#### Définition I.9.1.

Un **champ de vecteurs** sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  est une application

$$X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

On note  $\mathcal{X}(\mathcal{U})$  l'espace des champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ .

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Fixons un vecteur  $X \in \mathbb{R}^N$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ , et pour tout  $p \in \mathcal{U}$ , par définition de la différentielle de  $f$  en  $p$ ,

$$df_p(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tX) - f(p)}{t}.$$

Si  $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$ , notons  $(X \cdot f)(p)$ , le scalaire  $df_p(X(p))$ . Ceci définit  $X \cdot f : p \mapsto (X \cdot f)(p)$  comme une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ . Selon ce point de vue, un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  est un objet qui agit sur les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ , en transformant une telle fonction en une autre fonction  $\mathcal{C}^\infty$ . Cette transformation possède certaines propriétés qui généralisent celles de la transformation  $f \mapsto f'$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de la variable réelle.

#### Définition I.9.2.

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre. Une **dérivation** de  $\mathcal{A}$  est une application  $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{R}$ -linéaire, vérifiant quels que soient  $a, b \in \mathcal{A}$ ,

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

On note  $\text{Der}(\mathcal{A})$  l'ensemble des dérivations de  $\mathcal{A}$ .



**Lemme I.9.3.**

L'espace des dérivations  $\text{Der}(\mathcal{A})$  d'une  $\mathbb{R}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel, et quelles que soient  $D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathcal{A})$ ,  $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$  est encore une dérivation de  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Il s'agit de simples vérifications laissées au lecteur.  $\square$

**Proposition I.9.4.**

Soit  $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . L'application  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ,  $f \mapsto X \cdot f$  est une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire que c'est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire qui vérifie **l'identité de Leibniz** :

$$X \cdot (fg) = (X \cdot f)g + f(X \cdot g), \quad (f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})).$$

*Démonstration.* Ceci découle de la linéarité de la dérivée et de la règle de Leibniz sur la dérivée d'un produit.  $\square$

**Remarque I.9.5.** Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  s'écrit

$$p \mapsto X(p) = \sum_{i=1}^N a_i(p) e_i$$

où les  $a_i$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ . On a alors pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ , et pour tout  $p = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{U}$ ,

$$(X \cdot f)(p) = \sum_{i=1}^N a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

On note donc aussi

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Nous allons maintenant montrer une réciproque à la proposition. Notons  $\text{Der}(\mathcal{U})$  l'espace des dérivations de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ . Nous allons avoir besoin à plusieurs reprises du résultat technique mais évident suivant (voir [5], I.4) :

**Lemme I.9.6.**

Soient  $0 < r_1 < r_2$  des réels, et soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $u$  un point de  $\mathcal{U}$ . Supposons que  $B(u, r_2) \subset \mathcal{U}$ . Alors il existe une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$

$$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $\varphi \equiv 1$  sur  $B(u, r_1)$  et  $\varphi \equiv 0$  sur  $\mathcal{U} \setminus B(u, r_2)$ .

Nous pouvons grâce à ceci démontrer des propriétés importantes des dérivations de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ .

**Proposition I.9.7.**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $D$  une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ .

1. Si  $f$  est une fonction constante sur  $\mathcal{U}$ , on a  $D(f) \equiv 0$ .
2. Soit  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$  un ouvert contenu dans  $\mathcal{U}$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  qui sont égales sur  $\mathcal{U}_1$ , alors  $D(f) \equiv D(g)$  sur  $\mathcal{U}_1$ .
3. Pour tout  $i = 1, \dots, N$ , notons  $p_i$  la projection de  $\mathbb{R}^N$  sur la  $i$ -ème coordonnée :

$$p_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad u = (u_1, \dots, u_N) \mapsto u_i.$$

Soit  $u^0 \in \mathcal{U}$ . Posons  $p_i^0(u) = p_i(u - u^0)$ . On a alors, pour toute  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ,

$$D(f)(u^0) = \sum_{i=1}^N D(p_i^0)(u^0) \frac{\partial f}{\partial u_i}(u^0).$$

Démonstration. Pour démontrer 1, par linéarité, il suffit de démontrer que  $D(f) \equiv 0$  lorsque  $f$  est la fonction constante égale à 1. Or on a pour celle-ci, d'après les propriétés d'une dérivation,

$$D(f) = D(f^2) = 2D(f).$$

Pour démontrer 2, il suffit de montrer que si  $f \equiv 0$  sur  $\mathcal{U}_1$ , alors  $D(f) \equiv 0$  sur  $\mathcal{U}_1$ . Soit  $u \in \mathcal{U}_1$ . Soient  $0 < r_1 < r_2$  des réels tels que  $B(u, r_2) \subset \mathcal{U}_1$ , et soit  $\varphi$  une fonction comme dans le lemme précédent. On a alors  $f\varphi \equiv 0$  sur  $\mathcal{U}$ , d'où

$$0 = D(f\varphi)(u) = Df(u)\varphi(u) + f(u)(D\varphi)(u) = Df(u).$$

Démontrons maintenant 3. Posons  $u = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_N^0)$ . Écrivons

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_N) &= f(u_1, \dots, u_N) - f(u_1, \dots, u_N^0) \\ &\quad + f(u_1, \dots, u_{N-1}, u_N^0) - f(u_1, \dots, u_{N-1}^0, u_N^0) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + f(u_1, u_2^0, \dots, u_N^0) - f(u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) \\ &\quad + f(u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) \end{aligned}$$

$$= f(u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(u_1, \dots, u_{i-1}, tu_i + (1-t)u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0) dt.$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(u_1, \dots, u_{i-1}, tu_i + (1-t)u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0) dt \\ &= (u_i - u_i^0) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f(u_1, \dots, u_{i-1}, tu_i + (1-t)u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0) dt \end{aligned}$$

Posons  $F_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u = (u_1, \dots, u_N) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f(u_1, \dots, u_{i-1}, tu_i + (1-t)u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0) dt$$

Remarquons que  $F_i(u^0) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0)$ . On a donc finalement

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_N) &= f(u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) + \sum_{i=1}^N (u_i - u_i^0) F_i(u_1, \dots, u_N) \\ &= f(u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0) + \sum_{i=1}^N p_i^0(u_1, \dots, u_N) F_i(u_1, \dots, u_N) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (Df)(u_1^0, \dots, u_N^0) &= \sum_{i=1}^N D(p_i^0 F_i)(u_1^0, \dots, u_N^0) \\ &= \sum_{i=1}^N (Dp_i^0)(u_1^0, \dots, u_N^0) F_i(u_1^0, \dots, u_N^0) + p_i^0(u_1^0, \dots, u_N^0) DF_i(u_1^0, \dots, u_N^0) \\ &= \sum_{i=1}^N (Dp_i^0)(u_1^0, \dots, u_N^0) \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0). \quad \square \end{aligned}$$

#### Corollaire I.9.8.

Toute dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est de la forme  $f \mapsto X \cdot f$ , où  $X$  est un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ .

### I.9.2 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Nous pouvons maintenant généraliser ces concepts à toute sous-variété  $\mathcal{S}$ .

#### Définition I.9.9.

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . Un **champ de vecteurs tangents** sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$  est une application  $X : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^N$  telle qu'en tout point  $p$  de  $\mathcal{W}$ ,  $X(p) \in T_p \mathcal{S}$ .

On note  $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$  l'espace des champs de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{W}$ . Si  $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$  et  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ , on note  $fX \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$  le champ de vecteurs donné par  $p \mapsto (fX)(p) = f(p)X(p)$ .

On note  $\text{Der}(\mathcal{W})$  l'espace des dérivations de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ .

Soient  $\mathcal{W}$  un ouvert de  $\mathcal{S}$ ,  $p$  un point de  $\mathcal{W}$  et  $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ , on pose  $(X \cdot f)(p) = df_p(X(p))$ . On obtient immédiatement l'analogie de la proposition I.9.4.

**Proposition I.9.10.**

Soit  $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$ . L'application  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ ,  $f \mapsto X \cdot f$  est une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ .

De même, on établit une réciproque qui est l'analogue du lemme I.9.7 et de son corollaire.

**Proposition I.9.11.**

Soient  $\mathcal{W}$  un ouvert d'une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ , et soit  $D$  une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ .

1. Si  $f$  est une fonction constante sur  $\mathcal{W}$ , on a  $D(f) \equiv 0$ .
2. Soit  $\mathcal{W}_1$  un ouvert contenu dans  $\mathcal{W}$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$  qui sont égales sur  $\mathcal{W}_1$ , alors  $D(f) \equiv D(g)$  sur  $\mathcal{W}_1$ .
3. Toute dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$  est de la forme  $f \mapsto X \cdot f$ , où  $X$  est un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{W}$ .

*Démonstration.* Le premier point se démontre comme dans le lemme I.9.7. Le second point s'adapte facilement aussi. En effet, soit  $p \in \mathcal{W}$ , et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$  tel que  $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$ . Soit  $q = \mathbf{x}^{-1}(p) \in \mathcal{U}$ . Choisissons  $0 < r_1 < r_2 < r_3$  des réels tels que  $B(q, r_3) \subset \mathcal{U}$ . Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\mathcal{U}$  comme dans le lemme I.9.6. La fonction  $\varphi_1 = \varphi \circ \mathbf{x}^{-1}$  est définie sur l'ouvert  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ . Comme  $\varphi_1$  est nulle en dehors de  $\mathbf{x}(B(q, r_2))$ , on la prolonge par 0 sur  $\mathcal{W} \setminus \mathbf{x}(\mathcal{U})$ . La fonction encore notée  $\varphi_1$  ainsi obtenue est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{W}$ . On utilise alors cette fonction comme dans la démonstration du point 2 du lemme I.9.7 pour montrer le résultat voulu.

Montrons le dernier point. Remarquons tout d'abord que la propriété 2 permet de définir la restriction d'une dérivation  $D \in \text{Der}(\mathcal{W})$  à un certains ouverts  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}$ . En effet, soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}_1, \mathbb{R})$ . Nous voulons définir une fonction  $D_1 f$  sur  $\mathcal{W}_1$ , de sorte que  $f \mapsto D_1 f$  soit une dérivation. Soit  $p$  un point de  $\mathcal{W}_1$ . Comme ci-dessus, on construit des voisinages ouverts

$$\mathcal{W}_3 \subset \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$$

de  $p$  et une fonction  $\varphi_1$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{W}$ , identiquement égale à 1 sur  $\mathcal{W}_3$  et nulle en dehors de  $\mathcal{W}_2$ . La fonction  $f\varphi_1$  définie sur  $\mathcal{W}_1$  coïncide donc avec  $f$  sur  $\mathcal{W}_3$ , et est nulle en dehors de  $\mathcal{W}_2$ . On peut donc la prolonger par 0 en une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{W}$ , notée encore  $f\varphi_1$ . On pose alors

$$D_1 f(x) = D(f\varphi_1)(x), \quad (x \in \mathcal{W}_3).$$

La propriété 2 montre que  $D_1 f$  ainsi définie ne dépend pas du choix de  $\varphi_1$ . Il est clair que  $D_1$  est une dérivation de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}_1, \mathbb{R})$ , que l'on est à bon droit d'appeler la restriction de  $D$  à  $\mathcal{W}_1$ .

Soit  $p \in \mathcal{W}$ , et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$  tel que  $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$ . On vérifie facilement que l'on a une bijection  $D \mapsto \mathcal{D}$  entre  $\text{Der}(\mathcal{U})$  et  $\text{Der}(\mathbf{x}(\mathcal{U}))$ , donnée par

$$\mathcal{D}f = (D(f \circ \mathbf{x})) \circ \mathbf{x}^{-1}, \quad (f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{x}(\mathcal{U}), \mathbb{R})),$$

son inverse étant  $\mathcal{D} \mapsto D$  donnée par

$$Df = (\mathcal{D}(f \circ \mathbf{x}^{-1})) \circ \mathbf{x}, \quad (f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})).$$

Soit  $\mathcal{D}$  une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{x}(\mathcal{U}), \mathbb{R})$  et soit  $D \in \text{Der}(\mathcal{U})$  la dérivation de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  obtenue comme ci-dessus. D'après le point 3 du lemme I.9.7, il existe un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$  tel que  $Dg = X \cdot g$  pour toute  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ . Soit  $Y \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}(\mathcal{U}))$  le champ de vecteurs tangents défini par

$$Y(x) = d\mathbf{x}_{\mathbf{x}^{-1}(x)} X(\mathbf{x}^{-1}(x)), \quad (x \in \mathbf{x}(\mathcal{U})).$$

On a alors pour toute  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{x}(\mathcal{U}), \mathbb{R})$ , pour tout  $x \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$ ,

$$\begin{aligned} (Y \cdot f)(x) &= df_x(Y(x)) = df_x(d\mathbf{x}_{\mathbf{x}^{-1}(x)} X(\mathbf{x}^{-1}(x))) \\ &= d(f \circ \mathbf{x})_{\mathbf{x}^{-1}(x)}(X(\mathbf{x}^{-1}(x))) = D(f \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}^{-1}(x)) \\ &= \mathcal{D}(f)(x). \end{aligned}$$

Revenons à la démonstration du point 3. Soit  $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathcal{W})$ . S'il existe un recouvrement  $\mathcal{W} = \bigcup_i \mathcal{W}_i$  de  $\mathcal{W}$  par des ouverts  $\mathcal{W}_i$  tels que la restriction  $D_i$  de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{W}_i$  soit donnée par un champ de vecteurs tangents  $X_i \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_i)$ , il est facile de voir que les  $X_i$  coïncident sur les intersections des ouverts  $\mathcal{W}_i$  (utiliser la forme locale sur un paramétrage donnée par ce qui précède et le point 3 du lemme I.9.7). En conséquence, il existe un champ de vecteurs tangents  $X$  sur  $\mathcal{W}$  dont la restriction à  $\mathcal{W}_i$  est  $X_i$ . Enfin, on a alors  $\mathcal{D}f = X \cdot f$  pour toute  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ . Un tel recouvrement existe, puisque ce qui précède montre qu'il suffit de prendre un recouvrement de  $\mathcal{W}$  par des paramétrages locaux.  $\square$

### I.9.3 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et soient  $X, Y \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$  deux champs de vecteurs tangents sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$ . Nous avons vu que  $X$  et  $Y$  définissent des dérivations de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ . D'après le lemme I.9.3,  $f \mapsto X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$  est encore une dérivation de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ . D'après la proposition I.9.11, il existe un champ de vecteurs tangents sur  $\mathcal{W}$  qui donne cette dérivation. On le note  $[X, Y]$ . L'opération

$$\mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W}) \times \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W}), \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

s'appelle **crochet de Lie** des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

**Exercice I.9.12.** Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et soient

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$  (les  $a_i, b_i$  sont donc des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ ). Calculer  $[X, Y]$  dans la base des  $\frac{\partial}{\partial u_i}$ .

**Proposition I.9.13** (Identité de Jacobi).

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et soient  $X, Y, Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$  trois champs de vecteurs tangents sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$ . On a alors

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Démonstration. Ceci découle directement de la définition du crochet.  $\square$ .

**Définition I.9.14.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des sous-variétés, et soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  un difféomorphisme entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}_1$ . On définit le champ de vecteurs tangents  $f_*X$  à  $\mathcal{S}_2$  par

$$(f_*X)(f(p)) = df_p(X(p)), \quad (p \in \mathcal{S}_1).$$

Si  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}_2, \mathbb{R})$ , on a pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$((f_*X) \cdot \varphi)(f(p)) = d\varphi_{f(p)}((f_*X)(f(p))) = d\varphi_{f(p)}(df_p(X(p))) = (X \cdot (\varphi \circ f))(p).$$

**Théorème I.9.15.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des sous-variétés, et soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  un difféomorphisme. Soient  $X, Y$  des champs de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}_1$ .

$$f_*([X, Y]) = [f_*X, f_*Y].$$

Démonstration. On a pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}_2, \mathbb{R})$ , et pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$\begin{aligned} (f_*([X, Y]) \cdot \varphi)(f(p)) &= ([X, Y] \cdot (\varphi \circ f))(p) = X \cdot (Y \cdot ((\varphi \circ f)))(p) - Y \cdot (X \cdot ((\varphi \circ f)))(p) \\ &= f_*X \cdot (f_*Y \cdot \varphi)(f(p)) - f_*Y \cdot (f_*X \cdot \varphi)(f(p)) = ([f_*X, f_*Y] \cdot \varphi)(f(p)). \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire I.9.16.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ . Les champs de vecteurs  $\mathbf{x}_{u_i} \circ \mathbf{x}^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sur  $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}$  vérifient

$$[\mathbf{x}_{u_i} \circ \mathbf{x}^{-1}, \mathbf{x}_{u_j} \circ \mathbf{x}^{-1}] = 0, \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Démonstration. D'après le théorème, il suffit de voir que  $[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}] = 0$ , quels que soient  $i, j = 1, \dots, m$ . Mais ceci est tout simplement le lemme de Schwarz, i.e.  $\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_i}$ .  $\square$

## I.10 Equations différentielles sur les sous-variétés

Nous allons maintenant développer une théorie des équations différentielles sur les sous-variétés. Cette théorie donne des énoncés de nature locale, ou globale. Les premiers se ramènent (via les paramétrages locaux) à la théorie des équations différentielles sur les ouverts de  $\mathbb{R}^N$  rappelés dans la section VIII.6. Les seconds s'en déduisent de la même manière que pour les équations différentielles sur les ouverts de  $\mathbb{R}^N$ . Nous ne donnons donc pas de démonstration, laissant ce travail de vérification au lecteur, qui est invité à lire ce qui suit parallèlement à la section VIII.6. Le seul résultat nouveau, propre aux sous-variétés, est le théorème I.10.12.

### I.10.1 Courbes intégrales et flot d'un champ de vecteurs tangents

#### Définition I.10.1.

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $X$  un champ de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}$ . On appelle **courbe intégrale** de classe  $\mathcal{C}^p$ , du champ de vecteurs  $X$  une courbe paramétrée  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0, telle que pour tout  $t \in J$ ,  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ . Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale**  $x_0 \in \mathcal{S}$  si  $\alpha(0) = x_0$ .

Un **flot local** en  $x_0$  de  $X$  est la donnée d'un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{S}$ , d'un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et d'une application

$$F : J \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}$$

tels que pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , la courbe paramétrée

$$\alpha_x : J \longrightarrow \mathcal{S}, \quad t \mapsto F(t, x)$$

soit une courbe intégrale de  $X$  de condition initiale  $x$ .

**Remarque I.10.2.** L'intervalle de définition  $J$  de la courbe intégrale  $\alpha_x$  est indépendant de  $x \in \mathcal{U}$ .

Enonçons l'analogie du théorème VIII.6.4 et de son corollaire VIII.6.5.

**Théorème I.10.3.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^1$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $x_0 \in \mathcal{S}$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant 0 et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{S}$ , tels qu'il existe un et un seul flot local en  $x_0$  défini et continu sur  $J \times \mathcal{U}$ . Si le champ de vecteurs  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors  $F$  aussi.

**Remarque I.10.4.** On pourrait établir le même résultat avec des une condition plus faible que  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . En effet, pour l'énoncé analogue (théorème VIII.6.4) dans un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $X$  localement lipschitzien suffit. Nous laissons au lecteur le soin de trouver le bon énoncé pour les sous-variétés.

**Corollaire I.10.5.**

Etant donné  $x_0 \in \mathcal{S}$ , il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant 0, tel qu'il existe une et une seule courbe intégrale définie sur  $J$  de condition initiale  $x_0$ .

Pour définir le flot global, intéressons-nous au problème du prolongement des courbes intégrales (voir proposition VIII.6.6).

**Proposition I.10.6.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , définies respectivement sur des intervalles ouverts  $J_1$  et  $J_2$  contenant 0, des courbes intégrales de  $X$  ayant même condition initiale. Alors elles coïncident sur  $J_1 \cap J_2$ .

Ceci permet de définir les courbes intégrales maximales de  $X$  et leurs domaines de définition.

**Définition I.10.7.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $x_0 \in \mathcal{S}$ . Définissons  $J(x_0)$  comme l'union de tous les intervalles ouverts  $J$  contenant 0 tels qu'il existe une courbe intégrale  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{S}$  de condition initiale  $x_0$ . La proposition montre qu'il existe une unique courbe intégrale  $\alpha_{x_0}$  de condition initiale  $x_0$  définie sur  $J(x_0)$ . On appelle cette courbe intégrale la **courbe intégrale maximale** de  $X$  de condition initiale  $x_0$ .

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ , on note  $I + c$  l'intervalle  $\{t \in \mathbb{R}; t - c \in I\}$ .

Enonçons l'analogue du théorème VIII.6.8



**Théorème I.10.8.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $x_0 \in \mathcal{S}$  et  $\alpha$  la courbe intégrale maximale de condition initiale  $x_0$  définie sur l'intervalle  $J(x_0)$ . Soit  $t_1 \in J(x_0)$ . Alors la courbe intégrale

$$\beta : J(x_0) - t_1 \longrightarrow \mathcal{S}, \quad t \mapsto \beta(t) = \alpha(t + t_1)$$

est la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x_1 = \alpha(t_1)$ .

Nous pouvons maintenant définir le flot global et son domaine de définition.

**Définition I.10.9.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Posons

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mid t \in J(x)\}.$$

L'application

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad F(t, x) = \alpha_x(t),$$

où  $\alpha_x$  est la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x$ , définie sur  $J(x)$ , est appelée **flot global** de  $X$ , et  $\mathcal{D}$  est son domaine de définition

**Remarque I.10.10.** Reformulons le théorème I.10.8, en posant pour tout  $(t, x) \in \mathcal{D}$ ,

$$F_t \cdot x = \alpha_x(t) = F(t, x).$$

où  $\alpha_x$  la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x$ . On a alors, lorsque  $(t, x)$  et  $(s, F_t \cdot x)$  sont dans  $\mathcal{D}$ ,

$$(I.10.1) \quad F_s \cdot (F_t \cdot x) = F_{t+s} \cdot x.$$

Si  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ ,  $F_t$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $t \mapsto F_t$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $\text{Diff}(\mathcal{S})$  des difféomorphismes de  $\mathcal{S}$ .

Le résultat suivant (cf. théorème VIII.6.11) énonce des propriétés importantes du flot global d'un champ de vecteurs tangents.

**Théorème I.10.11.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Alors :

- a.  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ .
- b.  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathcal{D}$ .

### I.10.2 Flot sur les sous-variétés compactes

Lorsque  $\mathcal{S}$  est une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^N$ , les courbes intégrales d'un champ de vecteurs tangents sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

#### Théorème I.10.12.

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété compacte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Alors le domaine de définition de son flot global est

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{S}.$$

*Démonstration.* En effet, soit  $x \in \mathcal{S}$ . Il existe un flot local en  $x$ , donc un intervalle  $J_x$  ouvert contenant 0, un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  dans  $\mathcal{S}$  tels que pour tout  $y \in \mathcal{U}_x$ , il existe une unique courbe intégrale  $\alpha_y$  définie sur  $J_x$  de condition initiale  $y$ . On a donc  $J_x \times \mathcal{U}_x \subset \mathcal{D}$ . La sous-variété  $\mathcal{S}$  est recouverte par les ouverts  $\mathcal{U}_x$ , et par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini :  $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{x_i}$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $] -2\epsilon; 2\epsilon[$  soit inclus dans tous les  $J_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi, pour tout  $y$  dans  $\mathcal{S}$ , il existe une courbe intégrale  $\alpha_y$  définie sur  $] -2\epsilon; 2\epsilon[$  de condition initiale  $y$ , autrement dit  $] -2\epsilon; 2\epsilon[ \subset J(y)$ . Soit  $b = \sup J(y)$ . Supposons  $b < +\infty$ . Alors  $b - \epsilon \in J(y)$ . Considérons la courbe intégrale  $\beta$  de condition initiale  $\alpha_y(b - \epsilon)$ . Elle est définie au moins sur  $] -2\epsilon; 2\epsilon[$  et  $t \mapsto \beta(t + b - \epsilon)$  est une courbe intégrale définie au moins sur  $] b - 3\epsilon; b + \epsilon[$  qui coïncide avec  $\alpha_y$  sur  $] b - 3\epsilon; b[$  car elles ont même valeur en  $b - \epsilon$ . On peut alors prolonger  $\alpha_y$  au-delà de  $b$ , ce qui est contradictoire avec la définition de  $b$ . Ceci montre que  $b = +\infty$ . On montre de même que  $\inf J(y) = -\infty$  et donc que  $J(y) = \mathbb{R}$ .  $\square$

La formule (I.10.1) est donc valide quels que soient  $t, s \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathcal{S}$ . D'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : x \mapsto F_t \cdot x = F(t, x)$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{S}$  d'inverse  $F_{-t}$ . En effet  $F_0$  est l'identité de  $\mathcal{S}$  et les  $F_t$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  car le flot global  $F$  l'est. Nous obtenons donc le

#### Corollaire I.10.13.

Notons  $\text{Diff}(\mathcal{S})$  le groupe des difféomorphismes de  $\mathcal{S}$ . L'application  $t \mapsto F_t$  est un morphisme de groupes de  $\mathbb{R}$  dans  $\text{Diff}(\mathcal{S})$ .

### I.10.3 Champs de vecteurs tangents dépendant du temps

De même que dans la section VIII.6.4, on peut considérer des champs de vecteurs tangents dépendant du temps.

**Définition I.10.14.**

On appelle **champ de vecteurs tangents dépendant du temps** sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  une application continue

$$X : I \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0. On appelle **courbe intégrale** de classe  $\mathcal{C}^p$ , du champ de vecteurs  $X$  une courbe paramétrée  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenu dans  $I$  et contenant 0, telle que pour tout  $t \in J$ ,  $\alpha'(t) = X(t, \alpha(t))$ . Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale**  $x_0 \in \mathcal{S}$  si  $\alpha(0) = x_0$ .

La définition de flot local en  $x_0 \in \mathcal{S}$  reste inchangée. On a le théorème d'existence et d'unicité locale suivant.

**Théorème I.10.15.**

Soient  $X : I \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^N$  un champ de vecteurs tangents dépendant du temps de classe  $\mathcal{C}^p$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $x_0 \in \mathcal{S}$ . Alors il existe un intervalle  $J$  ouvert contenant 0 et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{S}$  tels qu'il existe un et un seul flot local  $F$  en  $x_0$  de  $X$  défini sur  $J \times \mathcal{U}$ . Si le champ de vecteurs  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors  $F$  aussi.

La proposition VIII.6.6 reste valable sans modification pour les champs de vecteurs dépendant du temps grâce au théorème qui précède. On peut donc définir de la même manière les courbes intégrales maximales de  $X$  de condition initiale  $x_0$ , définie sur un intervalle  $J(x_0)$ . La définition du flot global sur son domaine de définition  $\mathcal{D}$  est elle-aussi inchangée, ainsi que le théorème I.10.11.

En revanche, le théorème I.10.8 et la formule (I.10.1) ne sont plus valides. En effet, si  $t \mapsto \alpha(t)$  est une courbe intégrale de  $X$ , il n'en est plus de même de  $t \mapsto \beta(t) = \alpha(t + t_0)$ . Il est facile de vérifier que  $\beta$  est une courbe intégrale pour le champ de vecteurs  $(t, x) \mapsto X(t + t_0, x)$ .

**Exercice I.10.16.** Si l'on définit

$$F_t^s \cdot x = F(t + s, x)$$

où  $F$  est le flot global de  $X$ , montrer que la formule qui généralise (I.10.1) est

$$F_{t+s}^r \cdot x = F_t^{r+s} \cdot (F_s^r \cdot x)$$

où l'on suppose que toutes les opérations à effectuer sont bien définies.

## I.11 Exercices

**Exercice I.11.1.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ , contenue dans un ouvert  $\mathcal{V}$ . Soit  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  un difféomorphisme entre  $\mathcal{V}$  et un autre ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Montrer que  $\phi(\mathcal{S})$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ , difféomorphe à  $\mathcal{S}$ .

**Exercice I.11.2.** Montrer que le groupe  $\mathbf{SO}(n)$  des matrices orthogonales de déterminant 1 est une sous-variété de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice I.11.3.** (fibré tangent) Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . Montrer que l'ensemble

$$T\mathcal{S} = \{(p, v); p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ .

**Exercice I.11.4.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une application différentiable vérifiant

a. En tout point  $p \in \mathcal{S}$ ,  $d\phi_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est injective.

b.  $\phi$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{S}$  sur son image  $\phi(\mathcal{S})$ .

Montrer que  $\phi(\mathcal{S})$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et que  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \phi(\mathcal{S})$  est un difféomorphisme.

**Application.** Soit  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur la sphère unité. Montrer que

$$\mathcal{S}(f) = \{f(p)p; p \in \mathbb{S}^2\}$$

est une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  difféomorphe à  $\mathbb{S}^2$ .

On dit qu'une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  est étoilée par rapport à 0 s'il n'existe pas de demi-droite d'origine 0 dans  $\mathbb{R}^3$  tangente à  $\mathcal{S}$  en un point. Montrer que les surfaces étoilées par rapport à 0 sont exactement les surfaces  $\mathcal{S}(f)$  définies ci-dessus.

**Exercice I.11.5.** Soit  $\mathcal{S}$  la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0\}.$$

Montrer que c'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Trouver les extrema de  $f$  sur  $\mathcal{S}$ .

**Exercice I.11.6.** Soient  $a > 3$  un réel et  $\mathcal{S}$  la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - a = 0\}.$$

Montrer que c'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Exhiber un difféomorphisme entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathbb{S}^2$ .

**Exercice I.11.7.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $a \in \mathbb{R}^3$  un vecteur de norme 1.

1. Si  $\mathcal{S}$  est compact, montrer qu'il existe un point de  $p$  de  $\mathcal{S}$  tel que la droite passant par  $p$  et orthogonale à  $T_p\mathcal{S}$  soit parallèle au vecteur  $a$ .
2. Si  $\mathcal{S}$  est connexe, et si pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , la droite passant par  $p$  et orthogonale à  $T_p\mathcal{S}$  est parallèle au vecteur  $a$ , alors  $\mathcal{S}$  est contenue dans un plan orthogonal à  $a$ .

**Exercice I.11.8.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface et  $D \in \mathbb{R}^3$  une droite de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Si  $\mathcal{S}$  est compact, montrer qu'il existe un point de  $p$  de  $\mathcal{S}$  tel que la droite passant par  $p$  et orthogonale à  $T_p\mathcal{S}$  intersecte  $D$  perpendiculairement.
2. Si  $\mathcal{S}$  est connexe, et si pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , la droite passant par  $p$  et orthogonale à  $T_p\mathcal{S}$  intersecte  $D$  perpendiculairement, alors  $\mathcal{S}$  est contenue dans un cylindre d'axe  $R$ .

**Exercice I.11.9.** 1. Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte. Montrer qu'il existe une droite qui intersecte  $\mathcal{S}$  perpendiculairement en au moins deux points.

2. Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux surfaces compactes qui ne s'intersectent pas. Montrer qu'il existe une droite qui coupe perpendiculairement  $\mathcal{S}_1$  en un point et  $\mathcal{S}_2$  en un autre point.

**Exercice I.11.10.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  se trouvant entièrement dans un demi-espace fermé délimité par un plan  $P$ . Montrer que  $\mathcal{S}$  et  $P$  sont tangents en chaque point de leur intersection.

**Exercice I.11.11.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  telle que chaque point de  $\mathcal{S}$  admette un voisinage contenu dans un plan (resp. une sphère). Montrer que  $\mathcal{S}$  est contenue dans un plan (resp. une sphère).

**Exercice I.11.12.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété connexe de  $\mathbb{R}^N$ . Montrer que deux points de  $\mathcal{S}$  peuvent être reliés par un arc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice I.11.13.** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ . Montrer que

$$[X, hY] = (X \cdot h)Y + h[X, Y].$$

**Exercice I.11.14.** Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Supposons que  $X(p_0) \neq 0$  en un point  $p_0$  de  $\mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  en  $p$  tel que

$$X(\mathbf{x}(q)) = \mathbf{x}_{u_1}(q), \quad (q \in \mathcal{U}).$$

**Exercice I.11.15.** Soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  un difféomorphisme entre deux sous-variétés. Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{S}$  et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$  son flot. Montrer que le flot du champ de vecteurs  $\phi_*X$  sur  $\mathcal{S}'$  est donné par

$$\phi \circ F \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1}) : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{S}',$$

où

$$\mathcal{D}' = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}' \mid (t, \phi^{-1}(p)) \in \mathcal{D}\}.$$

**Exercice I.11.16.** Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose le flot global  $F$  de  $X$  défini sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ , et l'on pose pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$F_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad F_t(p) = F(t, p).$$

Montrer que pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ , pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,

$$X \cdot f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ F_t(p) - f(p)}{t}$$

**Exercice I.11.17.** Soit  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose leur flot global, respectivement  $F$  et  $G$ , définis sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ , et l'on pose pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$F_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad F_t(p) = F(t, p),$$

$$G_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad G_t(p) = G(t, p).$$

On veut montrer que pour tout  $p \in \mathcal{S}$

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p) - (F_t)_*Y(p)}{t}.$$

1. Soit  $h : ]-\epsilon; \epsilon[ \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $h(0, p) = 0$ . Montrer qu'il existe une fonction  $k : ]-\epsilon; \epsilon[ \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que

$$\begin{cases} h(t, p) = tk(t, p) \\ \frac{\partial h}{\partial t}(0, p) = k(0, p). \end{cases}$$

On pose  $k_t(p) = k(t, p)$ .

2. Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ . En appliquant le point 1 à  $h(t, p) = f \circ F_t(p) - f(p)$ , montrer que l'on a pour tout  $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ ,

$$[(F_t)_*Y] \cdot f(F_t(p)) = (Y \cdot (f + tk_t))(p).$$

3. En déduire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{Y - (F_t)_*Y}{t} \right) \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Conclure.

4. Montrer que  $[X, Y]$  est nul en tout point  $p \in \mathcal{S}$  si et seulement si quels que soient  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $G_t \circ F_s = F_s \circ G_t$ .

**Exercice I.11.18.** Soit  $\mathbb{S}^{2n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

1. Montrer que le champ de vecteurs  $X$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  défini par

$$X = \sum_{i=1}^n -x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}}$$

est tangent à la sphère (et donc se restreint en un champs de vecteur sur la sphère).

2. Lorsque  $n = 2$ , définir deux autres champs de vecteurs  $Y$  et  $Z$ , tangents à la sphère, tels que  $X, Y$  et  $Z$  soient linéairements indépendants en chaque point de  $\mathbb{S}^3$ .

Indication. 
$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} = -1$$

3. En déduire que le fibré tangent  $T\mathbb{S}^3$  est trivial, c'est-à-dire est diffeomorphe à  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

**Exercice I.11.19.** 1. Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ . Soit  $A$  une partie de mesure nulle de  $\mathcal{U}$  (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que  $f(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^n$ .

2. En déduire que si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ , avec  $m < n$ , alors  $f(\mathcal{U})$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^n$ .

3. Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux sous-variétés respectivement de dimension  $m_1$  dans  $\mathbb{R}^{N_1}$  et de dimension  $m_2$  dans  $\mathbb{R}^{N_2}$ . Montrer que si  $m_1 < m_2$ , alors  $f(\mathcal{S}_1)$  est de mesure nulle dans  $\mathcal{S}_2$ . Montrer que si  $m_1 = m_2$  et si  $A$  est une partie de mesure nulle dans  $\mathcal{S}_1$ , alors  $f(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathcal{S}_2$ .

**Exercice I.11.20.** (Théorème de Whitney). Le but de l'exercice est de montrer que toute sous-variété compacte de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  est diffeomorphe à une sous variété de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

1. Montrer l'assertion lorsque  $N \leq 2m + 1$ .

2. On suppose maintenant  $N > 2m + 1$ . Posons

$$h : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (x, y, t) \mapsto t(x - y),$$

$$g : T\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (p, v) \mapsto v.$$

Soit  $a \in \mathbb{R}^N$  non nul et soit  $H$  l'hyperplan vectoriel orthogonal à  $a$ . Notons  $\pi$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^N$  sur  $H$ . Montrer que si  $a$  n'est pas dans l'image de  $h$ , la restriction  $\pi|_{\mathcal{S}}$  de  $\pi$  à  $\mathcal{S}$  est injective, et que si  $a$  n'est pas dans l'image de  $g$ ,  $\pi|_{\mathcal{S}}$  est une immersion. En conclure que  $\mathcal{S}$  est difféomorphe à une sous-variété de  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

3. Conclure.





# Chapitre II

## Sous-variétés de dimension 1 et courbes paramétrées

Dans ce chapitre, nous allons étudier les sous-variétés de dimension 1, en étudiant d'abord des objets plus généraux que sont les courbes paramétrées.

L'accent est mis sur l'étude de propriétés géométriques globales, ou bien sur la manière dont des invariants locaux (comme la courbure et la torsion) déterminent celles-ci. Décrivons en quelques mots les résultats principaux obtenus dans ce chapitre. Lorsque l'espace ambiant est le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  on montre qu'un seul invariant, la courbure algébrique, détermine une courbe paramétrée régulière à déplacement près (théorèmes [II.2.15](#) et [II.2.17](#)). Pour les courbes dans  $\mathbb{R}^3$ , on a un résultat analogue pour les courbes birégulières avec les deux invariants que sont la courbure et la torsion (théorème [II.2.25](#)).

Nous établissons un théorème de classification des sous-variétés de dimension 1 connexes : une telle sous-variété est soit compacte, et est alors difféomorphe au cercle, soit non compacte et difféomorphe à la droite réelle.

Nous relierons ensuite pour les courbes planes périodiques, la courbure algébrique totale (l'intégrale de la courbure) à un invariant global, le nombre d'enroulement, qui est un entier décrivant le nombre de tours (comptés avec un signe) que décrit le vecteur unitaire tangent lorsqu'on parcourt la courbe (théorème [II.6.4](#)). Lorsque la courbe est simple, c'est-à-dire que sa trace est homéomorphe à un cercle, l'Hopf Umlaufsatz (théorème [II.6.8](#)) affirme que ce nombre d'enroulement est égal à  $\pm 1$ . Ces deux résultats sont basés sur la théorie du degré pour les applications du cercle dans lui-même, en particulier sur un résultat fondamental, l'invariance du degré par homotopie (théorème [II.5.10](#)). Cette théorie du degré possède d'autres applications spectaculaires, comme le théorème de point fixe de Brouwer pour le disque unité du plan (Exercice [II.5.14](#)).

Nous démontrons le théorème de Whitney-Grauert (théorème [II.6.6](#)) qui affirme que deux lacets ayant même nombre d'enroulement sont homotopes. Nous énonçons le théorème de séparation de Jordan (théorème [II.6.10](#)) : une courbe plane homéomorphe au cercle sépare le plan en deux ouverts disjoints, dont l'un est borné et l'autre non. Dans le chapitre [III](#), un énoncé analogue pour les surfaces sera établi. La démonstration, convenablement adaptée fournit une preuve du théorème de Jordan pour les courbes régulières. Nous terminons par l'étude de la convexité d'une courbe plane (section [II.6.6](#)) et la manière dont la convexité se lit sur la courbure.

Ce chapitre est loin de constituer une étude exhaustive des courbes. Nous renvoyons le lecteur à [\[1\]](#), [\[4\]](#) pour des compléments sur le sujet. Notre but est de montrer que la

géométrie de ces objets est déjà relativement riche en résultats non triviaux.

## II.1 Courbes paramétrées. Arcs

### II.1.1 Paramétrages des sous-variétés de dimension 1

Soit  $\mathcal{C}$  une sous-variété de dimension 1 et de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^N$ . Un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  de  $\mathcal{C}$  est donc en particulier une application de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^N$  qui est une immersion en tout point. Un ouvert connexe de  $\mathbb{R}$  est un intervalle ouvert. Nous allons adopter des notations plus communes dans ce cas, en remplaçant  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  par  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . De même, on peut alléger les notations pour les différentielles : pour un point  $t \in I$ , on note  $\alpha'(t)$  le vecteur  $d\alpha_t(1) \in \mathbb{R}^N$ . La condition d'injectivité de la différentielle en un point se traduit alors par  $\alpha'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

Un paramétrage local d'une sous-variété de dimension 1 est donc en particulier une courbe paramétrée. Dans la section suivante, nous rappelons la définition de cette notion.

### II.1.2 Définitions : courbes paramétrées, arcs

#### Définition II.1.1.

Une **courbe paramétrée** de  $\mathbb{R}^N$  est une application continue

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . Sauf mention explicite du contraire, on suppose que  $I$  est un intervalle ouvert. Lorsque  $N = 2$ , ou plus généralement lorsque l'image de la courbe est contenue dans un plan affine de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$ , on dit que la courbe est **plane**.

La **trace** d'une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  est le sous-ensemble  $\alpha(I)$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Exemple II.1.2.**  $\alpha : ]-3; 3[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ . Cet exemple illustre le fait que  $\alpha$  n'est pas nécessairement injective. La courbe passe deux fois par le point  $(0, 0)$  (en  $t = \pm 2$ ). Remarquons que la trace de cette courbe n'est pas une sous-variété.

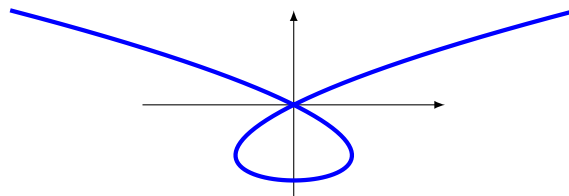
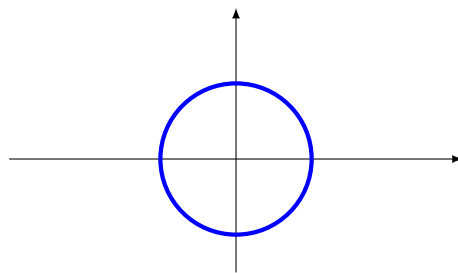


FIGURE II.1 – Courbe avec point multiple

**Exemple II.1.3.**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Dans cet exemple, le paramétrage est périodique de période  $2\pi$ , en conséquence, sa trace est compacte. Remarquons que cette trace est une sous-variété.

FIGURE II.2 – Le cercle  $\mathbb{S}^1$ 

**Exemple II.1.4 (Courbe de Peano).** Dans un article de 1890, Giuseppe Peano décrit une courbe paramétrée  $[0; 1] \rightarrow [0; 1] \times [0; 1]$  qui passe par tous les points du carré unité. Le fait qu’une telle surjection existe illustre un résultat de Georg Cantor qui, en 1877, établit que  $[0; 1]$  et  $[0; 1] \times [0; 1]$  ont le même cardinal. La construction de Peano montre que de plus une telle surjection peut être continue. En revanche, un point à noter est qu’une telle courbe ne peut être injective. La courbe de Peano présente aussi la particularité de n’être nulle part dérivable. En 1905, Henri Lebesgue propose une nouvelle courbe qui, elle, est différentiable en presque tout point. Pour plus de détails, on peut consulter l’article « courbe de Peano » sur Wikipedia.

La théorie générale des courbes paramétrées est très riche. Certaines courbes sont très singulières, telle la courbe de Peano (cf. exemple II.1.4) décrite ci-dessus. Même en supposant les courbes paramétrées régulières, par exemple de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le fait que les dérivées successives puissent s’annuler en un point rend impossible une étude locale systématique. Dans le cadre de ce cours, les courbes paramétrées que nous étudions sont presque toujours de classe au moins  $\mathcal{C}^1$  et sont des immersions en tout point (ce qui signifie que leur dérivée ne s’annule pas). Tout d’abord rappelons la notion de vecteur tangent.

**Définition II.1.5.**

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée. On suppose que  $\alpha$  est différentiable en  $s_0 \in I$ . Le vecteur  $\alpha'(s_0) \in \mathbb{R}^n$  est le **vecteur tangent** à la courbe  $\alpha$  au point  $s_0$ .

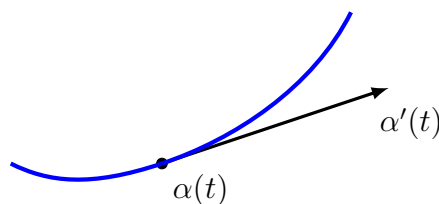


FIGURE II.3 – Vecteur tangent

**Définition II.1.6.**

Une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  (de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ ) est dite **régulière** si pour tout  $t \in I$ ,  $\alpha'(t) \neq 0$  (en d'autres termes, c'est une immersion).

On dit que  $C \subset \mathbb{R}^N$  est **une courbe régulière** si c'est la trace d'une courbe paramétrée régulière.

Pour alléger un peu la terminologie, nous appelons **arc paramétré** de classe  $\mathcal{C}^k$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  et régulière.

Les courbes paramétrées des exemples II.1.2 et II.1.3 sont régulières. Les paramétrages locaux des sous-variétés de dimension 1 sont des courbes régulières.

**Exemple II.1.7.**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, 4t^2)$ . Cette courbe paramétrée n'est pas régulière car en  $t = 0$ ,  $\alpha'(t) = 0$ . Le point  $\alpha(0) = (0, 0)$  est appelé point de rebroussement.

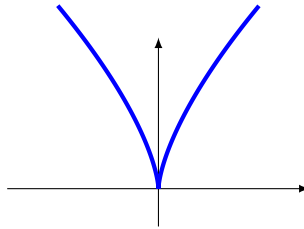


FIGURE II.4 – Courbe avec point de rebroussement

**Exemple II.1.8.**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, 0)$ . Cette courbe paramétrée n'est pas régulière car en  $t = 0$ ,  $\alpha'(t) = 0$ . Sa trace est la droite d'équation  $y = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ . La courbe paramétrée  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$  est régulière et à la même trace que  $\alpha$ . Le caractère régulier d'une courbe ne se voit donc pas sur sa trace.

### II.1.3 Changements de paramétrage. Arcs géométriques

**Définition II.1.9.**

Deux courbes paramétrées  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  et  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sont dites équivalentes s'il existe un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme<sup>a</sup>  $\theta : I \rightarrow J$  tel que  $\alpha = \beta \circ \theta$ . Un **arc géométrique** de classe  $\mathcal{C}^k$  est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Si  $C$  est un arc géométrique et si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  en est un représentant, on dit que  $\alpha$  est un **paramétrage** de  $C$ . Dans le contexte ci-dessus, le difféomorphisme  $\theta$  est appelé **changement de paramétrage**.

<sup>a</sup>. Par convention un  $\mathcal{C}^0$ -difféomorphisme est simplement un homéomorphisme.

**Remarque II.1.10.** La trace d'un arc géométrique est bien définie (elle ne dépend pas du paramétrage de celui-ci) mais elle ne suffit pas à déterminer celui-ci. Par exemple,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$  et  $\beta : ]-2\pi; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = (\cos t, \sin t)$  ont pour image le cercle  $\mathbb{S}^1$ , mais l'on ne peut pas passer de l'un à l'autre par un changement de paramétrage.

La notion d'arc géométrique est importante dans la mesure où certaines propriétés clés des arcs sont indépendantes du paramétrage choisi. La terminologie introduite ci-dessus permet d'exprimer ceci facilement.

### II.1.4 Orientation

Si  $\theta : I \rightarrow J$  est un changement de paramétrage d'un arc géométrique  $C$ , il vérifie  $\theta'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Comme  $I$  est connexe et  $\theta'$  est continue, cette fonction garde un signe constant. Si ce signe est positif, on dit que  $\theta$  **préserve l'orientation**. On peut donc introduire sur les arcs paramétrés une relation d'équivalence plus fine que celle d'arc géométrique.

#### Définition II.1.11.

Deux arcs paramétrés  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  et  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sont dits strictement équivalents s'il existe un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme  $\theta : I \rightarrow J$  préservant l'orientation tel que  $\alpha = \beta \circ \theta$ . Un **arc géométrique orienté** de classe  $\mathcal{C}^k$  est une classe de stricte équivalence d'arcs paramétrés de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Notons qu'un arc géométrique  $C$  possède exactement deux orientations, généralement notées  $C^+$  et  $C^-$  (le choix de  $\pm$  étant arbitraire).

### II.1.5 Points d'un arc géométrique

#### Définition II.1.12.

Soit  $C$  un arc géométrique. On appelle point de  $C$  un point de sa trace dans  $\mathbb{R}^N$ . On note  $p \in C$  pour dire que  $p$  est un point de  $C$ , même si c'est un abus. On appelle **multiplicité** de  $p \in C$  le cardinal de  $\alpha^{-1}(\{p\})$  où  $\alpha$  est un paramétrage de  $C$  (on vérifie que ceci ne dépend pas du paramétrage). Un point  $p \in C$  est dit **simple** si sa multiplicité est 1. L'arc géométrique  $C$  est dit **simple** si tous ses points sont simples, i.e. tous ses paramétrages sont injectifs.

**Remarque II.1.13.** De même, si  $\mathcal{C}$  est la trace d'une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $\mathcal{C}$  est simple si  $\alpha$  est injective.

**Exemple II.1.14.** Dans l'exemple II.1.2, tous les points de l'arc sont simples sauf  $(0, 0)$  qui a multiplicité 2. Dans l'exemple du cercle II.1.3, tous les points ont une multiplicité infinie. Nous verrons dans la section II.3 que pour les courbes déterminées par un paramétrage périodique, il est judicieux de modifier la définition de point simple et de courbe simple, en ne regardant l'injectivité que sur un intervalle de type  $[t_0; t_0 + L[$ , où  $L$  est la plus petite période.

### II.1.6 Longueur de l'arc

Dans cette section, nous faisons usage de manière essentielle de l'existence de vecteurs tangents aux courbes. Nous supposons pour alléger la rédaction que toutes les courbes paramétrées sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , et laissons au lecteur le soin de vérifier que les résultats sur la longueur de l'arc s'étendent au cas des courbes continues  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

La définition ci-dessous fait intervenir la norme des vecteurs tangents, et donc la structure euclidienne de l'espace ambiant. Le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^N$  est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La norme associée est notée  $\| \cdot \|$ .

#### Définition II.1.15.

La **longueur de l'arc** d'une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  à partir du point  $t_0 \in I$  est l'application

$$s : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

L'interprétation cinématique est claire, la longueur parcourue est l'intégrale de la vitesse instantanée.

Vérifions que la longueur de l'arc est invariante (au signe près) par changement de paramétrage.

#### Proposition II.1.16.

Soient  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $\theta : I \rightarrow J$  un changement de paramétrage. On pose  $\alpha = \beta \circ \theta : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Soient  $t_0, t_1 \in I$  et  $s_0 = \theta(t_0)$ ,  $s_1 = \theta(t_1) \in J$ . On a alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \epsilon \int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds$$

où  $\epsilon$  vaut 1 si  $\theta$  préserve l'orientation et  $-1$  sinon.

Démonstration. La formule de changement de variable dans les intégrales donne

$$\int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds = \int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(\theta(t))\| \theta'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(\theta(t))\theta'(t)\| \operatorname{sgn}(\theta'(t)) dt = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$$

□

L'exercice suivant donne une interprétation géométrique (et donc indépendante du paramétrage) de la longueur de l'arc.

**Exercice II.1.17.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $[a; b]$  un intervalle compact contenu dans  $I$ . La longueur de la courbe entre les points  $\alpha(a)$  et  $\alpha(b)$  est d'après ce qui précède définie par

$$L_a^b = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Soit  $\mathcal{P} = \{a_0 = a_1 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b\}$  une partition de l'intervalle  $[a; b]$ , Posons

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^n \|\alpha(a_{i+1}) - \alpha(a_i)\|.$$

C'est la longueur de la ligne polygonale dont les sommets sont  $\alpha(a), \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n), \alpha(b)$ . Pour une partition  $\mathcal{P} = \{a_0 = a_1 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b\}$  comme ci-dessus, notons

$$|\mathcal{P}| = \max_{i=0, \dots, n} |a_{i+1} - a_i|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute partition  $\mathcal{P} = \{a_0 = a_1 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b\}$  de  $[a; b]$ , si  $|\mathcal{P}| < \delta$ , alors  $|L_a^b - L_{\mathcal{P}}| < \epsilon$ . Posons  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$  et définissons

$$f : I^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t_1, \dots, t_N) \mapsto \sqrt{x_1'(t_1)^2 + \dots + x_N'(t_N)^2}.$$

1. Montrer que pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe  $(\xi_1^{[i]}, \dots, \xi_N^{[i]}) \in [t_i; t_{i+1}]^N$  tel que

$$\|\alpha(a_{i+1}) - \alpha(a_i)\| = f(\xi_1^{[i]}, \dots, \xi_N^{[i]})(t_{i+1} - t_i).$$

2. Montrer que pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe  $\eta_i \in [t_i; t_{i+1}]$  tel que

$$L_a^b = \sum_{i=0}^n f(\eta_i, \dots, \eta_i)(t_{i+1} - t_i)$$

3. Conclure.

### II.1.7 Paramétrage par la longueur de l'arc

Dans l'interprétation cinématique, la longueur de l'arc est égale au temps de parcours si la vitesse est constante égale à 1. Ceci conduit à la définition suivante.

#### Définition II.1.18.

On appelle **paramétrage par la longueur de l'arc** d'un arc géométrique  $C$  un paramétrage  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  de  $C$  tel que pour tout  $t \in I$ ,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

#### Proposition II.1.19.

Tout arc géométrique  $C$  possède un paramétrage par la longueur de l'arc.

Démonstration. Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage de  $C$ . La fonction  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$  est croissante, dérivable, et sa dérivée ne s'annule pas, puisque  $\|\alpha'(t)\| \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Elle est donc strictement croissante et admet un inverse dérivable  $t : s \mapsto t(s)$ . Considérons le paramétrage

$$\beta(s) = \alpha(t(s)).$$

On a

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s)) t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|}$$

qui est un vecteur de norme 1 pour tout  $s$ . □

**Exercice II.1.20.** Montrer que si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique  $C$ , tout autre paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  est de la forme  $t \mapsto \alpha(t - t_1)$  ou bien  $t \mapsto \alpha(-t - t_1)$ , pour un certain réel  $t_1$ .

**Exercice II.1.21.** Considérons la **spirale logarithmique**  $C$  dont un paramétrage est

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t), \quad a > 0, b < 0.$$

Calculer la longueur de l'arc à partir du point  $t_0 = 0$ . Donner un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$ .

## II.2 Théorie locale des courbes régulières

### II.2.1 Courbure

La courbure est le premier invariant local des arcs géométriques. Elle mesure la variation infinitésimale du vecteur tangent unitaire. Commençons par définir celui-ci.

#### Définition II.2.1.

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage de l'arc géométrique  $C$ . Le **vecteur tangent unitaire** au point  $t \in I$  est le vecteur

$$\vec{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Si  $p = \alpha(t) \in C$ , on dira par abus de langage (si  $p$  est un point multiple de l'arc) que  $\vec{T}(t)$  est le vecteur tangent unitaire en  $p$ .

**Remarques II.2.2.** Si  $\alpha$  est un paramétrage par la longueur de l'arc, on a  $\vec{T}(t) = \alpha'(t)$ . Le vecteur unitaire tangent ne dépend que de la classe d'équivalence stricte de  $\alpha$ . Si on change l'orientation, on change le vecteur tangent unitaire en son opposé.

Dans la suite, on suppose les arcs de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ceci permet de définir la courbure en un point.

#### Définition II.2.3.

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique  $C$ . On appelle **courbure** de  $\alpha$  au point  $t \in I$  la quantité  $\kappa(t) = \|\alpha''(t)\| \in \mathbb{R}_+$ .



**Remarque II.2.4.** Si  $\theta$  est un changement de paramétrage de  $C$  entre deux paramétrages par la longueur de l'arc,  $\theta'$  est constant, égal à 1 si  $\theta$  préserve l'orientation, et  $-1$  sinon. La courbure ne dépend donc pas du paramétrage par la longueur de l'arc choisi. Si  $p = \alpha(t)$  est un point de la trace de l'arc  $C$ , on dira par abus de langage (si  $p$  est un point multiple de l'arc) que  $\kappa(t)$  est la courbure de  $C$  en  $p$ .

**Proposition II.2.5.**

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique. En tout point  $t \in I$ , les vecteurs  $\alpha'(t)$  et  $\alpha''(t)$  sont orthogonaux.

*Démonstration.* Puisque la courbe est paramétrée par la longueur de l'arc, on a

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1.$$

En dérivant, on obtient

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0. \quad \square$$

Pour continuer l'étude locale des arcs géométriques, nous imposons une condition de régularité supplémentaire.

**Définition II.2.6.**

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique  $C$ . On appelle point **birégulier** de  $\alpha$  un point  $t \in I$  tel que  $\alpha''(t) \neq 0$ . La birégularité en un point de  $C$  ne dépend pas du paramétrage par la longueur de l'arc choisi. On dit que l'arc  $C$  est birégulier si tous ses points le sont.

En un point birégulier, les vecteurs  $\alpha'(t)$  et  $\alpha''(t)$  sont non nuls et orthogonaux, d'après la proposition II.2.5. En particulier, ils forment une famille libre.

**Définition II.2.7.**

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique  $C$  et soit  $p = \alpha(t)$  un point birégulier de  $C$ . Le **vecteur normal unitaire** à  $C$  en  $p = \alpha(t)$  est

$$\vec{N}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{\alpha''(t)}{\kappa(t)}.$$

Le plan affine passant par  $p = \alpha(t)$  engendré par le vecteur tangent unitaire  $\vec{T}(t)$  et le vecteur normal unitaire  $\vec{N}(t)$  s'appelle le **plan osculateur** à  $C$  en  $p = \alpha(t)$ .

**Remarque II.2.8.** Comme nous l'avons vu plus haut, le vecteur tangent unitaire à  $C$  en  $p = \alpha(t)$  n'est défini qu'au signe près, dépendant du choix d'une orientation de  $C$ . Le vecteur normal unitaire à  $C$  en  $p = \alpha(t)$  lui ne dépend que de  $p$  et pas du paramétrage  $\alpha$ .

## II.2.2 Courbure algébrique des courbes planes

Nous supposons maintenant que  $N = 2$  et munissons  $\mathbb{R}^2$  de l'orientation définie par la base canonique  $((0, 1), (1, 0))$  de  $\mathbb{R}^2$  (voir section III.1 pour la notion d'orientation d'un espace  $\mathbb{R}^N$ ). Nous allons définir une notion plus fine de courbure, qui caractérise la courbe à déplacement direct près (théorème II.2.15).

### Définition II.2.9.

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique orienté  $C$ . On définit la **courbure algébrique**  $\varkappa(t) \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in I$  comme suit. Soit  $t \in I$  un point birégulier de  $\alpha$ . Soient  $\vec{T}(t), \vec{N}(t)$  respectivement le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire à  $C$  en  $p = \alpha(t)$ . On pose

$$\varkappa(t) = \epsilon \kappa(t)$$

où  $\epsilon = 1$  si la base orthonormée  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$  de  $\mathbb{R}^2$  est directe,  $-1$  sinon. Si  $t \in I$  n'est pas un point birégulier, c'est-à-dire si  $\alpha''(t) = 0$ , on pose

$$\varkappa(t) = \kappa(t) = 0.$$

**Remarque II.2.10.** L'analogue de la remarque II.2.4 vaut pour la courbure algébrique ; celle-ci ne dépend que de l'arc géométrique orienté et pas du paramétrage.

**Remarque II.2.11.** Notons  $\rho_{\frac{\pi}{2}}$  la rotation du plan d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On a

$$(II.2.1) \quad \alpha''(t) = \varkappa(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\alpha'(t)).$$

**Exercice II.2.12.** Calculer la courbure algébrique d'une droite, d'un cercle, d'une ellipse. Quelles sont les arcs géométriques orientés du plan dont la courbure algébrique est nulle ? constante ?

**Exercice II.2.13.** Soient  $C$  un arc géométrique orienté du plan et  $\alpha$  un paramétrage de  $C$  par la longueur de l'arc. On fixe une droite du plan et l'on note  $\theta(t)$  l'angle que fait la tangente à  $C$  en  $p = \alpha(t)$  avec cette droite fixée. Montrer que  $\theta'(t) = \pm \varkappa(t)$ .

**Exercice II.2.14.** Montrer que pour un paramétrage  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  d'un arc géométrique birégulier plan  $C$ , la courbure algébrique est donnée par

$$\varkappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Montrer que pour un paramétrage  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'un arc géométrique birégulier  $C$ , la courbure est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Rappelons qu'un **déplacement** du plan affine  $\mathbb{R}^2$  est une application affine qui conserve la distance (voir section II.8). Le théorème suivant affirme que pour un arc géométrique orienté, la courbure algébrique caractérise l'arc à déplacement direct (c'est-à-dire conservant l'orientation) du plan près.

**Théorème II.2.15** (Théorème fondamental de la théorie des courbes planes : unicité).

Soient  $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  des paramétrages par la longueur de l'arc d'arcs géométriques orientés  $C_1$  et  $C_2$ . Supposons que pour tout  $t \in I$ ,  $\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$ . Alors il existe un déplacement direct du plan  $\mathcal{A}$  tel que  $\alpha_2 = \mathcal{A} \circ \alpha_1$ .

**Remarque II.2.16.** Il est clair que réciproquement, si  $\alpha_1, \alpha_2 = \mathcal{A} \circ \alpha_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont deux arcs paramétrés, où  $\mathcal{A}$  est un déplacement du plan, alors pour tout  $t \in I$ ,  $\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$ .

Démonstration. Fixons  $t_0 \in I$ . A translation près, on peut supposer que  $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ , et à rotation près que  $\alpha'_1(t_0) = \alpha'_2(t_0)$ . Montrons qu'alors  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Pour cela, calculons en utilisant (II.2.1),

$$\begin{aligned} (\langle \alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \rangle)' &= \langle \alpha''_1(t), \alpha'_2(t) \rangle + \langle \alpha'_1(t), \alpha''_2(t) \rangle \\ &= \langle \kappa_1(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\alpha'_1(t)), \alpha'_2(t) \rangle + \langle \alpha'_1(t), \kappa_2(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\alpha'_2(t)) \rangle \\ &= \kappa_1(t) (\langle \rho_{\frac{\pi}{2}}(\alpha'_1(t)), \alpha'_2(t) \rangle + \langle \alpha'_1(t), \rho_{\frac{\pi}{2}}(\alpha'_2(t)) \rangle). \end{aligned}$$

Comme quels que soient  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \rho_{\frac{\pi}{2}}(x), y \rangle = \langle \rho_{\frac{\pi}{2}}(\rho_{\frac{\pi}{2}}(x)), \rho_{\frac{\pi}{2}}(y) \rangle = -\langle x, \rho_{\frac{\pi}{2}}(y) \rangle$ , on conclut que  $(\langle \alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \rangle)' = 0$ . On a donc  $\alpha'_1(t) = \alpha'_2(t)$  pour tout  $t \in I$ . Comme  $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ , on en déduit que  $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$  pour tout  $t \in I$ .  $\square$

Le théorème précédent est un résultat d'unicité. Complétons-le par un résultat d'existence.

**Théorème II.2.17** (Théorème fondamental de la théorie des courbes planes : existence).

Soit  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors il existe un arc paramétré par la longueur de l'arc  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\kappa(t) = k(t)$  pour tout  $t \in I$ .

Démonstration. Soit  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t k(u) \, du$$

où  $t_0 \in I$  est fixé. Alors  $\theta$  est  $\mathcal{C}^1$  et correspond géométriquement à une constante près à l'angle que doit faire la tangente à la courbe que nous voulons construire avec une direction fixe (cf. Exercice II.2.13). Posons

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \left( \int_{t_0}^t \cos \theta(u) \, du, \int_{t_0}^t \sin \theta(u) \, du \right).$$

Cette application est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\alpha'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Ainsi,  $\|\alpha'(t)\| = 1$  et  $\alpha$  est un arc paramétré par la longueur de l'arc. De  $\alpha''(t) = (-\theta'(t) \sin \theta(t), \theta'(t) \cos \theta(t))$  et de (II.2.1) on tire facilement  $\kappa(t) = \theta'(t) = k(t)$ , pour tout  $t \in I$ .  $\square$

**Exercice II.2.18.** Soient  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux arcs paramétrés tels que les courbures respectives  $\kappa_\alpha$  et  $\kappa_\beta$  vérifient  $\kappa_\alpha(t) = -\kappa_\beta(t)$  pour tout  $t \in I$ . Montrer qu'il existe une isométrie du plan inversant l'orientation  $\mathcal{A}$  telle que  $\beta = \mathcal{A} \circ \alpha$ .

**Exercice II.2.19.** Soit  $\alpha : ]-a; a[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré tels que la courbure  $\kappa$  vérifie  $\kappa(t) = -\kappa(-t)$  pour tout  $t \in ]-a; a[$ . Montrer que la trace de  $\alpha$  est symétrique par rapport à la normale à  $\alpha$  en 0.

### II.2.3 Courbes dans $\mathbb{R}^3$ : torsion

L'espace ambiant est maintenant  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique birégulier  $C$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . Soient  $\vec{T}(t), \vec{N}(t)$  respectivement le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire à  $C$  en  $p = \alpha(t)$ . Posons,

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t), \quad (t \in I)$$

(voir appendice III.1.1 pour les rappels concernant le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ ).

Calculons, pour  $t \in I$ ,

$$\vec{B}'(t) = (\vec{T} \wedge \vec{N})'(t) = \vec{T}'(t) \wedge \vec{N}(t) + \vec{T}(t) \wedge \vec{N}'(t) = \vec{T}'(t) \wedge \vec{N}'(t)$$

Il s'ensuit que  $\vec{B}'(t)$  est orthogonal à  $\vec{T}(t)$ . Comme il est aussi orthogonal à  $\vec{B}(t)$ , puisque la norme de  $\vec{B}$  est constante, il est colinéaire à  $\vec{N}(t)$ .

#### Définition II.2.20.

Avec les notations qui précèdent, le nombre réel  $\tau(t)$  tel que

$$\vec{B}'(t) = \tau(t) \vec{N}(t)$$

est appelé **torsion** de la courbe  $\alpha$  au point  $p = \alpha(t) \in C$ .

**Remarque II.2.21.** Supposons que la torsion soit identiquement nulle. Le vecteur  $\vec{B}(t)$  est alors constant, disons égal à  $\vec{B}$ . On a alors  $\langle \alpha(t), \vec{B} \rangle' = \langle \alpha'(t), \vec{B} \rangle = \langle \vec{T}(t), \vec{B}(t) \rangle = 0$ . Ainsi  $\langle \alpha(t), \vec{B} \rangle$  est constant, disons égal à  $a$ . Ceci montre que  $\alpha(t)$  reste dans le plan affine d'équation  $\langle \vec{x}, \vec{B} \rangle = a$ .

Réciproquement si la courbe est contenue dans un plan affine, alors le plan osculateur est constant,  $\vec{B}$  aussi, et la torsion est nulle.

La torsion mesure donc le défaut de planéité de la courbe.

**Exercice II.2.22.** Montrer que pour un paramétrage  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'un arc géométrique birégulier  $C$ , la torsion est donnée par

$$\tau(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

**Exercice II.2.23.** Soit  $C$  l'hélice circulaire donnée par le paramétrage

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left( a \cos \frac{t}{r}, b \sin \frac{t}{r}, \frac{bt}{r} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}^\times, r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Calculer la courbure et la torsion en tout point de  $\alpha$ .

## II.2.4 Repère de Frenet

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique birégulier  $C$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . Nous avons donc, pour tout  $t \in I$ , une base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^3$ , donnée par

$$(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$$

que l'on appelle **trièdre de Frenet** au point  $\alpha(t)$ .

### Définition II.2.24.

Le quadruplet  $(\alpha(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$  s'appelle **repère de Frenet** au point  $p = \alpha(t)$  de  $C$ .

Calculons

$$\begin{aligned} \vec{N}'(t) &= (\vec{B} \wedge \vec{T})'(t) = \vec{B}'(t) \wedge \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \wedge \vec{T}'(t) \\ &= \tau(t) \vec{N}(t) \wedge \vec{T}(t) + \kappa(t) \vec{B}(t) \wedge \vec{N}(t) = -\kappa(t) \vec{T}(t) - \tau(t) \vec{B}(t). \end{aligned}$$

Les équations de Frenet récapitulent les relations entre les vecteurs  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{B}$  et leurs dérivées.

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}' &= -\kappa \vec{T} - \tau \vec{B} \\ \vec{B}' &= \tau \vec{N}. \end{aligned}$$

De manière équivalente exprimons  $(\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}')$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  sous la forme :

$$(II.2.2) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}') = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}.$$

### II.2.5 Théorème fondamental de la théorie locale des courbes

Nous avons vu qu'une courbe plane est déterminée à déplacement près par sa courbure algébrique. Dans  $\mathbb{R}^3$ , ce sont sa courbure et sa torsion qui déterminent une courbe à déplacement près.

**Théorème II.2.25** (Théorème fondamental de la théorie des courbes dans l'espace).

Etant données des fonctions  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\tau$  de classe  $\mathcal{C}^0$ , il existe un paramétrage par la longueur de l'arc  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'un arc géométrique birégulier  $C$  de classe  $\mathcal{C}^3$  dont  $\kappa$  est la courbure et  $\tau$  la torsion. Tout autre paramétrage par la longueur de l'arc  $\alpha_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'un arc géométrique birégulier  $C_1$  de classe  $\mathcal{C}^3$  vérifiant les mêmes hypothèses est image de  $\alpha$  par un déplacement de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.* Commençons par démontrer l'unicité à déplacement près par une méthode simple et astucieuse. Soient  $\alpha, \alpha_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux paramétrages par la longueur de l'arc, tels que les fonctions courbures et torsions de  $\alpha$  et  $\alpha_1$  coïncident. On fixe  $t_0 \in I$ . On peut par translation se ramener au cas où  $\alpha(t_0) = \alpha_1(t_0) = 0$ , puis par une rotation (un élément de  $\mathbf{SO}(3)$ ), amener le trièdre de Frenet associé à  $\alpha$  en  $t_0$  sur celui associé à  $\alpha_1$ . On se place donc dans le cas où les repères de Frenet associés à  $\alpha$  et  $\alpha_1$  coïncident en  $t_0$ .

Introduisons la fonction

$$\theta : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \vec{T}(t), \vec{T}_1(t) \rangle + \langle \vec{N}(t), \vec{N}_1(t) \rangle + \langle \vec{B}(t), \vec{B}_1(t) \rangle.$$

En utilisant les équations de Frenet, on calcule facilement que  $\theta'(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ . Comme  $\theta(t_0) = 3$ , on en déduit que  $\theta(t) = 3$  pour tout  $t \in I$ . Or les vecteurs des trièdres de Frenet étant de norme 1, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\theta(t) \leq 3$ . Ceci montre que pour tout  $t \in I$ , nous sommes dans les cas d'égalités pour les inégalités de Cauchy-Schwarz utilisées, et donc  $\vec{T}$  et  $\vec{T}_1$  (resp.  $\vec{N}$  et  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{B}_1$ ) sont positivement liés. Comme ils sont de norme 1, ils sont égaux. Ainsi, les trièdres de Frenet de  $\alpha$  et  $\alpha_1$  coïncident en tout point. En particulier  $\vec{T} = \vec{T}_1 = \alpha'(t) = \alpha_1'(t)$  pour tout  $t \in I$ . Comme  $\alpha(t_0) = \alpha_1(t_0)$ , on en déduit que  $\alpha(t) = \alpha_1(t)$  pour tout  $t \in I$ .

Démontrons maintenant le résultat d'existence. La forme matricielle des équations de Frenet (II.2.2) nous montre que  $t \mapsto (\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$  est solution d'un système d'équations différentielles du premier ordre et linéaire.

On note  $0_3$  et  $I_3$  respectivement les matrices nulle et identité dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Introduisons le système d'équations différentielles du premier ordre et linéaire dans  $\mathbb{R}^9$  :

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0_3 & \kappa(t)I_3 & 0_3 \\ -\kappa(t)I_3 & 0_3 & -\tau(t)I_3 \\ 0_3 & \tau(t)I_3 & 0_3 \end{bmatrix} X(t)$$

Fixons  $t_0 \in I$  et considérons la solution  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^9$  de l'équation ci-dessus avec la condition initiale  $f(t_0) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ . Posons  $f = (f_1, \dots, f_9)$ ,  $\vec{T} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $\vec{N} = (f_4, f_5, f_6)$  et  $\vec{B} = (f_7, f_8, f_9)$ . On a alors

$$\vec{T}'(t) = \kappa \vec{N}(t), \quad \vec{N}'(t) = -\kappa \vec{T}(t) - \tau(t) \vec{B}(t), \quad \vec{B}'(t) = \tau(t) \vec{N}(t).$$

Soit  $M(t)$  la matrice

$$M(t) = \begin{bmatrix} \langle \vec{T}(t), \vec{T}(t) \rangle & \langle \vec{T}(t), \vec{N}(t) \rangle & \langle \vec{T}(t), \vec{B}(t) \rangle \\ \langle \vec{N}(t), \vec{T}(t) \rangle & \langle \vec{N}(t), \vec{N}(t) \rangle & \langle \vec{N}(t), \vec{B}(t) \rangle \\ \langle \vec{B}(t), \vec{T}(t) \rangle & \langle \vec{B}(t), \vec{N}(t) \rangle & \langle \vec{B}(t), \vec{B}(t) \rangle \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$M'(t) = A(t)M(t) - M(t)A(t) \quad \text{où} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{bmatrix}$$

et que de plus  $M(t_0) = I_3$ . Or la fonction constante égale à  $I_3$  vérifie la même équation différentielle avec même condition initiale. On en déduit que  $M(t) = I_3$  pour tout  $t \in I$ . Ainsi  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . En particulier on a

$$\det(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)) = \pm 1.$$

Comme  $\det(\vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0), \vec{B}(t_0)) = \det(I_3) = 1$ , par continuité, on a pour tout  $t \in I$ ,  $\det(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)) = 1$ , ce qui montre que la base  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$  est orthonormée directe.

Définissons maintenant  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t \vec{T}(u) \, du.$$

Alors  $\alpha$  est différentiable,  $\alpha'(t) = \vec{T}(t)$  est de norme 1 et  $\alpha$  est donc un paramétrage par la longueur de l'arc. On vérifie facilement que la courbure et la torsion de  $\alpha$  sont bien  $\kappa$  et  $\tau$  respectivement.  $\square$

**Exercice II.2.26.** Quels sont les arcs paramétrés dans  $\mathbb{R}^3$  de courbure partout nulle ?

**Exercice II.2.27.** Montrer qu'un arc paramétré par la longueur de l'arc birégulier  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est plan si et seulement si sa torsion est nulle en tout point.

**Exercice II.2.28.** Quels sont les arcs paramétrés par la longueur de l'arc biréguliers  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de courbure et de torsion constante ?

## II.3 Courbes périodiques

Nous allons maintenant nous intéresser à des courbes admettant un paramétrage périodique. La terminologie souvent employée dans la littérature est courbe « fermée », parce qu'une telle courbe se referme sur elle-même, mais cela interfère avec la notion topologique. Une droite du plan par exemple est un fermé topologique, mais n'est pas une courbe admettant un paramétrage périodique. Remarquons que si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un arc paramétré périodique, sa trace est compacte dans  $\mathbb{R}^N$ .

### Proposition II.3.1.

Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un arc paramétré périodique. Alors il existe une plus petite période  $A$  strictement positive. On dit alors que  $A$  est la période de  $\alpha$ .

Démonstration. En effet, soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des périodes de  $\alpha$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $a \in \mathbb{R}_+^\times$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t+a) = \alpha(t)$ . Par hypothèse,  $\mathcal{P}$  est non vide. D'autre part, il est minoré par 0. Posons  $A = \inf \mathcal{P}$ . Supposons  $A = 0$ . Il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  qui tend vers 0. On a alors

$$\alpha'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t + a_n) - \alpha(t)}{a_n} = 0,$$

ce qui contredit le fait que  $\alpha$  est régulière.

Montrons maintenant que  $A \in \mathcal{P}$ . Supposons que tel n'est pas le cas. Par définition, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  qui tend vers  $A$ . Comme c'est une suite de Cauchy, et qu'elle est non stationnaire, on peut alors trouver  $n, m$  dans  $\mathbb{N}$  tels que

$$0 < a_n - a_m < A.$$

Or  $a_n - a_m$  est encore une période de  $\alpha$ , et ceci contredit la définition de  $A$ . Ce même argument montre que  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des multiples de  $A$ .  $\square$

Les idées de cette démonstration conduisent facilement aussi au résultat suivant.

**Proposition II.3.2.**

Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée, admettant  $L > 0$  comme période, telle que  $\alpha$  soit injective sur  $[0; L[$ . Alors l'ensemble des périodes de  $\alpha$  est l'ensemble des multiples de  $L$ .

**Remarque II.3.3.** Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un arc paramétré, périodique de période  $L > 0$ . Il se peut que  $\alpha$  ne soit pas injective sur  $[0; L[$ . Nous laissons au lecteur le soin de s'en convaincre par un exemple.

Dans ce contexte, on montre la proposition suivante. Le cercle  $\mathbb{S}^1$  est le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition II.3.4.**

Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée, admettant  $L > 0$  comme période, telle que  $\alpha$  soit injective sur  $[0, L[$ . Alors la trace de  $\alpha$  est homéomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ . Si de plus  $\alpha$  est régulière, alors sa trace est une sous-variété de dimension 1 difféomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ .

Démonstration. Considérons l'application  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto (\cos \frac{2\pi}{L}t, \sin \frac{2\pi}{L}t)$ . On peut donc factoriser  $\alpha$  par  $p$  : il existe  $\underline{\alpha} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  tel que

$$\underline{\alpha} \circ p = \alpha.$$

L'application  $p$  est un homéomorphisme local, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_x$  contenant  $x$  dans  $\mathbb{R}$  tel que la restriction de  $p$  à  $\mathcal{U}_x$  réalise



un homéomorphisme entre  $\mathcal{U}_x$  et son image. Tel est le cas par exemple si  $\mathcal{U}_x$  est un intervalle ouvert de longueur inférieure à  $L/2$ . D'autre part,  $p$  est surjective. Pour tout point de  $\mathbb{S}^1$ , il existe donc un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$ , contenant ce point et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $p$  soit un homéomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{V}$ . Sur  $\mathcal{V}$ , on a donc  $\underline{\alpha} = \alpha \circ p^{-1}$ , ce qui montre que  $\underline{\alpha}$  est continue.

L'injectivité de  $\alpha$  sur  $[0, L[$  entraîne l'injectivité de  $\underline{\alpha}$ . La trace de  $\alpha$  est l'image de  $\underline{\alpha}$ . Par définition,  $\underline{\alpha}$  est surjective de  $\mathbb{S}^1$  dans la trace de  $\alpha$ . Notons  $\mathcal{C}$  celle-ci. Nous avons montré que  $\underline{\alpha}$  est une bijection continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathcal{C}$ , de réciproque  $\underline{\alpha}^{-1}$ .

Comme  $\mathbb{S}^1$  est compact, l'image d'un fermé de  $\mathbb{S}^1$  par  $\underline{\alpha}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^N$ . L'image réciproque par  $\underline{\alpha}^{-1}$  d'un fermé est donc un fermé, ce qui montre que  $\underline{\alpha}^{-1}$  est continue.

La deuxième assertion est évidente, car l'on vérifie immédiatement que la restriction de  $\alpha$  à tout intervalle de longueur strictement plus petite que la période est un paramétrage local.  $\square$

Introduisons un peu de terminologie.

#### Définition II.3.5.

On appelle **arc géométrique périodique** de  $\mathbb{R}^N$  un arc géométrique  $C$  admettant un paramétrage  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  périodique de période  $A > 0$ . On dit que  $C$  est **simple** s'il admet un paramétrage de période  $L$  injectif sur  $[0; L[$ .

On appelle **courbe de Jordan** un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .

La terminologie provient du célèbre théorème de Jordan (section II.6.5), qui dit qu'une telle courbe sépare le plan en deux parties (le complémentaire de la courbe a deux composantes connexes, l'une étant bornée et l'autre non).

**Remarque II.3.6.** Un arc géométrique périodique  $C$  simple n'est pas simple au sens de la définition II.1.12. Nous avons adapté la définition pour qu'elle soit mieux adaptée à ce que l'on en attend dans le cas des arcs périodiques. On modifie de même la définition de point simple d'un tel arc.

**Remarque II.3.7.** La proposition II.3.4 montre que la trace d'un arc géométrique périodique simple est une sous-variété connexe de dimension 1 de l'espace ambiant. Si celui-ci est  $\mathbb{R}^2$ , c'est une courbe de Jordan.

**Remarque II.3.8.** Se donner une application continue périodique  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans un espace topologique  $Y$  revient à se donner une application continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $Y$ . En effet, si  $L > 0$  est la période de  $h$ , on peut factoriser  $h$  par la projection

$$p_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto \left( \cos \frac{2\pi}{L}t, \cos \frac{2\pi}{L}t \right),$$

c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction continue  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  telle que  $f \circ p_L = h$ . Ceci résulte du fait que  $p_L$  est un homéomorphisme local.

**Définition II.3.9.**

Soit  $C$  un arc géométrique périodique dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage de  $C$ , de période  $A > 0$ . On appelle longueur de l'arc  $C$  la quantité

$$L_C = \int_0^A \|\alpha'(u)\| \, du.$$

**Proposition II.3.10.**

Soit  $\beta$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique périodique  $C$ . Alors  $\beta$  est périodique, de période  $L_C$ .

*Démonstration.* Reprenons les notations de la démonstration de la proposition II.1.19. On a alors

$$\beta(s + L_C) = \alpha(t(s + L_C)) = \alpha(t(s) + A) = \alpha(t(s)) = \beta(s).$$

□

## II.4 Classification des sous-variétés connexes de dimension 1

Nous avons vu que les paramétrages locaux d'une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^N$  sont des arcs paramétrés. Il s'ensuit que localement, une telle sous-variété est la trace d'un arc paramétré. Mais c'est en fait vrai globalement pour les sous-variétés connexes, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme II.4.1.**

Soit  $\mathcal{C}$  une sous-variété connexe de dimension 1 de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathcal{C}$  deux paramétrages locaux de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $\mathbf{x}(I) \cap \mathbf{y}(J) \neq \emptyset$ . Alors soit  $\mathbf{x}(I) \cap \mathbf{y}(J)$  est connexe, et il existe un paramétrage local  $\mathbf{z} : K \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $\mathbf{z}(K) = \mathbf{x}(I) \cup \mathbf{y}(J)$ , soit  $\mathbf{x}(I) \cap \mathbf{y}(J)$  compte deux composantes connexes, et  $\mathcal{C}$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathcal{C}$  deux paramétrages locaux de  $\mathcal{C}$  tels que  $\mathcal{W} = \mathbf{x}(I) \cap \mathbf{y}(J) \neq \emptyset$ . Ce sont en particulier des arcs paramétrés. On peut donc, quitte à effectuer un changement de paramétrage, supposer que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des paramétrages par la longueur de l'arc. Posons  $I_1 = \mathbf{x}^{-1}(\mathcal{W})$ ,  $J_1 = \mathbf{y}^{-1}(\mathcal{W})$ . Ce sont des ouverts (non connexes a priori) respectivement inclus dans  $I$  et  $J$ , donc chacun d'eux est réunion d'intervalles ouverts disjoints. Le changement de paramétrage  $\theta = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : J_1 \rightarrow I_1$  est un difféomorphisme.

Considérons l'application continue :

$$\gamma : \mathcal{W} \longrightarrow J \times I, \quad q \mapsto (\mathbf{y}^{-1}(q), \mathbf{x}^{-1}(q))$$

et son graphe

$$\Gamma = \{(q, s, t) \in \mathcal{W} \times J \times I \mid q \in \mathcal{W}, s = \mathbf{y}^{-1}(q), t = \mathbf{x}^{-1}(q)\}.$$

La projection sur la première composante  $p_{\mathcal{W}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{W}$  réalise un homéomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{W}$ . En particulier, elle induit une bijection entre les composantes connexes de  $\mathcal{W}$  et de  $\Gamma$ . D'autre part, la projection sur la composante  $J \times I$ ,  $p_2 : \Gamma \rightarrow J \times I$  réalise elle un homéomorphisme de  $\Gamma$  sur

$$p_2(\Gamma) = \{(s, t) = (\mathbf{y}^{-1}(q), \mathbf{x}^{-1}(q)) \mid (q \in \mathcal{W})\} = \{(s, t) \in J \times I \mid \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(t)\}.$$

Cette dernière écriture montre que  $p_2(\Gamma)$  est fermé dans  $J \times I$ . Remarquons maintenant que  $p_2(\Gamma)$  n'est rien d'autre que le graphe de  $\theta : \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : J_1 \rightarrow I_1$ . Il s'ensuit que les composantes connexes du graphe de  $\theta$ , qui sont à la fois en bijection avec les composantes connexes de  $J_1$  et de  $I_1$ , sont aussi en bijection avec les composantes connexes de  $\mathcal{W}$ .

Nous allons maintenant exploiter le fait que les composantes connexes du graphe de  $\theta$  sont d'une forme très particulière. En effet, comme  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des paramétrages par la longueur de l'arc, on a  $|\theta'| = 1$ , et par continuité de  $\theta'$ ,  $\theta'$  est constante égale à  $\pm 1$  sur chaque composante connexes de  $J_1$ . Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, le graphe de  $\theta$  est fermé dans  $J \times I$ . On voit donc que les composantes connexes du graphe de  $\theta$  sont des segments fermés dans  $J \times I$  de pente  $\pm 1$  dans  $J \times I$ . D'autre part comme les projections sur  $J$  ou  $I$  d'un de ces segments est une composante connexe respectivement de  $J_1$  ou de  $I_1$ , ces segments n'ont pas de point d'arrêt dans  $J \times I$ . Ils se prolongent donc soit indéfiniment, soit jusqu'à la frontière de  $J \times I$  dans  $\mathbb{R}^2$ . De plus, leurs projection sur  $J$  (resp.  $I$ ) sont disjointes, en particulier ils sont eux-même disjointes. Distinguons plusieurs cas.

Cas 1 :  $I = J = \mathbb{R}$ . Dans ce cas, on voit facilement qu'il y a au plus une seule composante connexe au graphe de  $\theta$ . En effet, s'il y en a deux, se sont des droites parallèles, mais leur projection sur  $I$  (par exemple) ne sont pas disjointes.

Cas 2 :  $I = ]a; +\infty[$ ,  $J = \mathbb{R}$ . De même, s'il y a deux composantes connexes au graphe de  $\theta$ , ce sont deux demi-droite ouvertes de pente  $\pm 1$  qui rejoignent l'axe  $y = a$ . Leurs projections sur  $I$  ne peuvent être disjointes, ce qui constitue une contradiction. Le graphe de  $\theta$  est donc connexe.

Les autres cas où  $J \times I$  est un demi-plan ouvert se traitent de même.

Cas 3 :  $I = ]a; +\infty[$ ,  $J = ]b; +\infty[$ . S'il y a deux composantes connexes au graphe de  $\theta$ , ce sont deux demi-droites ouvertes de pente  $\pm 1$  qui rejoignent l'axe  $y = a$  ou l'axe  $x = b$ . Elles peuvent être parallèles ou de pentes opposées, mais l'inspection de tous les cas possibles aboutit toujours à une contradiction avec le fait que leurs projections sur  $I$  et  $J$  doivent être disjointes. Le graphe de  $\theta$  est donc connexe.

Les autres cas où  $J \times I$  est un quart de plan ouvert se traitent de même.

Cas 4 :  $I = ]a; b[$ ,  $J = \mathbb{R}$ . S'il y a deux composantes connexes au graphe de  $\theta$ , ce sont deux demi-droites ouvertes de pente  $\pm 1$  qui rejoignent l'axe  $y = a$  et l'axe  $y = b$ . Leurs projections sur  $I$  sont donc égales à  $I$ , ce qui est impossible. Le graphe de  $\theta$  est donc connexe.

Les autres cas où  $J \times I$  est une bande horizontale ou verticale se traitent de même. On aboutit aussi à la même conclusion dans les cas où  $J \times I$  est une demi bande horizontale ou verticale (par exemple  $I = ]a; b[$ ,  $J = ]c; +\infty[$ ).

Cas 5 :  $I = ]a; b[$ ,  $J = ]c; d[$ . Prenons deux composantes connexes du graphe de  $\theta$ . Ce sont des ouverts connexes de droites de pentes  $\pm 1$  qui rejoignent les côtés du rectangle  $J \times I$ . Si deux de leur extrémités sont sur un même côté du rectangle, on aboutit là encore à une contradiction avec le fait que leur projections sur  $J$  et  $I$  doivent être distinctes. En fait, on s'aperçoit vite que la seule possibilité pour qu'il y ait plus d'une composante connexe est que celles-ci soient deux droites parallèles joignant chacune une paire de côtés adjacents du rectangle.

En conclusion, soit le graphe de  $\theta$  est connexe, soit on est dans le cas 5. Si le graphe de  $\theta$  est connexe, alors  $\mathcal{W}$ ,  $I_1$ ,  $J_1$  le sont également et  $\theta : I_1 \rightarrow J_1$  est un difféomorphisme entre deux intervalles de  $\mathbb{R}$  de dérivée constante égale à  $\pm 1$ . Quitte à changer  $\mathbf{y}$  en  $t \mapsto \mathbf{y}(\pm t) + c$ , on peut supposer que  $\theta$  est l'identité et que  $I_1 = J_1$ . On a alors  $I \cap J = I_1 = J_1$  comme le montre l'analyse du graphe de  $\theta$  dans ce cas. On peut alors poser

$$\mathbf{z} : I \cup J \rightarrow \mathcal{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{si } t \in I \\ \mathbf{y}(t) & \text{si } t \in J \end{cases}.$$

Ceci est bien défini puisque les deux paramétrages coïncident sur  $I \cap J$ .

Si le graphe de  $\theta$  a plusieurs composantes connexes, on est dans le cas 5 :  $\mathcal{W}$ ,  $I_1$  et  $J_1$  ont chacun deux composantes connexes. Posons  $I_1 = I'_1 \cup I'_2$ ,  $J_1 = J'_1 \cup J'_2$ , où  $I'_1, I'_2$  sont des sous-intervalles de  $I$  et  $J'_1, J'_2$  sont des sous-intervalles de  $J$  et  $\theta$  est un difféomorphisme de  $I'_1$  sur  $J'_1$  et de  $I'_2$  sur  $J'_2$  de même dérivée constante égale à  $\pm 1$ . Quitte à changer  $\mathbf{y}$  en  $t \mapsto \mathbf{y}(\pm t) + c$ , on peut supposer que  $\theta$  est l'identité et que  $I_1 = J_1$ . On est donc dans la situation où  $a < b < c < d < e < f$ ,  $I = ]a; d[$ ,  $J = ]c; f[$ ,  $I'_1 = J'_1 = ]c; d[$ ,  $I'_2 = ]a; b[$ ,  $J'_2 = ]e; f[$ , et  $\theta : J'_2 \rightarrow I'_2$  est donné par  $t \mapsto t + a - e$ . On pose alors

$$\alpha : ]a; e[ \rightarrow \mathcal{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{si } t \in I = ]a; d[ \\ \mathbf{y}(t) & \text{si } t \in J = ]c; f[ \end{cases}.$$

Ceci est bien défini puisque les deux paramétrages coïncident sur  $I \cap J = ]c; d[$ . D'autre part, si  $t \in ]e; f[$ , on a  $\alpha(t) = \mathbf{y}(t) = (\mathbf{x} \circ \theta)(t) = \mathbf{x}(t + a - e) = \alpha(t + a - e)$ . On peut donc prolonger  $\alpha$  en une fonction périodique sur  $\mathbb{R}$ , de période  $L = e - a$ . L'image de  $\alpha$  est alors difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , car on peut la factoriser par une fonction  $\bar{\alpha}$  de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathcal{C}$  via la projection  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto (\cos \frac{2\pi}{L}t, \sin \frac{2\pi}{L}t)$  et donc fermée dans  $\mathcal{C}$ . Comme d'autre part  $\alpha(\mathbb{R}) = \alpha(I \cup J) = \mathbf{x}(I) \cup \mathbf{y}(J)$ , elle est aussi ouverte dans  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{C} = \alpha(\mathbb{R})$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

#### Théorème II.4.2.

Soit  $\mathcal{C}$  une sous-variété connexe de dimension 1 de  $\mathbb{R}^N$ . Alors soit  $\mathcal{C}$  peut être recouverte par un seul paramétrage global injectif, auquel cas  $\mathcal{C}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ , soit  $\mathcal{C}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , et il existe un arc paramétré périodique simple  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  tel que  $\alpha(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$ .

Démonstration. Supposons  $\mathcal{C}$  non difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . L'ensemble des paramétrages  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathcal{C}$  est non vide, ordonné par inclusion de leur image. Il existe donc un paramétrage

maximal, disons  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathcal{C}$ . Si  $\mathbf{x}(I) = \mathcal{C}$ , alors  $\mathbf{x}$  est un difféomorphisme de  $I$  sur  $\mathcal{C}$ . Comme un intervalle ouvert  $I$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ . Maintenant si  $\mathbf{x}(I) \neq \mathcal{C}$ ,  $\mathbf{x}(I)$  est ouvert dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $\overline{\mathbf{x}(I)}$  l'adhérence de  $\mathbf{x}(I)$  dans  $\mathcal{C}$ . C'est un fermé de  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathbf{x}(\overline{I}) = \mathbf{x}(I)$ , c'est aussi un ouvert de  $\mathcal{C}$ , et comme  $\mathcal{C}$  est connexe, ceci entraîne que  $\mathbf{x}(\overline{I}) = \mathcal{C}$ , ce qui est exclu par hypothèse. On a donc  $\mathbf{x}(\overline{I}) \neq \mathbf{x}(I)$ . Soient  $p \in \partial(\mathbf{x}(I)) = \mathbf{x}(\overline{I}) \setminus \mathbf{x}(I) \subset \mathcal{C}$  et soit  $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathcal{C}$  un paramétrage local de  $\mathcal{C}$  en  $p$ . On a alors  $\mathbf{y}(J) \cap \mathbf{x}(I) \neq \emptyset$  puisque  $\mathbf{y}(J)$  est un ouvert de  $\mathcal{C}$  contenant  $p$ . Le lemme précédent montre que l'on peut trouver un paramétrage local  $\mathbf{z} : K \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $\mathbf{z}(K) = \mathbf{x}(I) \cup \mathbf{y}(J)$ , ce qui contredit la maximalité de  $\mathbf{x}$ . Ce cas est donc exclu, et  $\mathcal{C}$  est difféomorphe à  $I$ . On conclut car tout intervalle ouvert est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Remarque II.4.3.** A quelle condition l'image d'un arc géométrique  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  est-elle une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^N$  ?

D'après la classification des sous-variétés connexes de dimension 1 de  $\mathbb{R}^N$ , si  $\mathcal{C} = \alpha(I)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ , alors soit  $\mathcal{C}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , soit homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . Dans le premier cas, elle admet un paramétrage global  $\mathbf{x}$ , qui est aussi un arc paramétré simple. Le changement de paramétrage entre  $\alpha$  et  $\mathbf{x}$  est un difféomorphisme, ce qui montre que  $\alpha$  est simple et réalise un homéomorphisme de  $I$  sur  $\mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , disons via un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , alors l'application  $\phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  se relève en une application  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $p \circ \tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha$ ,  $p$  étant la projection standard de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{S}^1$ . Comme  $\phi$  et  $\alpha$  sont des immersions, il en est de même de  $\tilde{\alpha}$ , qui est donc une fonction strictement monotone sur  $I$  et donc un difféomorphisme de  $I$  sur un sous-intervalle  $I'$  de  $\mathbb{R}$ . L'image de  $I'$  par  $\phi^{-1} \circ p$  est égale à  $\mathcal{C} = \alpha(I)$ , ce qui montre que la longueur de  $I'$  est plus grande que  $2\pi$ . On ne peut pas dire plus que le fait que  $\alpha$  puisse s'écrire sous la forme  $\alpha = \phi^{-1} \circ p \circ \tilde{\alpha}$ , avec  $\tilde{\alpha}$  difféomorphisme de  $I$  sur un sous-intervalle  $I'$  de  $\mathbb{R}$  de longueur au moins  $2\pi$ ,  $p$  la projection standard de  $\mathbb{R}$  sur le cercle, et  $\phi$  un difféomorphisme de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{S}^1$ . (On peut donner un exemple où  $I = \mathbb{R}$  et  $\alpha$  n'est pas périodique, par exemple  $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto (\cos e^t, \sin e^t)$ ).

## II.5 Degré d'une application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$

On note  $\mathbb{S}^1$  le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^2$  et  $p$  l'application

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x).$$

L'application  $p$  est un homéomorphisme local, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_x$  contenant  $x$  dans  $\mathbb{R}$  tel que la restriction de  $p$  à  $\mathcal{U}_x$  réalise un homéomorphisme entre  $\mathcal{U}_x$  et son image. Tel est le cas par exemple si  $\mathcal{U}_x$  est un intervalle ouvert de longueur inférieure à  $\pi$ . Notons alors  $y = p(x)$  et  $\mathcal{V}_y = p(\mathcal{U}_x)$  : c'est un voisinage ouvert de  $y$  dans  $\mathbb{S}^1$ . De plus  $p^{-1}(\mathcal{V}_y)$  est égal à la réunion disjointe des intervalles  $\mathcal{U}_x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . On dira qu'un voisinage  $\mathcal{V}_y$  de  $y$  obtenu comme ci-dessus est **distingué**.

### Théorème II.5.1 (théorème de relèvement).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Soient  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $p(x_0) = \alpha(t_0)$ . Alors il existe un unique relèvement  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\alpha$  (c'est-à-dire vérifiant  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ ) continu et tel que  $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{R} \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'unicité, en supposant que deux relèvements  $\tilde{\alpha}_1$  et  $\tilde{\alpha}_2$  vérifient les hypothèses de la proposition. Soit  $A$  l'ensemble des points de  $I$  où  $\tilde{\alpha}_1$  et  $\tilde{\alpha}_2$  sont égaux. L'ensemble  $A$  est non vide, puisque  $\tilde{\alpha}_1(t_0) = \tilde{\alpha}_2(t_0) = x_0$ , et donc  $t_0 \in A$ . Ensuite, montrons que  $A$  est ouvert dans  $I$ . En effet, si  $t \in A$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_x$  de  $x = \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)$  tel que la restriction de  $p$  à  $\mathcal{U}_x$  est un homéomorphisme sur son image. Comme  $\tilde{\alpha}_1$  et  $\tilde{\alpha}_2$  sont continus, il existe un intervalle  $I_t$  ouvert dans  $I$  tel que  $\tilde{\alpha}_1(I_t) \subset \mathcal{U}_x$  et  $\tilde{\alpha}_2(I_t) \subset \mathcal{U}_x$ . Comme  $p \circ \tilde{\alpha}_1 = p \circ \tilde{\alpha}_2 = \alpha$  et que  $p$  est un homéomorphisme sur  $\mathcal{U}_x$ , on en déduit que  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$  sur  $I_t$ . Ceci montre que  $A$  est ouvert dans  $I$ . Il est clair que  $A$  est aussi fermé dans  $I$ , puisque c'est l'ensemble des zéros de l'application continue  $\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2$ . On en déduit par connexité que  $A = I$ , et donc  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .

Montrons maintenant l'existence d'un relèvement, en supposant dans un premier temps que  $I$  est compact. Comme  $\alpha$  est continu, pour tout  $t \in I$ , il existe un intervalle  $I_t$  ouvert dans  $I$ , contenant  $t$  et tel que  $\alpha(I_t)$  soit contenu dans un voisinage ouvert distingué  $\mathcal{V}_y$  de  $y = \alpha(t)$  dans  $\mathbb{S}^1$ . La famille des  $I_t$ ,  $t \in I$  est un recouvrement du compact  $I$  par des ouverts, dont on peut donc extraire un recouvrement fini  $I^{(0)}, \dots, I^{(m)}$ . Quitte à changer l'énumération de ces intervalles, on peut supposer que  $t_0 \in I^{(0)}$ . Par construction,  $\alpha(I^{(0)})$  est contenu dans un voisinage distingué  $\mathcal{V}_0$  de  $y_0 = \alpha(t_0)$ , il existe donc un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que la restriction  $p_0$  de  $p$  à  $\mathcal{U}_0$  soit un homéomorphisme sur  $\mathcal{V}_0$ . On peut alors définir pour tout  $t \in I^{(0)}$ ,

$$\tilde{\alpha}(t) = p_0^{-1} \circ \alpha(t).$$

Il est clair que  $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$  et  $p \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$  pour tout  $t \in I^{(0)}$ . Si  $I = I^{(0)}$ , la démonstration est terminée. Sinon, il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $I^{(j)} \cap I^{(0)} \neq \emptyset$ . Quitte à changer l'énumération des intervalles, on peut supposer que  $j = 1$ . Soit  $t_1 \in I^{(1)} \cap I^{(0)}$ . On procède comme précédemment pour montrer qu'il existe un relèvement  $\tilde{\alpha}_1$  de  $\alpha$  sur  $I^{(1)}$  tel que  $\tilde{\alpha}_1(t_1) = \tilde{\alpha}(t_1)$ . Grâce à la propriété d'unicité démontrée ci-dessus, on voit que  $\tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}(t)$ , pour tout  $t \in I^{(1)} \cap I^{(0)}$ . Notons encore  $\tilde{\alpha}$  l'extension de  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\alpha}_1$  à  $I^{(1)} \cup I^{(0)}$ . En procédant de la même manière, on finit par construire  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  ayant les propriétés voulues. Si  $I$  n'est pas compact,  $I$  s'écrit comme union dénombrable croissante d'intervalles compacts (par exemple  $]0; +\infty[ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}; n]$ ). Le résultat étant établi sur chacun de ces intervalle compact, il l'est sur  $I$ .  $\square$

Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Nous allons utiliser le théorème de relèvement pour définir son **degré**. Notons  $\bar{f}$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{S}^1$  définie par  $\bar{f}(t) = f(\cos t, \sin t)$ . Elle est continue car  $\bar{f} = f \circ p$ . Choisissons  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $p(x_0) = f(\cos t_0, \sin t_0) = \bar{f}(t_0)$ . D'après la proposition précédente, il existe un unique relèvement continu  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\bar{f}$  tel que  $\tilde{f}(t_0) = x_0$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Comme  $p(\tilde{f}(a + 2\pi)) = p(\tilde{f}(a))$ , la différence  $\tilde{f}(a + 2\pi) - \tilde{f}(a)$  est un multiple entier de  $2\pi$ .

**Proposition II.5.2.**

Avec les notations qui précèdent, la quantité  $\tilde{f}(a + 2\pi) - \tilde{f}(a)$  est indépendante des choix faits pour la définir (c'est-à-dire de  $t_0$ , de  $x_0$  et de  $a$ ).

Ceci permet de définir le degré de  $f$ .

**Définition II.5.3.**

Avec les notations qui précèdent, le **degré** de  $f$ , noté  $\deg f$ , est le nombre entier donné par la formule

$$2\pi \times \deg f = \tilde{f}(a + 2\pi) - \tilde{f}(a).$$

Intuitivement,  $\deg f$  est le nombre de tours (comptés avec un signe) que fait faire  $\bar{f}$  à  $[a; a + 2\pi]$  en l'enroulant sur  $\mathbb{S}^1$ .

*Démonstration de la proposition.* Commençons par montrer que c'est indépendant du choix de  $x_0$  en considérant  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $p(x_1) = \bar{f}(t_0) = p(x_0)$ . Alors  $x_1 - x_0$  est un multiple entier de  $2\pi$ . Soit  $\tilde{f}_1$  l'unique relèvement continu  $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\bar{f}$  tel que  $\tilde{f}_1(t_0) = x_1$ . La propriété d'unicité implique clairement que  $\tilde{f}_1(t) = \tilde{f}(t) + (x_1 - x_0)$  et on voit que le degré défini avec  $x_1$  coïncide avec celui défini par  $x_0$ .

Montrons maintenant que le degré est indépendant du choix de  $t_0$ , en considérant un autre point  $t_1 \in \mathbb{R}$ . Soit  $J$  un intervalle compact contenant  $t_0$  et  $t_1$ . Par continuité uniforme de  $\bar{f}$  sur  $J$ , il existe  $\epsilon > 0$  vérifiant la propriété suivante : pour tout sous-intervalle  $J_1$  de  $J$  de longueur plus petite ou égale à  $\epsilon$ , il existe un ouvert distingué  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{S}^1$  contenant  $\bar{f}(J_1)$ .

On peut supposer dans un premier temps que  $|t_1 - t_0| < \epsilon$ , le cas général s'en déduisant par transitivité. Soit  $J_1$  un sous-intervalle de  $J$  de longueur plus petite ou égale à  $\epsilon$  contenant  $t_0$  et  $t_1$  et soit  $\mathcal{V}$  un ouvert distingué de  $\mathbb{S}^1$  contenant  $\bar{f}(J_1)$ . Soit  $x_1$  dans la composante connexe  $\mathcal{U}$  de  $p^{-1}(\mathcal{V})$  contenant  $x_0$  et tel que  $p(x_1) = y_1$  et soit  $\tilde{f}_1$  le relèvement de  $\bar{f}$  tel que  $\tilde{f}_1(t_1) = x_1$ . Comme  $p$  réalise un homéomorphisme entre  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  et  $\bar{f} = p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{f}_1$  sur  $J_1$ , on en déduit que  $\tilde{f} = \tilde{f}_1$  sur  $J_1$ . On en conclut que  $\tilde{f} = \tilde{f}_1$  par unicité du relèvement.

Enfin, montrons que le degré est indépendant du choix de  $a \in \mathbb{R}$ . Posons  $d(a) = \tilde{f}(a + 2\pi) - \tilde{f}(a)$ . C'est une fonction continue de  $a \in \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Elle est donc constante.  $\square$

**Remarque II.5.4.** On voit par le biais de la remarque II.3.8 que l'on peut définir de manière évidente le degré d'une fonction continue périodique  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{S}^1$ . La discussion ci-dessus nous donne la recette pour calculer celui-ci : on relève  $h$  sur une période  $[A; A+L]$  en une application  $\tilde{h} : [A; A+L] \rightarrow \mathbb{R}$  et l'on a

$$2\pi \times \deg h = \tilde{h}(A+L) - \tilde{h}(A).$$

**Exercice II.5.5.**

1. Montrer que si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une application continue non surjective, alors son degré est nul.
2. Montrer que le degré de l'application identique de  $\mathbb{S}^1$  est 1.
3. Identifions  $\mathbb{S}^1$  à l'ensemble des nombres complexes de module 1. Quelle est le degré de l'application  $z \mapsto z^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$  ?

**Exercice II.5.6.** Supposons que  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  soit différentiable (comme fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Ecrivons  $\bar{f}$  sous la forme

$$\bar{f}(t) = (a(t), b(t)), \quad a(t)^2 + b(t)^2 = 1$$

où  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions différentiables. Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $p(x_0) = \bar{f}(t_0)$ . Montrer que le relèvement  $\tilde{f}$  de  $\bar{f}$  tel que  $\tilde{f}(t_0) = x_0$  est donné par

$$\tilde{f}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba')(u) \, du$$

et que dans ce cas, le degré est donné par

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (ab' - ba')(u) \, du.$$

*Indication :* Montrer que la fonction

$$A(t) = a(t) \cos \tilde{f}(t) + b(t) \sin \tilde{f}(t)$$

est constante égale à 1. En déduire que

$$(a(t) - \cos \tilde{f}(t))^2 + (b(t) - \sin \tilde{f}(t))^2$$

est identiquement nulle.

**Remarque II.5.7.** Nous verrons dans le chapitre VII une définition du degré d'une application entre surfaces compactes basée sur une formule intégrale. Une approche similaire en dimension 1 est l'objet du problème 3 de l'examen de 2013.

## II.5.1 Invariance du degré par homotopie

Rappelons tout d'abord la définition d'une homotopie entre deux applications continues.

**Définition II.5.8.**

Soient  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  deux applications continues entre espaces topologiques  $X$  et  $Y$ . Une **homotopie** entre  $f_0$  et  $f_1$  est une application continue

$$F : [0; 1] \times X \longrightarrow Y$$

telle que pour tout  $x \in X$ ,  $F(0, x) = f_0(x)$ ,  $F(1, x) = f_1(x)$ .



**Remarque II.5.9.** Parfois, on exige que toutes les applications  $x \mapsto F(u, x)$ , pour  $u \in [0, 1]$ , vérifient certaines propriétés, par exemple qu'elles soient d'une régularité donnée, ou que leur valeur en point  $x_0$  soit fixé, etc. On peut formaliser ceci en disant que si  $\mathcal{F}$  est une partie de  $\mathcal{C}(X, Y)$ , et si  $f_0, f_1 \in \mathcal{F}$ , l'homotopie  $F$  entre  $f_0$  et  $f_1$  est dans  $\mathcal{F}$  si  $x \mapsto F(u, x) \in \mathcal{F}$  pour tout  $u \in [0; 1]$ .

**Théorème II.5.10.**

Soient  $f_0, f_1$  deux fonctions continues périodiques de période  $L$  à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$  et soit  $F$  une homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ . Alors  $\deg f_0 = \deg f_1$ .

*Démonstration.* La démonstration consiste à établir un lemme de relèvement des homotopies, qui étend le résultat obtenu dans le théorème de relèvement II.5.1.

**Lemme II.5.11.**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $F : [0; 1] \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Soient  $(u_0, t_0) \in [0; 1] \times I$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $p(x_0) = F(u_0, t_0)$ . Alors il existe un unique relèvement  $\tilde{F} : [0; 1] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$  (c'est-à-dire vérifiant  $p \circ \tilde{F} = F$ ) continu et tel que  $\tilde{F}(u_0, t_0) = x_0$ .

*Démonstration.* La démonstration est la même que celle de la proposition II.5.1. Pour montrer l'unicité, on introduit l'ensemble des points de  $[0; 1] \times I$  où les deux relèvements sont égaux : il est non vide par hypothèse, fermé par continuité des relèvements, et ouvert car  $p$  est un homéomorphisme local, c'est donc  $[0; 1] \times I$  tout entier. Pour l'existence, on utilise encore le fait que  $p$  est un homéomorphisme local pour établir l'existence de relèvements locaux qui se recollent par la propriété d'unicité.  $\square$

Revenons à la démonstration du théorème. Soit  $x_0 \in p^{-1}(\{f_0(0)\})$ . D'après le lemme, il existe une unique application continue

$$\tilde{F} : [0; 1] \times [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $p \circ \tilde{F} = F$  et  $\tilde{F}(0, 0) = x_0$ .

En notant  $f_u$  l'application  $t \mapsto F(u, t)$ , on a  $2\pi \times \deg f_u = \tilde{F}(u, L) - \tilde{F}(u, 0)$  et  $\deg f_u$  apparaît comme une fonction continue de  $u$ . Comme elle prend des valeurs entières, elle est constante sur l'intervalle  $[0; 1]$ , et l'on obtient le résultat.  $\square$

**Exercice II.5.12.** Soient  $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  deux applications continues. Montrer que

$$\deg(f \circ g) = \deg f \times \deg g.$$

**Exercice II.5.13.** Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Soit  $\rho$  une rotation (de centre 0) du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $s$  une symétrie par rapport à une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$ . Le cercle  $\mathbb{S}^1$  est stable par  $\rho$  et  $s$ . Quel sont alors les degrés de  $\rho \circ f$  et de  $s \circ f$  en fonction du degré de  $f$  ?

**Exercice II.5.14** (Théorème du point fixe de Brouwer). Soit  $D = \overline{B}(0, 1)$  le disque unité fermé du plan, dont la frontière est  $\mathbb{S}^1$ .

1. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Montrer que la restriction de  $f$  à  $\mathbb{S}^1$  est de degré 0.
2. Soit  $g : D \rightarrow D$  une application continue. Supposons que  $g$  n'admette pas de point fixe. Construire  $f : D \rightarrow \mathbb{S}^1$  continue dont la restriction à  $\mathbb{S}^1$  est l'identité.
3. En conclure que  $g$  admet un point fixe.

## II.6 Propriétés globales des courbes

Dans cette section, nous allons établir des propriétés globales des courbes, en reliant celles-ci à la courbure.

### II.6.1 Une formule pour la courbure algébrique

Les arcs sont de régularité au moins  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc géométrique orienté  $C$ . Soit  $t \in I$  un point de  $\alpha$ . Soient  $\vec{T}(t)$  et  $\kappa(t)$  respectivement le vecteur tangent unitaire et la courbure algébrique en  $p = \alpha(t)$ . Considérons l'application  $I \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto \vec{T}(t)$ . D'après le théorème II.5.1, on peut la relever en une application  $\tilde{T} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $p \circ \tilde{T} = \vec{T}$ , où  $p$  est la projection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{S}^1$  définie dans la proposition. On peut facilement se convaincre en inversant localement  $p$  par une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  que  $\tilde{T}$  est  $\mathcal{C}^1$  puisque  $\vec{T}$  l'est.

En dérivant la relation  $p \circ \tilde{T} = \vec{T}$  et en utilisant (II.2.1), on obtient

$$\tilde{T}'(t) p'(\tilde{T}(t)) = \vec{T}'(t) = \alpha''(t) = \kappa(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t)).$$

D'autre part  $p(t) = (\cos t, \sin t)$  et  $p'(t) = (-\sin t, \cos t) = \rho_{\frac{\pi}{2}}(p(t))$ , d'où

$$\tilde{T}'(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(p(\tilde{T}(t))) = \tilde{T}'(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t)) = \kappa(t) \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t)).$$

Ce qui nous donne

$$(II.6.1) \quad \tilde{T}'(t) = \kappa(t).$$

### II.6.2 Nombre d'enroulement

Nous allons introduire un invariant des arcs géométriques orientés périodiques, qui compte le nombre de tour que fait un vecteur tangent unitaire lorsqu'on parcourt la courbe.

#### Définition II.6.1.

Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de  $C$  de période  $L > 0$ . Posons

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto f(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \vec{T}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On appelle **nombre d'enroulement** de  $C$  le degré de  $f$ . On le note  $\text{Enr}(C)$ .

Nous allons relier le nombre d'enroulement et la courbure algébrique. Tout d'abord, introduisons la terminologie suivante.

**Définition II.6.2.**

Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  de période  $L > 0$  (de sorte que sa période soit aussi sa longueur, cf. Proposition II.3.10). On appelle **courbure algébrique totale** de  $C$  le nombre réel

$$\int_0^L \kappa(t) \, dt.$$

**Remarque II.6.3.** Si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un paramétrage quelconque de  $C$  de période  $A$ , la courbure algébrique totale est donnée par

$$\int_0^A \kappa(t) \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

**Théorème II.6.4.**

La courbure algébrique totale de  $C$  est égale à  $2\pi \times \text{Enr}(C)$ .

Démonstration. On a en effet d'après la formule (II.6.1) et la définition du degré,

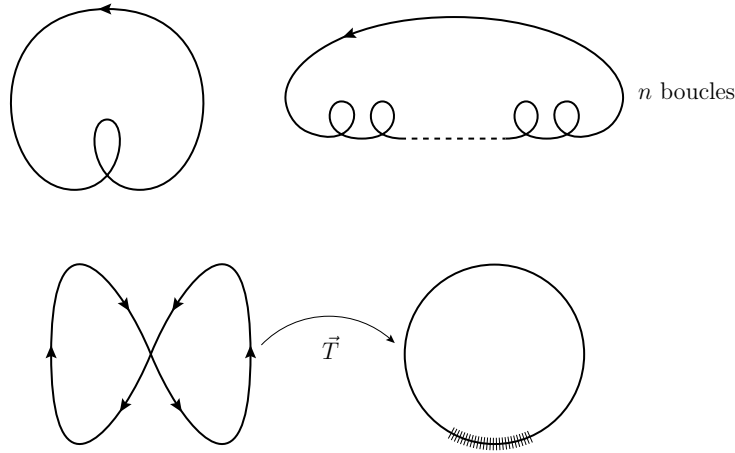
$$\int_0^L \kappa(t) \, dt = \int_0^L \tilde{T}'(t) \, dt = \tilde{T}(L) - \tilde{T}(0) = 2\pi \times \text{Enr}(C).$$

□

Adaptons la définition de l'homotopie aux arcs paramétrés périodiques. On dit que deux arcs paramétrés  $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de période  $A$  sont homotopes s'il existe une application continue  $\alpha(u, t) : [0; 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\alpha(0, t) = \alpha_0(t)$ ,  $\alpha(1, t) = \alpha_1(t)$ , et pour tout  $u \in [0; 1]$   $\alpha_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \alpha(u, t)$  est un arc paramétré de période  $A$ .

**Corollaire II.6.5.**

Soient  $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux arcs paramétrés de période  $A$  homotopes au sens ci-dessus. On a alors  $\text{Enr}(C_0) = \text{Enr}(C_1)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont les arcs géométriques orientés paramétrés respectivement par  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .



Les nombres d'enroulement des arcs ci-dessus sont respectivement 2,  $n + 1$  et 0. En effet, pour le dernier arc en forme de  $\infty$ , l'application  $\vec{T}$  n'est pas surjective (la partie hachurée de  $\mathbb{S}^1$  n'est pas atteinte).

**Démonstration.** Donnons une première démonstration utilisant l'invariance du degré par homotopie. Les deux arcs  $\alpha_0, \alpha_1$  sont homotopes, appelons  $F$  une homotopie les reliant dans l'espace des arcs paramétrés. Alors

$$H : [0, 1] \times [0, A] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(u, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F(u, t)}{\left\| \frac{\partial}{\partial t} F(u, t) \right\|}$$

est une homotopie entre  $t \mapsto \vec{T}_0(t)$  et  $t \mapsto \vec{T}_1(t)$ .

On peut aussi raisonner directement à partir de la remarque II.6.3 ci-dessus, en posant pour tout  $u \in [0, 1]$ ,

$$\text{Enr}(C_u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \kappa_u(t) \|\alpha'_u(t)\| dt,$$

où  $C_u$  étant l'arc géométrique orienté paramétré par  $\alpha_u$  et  $\kappa_u$  sa courbure algébrique. En utilisant le fait (cf. exercice II.2.14) que la courbure algébrique est donnée par

$$\kappa_u(t) = \frac{\det(\alpha'_u(t), \alpha''_u(t))}{\|\alpha'_u(t)\|^3},$$

il est clair que  $u \mapsto \text{Enr}(C_u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \frac{\det(\alpha'_u(t), \alpha''_u(t))}{\|\alpha'_u(t)\|^2} dt$  est une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{Z}$ . L'image d'un ensemble connexe par une application continue étant connexe, cette fonction est constante.  $\square$

Le théorème suivant établit une réciproque à la proposition.

**Théorème II.6.6** (théorème de Whitney-Grauenstein).

Soient  $C_0, C_1$  deux arcs géométriques orientés périodiques et supposons que leur nombre d'enroulement est le même. Alors il existe deux paramétrages  $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  respectivement de  $C_0$  et  $C_1$  qui soient homotopes.

Démonstration. Soient  $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des paramétrages quelconques de  $C_0$  et  $C_1$  et soient  $A_0$  et  $A_1$  leur période respective. Quitte à remplacer  $\alpha_1$  par  $t \mapsto \alpha_1(\frac{A_0}{A_1}t)$  on peut supposer que  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  ont même période  $A$ . Nous avons besoin d'un petit lemme.

**Lemme II.6.7.**

Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de  $C$  de période  $A > 0$ . Soit  $h$  une homothétie de  $\mathbb{R}^2$  de rapport  $\lambda > 0$  et  $C_h$  l'arc obtenu à partir de  $C$  par composition avec  $h$  (c'est à dire paramétré par  $h \circ \alpha$ ). Alors  $\text{Enr}(C) = \text{Enr}(C_h)$ . D'autre part la longueur de  $C_h$  est la longueur de  $C$  multipliée par  $\lambda$ .

Démonstration. On a  $\text{Enr}(C_h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \kappa_h(t) \|\alpha'_h(t)\| dt$ . Soit  $\lambda$  le rapport de  $h$ . On a  $\alpha_h(t) = \lambda \alpha(t)$ , d'où  $\|\alpha'_h(t)\| = |\lambda| \|\alpha'(t)\|$ . D'autre part

$$\kappa_h(t) = \frac{\det(\alpha'_h(t), \alpha''_h(t))}{\|\alpha'_h(t)\|^3} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{|\lambda|} \kappa(t),$$

d'où le résultat. L'assertion sur la longueur se démontre de la même manière.  $\square$

Revenons à la démonstration du théorème. Quitte à remplacer  $C_1$  par un arc homothétique (qui lui est clairement homotope), on peut supposer que les deux courbes ont la même longueur. On peut alors reparamétriser les deux arcs par la longueur de l'arc, ce qui revient à supposer que  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des paramétrages par la longueur de l'arc et ont même période  $L$ . Les applications  $f_0$  et  $f_1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{S}^1$  définie par  $f_i(t) = \alpha'_i(t)$ ,  $i = 0, 1$  ont même degré par hypothèse. Leur relèvements  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{f}_1$  vérifient donc

$$(II.6.2) \quad \tilde{f}_0(L) - \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(L) - \tilde{f}_1(0).$$

Introduisons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{F} : [0, 1] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, t) &\mapsto (1 - u)\tilde{f}_0(t) + u\tilde{f}_1(t), \\ F : [0, 1] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1, & F &= p \circ \tilde{F}, \\ H : [0, 1] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, t) &\mapsto \int_0^t F(u, s) ds + \frac{t}{L} \int_0^L F(u, s) ds. \end{aligned}$$

Elles sont clairement continues, et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \int_0^t F(0, s) ds + \frac{t}{L} \int_0^L F(0, s) ds = \int_0^t p \circ \tilde{f}_0(s) ds + \frac{t}{L} \int_0^L p \circ \tilde{f}_0(s) ds \\ &= \int_0^t f_0(s) ds + \frac{t}{L} \int_0^L f_0(s) ds = \int_0^t \alpha'_0(s) ds + \frac{t}{L} \int_0^L \alpha'_0(s) ds = \alpha_0(t) - \alpha_0(0). \end{aligned}$$

De même

$$H(1, t) = \alpha_1(t) - \alpha_1(0).$$

On obtient donc une homotopie reliant  $\alpha_0 - \alpha_0(0)$  à  $\alpha_1(t) - \alpha_1(0)$ . On en déduit facilement une homotopie reliant  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  en posant

$$H_1(u, t) = H(u, t) + ((1 - u)\alpha_0(0) + u\alpha_1(0)).$$

On vérifie immédiatement que  $H$  et  $H_1$  sont périodiques de période  $L$  en la deuxième variable. Il reste à voir que les courbes paramétrées

$$t \mapsto \alpha_u(t) = H_1(u, t)$$

sont régulières. Calculons

$$\frac{\partial}{\partial t} H_1(u, t) = F(u, t) - \frac{1}{L} \int_0^L F(u, s) \, ds.$$

Supposons que ceci s'annule en  $(u, t)$ . Comme  $F(u, t)$  est à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$ , ceci donne

$$1 = \|F(u, t)\| = \left\| \frac{1}{L} \int_0^L F(u, s) \, ds \right\| \leq \frac{1}{L} \int_0^L \|F(u, s)\| \, ds \leq 1.$$

Ceci force l'égalité partout, et la cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit alors que  $s \mapsto F(u, s)$  est constante. Par unicité du relèvement

$$s \mapsto \tilde{F}(u, s) = (1 - u)\tilde{f}_0(s) + u\tilde{f}_1(s)$$

est aussi constante. On en tire

$$(II.6.3) \quad (1 - u)\tilde{f}_0(L) + u\tilde{f}_1(L) = (1 - u)\tilde{f}_0(0) + u\tilde{f}_1(0)$$

En résolvant le système obtenu avec (II.6.2) et (II.6.3), on obtient

$$\tilde{f}_0(L) = \tilde{f}_0(0) \text{ et } \tilde{f}_1(L) = \tilde{f}_1(0).$$

Par unicité des relèvements, on voit que ceux-ci sont alors périodiques, de période  $L$ . Comme ils sont continus, ils atteignent leur minimum. Quitte à translater les paramétrages  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , on peut supposer que ces minima sont atteints en 0. On a alors

$$\tilde{F}(u, t) = (1 - u)\tilde{f}_0(t) + u\tilde{f}_1(t) \geq \tilde{F}(u, 0).$$

Comme  $t \mapsto \tilde{F}(u, t)$  est constante, ceci montre que  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{f}_1$  sont constantes. Ceci entraîne que les applications tangentes  $\alpha'_0$  et  $\alpha'_1$  sont constantes. Les arcs paramétrés  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont alors des droites, ou bien sont constantes. Dans les deux cas on aboutit à une contradiction. On a donc bien construit une homotopie dans l'espace des arcs paramétrés.  $\square$

### II.6.3 Hopf Umlaufsatz

Ce résultat, appelé en anglais « Theorem of turning tangent » affirme le fait intuitif suivant. Pour une sous-variété connexe compacte de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ , la tangente fait exactement un tour.

#### **Théorème II.6.8** (Hopf Umlaufsatz).

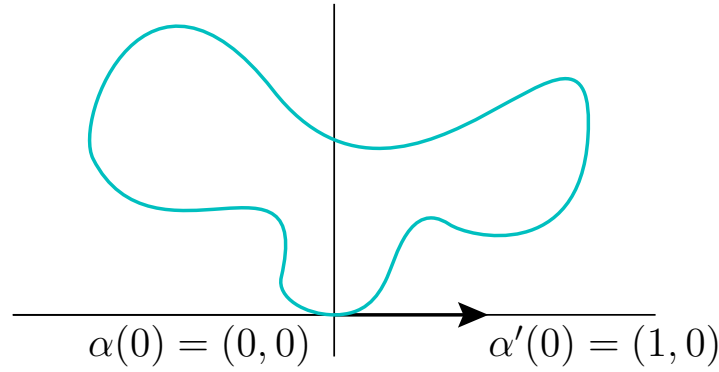
Soit  $\mathcal{C}$  une sous-variété connexe compacte de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  de période  $L > 0$  injectif sur  $[0, L[$ . Alors

$$\text{Enr}(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \, ds = \pm 1$$

le signe dépendant de l'orientation de  $C$ .

Un tel paramétrage existe d'après le théorème de classification II.4.2.

Démonstration. Posons  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Comme les déplacements du plan ne modifient pas le nombre d'enroulement d'un arc géométrique orienté, ni les translations sur la variable  $t$ , on se place dans le cas où  $\inf_t y(t)$  est atteint en 0 et  $\alpha(0) = (0, 0)$ . En particulier, la trace de la courbe est dans le demi-plan  $y \geq 0$ . D'autre part, on a  $y'(0) = 0$ , d'où comme  $\|\alpha'(0)\| = 1$ ,  $x'(0) = \pm 1$ . Quitte à changer l'orientation de  $C$ , on peut supposer que  $\alpha'(0) = (1, 0)$  (voir figure ci-dessous).



Nous allons exhiber maintenant une homotopie explicite entre  $\alpha'$  et une certaine courbe paramétrée  $\beta$  dont il sera facile de calculer le degré. Définissons

$$T = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L\},$$

et

$$F : T \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad F(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|} & \text{si } s_1 < s_2 \text{ et } (s_1, s_2) \neq (0, L) \\ \alpha'(s) & \text{si } s_1 = s_2 = s \\ -\alpha'(0) & \text{si } (s_1, s_2) = (0, L). \end{cases}$$

Remarquons que  $F$  est bien définie car  $\alpha$  est injective sur  $[0, L[$ . Démontrons que  $F$  est continue. Elle est évidemment continue sur le triangle  $T$  privé de son hypothénuse (la diagonale  $\{(s, s), s \in [0, L]\}$ ) et du sommet  $(0, L)$ . On a

$$\alpha(s_2) - \alpha(s_1) = \int_0^1 \frac{d}{dr} [\alpha(s_1 + r(s_2 - s_1))] dr = (s_2 - s_1) \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr,$$

et donc si  $s_1 \neq s_2$ ,

$$F(s_1, s_2) = \frac{\int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr}{\left\| \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr \right\|}.$$

Comme l'intégrale dépend continûment de  $s_1$  et  $s_2$ , on a

$$\lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} F(s_1, s_2) = \frac{\int_0^1 \alpha'(s) \, dr}{\left\| \int_0^1 \alpha'(s) \, dr \right\|} = \alpha'(s),$$

pour tout  $s \in [0; L]$ , ce qui montre la continuité de  $F$  sur l'hypothénuse.

Pour montrer la continuité en  $(0, L)$ , on utilise le fait que  $\alpha$  est périodique de période  $L$ , d'où

$$F(s_1, s_2) = \frac{\alpha(s_2 - L) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2 - L) - \alpha(s_1)\|},$$

lorsque  $(s_1, s_2) \in T$  et  $s_1 < s_2$ . Comme  $s_2 - L < s_1$ , on obtient

$$F(s_1, s_2) = -\frac{\int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - L - s_1)) \, dr}{\left\| \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - L - s_1)) \, dr \right\|},$$

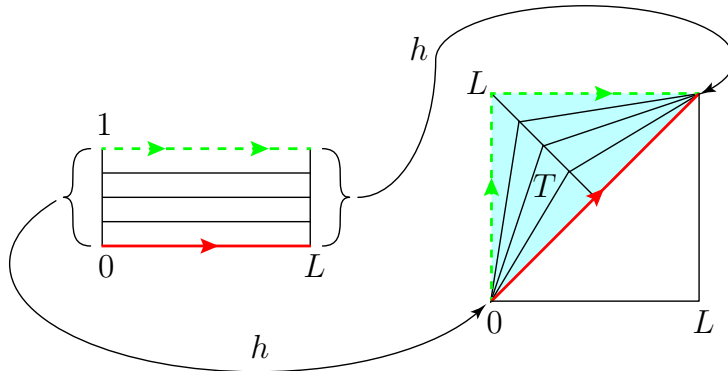
et donc

$$\lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (0, L)} F(s_1, s_2) = -\frac{\int_0^1 \alpha'(0) \, dr}{\left\| \int_0^1 \alpha'(0) \, dr \right\|} = -\alpha'(0).$$

Considérons une application continue  $h : [0; 1] \times [0; L] \rightarrow T$  telle que

$$\begin{aligned} h(0, s) &= (s, s) && \text{si } s \in [0; L] \\ h(1, s) &= \begin{cases} (0, 2s) & \text{si } s \in [0; L/2] \\ (2s - L, L) & \text{si } s \in [L/2; L] \end{cases} \end{aligned}$$

et telle que  $h(u, 0) = (0, 0)$  pour tout  $u \in [0, 1]$ .



Il est alors clair que  $H = F \circ h : [0; 1] \times [0; L] \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une homotopie entre

$$\gamma : t \mapsto H(0, t) = \alpha'(t), \quad (t \in [0; L])$$



et

$$\beta : t \mapsto H(1, t) = \begin{cases} \alpha'(0) & \text{si } t = 0 \\ \frac{\alpha(2t)}{\|\alpha(2t)\|} & \text{si } t \in ]0; L/2[ \\ -\alpha'(0) & \text{si } t = L/2 \\ -\frac{\alpha(2t)}{\|\alpha(2t)\|} & \text{si } t \in ]L/2; L[ \\ \alpha'(0) & \text{si } t = L. \end{cases}$$

De plus  $H(u, 0) = F(0, 0) = \alpha'(0)$  et  $H(u, L) = F(L, L) = \alpha'(L) = \alpha'(0)$  pour tout  $u \in [0, 1]$ . Par invariance du degré par homotopie, on obtient que

$$\text{Enr}(C) = \deg \alpha' = \deg \gamma = \deg \beta.$$

Il reste à montrer que  $\deg \beta = 1$ . Pour cela, on calcule directement le relèvement  $\tilde{\beta}$  de  $\beta$  tel que  $\tilde{\beta}(0) = 0$  (rappelons que  $\beta(0) = \alpha'(0) = (1, 0) = p(0)$ ). Sur l'intervalle  $]0; L/2[$  on a  $p(\tilde{\beta}(t)) = \beta(t) = \frac{\alpha(2t)}{\|\alpha(2t)\|}$ , et comme  $y(t) \geq 0$ , nécessairement  $\tilde{\beta}(t) \leq \pi$ . De plus  $p(\tilde{\beta}(L/2)) = \beta(L/2) = -\alpha'(0) = (-1, 0)$ , et donc  $\tilde{\beta}(L/2) = \pi$ . En raisonnant de même sur l'intervalle  $]L/2; L[$ , où  $\beta$  prend des valeurs opposées, on aboutit à  $\tilde{\beta}(L) = 2\pi$ . On en déduit que  $\deg \beta = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\beta}(L) - \tilde{\beta}(0)) = 1$ .  $\square$

### Corollaire II.6.9.

Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  de période  $L > 0$  et supposons  $\alpha$  injective sur  $[0, L[$  de sorte que la trace de  $C$  soit une courbe simple. Alors  $C$  est homotope à un cercle dans l'ensemble des arcs paramétrés orientés.

Démonstration. Ceci découle de l'Hopf Umlaufsatz et du théorème de Whitney-Grauertstein.  $\square$

## II.6.4 Indice d'entrelacement d'un lacet autour d'un point

Soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe continue fermée (i.e.  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ). Choisissons un point du plan  $p_0$  qui ne soit pas dans la trace de  $\alpha$  et définissons  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  par

$$f(u) = \frac{\alpha(u) - p_0}{\|\alpha(u) - p_0\|}, \quad u \in \mathbb{S}^1.$$

Le degré de  $f$  s'appelle alors **l'indice d'entrelacement** de  $\alpha$  autour de  $p_0$ . Il joue un rôle essentiel dans la théorie des fonctions holomorphes (cf. cours de Frank Pacard [7] en première année).

### II.6.5 Théorème de Jordan

Le célèbre théorème de Jordan est l'énoncé suivant.

#### Théorème II.6.10.

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  a exactement deux composantes connexes, et  $\mathcal{C}$  est leur frontière.

C'est une question encore débattue de savoir s'il faut attribuer la démonstration de ce théorème à Jordan, les démonstrations qu'il propose en 1887 puis 1893 étant souvent considérées comme incomplètes. Nous établirons dans le chapitre III un analogue de ce résultat (le théorème de Jordan-Brouwer) pour les surfaces connexes compactes de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , dont la démonstration s'adapte au cas des sous-variétés difféomorphes au cercle.

Les deux composantes connexes du complémentaires sont distinguées par le fait que l'une est bornée, l'autre ne l'est pas. La première est appelée **domaine intérieur** de la courbe, et l'autre **domaine extérieur**. On peut s'interroger sur la nature topologique de ces composantes connexes. L'énoncé suivant, qui complète celui de Jordan, est dû à Schoenflies. Nous le mentionnons simplement ici sans démonstration.

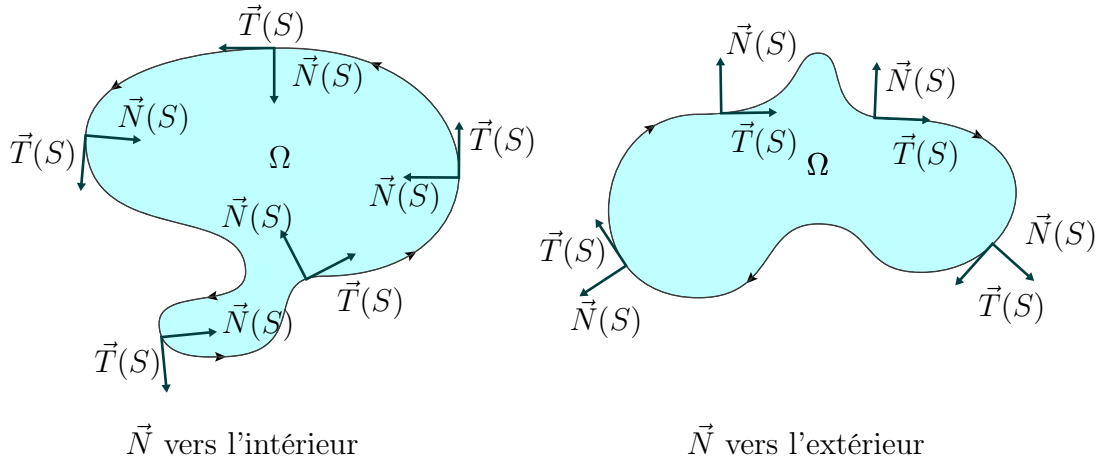
#### Théorème II.6.11 (Jordan-Schoenflies).

Soit  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application continue injective. L'application  $\alpha$  se prolonge en un homéomorphisme du disque  $\bar{D}(0, 1)$  de frontière  $\mathbb{S}^1$  dans l'adhérence de l'intérieur de la courbe de Jordan.

**Remarque II.6.12.** Soit  $C$  un arc géométrique périodique simple. Sa trace est donc une courbe de Jordan. Soit  $\Omega$  le domaine intérieur à  $C$ . Parmi les deux orientations possible de l'arc géométrique  $C$ , l'une exactement, disons  $C^+$ , est distinguée par la propriété suivante. Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de  $C^+$  par la longueur de l'arc de période  $L$ ,  $\vec{T}(t)$  le vecteur tangent et  $\vec{N}(t) = \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t))$  le vecteur normal en  $\alpha(t)$ . Alors ce vecteur normal pointe vers  $\Omega$ , c'est-à-dire que pour tout  $t$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $s \in ]0; \epsilon[$ ,  $\alpha(t) + s\vec{N}(t) \in \Omega$ .

### II.6.6 Convexité des courbes planes

Nous introduisons maintenant une notion de convexité pour les courbes du plan. La **tangente** en un point  $p = \alpha(t)$  d'un arc géométrique  $C$  de paramétrage  $\alpha$  est la droite affine passant par  $p$  et de vecteur directeur  $\vec{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ .



Orientation positive et négative d'un arc paramétré périodique simple.

**Définition II.6.13.**

Un arc géométrique périodique  $C$  est **convexe** si en tout point  $p \in C$ , la trace de  $C$  se trouve dans un des demi-espaces fermés délimités par la tangente à  $C$  en  $p$ . On dit que  $C$  est **strictement convexe** s'il est convexe et de plus, pour tout point  $p$  de  $C$ , l'intersection de  $C$  et de la tangente à  $C$  en  $p$  est réduite à  $p$ .

**Remarque II.6.14.** Il convient de ne pas confondre cette notion de convexité avec la notion affine, où une partie  $E$  d'un espace affine  $\mathcal{A}$  est dite convexe si pour tout couple de point de  $E$ , le segment joignant ces deux points est inclus dans  $E$ . Il existe toutefois un rapport, comme le montre le point **A.** du théorème ci-dessous.

Lorsque la courbe est simple, la convexité se voit localement sur la courbure.

**Exercice II.6.15.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré par la longueur de l'arc. Fixons  $t_0 \in I$ , posons  $\vec{n} = \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t_0))$  et définissons

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{n} \rangle.$$

Montrer que  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$  et  $f''(t_0) = \kappa(t_0)$ . En déduire :

1. Si  $\kappa(t_0) > 0$ , alors il existe un voisinage  $J$  de  $t_0$  dans  $I$  tel que  $\alpha(J)$  est dans le demi-plan délimité par la tangente à  $\alpha$  en  $t_0$  et le vecteur  $\vec{n}$ .
2. S'il existe un voisinage  $J$  de  $t_0$  dans  $I$  tel que  $\alpha(J)$  est dans le demi-plan délimité par la tangente à  $\alpha$  en  $t_0$  et le vecteur  $\vec{n}$ , alors  $\kappa(t_0) \geq 0$ .
3. Etablir les résultats analogues pour les inégalités inverses.

**Remarque II.6.16.** Si  $C$  est un arc géométrique convexe, ceci détermine une orientation positive de  $C$  : on choisit celle-ci de telle sorte que si  $\vec{T}$  est le vecteur tangent unitaire en un point  $p$  de  $C$ , alors  $\vec{n}(t) = \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t))$  est un vecteur unitaire normal qui pointe vers le demi-plan délimité par la tangente en  $p$  où se trouve la courbe. L'exercice ci-dessus montre que si  $C$  est convexe, la courbure de l'arc géométrique orienté  $C^+$  reste alors

positive ou nulle en tout point. Réciproquement si  $C$  est un arc géométrique orienté dont la courbure ne s'annule pas, elle reste de même signe (disons positif, ceci dépend du choix de l'orientation), et  $C$  est localement strictement convexe.

Introduisons un invariant global d'une courbe périodique, sa courbure totale. La définition est similaire à celle de la courbure algébrique totale (définition II.6.2), mais remarquons qu'elle est valable pour les courbes dans  $\mathbb{R}^N$ , et pas simplement pour les courbes planes.

**Définition II.6.17.**

Soit  $C$  un arc géométrique périodique de  $\mathbb{R}^N$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  de période  $L > 0$  (de sorte que sa période soit aussi sa longueur). La **courbure totale** de  $C$  est le réel

$$\int_0^L \kappa(s) \, ds$$

Donnons maintenant un énoncé global pour les courbes périodiques simples planes.

**Théorème II.6.18.**

Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique simple du plan. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- A.** La courbure algébrique de  $C$  garde un signe constant (au sens large).
- B.** L'adhérence  $\overline{\Omega}$  du domaine intérieur  $\Omega$  de  $C$  est convexe,
- C.**  $C$  est convexe,
- D.** La courbure totale de  $C$  est égale à  $2\pi$ .

Démonstration. Montrons l'équivalence entre **A** et **D**. On a

$$\int_0^L \kappa(s) \, ds = \int_0^L |\varkappa(s)| \, ds \geq \left| \int_0^L \varkappa(s) \, ds \right| = 2\pi,$$

la dernière égalité découlant de l'Hopft Umlaufsatz. Supposons que la courbure algébrique garde un signe constant. Alors l'inégalité dans la formule ci-dessus est une égalité.

Réciproquement, s'il y a égalité, alors la courbure algébrique garde un signe constant.

Montrons l'équivalence entre **A** et **C**. D'après le point 2 de l'exercice II.6.15, si  $C$  est convexe, la courbure algébrique garde un signe constant. Démontrons la réciproque par l'absurde. Supposons que  $\varkappa$  garde un signe constant mais qu'il existe  $p, q, r \in C$  tels que  $q$  et  $r$  soient de part et d'autre de la tangente à  $C$  en  $p$  (strictement).

Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de  $C$  (périodique, de période  $L$ ) par la longueur de l'arc. Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha(t_0) = p$ . Posons comme dans l'exercice II.6.15,  $\vec{n} = \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t_0))$ , et

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{n} \rangle.$$

Alors  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$  et  $f''(t_0) = \varkappa(t_0)$ . L'hypothèse est donc ici que la fonction  $f$  prend des valeurs strictement positives et strictement négatives. Comme l'arc est périodique, le

maximum et le minimum de  $f$  sont atteints, disons respectivement en  $t_1, t_2 \in [0; L[$ . On a en ces points  $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$ . Comme  $f'(t) = \langle \alpha'(t), \vec{n} \rangle$ , les vecteurs  $\alpha'(t_0)$ ,  $\alpha'(t_1)$  et  $\alpha'(t_2)$  sont tous trois orthogonaux à  $\vec{n}$ , et comme ils sont de plus de norme 1, ils sont égaux au signe près, et deux d'entre eux sont égaux. Il existe donc  $s_0 < s_1 \in [0; L[$  tels que  $\alpha'(s_0) = \alpha'(s_1)$ . D'autre part, les tangentes à  $C$  en  $s_0$  et  $s_1$  sont parallèles mais non confondues. Soit  $\tilde{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $\vec{T} = \alpha'$  comme dans la section II.6.1. D'après (II.6.1), on a  $\varkappa(t) = \tilde{T}'(t)$ , et donc par hypothèse  $\tilde{T}'$  garde un signe constant (disons positif, quitte à changer l'orientation de  $C$ ), et  $\tilde{T}$  est croissante. D'après le Hopft Umlaufsatz, l'enroulement de  $C$  est  $2\pi$  et ainsi d'après le théorème II.6.4,  $\tilde{T}(L) - \tilde{T}(0) = 2\pi$ . Comme la projection  $p$  de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{S}^1$  est injective sur l'intervalle  $[\tilde{T}(0); \tilde{T}(L)[$  (de longueur  $2\pi$ ),  $\tilde{T}(s_0) = \tilde{T}(s_1)$  implique que  $\tilde{T}(s_0) = \tilde{T}(s_1)$ . Comme  $\tilde{T}$  est croissante,  $t \mapsto \tilde{T}(t)$  est constante sur le segment  $[s_0; s_1]$ , et il en est de même de  $t \mapsto \vec{T}(t)$ . On a donc  $\alpha(s_1) = \alpha(s_0) + (s_1 - s_0)\alpha'(s_0)$ , or ceci implique que les tangentes en  $s_0$  et  $s_1$  coïncident. Nous sommes donc parvenu à une contradiction.

Montrons que **C** est équivalent à **B**. Pour tout  $p \in C$ , notons  $H_p$  le demi-plan fermé délimité par la tangente en  $p$  et contenant  $C$ . Alors  $\overline{\Omega} \subset H_p$ . En effet, si tel n'est pas le cas, il existe  $y \in \Omega$  tel que  $y \notin H_p$ . Soit  $D$  la demi-droite d'origine  $p$  et passant par  $y$ . En dehors de  $p$ , cette demi-droite est contenue dans le demi-espace ouvert complémentaire de  $H_p$ . Parcourons cette demi-droite en partant de  $y$  et en s'éloignant de  $p$ . Comme  $\overline{\Omega}$  est compact, on finit par en sortir, et pour cela, il faut passer par sa frontière  $\partial\Omega = C$ . Mais ceci contredit le fait que  $C$  est dans  $H_p$ . Ceci étant valide pour tout  $p \in C$ , on a  $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{p \in C} H_p$ . En fait, il y a égalité de ces ensembles. En effet, supposons que  $x \in \bigcup_{p \in C} H_p$ , mais  $x \notin \overline{\Omega}$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  réalisant le minimum de la fonction périodique de classe  $\mathcal{C}^1$   $t \mapsto d(t) = \|\alpha'(t) - x\|^2$ , et soit  $p = \alpha(t_0)$ . On a  $d'(t_0) = 2\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) - x \rangle = 0$  et donc  $\alpha'(t_0)$  est orthogonale à  $\alpha(t_0) - x = p - x$ . Par hypothèse,  $x$  est contenu dans le demi-plan fermé  $H_p$ . Ce demi-plan contient  $\Omega$  d'après ce qui précède. Il existe donc des points du segment ouvert joignant  $p$  à  $x$  qui sont dans  $\Omega$ . Soit  $y$  l'un de ces points. Un des points du segment entre  $y$  et  $x$  est sur la frontière  $\partial\Omega = C$ , mais ce point est strictement plus proche de  $x$  que  $p$ , ce qui est impossible.

Nous avons donc montré que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{p \in C} H_p$$

ce qui montre la convexité de  $\overline{\Omega}$  comme intersection d'ensembles convexes.

Pour la réciproque (**B** implique **C**), contentons nous de remarquer que la démonstration est similaire à celle du fait bien connu que le graphe d'une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  est au-dessus de la tangente à ce graphe en tout point.

Ceci termine la démonstration du théorème.  $\square$

**Exercice II.6.19.** Soit  $C$  un arc géométrique orienté périodique simple du plan. Montrer que chacune des propriétés suivantes implique la suivante.

**A'**. La courbure algébrique de  $C$  garde un signe constant (au sens strict).

**B'**. Si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un paramétrage par la longueur de l'arc périodique de période  $L$  de  $C$ , alors le champ de vecteurs normaux unitaires

$$\vec{n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(t))$$

est une application  $L$ -périodique injective sur  $[0; L[$ .

**C'**. La courbure algébrique de  $C$  garde un signe constant (au sens large).

### II.6.7 Théorème de Fenchel et Fáry-Milnor

Comme nous l'avons remarqué plus haut, la courbure totale est définie pour un arc géométrique périodique de  $\mathbb{R}^N$  et pas simplement pour les arcs du plan.

#### **Théorème II.6.20** (Théorème de Fenchel).

Soit  $C$  un arc géométrique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un paramétrage par la longueur de l'arc de  $C$  de période  $L > 0$ . Alors

$$\int_0^L \kappa(s) ds \geq 2\pi.$$

De plus, la courbure totale de  $C$  est égale à  $2\pi$  si et seulement si  $C$  est plan et convexe.

Nous démontrerons dans le chapitre VI (théorème VI.4.3) un analogue partiel de ce théorème pour les surfaces, dont la démonstration s'adapte au cas des courbes planes. Nous laissons les détails de ceci au lecteur.

Nous allons préciser le théorème de Fenchel en énonçant (sans démonstration) le théorème de Fary-Milnor. Pour cela, définissons le fait pour un arc géométrique périodique de  $\mathbb{R}^3$  d'avoir une trace nouée (ou dénouée).

#### **Définition II.6.21.**

Soit  $C$  un arc géométrique périodique simple de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{C}$  sa trace. On dit que  $\mathcal{C}$  est **dénouée** s'il existe une homotopie

$$h : [0; 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

telle que

$$h(\{0\} \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1, \quad h(\{1\} \times \mathbb{S}^1) = \mathcal{C},$$

et pour tout  $u \in [0; 1]$ ,

$$h(\{u\} \times \mathbb{S}^1) = \mathcal{C}_u \subset \mathbb{R}^3$$

est la trace d'un arc géométrique périodique simple de  $\mathbb{R}^3$ . On appelle une telle homotopie une isotopie. Lorsque  $\mathcal{C}$  n'est pas dénouée, on dit qu'elle est nouée.

#### **Théorème II.6.22** (Fáry-Milnor).

Soit  $C$  un arc géométrique périodique simple de  $\mathbb{R}^3$  dont la trace est nouée. Sa courbure totale est alors au moins égale à  $4\pi$ .

Pour une démonstration, nous renvoyons le lecteur à [4] ou [6].

## II.7 Exercices

**Exercice II.7.1.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe paramétrée et soient  $a < b \in I$ . Montrer que

$$L_a^b = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\|.$$

**Exercice II.7.2.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré, et soient  $a < b \in I$  tels que  $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ . Montrer qu'il existe  $t_0 \in ]a; b[$  tel que  $\alpha(b) - \alpha(a)$  est colinéaire à  $\alpha'(t_0)$ .

**Exercice II.7.3.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré, et soit  $D$  une droite de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $t \mapsto d(\alpha(t), D)$  atteint son minimum en  $t_0 \in I$  et que  $\alpha(t_0) \notin D$ . Montrer que la tangente à  $\alpha$  en  $t_0$  est parallèle à  $D$ .

**Exercice II.7.4.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des arcs paramétrés dans  $\mathbb{R}^2$  définis sur des intervalles ouverts contenant 0. Supposons que  $\alpha(0) = \beta(0) = p$  et que  $\alpha'(0) = \beta'(0)$ . On dit que  $\alpha$  est au dessus de  $\beta$  sur un voisinage  $J$  de 0 si pour tout  $t \in J$ ,

$$\langle \alpha(t) - p, \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}_\alpha(0)) \rangle \geq \langle \beta(t) - p, \rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}_\beta(0)) \rangle.$$

Montrer que si  $\alpha$  est au dessus de  $\beta$  sur  $J$ , alors  $\kappa_\alpha(0) \geq \kappa_\beta(0)$ . Réciproquement, montrer que si  $\kappa_\alpha(0) > \kappa_\beta(0)$ , alors  $\alpha$  est au dessus de  $\beta$  au voisinage de 0.

**Exercice II.7.5.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un arc paramétré par la longueur de l'arc birégulier tel que pour tout  $t \in I$ ,  $\kappa'(t) \neq 0$ ,  $\tau(t) \neq 0$ . Montrer que la trace de  $\alpha$  est contenue dans une sphère de rayon  $r$  si et seulement si

$$\frac{1}{\kappa(t)^2} + \frac{\kappa'(t)^2}{\kappa(t)^4} \tau(t)^2 = r^2.$$

**Exercice II.7.6** (Forme locale canonique). Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un arc paramétré par la longueur de l'arc birégulier. Soit  $t_0 \in I$ . Montrer que

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \left(t - \frac{\kappa(t_0)^2 t^3}{3!}\right) \vec{T}(t_0) + \left(\frac{t^2 \kappa(t_0)}{2} + \frac{\kappa'(t_0) t^3}{3!}\right) \vec{N}(t_0) - \frac{t^3 \kappa(t_0) \tau(t_0)}{3!} \vec{B}(t_0) + o(t^3).$$

En déduire que si  $t_0 = 0$ ,  $\vec{T}(t_0) = e_1$ ,  $\vec{N}(t_0) = e_2$ ,  $\vec{B}(t_0) = e_3$ , et  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , alors

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \frac{\kappa^2(0)}{6} t^3 + o(t^3), \\ y(t) &= \frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} t^3 + o(t^3), \\ z(t) &= -\frac{\kappa(0) \tau(0)}{6} t^3 + o(t^3). \end{aligned}$$

**Exercice II.7.7.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$ . On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $\|f(x) - g(x)\| < 2$ , c'est-à-dire que  $(f(x), g(x))$  n'est jamais un couple de point antipodaux. Montrer que  $f$  et  $g$  sont homotopes. En déduire que  $f$  et  $g$  ont même degré.

**Exercice II.7.8.** Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Montrer que si  $\deg f$  est impair, alors il existe  $x \in \mathbb{S}^1$  tel que  $f(-x) = -f(x)$ .

## II.8 Appendice : déplacements du plan et de l'espace

Notons  $E$  l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^N$ . Un **déplacement**  $f$  de  $E$  est une application de  $E$  dans  $E$  qui préserve la distance euclidienne, c'est-à-dire

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad (x, y \in E).$$

Notons  $f_0 : E \rightarrow E$ ,  $f_0(x) = f(x) - f(0)$ . On a alors

$$\|f_0(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = \|x\|.$$

Ainsi,  $f_0$  préserve la norme euclidienne, et donc par la formule de polarisation, le produit scalaire. Il s'ensuit facilement que  $f_0$  est linéaire. Appelons isométrie linéaire une application linéaire de  $E$  dans  $E$  préservant la norme euclidienne. Un déplacement  $f$  de  $E$  est donc la composée d'une isométrie linéaire et d'une translation.

Si l'application linéaire  $f_0$  est de déterminant 1, on dit alors que  $f$  est un **déplacement direct** de  $E$ .

Pour  $N = 2$ ; les déplacements directs sont composés d'une rotation et d'une translation. Pour  $N = 3$ , les déplacements directs sont composés d'une rotation autour d'un axe et d'une translation.

Les isométries linéaires (resp. isométries linéaires directes) sont représentées dans la base canonique (plus généralement dans toute base orthonormale (resp. toute base orthonormale directe) par une matrice de  $\mathbf{O}(N)$  (resp. de  $SO(N)$ ). Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormales (resp. deux bases orthonormales directes) de  $E$ . Alors il existe un unique isométrie linéaire (resp. isométrie linéaire directe) envoyant  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{B}'$ .



# Chapitre III

## Orientation. Théorèmes de séparation

Dans ce chapitre, nous allons établir des résultats globaux concernant la géométrie des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ . La première notion à laquelle nous allons nous intéresser est celle d'**orientabilité** d'une surface. Une surface est **orientable** si elle admet un champ de vecteurs normaux unitaires, ou de manière équivalente, si elle admet un recouvrement par des paramétrages locaux de telle sorte que les changements de paramétrages sur les intersections des domaines des cartes soient de déterminant jacobien strictement positif. Les surfaces définies par un seul paramétrage, ou bien comme graphe, ou bien comme ensemble de solutions d'équations sont orientables. Toutes les surfaces ne le sont pas, un contre-exemple étant donné par le ruban de Möbius.

Ensuite, nous introduirons la notion de **transversalité** entre deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$ , et nous étudierons plus particulièrement le cas de deux surfaces, ou bien d'une courbe et d'une surface, dans  $\mathbb{R}^3$ . Une intersection entre deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$  est transverse si la somme des espaces tangents à ces sous-variétés en un point de leur intersection est l'espace  $\mathbb{R}^N$  tout entier. L'idée importante, qui découle du théorème de Sard, est que génériquement, une intersection entre courbe et surface, ou bien entre deux courbes, est transverse. Génériquement, ceci signifie intuitivement que si une intersection n'est pas transverse, elle le devient après une petite déformation. Le théorème de Sard permet de formaliser cette idée.

Comme application de la transversalité, nous démontrerons le théorème de séparation de Jordan-Brouwer. Il est l'analogue en dimension 3 du théorème de séparation de Jordan en dimension 2 (théorème II.6.5). Il affirme qu'une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  sépare l'espace en deux domaines, un domaine intérieur, borné, et un domaine extérieur, non borné. La démonstration, bien qu'assez technique dans les détails, est naturelle. Elle s'adapte sans difficulté à la dimension inférieure pour fournir une démonstration du théorème de Jordan II.6.5. Une conséquence importante de ce résultat est le théorème de Brouwer-Samelson : une surface compacte est orientable.

**Notations et conventions.** Dans ce chapitre et les suivants, nous ne précisons plus les classes de régularité des sous-variétés et des applications entre sous-variétés. Nous parlerons simplement de sous-variétés et d'applications différentiables, le lecteur pouvant choisir soit de les supposer de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , soit de s'assurer la validité des énoncés pour une certaine classe de régularité (au minimum  $\mathcal{C}^1$ ).

Nous utiliserons souvent les notations suivantes. Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow$

$\mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{U}$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $q = (u, v)$  la variable dans  $\mathcal{U}$ , de sorte qu'en un point  $p = \mathbf{x}(q) = \mathbf{x}(u, v)$ , les vecteurs

$$\mathbf{x}_u(q) = d\mathbf{x}_q(1, 0), \quad \mathbf{x}_v(q) = d\mathbf{x}_q(0, 1)$$

forment une base du plan tangent  $T_p\mathcal{S}$ .

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne standard. Courbes et surfaces sont synonymes de sous-variétés de dimension 1 et 2 respectivement.

### III.1 Orientation de $\mathbb{R}^N$

Une orientation de  $\mathbb{R}^N$  est une classe d'équivalence pour une certaine relation sur l'ensemble des bases de  $\mathbb{R}^N$ , relation que nous décrivons maintenant. Notons  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})^+$  le sous-groupe de  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$  des matrices ayant un déterminant strictement positif. Fixons deux bases de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe un unique élément dans  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$  qui envoie la première sur la seconde. Introduisons sur l'ensemble des bases de  $\mathbb{R}^N$  la relation d'équivalence  $\sim$  où deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  vérifient

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$$

si et seulement si l'unique élément de  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$  qui envoie  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{B}'$  est dans  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})^+$ .

On vérifie facilement que c'est bien une relation d'équivalence car le déterminant est un morphisme de groupes et que cette relation partitionne l'ensemble des bases de  $\mathbb{R}^N$  en deux classes d'équivalence,

#### Définition III.1.1.

On appelle une orientation de  $\mathbb{R}^N$  le choix d'une des deux classes d'équivalence de la relation  $\sim$ .

#### Remarques III.1.2.

1. On peut de même définir l'orientation de tout espace vectoriel réel de dimension finie  $V$ .
2. Dans le cas de  $\mathbb{R}^N$ , on peut profiter de l'existence d'une base canonique pour privilégier une des deux orientations. Une base dans la classe d'équivalence de la base canonique est dite **directe**.
3. La possibilité de définir une orientation de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^N$  est due au fait topologique suivant :  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$  possède deux composantes connexes, distinguées par le déterminant. En effet, considérons

$$\det : \mathbf{GL}(N, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

C'est une application polynomiale en les coefficients des matrices, donc continue. L'image est contenue dans  $\mathbb{R}^\times$  puisque les matrices inversibles sont celles qui ont un déterminant non nul, et il est facile de voir en considérant des matrices diagonales que cette image est exactement  $\mathbb{R}^\times$ . Comme  $\mathbb{R}^\times$  possède deux composantes connexes, la continuité du déterminant implique que  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$  en a au moins deux, l'une dans  $\det^{-1}(\mathbb{R}_+)$  et l'autre dans  $\det^{-1}(\mathbb{R}_-)$ . En fait, si l'on pose  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})^+ = \det^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})^- = \det^{-1}(\mathbb{R}_-)$ , on peut montrer (en utilisant la décomposition polaire des matrices) que ce sont les composantes connexes de  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$ .

4. On ne peut pas définir d'orientation pour un espace vectoriel de dimension finie complexe :  $\mathbb{C}^\times$  et  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$  sont connexes.

### III.1.1 Produit vectoriel

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne standard.

#### Proposition III.1.3.

L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  est muni d'une unique application bilinéaire, antisymétrique, notée  $\wedge$  :

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

vérifiant, quels que soient  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z).$$

Démonstration. Fixons  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . L'application

$$z \mapsto \det(x, y, z)$$

est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un unique vecteur, noté  $x \wedge y$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$

$$\det(x, y, z) = \langle x \wedge y, z \rangle.$$

Les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie découlent directement des propriétés du déterminant.  $\square$

**Exercice III.1.4.** Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $x \wedge y$  est orthogonal au plan engendré par  $x$  et  $y$ , que

$$\|x \wedge y\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix},$$

et que si  $x$  et  $y$  ne sont pas liés,  $(x, y, x \wedge y)$  est une base directe de  $\mathbb{R}^3$ .

## III.2 Champs de vecteurs normaux. Orientation

En chaque point d'une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'espace tangent de dimension 2 admet un supplémentaire orthogonal (pour le produit scalaire ambiant) de dimension 1, donc une droite. Cette droite porte deux vecteurs de norme 1. Nous allons chercher à associer à chaque point de la surface un de ces vecteurs normaux unitaires, ceci de manière à définir une application différentiable.

**Définition III.2.1.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Un champ de vecteurs normaux sur  $\mathcal{S}$  est une application différentiable  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle qu'en chaque point  $p \in \mathcal{S}$ , le vecteur  $N(p)$  soit orthogonal au plan tangent  $T_p\mathcal{S}$ . Si de plus, en chaque point, la norme de  $N(p)$  est 1, on dit que  $N$  est un champ de vecteurs normaux unitaires.

Localement, un tel champ de vecteurs existe toujours.

**Lemme III.2.2.**

Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ . Alors il existe un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ .

Démonstration. Posons, pour tout  $p = \mathbf{x}(q) \in \mathcal{S}$ ,

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)}{\|\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)\|}.$$

Il est clair que ceci définit une application différentiable de  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle qu'en chaque point  $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$ , le vecteur  $N(p)$  est orthogonal à  $T_p\mathcal{S}$  et de norme 1. L'application  $N$  vérifie alors les propriétés voulues.  $\square$

**Définition III.2.3.**

Une surface  $\mathcal{S}$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  est dite **orientable** s'il existe un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}$ . Le choix d'un tel champ s'appelle une **orientation** de  $\mathcal{S}$ .

**Remarque III.2.4.** Il est clair que si  $N$  est un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}$ ,  $-N$  en est un autre, et que si  $\mathcal{S}$  est connexe,  $N$  et  $-N$  sont les seuls champs de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}$ . En effet, soient  $N$  et  $N_1$  deux tels champs de vecteurs. Soient

$$A = \{p \in \mathcal{S}; N(p) = N_1(p)\}, \quad B = \{p \in \mathcal{S}; N(p) = -N_1(p)\}.$$

On a  $A \cup B = \mathcal{S}$ , et d'autre part,  $A$  et  $B$  sont fermés par continuité de  $N$  et  $N_1$ . Ils sont donc aussi ouverts dans  $\mathcal{S}$ , leur complémentaire étant fermé. Si  $\mathcal{S}$  est connexe, ou bien  $\mathcal{S} = A$ , ou bien  $\mathcal{S} = B$ .

Une surface connexe orientable admet donc exactement deux orientations. Lorsque le choix du champ de vecteurs normaux unitaires est fait, nous dirons que la surface est **orientée**. Ainsi, lorsque nous dirons par exemple « Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée ... » ceci suppose qu'un champ de vecteurs normaux unitaires est choisi sur  $\mathcal{S}$  et celui-ci sera toujours noté  $N$ .

**Proposition III.2.5.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathcal{S}$  est orientable si et seulement s'il existe un recouvrement de  $\mathcal{S}$  par des paramétrages locaux  $\mathbf{x}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \mathbf{x}_i(\mathcal{U}_i)$$

tels que sur toute intersection  $\mathcal{W}_{ij} = \mathbf{x}_i(\mathcal{U}_i) \cap \mathbf{x}_j(\mathcal{U}_j)$ , le changement de paramétrage :

$$\mathbf{x}_i^{-1} \circ \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_j^{-1}(\mathcal{W}_{ij}) \longrightarrow \mathcal{U}_i$$

ait un déterminant jacobien strictement positif.

**Remarque III.2.6.** La proposition ci-dessus donne une définition équivalente de l'orientabilité d'une surface de  $\mathbb{R}^3$  qui a l'avantage d'être généralisable immédiatement aux sous-variétés de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$ . La définition utilisant les champs de vecteurs normaux, elle en revanche, ne se généralise qu'aux hypersurfaces de  $\mathbb{R}^N$  (c'est-à-dire aux sous-variétés de codimension 1). Elle a néanmoins l'avantage d'être plus « visuelle » et permet d'introduire directement l'application de Gauss (voir chapitre suivant)

Nous laissons au lecteur la démonstration de cette proposition, sous la forme de l'exercice suivant.

**Exercice III.2.7.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}$$

deux paramétrages locaux de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{W} = \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1) \cap \mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)$ , et

$$\theta = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_2^{-1}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{U}_1$$

le changement de paramétrage entre  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ .

Montrer que pour tout  $p \in \mathcal{W}$ ,

$$(\mathbf{x}_2)_u(\mathbf{x}_2^{-1}(p)) \wedge (\mathbf{x}_2)_v(\mathbf{x}_2^{-1}(p)) = \text{Jac}(\theta)(\mathbf{x}_2^{-1}(p)) \left( (\mathbf{x}_1)_u(\mathbf{x}_1^{-1}(p)) \wedge (\mathbf{x}_1)_v(\mathbf{x}_1^{-1}(p)) \right).$$

En déduire une démonstration de la proposition.

**Exemple III.2.8.** Comme corollaire du lemme III.2.2, on obtient le fait que les plans affines sont orientables. Si  $P$  est le plan défini par  $P = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, a \rangle = 0\}$  (le plan passant par  $p_0$  et orthogonal au vecteur  $a$  de norme 1), alors

$$T_p P = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, a \rangle = 0\}$$

et donc  $N : P \rightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto a$  est un champ de vecteurs normaux unitaires à  $P$ .

**Exemple III.2.9.** Comme autre corollaire du lemme III.2.2, on voit que les surfaces définies par des graphes sont orientables. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Un paramétrage global de son graphe  $\mathcal{S}$  est donné par

$$\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$$

et donc, en posant  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ , le champ de vecteurs

$$N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto N(p) = \frac{\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)}{\|\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} = \frac{(-f_u(q), -f_v(q), 1)}{\|(-f_u(q), -f_v(q), 1)\|},$$

est un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}$ .

**Exemple III.2.10.** Les sphères sont orientables. Soit  $\mathbb{S}(p_0, r)$  la sphère de centre  $p_0$  et de rayon  $r$ . Le champ de vecteurs  $N : \mathbb{S}(p_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^3; p \mapsto \frac{1}{r}(p - p_0)$  est un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathbb{S}(p_0, r)$ . Nous verrons plus tard qu'il est d'usage de choisir l'autre orientation, c'est-à-dire celle dont les vecteurs pointent vers l'intérieur de la sphère.

**Exemple III.2.11.** Les surfaces définies par des équations sont orientables. Soient  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable et  $a$  une valeur régulière de  $f$  et  $\mathcal{S} = f^{-1}(\{a\})$  la surface définie par  $f$  et  $a$ . En chaque point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$  est

$$T_p\mathcal{S} = \ker df_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \nabla f(p), v \rangle = 0\}$$

où  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq 0$  et donc  $p \mapsto \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$  est un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}$ .

Toutes les surfaces ne sont pas orientables, comme le montre l'exemple célèbre suivant.

**Exemple III.2.12** (Ruban de Moebius). Soit  $C$  le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 2 du plan  $\mathbb{R}^2$ , vu comme le plan d'équation  $z = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $p_0 = (0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  et  $L$  le segment

$$L = \{\ell \in \mathbb{R}^3 \mid \ell = p_0 + te_3, t \in ]-1; 1[ \}.$$

Le ruban de Moebius est la surface  $\mathcal{S}$  obtenue comme la réunion des segments construits en faisant glisser le centre de  $L$  le long de  $C$ , tout en faisant pivoter  $L$ , de sorte que lorsqu'on revient au point de départ,  $L$  ait effectué un demi-tour. Paramétrons cette surface. Le centre du segment  $L(t)$  est

$$c(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 0).$$

En  $t$ , le segment  $L(t)$  a effectué une rotation d'angle  $t/2$ , c'est-à-dire que le vecteur  $d(t)$  donnant la direction de  $L(t)$  est obtenu en appliquant à la direction d'origine  $e_3$  une rotation d'axe  $e_2$  et d'angle  $t/2$  suivie d'une rotation d'axe  $e_3$  et d'angle  $t$ , ou de manière plus explicite :

$$d(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t/2 & -\sin t/2 \\ 0 & \sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \sin t/2 \\ -\cos t \sin t/2 \\ \cos t/2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{c(t) + sd(t) \mid t \in \mathbb{R}, s \in ]-1; 1[ \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \sin t - s \sin t \sin t/2 \\ 2 \cos t - s \cos t \sin t/2 \\ s \cos t/2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, s \in ]-1; 1[ \right\}.\end{aligned}$$

Soit

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (2 \sin u - v \sin u \sin u/2, 2 \cos u - v \cos u \sin u/2, v \cos u/2)$$

C'est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Elle est périodique de période  $4\pi$  en la variable  $u$  et  $F(u + 2\pi, v) = F(u, -v)$ . De plus  $F(\mathbb{R} \times ]-1, 1[) = F([0, 4\pi[ \times ]-1; 1[) = \mathcal{S}$ .

Etudions maintenant l'injectivité de  $F$  sur  $\mathbb{R} \times ]-1, 1[$ . Supposons

$$\begin{pmatrix} 2 \sin t - s \sin t \sin t/2 \\ 2 \cos t - s \cos t \sin t/2 \\ s \cos t/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t' - s' \sin t' \sin t'/2 \\ 2 \cos t' - s' \cos t' \sin t'/2 \\ s' \cos t'/2 \end{pmatrix}.$$

En prenant le carré des deux premières égalités et en les sommant, on obtient

$$(2 - s \sin t/2)^2 = (2 - s' \sin t'/2)^2.$$

Comme  $|s \sin t/2| \leq 1$  et  $|s' \sin t'/2| \leq 1$  dans le domaine considéré, on en déduit

$$2 - s \sin t/2 = 2 - s' \sin t'/2 \text{ d'où } s \sin t/2 = s' \sin t'/2.$$

En élevant au carré et en sommant avec le carré de la troisième équation ci-dessus, on obtient

$$|s| = |s'|.$$

Supposons tout d'abord  $s = 0$ , d'où  $s' = 0$ . Alors  $\sin t = \sin t'$  et  $\cos t = \cos t'$ , d'où  $t = t' \pmod{2\pi}$ . Si  $s \neq 0$  et  $s' = s$ , on a  $\sin t/2 = \sin t'/2$  et  $\cos t/2 = \cos t'/2$ , d'où  $t/2 = t'/2 \pmod{2\pi}$ , ou encore  $t = t' \pmod{4\pi}$ . Si  $s \neq 0$  et  $s' = -s$ , on a  $\sin t/2 = -\sin t'/2$  et  $\cos t/2 = -\cos t'/2$ , d'où  $t/2 = t'/2 + \pi \pmod{2\pi}$ , ou encore  $t = t' + 2\pi \pmod{4\pi}$ . Pour résumer, on a

$$F(t, s) = F(t', s')$$

avec  $t, t' \in \mathbb{R}$  et  $s, s' \in ]-1, 1[$  si et seulement si

$$\begin{cases} s = s' = 0 \text{ et } t = t' \pmod{2\pi} \\ s = s' \text{ et } t = t' \pmod{4\pi} \\ s = -s' \text{ et } t = t' + 2\pi \pmod{4\pi}. \end{cases}$$

De ceci, on déduit que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{x}^{(a)} : ]a - \frac{\pi}{2}, a + \frac{\pi}{2}[ \times ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto F(a + u, v)$$

est différentiable, injective. La différentielle au point  $q = (u, v)$  est donnée par

$$\mathbf{x}_u^{(a)} = \begin{pmatrix} \cos(u + a) \left( 2 - v \sin\left(\frac{u + a}{2}\right) \right) - \frac{v}{2} \sin(u + a) \cos\left(\frac{u + a}{2}\right) \\ -\sin(u + a) \left( 2 - v \sin\left(\frac{u + a}{2}\right) \right) - \frac{v}{2} \cos(u + a) \cos\left(\frac{u + a}{2}\right) \\ -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u + a}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_v^{(a)} = \begin{pmatrix} -\sin(u+a) \sin\left(\frac{u+a}{2}\right) \\ -\cos(u+a) \sin\left(\frac{u+a}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{u+a}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbf{x}_u^{(a)} \wedge \mathbf{x}_v^{(a)} = \begin{pmatrix} \cos(u+a) \cos\left(\frac{u+a}{2}\right) \left(2 - v \sin\left(\frac{u+a}{2}\right)\right) - \frac{v}{2} \sin(u+a) \\ -\sin(u+a) \cos\left(\frac{u+a}{2}\right) \left(2 - v \sin\left(\frac{u+a}{2}\right)\right) - \frac{v}{2} \cos(u+a) \\ \sin\left(\frac{u+a}{2}\right) \left(v \sin\left(\frac{u+a}{2}\right) - 2\right) \end{pmatrix},$$

et

$$\|\mathbf{x}_u^{(a)} \wedge \mathbf{x}_v^{(a)}\|^2 = \left(2 - v \sin\left(\frac{u+a}{2}\right)\right)^2 + \frac{v^2}{4} > 0.$$

Ceci montre que  $d\mathbf{x}^{(a)}$  est partout injective. Pour montrer que  $\mathbf{x}^{(a)}$  est un paramétrage, il reste à voir que cette application réalise un isomorphisme entre son domaine et son image. Pour ceci, il suffit de remarquer que l'on peut prolonger  $\mathbf{x}^{(a)}$  par continuité au compact  $[a - \frac{\pi}{2}; a + \frac{\pi}{2}] \times [-1; 1]$  et que cela reste injectif. Comme une application continue injective sur un compact réalise un homéomorphisme entre son domaine et son image, le résultat voulu s'ensuit. Enfin, il est clair que  $\mathcal{S}$  est recouvert par les ouverts images des  $\mathbf{x}^{(a)}$ . Ceci montre que  $\mathcal{S}$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Par exemple, et nous nous en servirons ci-dessous, on peut recouvrir  $\mathcal{S}$  par les paramétrages  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(a_k)}$ , où  $a_k = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, \dots, 4$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{S}$  n'est pas orientable. En effet, supposons le contraire, et choisissons alors un champ de vecteurs normaux unitaires  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , de tel sorte qu'il coïncide avec le champ de vecteurs normaux unitaires donné par le paramétrage  $\mathbf{x}^{(0)}$  sur l'image de celui-ci. Comme les paramétrages  $\mathbf{x}^{(0)}$  et  $\mathbf{x}^{(1)}$  se chevauchent, et que les champs de vecteurs normaux unitaires qu'ils donnent coïncident sur leur intersection, le champ  $N$  coïncide aussi avec le champ donné par le paramétrage  $\mathbf{x}^{(1)}$ . En continuant ainsi de proche en proche, on voit que le champ  $N$  doit coïncider avec le champ de vecteurs normaux unitaires donné par le paramétrage  $\mathbf{x}^{(4)}$  sur l'image de celui-ci. Or cette image est aussi celle de  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Mais les formules explicites ci-dessus montrent que le champ de vecteurs normaux unitaires donné par le paramétrage  $\mathbf{x}^{(4)}$  est l'opposé de celui donné par  $\mathbf{x}^{(0)}$  (pour le voir, il suffit de regarder ce qui se passe en  $v = 0$ ). Nous obtenons donc la contradiction voulue, ce qui montre que le ruban de Moebius n'est pas orientable.

**Remarque III.2.13.** Nous montrerons plus loin (théorème III.4.12) que toute surface compacte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est orientable.

**Exercice III.2.14.** Montrer que si la surface connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est l'union de deux surfaces connexes orientables  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  telles que  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  est connexe, alors  $\mathcal{S}$  est orientable.

**Exercice III.2.15.** Supposons que la surface connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  soit l'union de deux surfaces connexes orientables  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  telles que  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  ait deux composantes connexes  $A$  et  $B$ , et que les orientations choisies sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  coïncident sur  $A$  et sont opposées sur  $B$ . Montrer que  $\mathcal{S}$  n'est pas orientable. Appliquer ceci au ruban de Moebius.



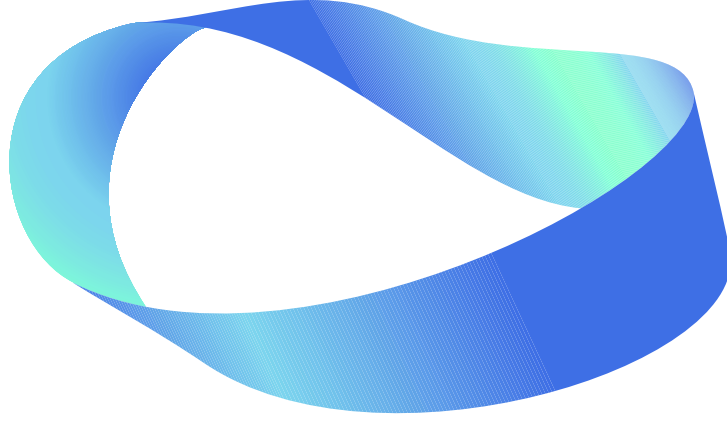


FIGURE III.1 – Ruban de Moebius

**Exercice III.2.16.** 1. Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  un difféomorphisme local entre deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Supposons que  $\mathcal{S}_2$  soit orientable. Soit  $N_2$  un champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}_2$ . Définissons une application  $N_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la manière suivante : si  $p \in \mathcal{S}_1$ , posons

$$N_1(p) = \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|}$$

où  $(a, b)$  est une base de  $T_p \mathcal{S}_1$  telle que

$$\det(df_p(a), df_p(b), N_2(f(p))) > 0.$$

Montrer que  $N_1$  est champ de vecteurs normaux unitaires sur  $\mathcal{S}_1$  et en déduire que  $\mathcal{S}_1$  est aussi orientable.

2. Montrer que si deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont difféomorphes, l'une est orientable si et seulement si l'autre l'est.

3. Si  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  est un difféomorphisme local, et si  $\mathcal{S}_1$  est orientable,  $\mathcal{S}_2$  l'est-elle aussi nécessairement ?

**Exercice III.2.17.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  par un champ de vecteurs normaux unitaires  $N$ . Soit  $p \in \mathcal{S}$ . On dit qu'une base  $(a, b)$  de  $T_p \mathcal{S}$  est positivement orientée si

$$\det(a, b, N(p)) > 0.$$

Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  un difféomorphisme local entre deux surfaces connexes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  orientée par  $N_1$  et  $N_2$ . On dit qu'il préserve l'orientation si la différentielle de  $f$  en tout point  $p \in \mathcal{S}_1$  envoie une base positivement orientée de  $T_p \mathcal{S}_1$  sur une base positivement orientée de  $T_p \mathcal{S}_2$ . On définit le déterminant jacobien de  $f$  par l'équation

$$\text{Jac}(f)(p) = \det(df_p(a), df_p(b), N_2(f(p))),$$

où  $(a, b)$  est une base orthonormale positivement orientée de  $T_p \mathcal{S}_1$ . Montrer que  $\text{Jac}(f)$  est bien défini et que  $f$  préserve l'orientation si et seulement si son déterminant jacobien est partout strictement positif.

**Exercice III.2.18.** Montrer que pour  $\mathbb{R}^2$ , vu comme sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , le choix d'une orientation (donc au sens de ce chapitre) est équivalent au choix d'une orientation au

sens de la section III.1. Plus généralement, montrer que pour une surface  $\mathcal{S}$ , le choix d'une orientation donne une orientation de chaque espace tangent au sens de la section III.1. Réciproquement, interpréter le choix d'une orientation de  $\mathcal{S}$  comme une collection d'orientations compatibles de ses espaces tangents.

**Exercice III.2.19.** Montrer qu'une sous-variété de dimension 1 est orientable.

### III.3 Transversalité

Dans cette section, nous allons définir la notion d'intersection transverse entre deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$ .

#### Définition III.3.1.

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$  de dimension respective  $m_1$  et  $m_2$  et soit  $p$  un point de leur intersection. On dit que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  **s'intersectent transversalement** en  $p$  si

$$T_p\mathcal{S}_1 + T_p\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^N.$$

On dit que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'intersectent transversalement si elles s'intersectent transversalement en tout point  $p \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ .

**Remarque III.3.2.** Si  $m_1 + m_2 < N$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'intersectent transversalement si et seulement si leur intersection est vide.

#### Proposition III.3.3.

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$  de dimension respective  $m_1$  et  $m_2$ . Si  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'intersectent transversalement en un point  $p$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{V}$$

soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $m_1 + m_2 - N$ .

Si  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'intersectent transversalement  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $m_1 + m_2 - N$ .

Démonstration. On sait qu'au voisinage de  $p$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  peuvent être décrites par des équations. Plus précisément, d'après la proposition I.4.6, il existe des voisinages ouverts  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et des applications différentiables

$$\Psi_1 : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-m_1} \quad \text{et} \quad \Psi_2 : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbb{R}^{N-m_2}$$

tels que

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{V}_1 = \Psi_1^{-1}(\{0\}), \quad \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{V}_2 = \Psi_2^{-1}(\{0\}).$$

D'autre part,  $\ker(d(\Psi_1)_p) = T_p\mathcal{S}_1$  et  $\ker(d(\Psi_2)_p) = T_p\mathcal{S}_2$  (cf. proposition I.8.13). On a donc

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) = \Psi^{-1}(\{0\}),$$

où

$$\Psi : (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \rightarrow \mathbb{R}^{N-m_1} \times \mathbb{R}^{N-m_2}, \quad \Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x)).$$

L'application  $\Psi$  est évidemment différentiable, et  $d\Psi_p = (d(\Psi_1)_p, d(\Psi_2)_p)$  est de noyau

$$\ker(d(\Psi_1)_p) \cap \ker(d(\Psi_2)_p) = T_p\mathcal{S}_1 \cap T_p\mathcal{S}_2.$$

Or comme par hypothèse  $T_p\mathcal{S}_1 + T_p\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^N$ , on a,

$$\begin{aligned} \dim(T_p\mathcal{S}_1 \cap T_p\mathcal{S}_2) + \dim(T_p\mathcal{S}_1 + T_p\mathcal{S}_2) &= \dim(T_p\mathcal{S}_1 \cap T_p\mathcal{S}_2) + N \\ &= \dim(T_p\mathcal{S}_1) + \dim(T_p\mathcal{S}_2) = m_1 + m_2, \end{aligned}$$

et donc le rang de  $d(\Psi)_p$  est égal à

$$N - \dim(\ker(d\Psi_p)) = N - ((m_1 + m_2) - N) = 2N - (m_1 + m_2).$$

Ainsi  $d\Psi_p$  est surjective. D'après la proposition I.4.1, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^N$  (contenu dans  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ ) tel que

$$\mathcal{V} \cap \Psi^{-1}(\{0\}) = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{V}$$

soit une sous-variété de dimension  $N - (2N - (m_1 + m_2)) = m_1 + m_2 - N$  de  $\mathbb{R}^N$ . La seconde assertion en découle immédiatement.  $\square$

Dans le cas des courbes et des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , on obtient donc le résultat suivant.

#### Corollaire III.3.4.

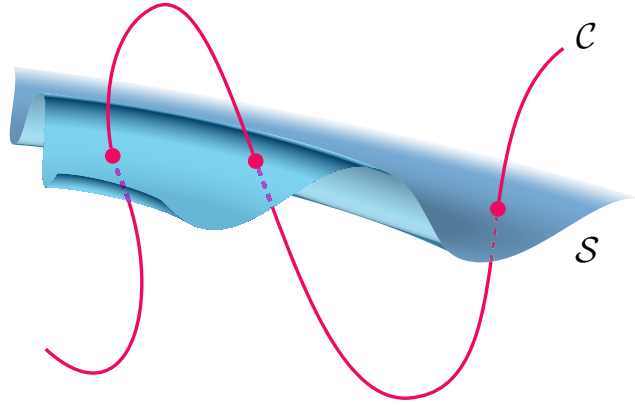
1. (Intersection de deux surfaces). Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux surfaces de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  s'intersectant transversalement. Alors  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  est soit vide, soit une sous-variété de dimension 1.
2. (Intersection d'une courbe et d'une surface). Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{C}$  une surface et une courbe de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  s'intersectant transversalement. Alors  $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$  est soit vide, soit une sous-variété de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble discret de points. Si  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{S}$  est compacte, c'est un ensemble fini.

## III.4 Le théorème de séparation de Jordan-Brouwer

### III.4.1 Séparation locale

#### Lemme III.4.1.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $p$  un point de  $\mathcal{S}$ . Il existe un voisinage ouvert connexe  $\mathcal{W}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$  soit connexe et  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{S}$  ait exactement deux composantes connexes, chacune ayant  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$  comme frontière dans  $\mathcal{W}$ .

FIGURE III.2 – Intersection transverse d'une surface et d'une courbe dans  $\mathbb{R}^3$ 

*Démonstration.* D'après la proposition I.5.1, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_1$  de 0 dans  $\mathbb{R}^3$  et un difféomorphisme  $\Phi$  entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}_1$  tel que  $\Phi(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \mathcal{W}$ . Soit  $B(\Phi(p), \epsilon)$  une boule ouverte dont le rayon est choisi de sorte qu'elle soit contenue dans  $\mathcal{V}_1$ . Le difféomorphisme  $\Phi$  nous ramène ainsi au cas de l'intersection d'un plan passant par un point et d'une boule ouverte centrée en ce point, pour lesquels le lemme est évident.  $\square$

#### Proposition III.4.2.

Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}$  une courbe s'intersectant transversalement dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$  est un ensemble discret de  $\mathbb{R}^3$  et au voisinage de chaque point  $p$  de  $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ , il existe des points de la courbe de chaque côté de la surface (les « côtés » étant définis par le lemme précédent).

*Démonstration.* La première assertion a déjà été démontrée dans le corollaire III.3.4. Les difféomorphismes entre ouverts de  $\mathbb{R}^3$  préservent la transversalité des sous-variétés. La démonstration du lemme de séparation locale ci-dessus montre alors qu'il suffit de considérer le cas où  $\mathcal{S}$  est le plan d'équation  $x_3 = 0$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$  un paramétrage local de  $\mathcal{C}$  en  $p$ , avec  $t_0 = \alpha^{-1}(p) \in I$ . Dans ce cas, les hypothèses de la proposition entraînent, en posant  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , que l'on a  $x_3(t_0) = 0$  et  $x'_3(t_0) \neq 0$ . Il existe alors un intervalle  $]t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon[ \subset I$  tel que  $x_3$  s'annule sur cet intervalle seulement en  $t = t_0$ , et  $x_3(t) > 0$  si  $t > t_0$ ,  $x_3(t) < 0$  si  $t < t_0$  dans le cas où  $x'_3(t_0) > 0$ , l'inverse dans le cas où  $x'_3(t_0) < 0$ .  $\square$

La proposition qui suit est un premier énoncé global du théorème de séparation.

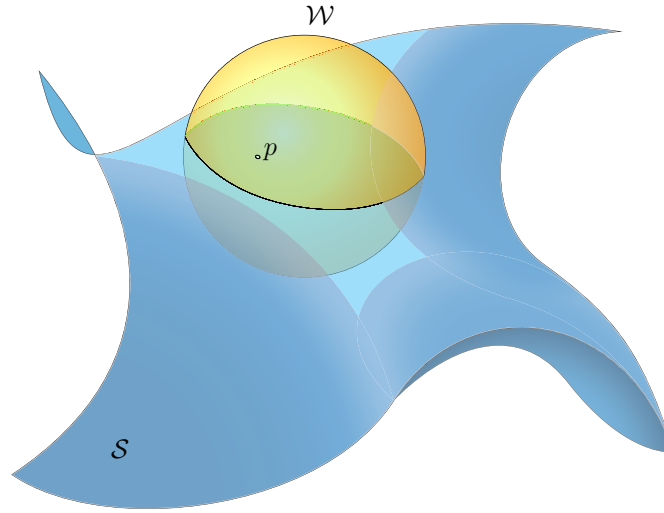


FIGURE III.3 – Séparation locale pour une surface

**Proposition III.4.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  possède au plus deux composantes connexes. La frontière de ces composantes connexes est  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{S}$  est fermée dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  est ouvert, et il en est de même de ses composantes connexes. Soit  $C$  l'une d'elle. Sa frontière  $\partial C = \bar{C} \setminus C$  est non vide, car sinon, on aurait  $\bar{C} = C$ , donc  $C$  ouvert et fermé dans  $\mathbb{R}^3$ , ce qui entraîne  $C = \mathbb{R}^3$ . Écrivons alors  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} = C \amalg C'$ , où  $C'$  est la réunion des autres composantes connexes de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ . Comme c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $C \cup \mathcal{S} = \mathbb{R}^3 \setminus C'$  est un fermé et donc  $\bar{C} \subset C \cup \mathcal{S}$ . Ceci montre que

$$\partial C = \bar{C} \setminus C \subset \mathcal{S}.$$

En particulier,  $\partial C$  est une partie non vide et fermée de  $\mathcal{S}$ . Montrons maintenant que c'est aussi une partie ouverte de  $\mathcal{S}$ . En effet, si  $p \in \partial C \subset \mathcal{S}$ , on utilise un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $p$  comme dans le lemme précédent, c'est-à-dire tel que  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{S}$  ait deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$  dont la frontière dans  $\mathcal{W}$  est  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$ . Comme  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont contenues dans des composantes connexes de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ . Chaque  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  est donc contenu dans  $C$ , ou bien ne rencontre pas  $C$ . Imaginons que  $C_i \cap C = \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ . On a donc  $C \cap \mathcal{W} = \emptyset$ , et donc  $p \notin \bar{C}$ . Ceci contredit le fait que  $p \in \partial C$ . Donc au moins l'un des  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  est contenu dans  $C$ , disons  $C_1$  pour fixer les notations. On a alors

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{S} = \partial C_1 \cap \mathcal{W} \subset \bar{C}_1 \subset \bar{C},$$

et donc  $\mathcal{W} \cap \mathcal{S} \subset \partial C$ . Ceci montre que  $p$  est intérieur à  $\partial C$ , et donc que  $\partial C$  est ouvert dans  $\mathcal{S}$ . Comme la surface  $\mathcal{S}$  est connexe, on a  $\partial C = \mathcal{S}$ . De plus, le raisonnement ci-dessus montre qu'une composante connexe  $C''$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , contient l'une des composantes connexes  $C_1$  ou  $C_2$  de  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{S}$  pour tout voisinage  $\mathcal{W}$  d'un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  comme dans le lemme précédent. Comme ces composantes connexes  $C''$  sont disjointes, il ne peut en avoir plus de deux.  $\square$

### III.4.2 Applications du théorème de Sard

Dans cette section, nous allons utiliser le théorème de Sard pour établir des résultats de transversalité qui entreront dans la démonstration du théorème de Jordan.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $p_0 \notin \mathcal{S}$  un point de  $\mathbb{R}^3$  extérieur à  $\mathcal{S}$ . Considérons l'application différentiable

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}.$$

Soit  $v \in T_p \mathcal{S}$  et choisissons une courbe paramétrée  $\alpha : ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow \mathcal{S}$ , telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v$ . Alors

$$(III.4.1) \quad df_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \frac{\alpha(t) - p_0}{\|\alpha(t) - p_0\|} \right) = \frac{1}{\|p - p_0\|} v - \frac{\langle p - p_0, v \rangle}{\|p - p_0\|^3} (p - p_0).$$

Si  $p - p_0 \in T_p \mathcal{S}$ , on a

$$df_p(p - p_0) = \frac{1}{\|p - p_0\|} (p - p_0) - \frac{\langle p - p_0, p - p_0 \rangle}{\|p - p_0\|^3} (p - p_0) = 0,$$

et donc  $p - p_0 \in \ker df_p$ . Réciproquement, si  $v \in T_p \mathcal{S}$  non nul est dans  $\ker df_p$ , l'équation (III.4.1) donne

$$p - p_0 = \frac{\|p - p_0\|^2}{\langle p - p_0, v \rangle} v$$

et donc  $p - p_0 \in T_p \mathcal{S}$ . Ainsi  $df_p$  a un noyau non trivial si et seulement si  $p - p_0 \in \ker df_p$ . Autrement dit  $df_p$  est un isomorphisme entre  $T_p \mathcal{S}$  et  $T_{f(p)} \mathbb{S}^2$  si et seulement si la droite passant par  $p$  et  $p_0$  est transverse à  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Une valeur  $a \in \mathbb{S}^2$  de  $f$  est régulière exactement lorsque la demi-droite  $\{p_0 + ta, t > 0\}$  coupe la surface  $\mathcal{S}$  transversalement. Le théorème de Sard I.8.43 et la proposition III.4.2 impliquent donc :

#### Lemme III.4.4.

Pour chaque point  $p_0 \notin \mathcal{S}$ , et pour chaque  $a \in \mathbb{S}^2$ , on peut trouver une demi-droite  $\{p_0 + tb, t \geq 0\}$ ,  $b \in \mathbb{S}^2$  aussi proche que l'on veut de  $a$ , qui intersecte  $\mathcal{S}$  transversalement. L'intersection de ces demi-droites et de  $\mathcal{S}$  est un ensemble discret, et donc fini si  $\mathcal{S}$  est compacte.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $P$  un plan affine de  $\mathbb{R}^3$  de vecteur normal unitaire  $a \in \mathbb{S}^2$ . La surface  $\mathcal{S}$  admet un recouvrement par un nombre dénombrable de paramétrages (cf. §I.6.1). Sur l'image de chacun d'eux, la surface est orientable et donne donc deux champs de vecteurs normaux unitaires, que l'on voit comme des applications différentiables à valeurs dans  $\mathbb{S}^2$ . D'après le théorème de Sard, il existe  $b \in \mathbb{S}^2$  aussi proche de  $a$  que l'on veut, qui est une valeur régulière pour toutes ces applications. Ceci signifie que tous les points de  $\mathcal{S}$  dont le plan tangent est perpendiculaire à  $b$  sont des points réguliers de ces applications différentiables. D'après le théorème d'inversion locale, ces points sont discrets dans  $\mathcal{S}$ . Ils sont donc en nombre dénombrable, et même fini si  $\mathcal{S}$  est compacte. En particulier, dans la famille de plans parallèles de vecteur normal  $b$ , on peut en trouver un  $P'$  aussi « proche » que l'on veut de  $P$  qui évite cet ensemble

dénombrable. En chaque point de l'intersection  $\mathcal{S} \cap P'$ , le plan tangent à  $\mathcal{S}$  n'est pas parallèle à  $P'$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{S}$  et  $P'$  s'intersectent transversalement. Nous avons donc montré le résultat suivant.

**Lemme III.4.5.**

Étant donné une surface  $\mathcal{S}$  et un plan affine  $P$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut trouver un plan affine  $P'$  aussi proche que l'on veut de  $P$ , qui intersecte  $\mathcal{S}$  transversalement.

Il reste à expliquer ce que signifie exactement pour deux plans affines de  $\mathbb{R}^3$  d'être proches ou de manière équivalente, ce que signifie pour une suite de plan affines  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^3$  de tendre vers un plan  $P$  fixé. On dit que  $P_n$  tends vers  $P$  si d'une part l'angle<sup>1</sup> entre les droites vectorielles orthogonales respectivement à  $P_n$  et  $P$  tends vers 0 (ce qui signifie que le plan vectoriel défini par  $P_n$  tend vers celui défini par  $P$ ), et d'autre part que la distance entre les projections orthogonales de l'origine respectivement sur  $P_n$  et  $P$  tend vers 0.

**Exercice III.4.6.** Munir l'ensemble des plans affines de  $\mathbb{R}^3$  d'une distance  $d$ , de sorte qu'une suite de plan affines  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^3$  tende vers un plan  $P$  fixé au sens ci-dessus si et seulement si  $d(P_n, P)$  tend vers 0.

Dans la suite, nous allons aussi avoir besoin d'une notion similaire pour les demi-droites de l'espace. L'ensemble des demi-droites (ouvertes) de  $\mathbb{R}^3$  s'identifie à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$  via l'application

$$(p, a) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \mapsto D = \{p + ta \mid t > 0\}.$$

On munit cet espace d'une distance, en posant

$$d(D_1, D_2) = \max(\|p_1 - p_2\|, \|a_1 - a_2\|),$$

lorsque  $D_1 = \{p_1 + ta_1 \mid t > 0\}$  et  $D = \{p_2 + ta_2 \mid t > 0\}$ .

**Proposition III.4.7.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $D$  une demi-droite dont l'origine  $p$  n'est pas dans  $\mathcal{S}$  et qui intersecte  $\mathcal{S}$  transversalement. Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour toute demi-droite  $D_1$  de  $\mathbb{R}^3$  dont l'origine n'est pas dans  $\mathcal{S}$  et vérifiant  $d(D, D_1) < \epsilon$ , alors  $\mathcal{S}$  et  $D_1$  s'intersectent transversalement, avec une intersection de même cardinal que celle de  $\mathcal{S}$  et de  $D$ .

Démonstration. La démonstration comporte plusieurs étapes. Posons  $\mathcal{S} \cap D = \{q_1, \dots, q_n\}$ .

**Étape 1.** Notons  $\bar{D}$  la droite prolongeant  $D$ . Posons  $\mathcal{S} \cap \bar{D} = \{q_1, \dots, q_m\}$ . Fixons  $i \in \{1, \dots, m\}$ . La demi-droite  $D$  étant en somme directe avec le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $q_i$ , on peut voir localement  $\mathcal{S}$  comme un graphe sur le plan affine  $\mathcal{P}$  passant par  $q_i$  et orthogonal à  $D$ . Plus précisément, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_i$  de  $q_i$  dans  $\mathcal{P}$  un voisinage

1. L'angle entre deux droites s'intersectant est un réel compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

$\mathcal{V}_i$  de  $q_i$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et une application différentiable  $f_i : \mathcal{W}_i \rightarrow \bar{D}$  tel que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_i$  soit exactement le graphe de  $f$ .

**Étape 2.** Il existe  $\eta > 0$  tel que les boules ouvertes  $B_i$  de centre  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , et de rayon  $\eta$  soient toutes disjointes. De plus, on peut choisir  $\eta$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $B_i \in \mathcal{V}_i$ , le voisinage de l'étape 1. La surface  $\mathcal{S}$  étant compacte, il existe  $R > 2\eta$  telle que  $\mathcal{S} \subset B(0, R - 2\eta)$ , de sorte que  $\mathcal{S} \cup \bigcup_{i=1, \dots, m} B_i \subset B(0, R)$ . Soit  $A = \{t \geq 0 ; p + at \in \bar{B}(0, R)\}$ . Comme  $\bar{B}(0, R)$  est convexe et compact,  $A$  est un intervalle compact. Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , posons  $I_i = \{t > 0 ; p + at \in B_i\}$ . Les  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont des intervalles ouverts et relativement compacts disjoints contenus dans  $A$ . Soit  $B$  le complémentaire dans  $A$  de l'union des  $I_i$ . C'est un compact. La fonction continue  $t \mapsto d(\mathcal{S}, p + at)$  atteint son minimum  $\delta$  sur ce compact, minimum qui est non nul, puisque si  $t \in B$ ,  $p + at$  n'est pas l'un des  $q_i$ .

**Étape 3.** Montrons que l'on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que si  $d(D, D_1) < \epsilon$ , alors pour tout  $t \notin \bigcup_{i=1, \dots, m} I_i$ ,  $p_1 + a_1 t \notin \mathcal{S}$ . Soit  $x \in \mathcal{S}$ . Alors, pour tout  $t \in B$ , on a

$$\begin{aligned} \|(p_1 + a_1 t) - x\| &\geq \|(p + at) - x\| - \|(p_1 + a_1 t) - (p + at)\| \\ &\geq \delta - (\|a_1 - a\| + t\|p_1 - p\|) \geq \delta - (1 + t)d(D, D_1) \\ &\geq \delta - (1 + M)d(D, D_1), \end{aligned}$$

où  $M$  est un majorant de  $A$ .

Si  $t \notin \bigcup_{i=1, \dots, m} I_i$ , et  $t \notin B$ , alors  $t \notin A$  et  $p + at \notin B(0, R)$ . On a alors pour tout  $x \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \|(p_1 + a_1 t) - x\| &\geq \|(p + at) - x\| - \|(p_1 + a_1 t) - (p + at)\| \\ &\geq \|p + at\| - \|x\| - \|(p_1 + a_1 t) - (p + at)\| \\ &\geq R + 2\eta - R - (1 + M)d(D, D_1) = 2\eta - (1 + M)d(D, D_1) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\epsilon < \min(\frac{\delta}{2+2M}, \frac{\eta}{2+2M})$ .

Dans la suite, on suppose que  $d(D, D_1) < \min(\frac{\delta}{2+2M}, \frac{\eta}{2+2M})$ , de sorte que l'intersection entre  $D_1$  et  $\mathcal{S}$  a lieu lorsque  $t$  est dans l'un des  $I_i$ .

**Étape 4.** On regarde maintenant ce qui se passe sur les intervalles  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . On fixe un indice  $i$ , que l'on oublie maintenant dans les notations ( $I_i = I$ ,  $B_i = B$ , etc.). Montrons que si  $\epsilon$  est suffisamment petit, alors si  $d(D, D_1) < \epsilon$ , l'intersection de  $\mathcal{S}$  et du segment  $\{p_1 + a_1 t ; t \in I_i\}$  consiste en exactement un point et est transverse.

Par un déplacement de l'espace, amenons le point  $q$  sur 0 et la demi-droite  $D$  sur  $D = \{(0, 0, -c) + t(0, 0, 1)\}$ , pour un certain  $c > 0$ . La surface  $\mathcal{S}$  est alors localement le graphe d'une fonction différentiable  $f : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{W}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant 0. L'intervalle  $I$  est de la forme  $]d; e[$ , contenant  $c$ . Posons  $p_1 = (x_1, x_2, x_3 - c)$  et  $a_1 = (g_1, g_2, 1 + g_3)$ . Nous voulons montrer que si  $x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3$  sont suffisamment petits, l'équation

$$(III.4.2) \quad f(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) = x_3 - c + (1 + g_3)t$$

admet une unique solution dans  $I$ . Tout d'abord,  $I$  étant relativement compact, il est clair par continuité que pour  $x_1, x_2, g_1, g_2$  suffisamment petits,

$$(*) \quad (x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) \in \mathcal{W}, \quad (\forall t \in I).$$

Posons

$$F(x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3, t) = f(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) - (x_3 - c + (1 + g_3)t).$$



C'est une fonction différentiable, vérifiant  $F(0, 0, 0, 0, 0, 0, c) = 0$  et

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3, t) = g_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) + g_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) - (1 + g_3).$$

Par continuité et compacité de  $I$ , si  $x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3$  sont suffisamment petits, ceci reste strictement positif sur  $I$ . Supposons cette condition (\*\*) réalisée dans la suite.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_0$  de 0 dans  $\mathbb{R}^6$  et un intervalle  $J_0$  contenu dans  $I$  tel que pour tout  $(x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{U}_0$ , l'équation (III.4.2) admette une unique solution dans  $J_0$ . Mais remarquons que grâce à la condition (\*\*), cette solution est l'unique solution de (III.4.2) dans  $I$ , la fonction

$$t \mapsto F(x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3, t)$$

étant strictement croissante.

Ainsi, on a montré qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que si  $D_1$  est la demi-droite

$$D_1 = \{(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t, x_3 - c + (1 + g_3)t); t > 0\},$$

et si  $d(D, D_1) < \epsilon$  alors l'intersection de  $D_1 \cap \mathcal{S} \cap B$  est un singleton. L'intersection est transverse car si

$$F(x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, g_3, t) = 0,$$

le plan tangent à la surface en  $(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t, x_3 - c + (1 + g_3)t)$  est d'après la proposition I.8.13 l'espace engendré par les vecteurs

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t)) \quad \text{et} \quad (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t)).$$

Si le vecteur directeur de  $D_1$ ,  $(g_1, g_2, 1 + g_3)$  est dans le plan engendré par ces vecteurs, alors en écrivant celui-là comme combinaison linéaire de ceux-ci, on obtient

$$g_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) + g_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + g_1 t, x_2 + g_2 t) = (1 + g_3)t.$$

Ceci contredit (\*\*) et montre que l'intersection entre  $\mathcal{S}$  et  $D_1$  est transverse en ce point.

### III.4.3 Le théorème de Jordan-Brouwer

#### **Théorème III.4.8 (Jordan-Brouwer).**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  possède exactement deux composantes connexes. Chacune d'elle admet  $\mathcal{S}$  comme frontière.

Démonstration. D'après la proposition III.4.3, il suffit de voir que  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  n'est pas connexe. Comme  $\mathcal{S}$  est compact, il résulte du lemme III.4.4 que de tout point  $p$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , il existe une demi-droite  $D$  d'origine  $p$  qui intersecte  $\mathcal{S}$  transversalement et  $\mathcal{S} \cap D$  est un ensemble fini. Soit  $\Omega_0$  (resp.  $\Omega_1$ ) l'ensemble des points  $p$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  tel qu'il existe une demi-droite  $D$  d'origine  $p$  qui intersecte  $\mathcal{S}$  transversalement en un nombre pair (resp. impair) de points. On a donc  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} = \Omega_0 \cup \Omega_1$ . D'autre part, d'après la proposition III.4.7,

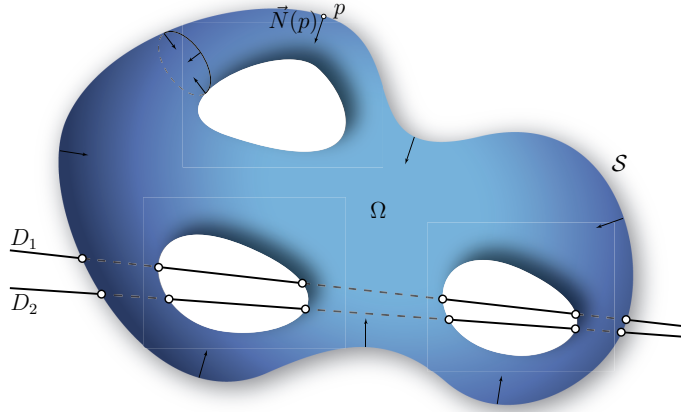


FIGURE III.4 – Stabilité d'une intersection transverse

les ensembles  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont ouverts. Il est clair que  $\Omega_0$  est non vide, car il existe des demi-droites n'intersectant pas  $\mathcal{S}$ . De même  $\Omega_1$  est non vide. En effet, si  $p \in \mathcal{S}$  est un point où une fonction hauteur par rapport à un plan affine fixé admet son minimum (voir exemple I.8.20), et donc en particulier un point critique, il existe une demi-droite sur la normale à  $\mathcal{S}$  en  $p$  qui intersecte  $\mathcal{S}$  uniquement en  $p$  (l'intersection est transverse, et on utilise la proposition III.4.2 et sa démonstration). Nous allons maintenant montrer que  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont disjoints. Si tel n'est pas le cas, il existe  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  et deux demi-droites  $D$  et  $D'$  d'origine  $p$  qui intersectent  $\mathcal{S}$  transversalement en un nombre respectivement pair et impair de points. Soit  $P$  le plan contenant  $D$  et  $D'$ . Soit  $P'$  un plan de  $\mathbb{R}^3$ , proche de  $P$ , et intersectant  $\mathcal{S}$  transversalement. L'existence d'un tel plan est assurée par le lemme III.4.5. D'après le corollaire III.3.4, l'intersection de  $\mathcal{S}$  et  $P'$  est une réunion disjointe de courbes fermées simples  $C$  compacte (donc chaque composante connexe de  $C$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ ). Grâce à la proposition III.4.7, on peut trouver dans  $P'$  deux demi-droites  $D_1$  et  $D'_1$  de même origine  $q$  qui intersectent  $\mathcal{S}$  transversalement en un nombre respectivement pair et impair de points. Ainsi  $(D_1 \cup D'_1) \cap \mathcal{S}$  est de cardinal impair. Mais  $(D_1 \cup D'_1) \cap \mathcal{S} = C \cap (D_1 \cup D'_1)$ . Ceci est en contradiction avec le lemme suivant.

**Lemme III.4.9.**

Soit  $\Gamma = D_1 \cup D_2$  l'union de deux demi-droites de  $\mathbb{R}^3$  de même origine  $p$ , et soit  $C$  une sous-variété de dimension 1 compacte dans le plan  $P$  déterminé par  $\Gamma$  qui ne contient pas  $p$  et intersecte  $D_1$  et  $D_2$  transversalement. Alors  $C \cap \Gamma$  possède un nombre pair de points.

*Démonstration.*  $\Gamma$  sépare le plan  $P$  en deux composantes connexes, disons  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . Par transversalité, chaque composante connexe  $C'$  de  $C$  intersecte  $\Gamma$  en un nombre fini de points, et en chaque point de cette intersection,  $C'$  passe de  $\mathcal{O}_1$  à  $\mathcal{O}_2$ . Lorsqu'on parcourt  $C'$ , on voit donc qu'il faut traverser  $\Gamma$  un nombre pair de fois. Ainsi  $C' \cap \Gamma$  est de cardinal pair, et il en est de même de  $C \cap \Gamma$ . □

Ceci conclut la démonstration du théorème. □

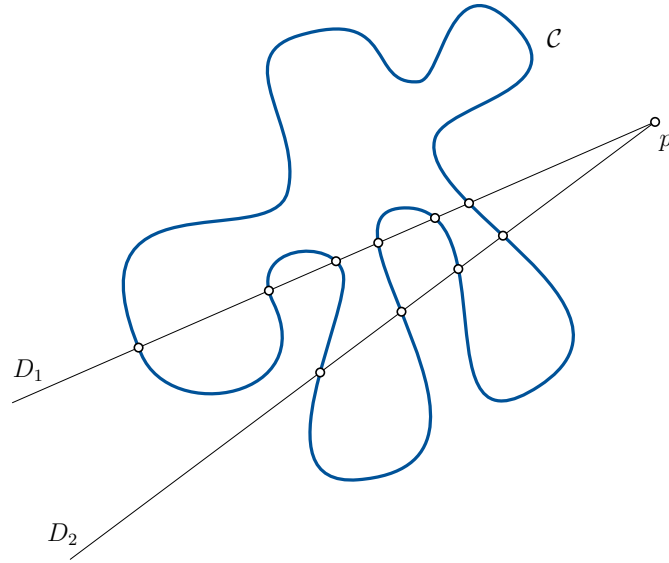


FIGURE III.5 – L'intersection transverse des deux demi-droites et de la courbe compacte est de cardinal pair

**Remarque III.4.10.** La démonstration du théorème donne un critère pour savoir dans quelle composante connexe de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  se trouve un point  $p$ . On considère une demi-droite  $D$  transverse à  $\mathcal{S}$  d'origine  $p$  : le critère est la parité de  $\mathcal{S} \cap D$ .

**Remarque III.4.11** (Domaine intérieur délimité par une surface). Soit  $B$  une boule contenant la surface compacte  $\mathcal{S}$ . Alors  $\mathbb{R}^3 \setminus B$ , qui est connexe, est contenu dans l'une des deux composantes connexes de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , qui est donc non bornée. L'autre composante connexe de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  est en revanche contenue dans  $B$ , et donc bornée. Il s'ensuit que parmi les deux composantes connexes de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , l'une est bornée et l'autre non. On appelle la composante bornée le **domaine intérieur** à  $\mathcal{S}$ . Notons-le  $\Omega$ . Il est clair que  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \mathcal{S}$  est compact. D'autre part, on peut trouver des demi-droites dont l'origine est hors de  $B$  et qui n'intersectent pas la surface. La remarque précédente permet donc de caractériser la composante non bornée de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  comme celle telle que les demi-droites transverses dont l'origine est dans cette composante intersecte  $\mathcal{S}$  en un nombre pair de points, et donc le domaine intérieur  $\Omega$  est lui caractérisé par le fait que les demi-droites transverses dont l'origine est dans  $\Omega$  intersectent  $\mathcal{S}$  en un nombre impair de points.

Une conséquence importante est le fait qu'une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  est orientable.

**Théorème III.4.12** (théorème de Brouwer-Samelson).

Une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  est orientable.

Démonstration. Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\Omega$  son domaine intérieur. Soit  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $N(p)$  un vecteur normal unitaire à  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Considérons

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto p + tN(p).$$

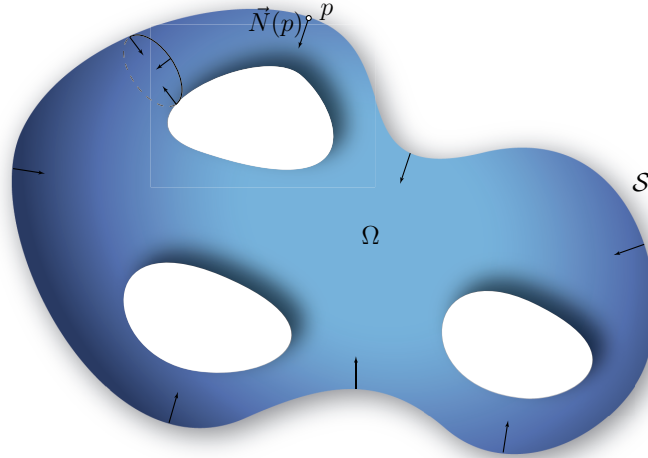


FIGURE III.6 – Orientation d'une surface compacte

La trace de  $\alpha$  est une courbe transverse à  $\mathcal{S}$  en  $p$ , et d'après le lemme III.4.1 et la démonstration de la proposition III.4.2, il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]-\epsilon; 0[$ ,  $\alpha(t)$  se trouve dans une des composantes  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  et pour tout  $t \in ]0; \epsilon[$ ,  $\alpha(t)$  se trouve dans l'autre. Si pour tout  $t \in ]0; \epsilon[$ ,  $\alpha(t)$  se trouve dans le domaine intérieur  $\Omega$ , on dit alors que  $N(p)$  pointe vers le domaine intérieur. Nous savons que localement,  $\mathcal{S}$  admet des champs de vecteurs normaux unitaires. Supposons que sur un ouvert connexe orientable  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$ , nous ayons choisi un tel champ de vecteurs  $N$ , et que en un point  $p_0 \in \mathcal{W}$ ,  $N(p_0)$  pointe vers le domaine intérieur. Alors il en est de même de  $N(p)$  pour tout  $p \in \mathcal{W}$ . En effet, l'ensemble des points  $p \in \mathcal{W}$  tel que  $N(p)$  pointe vers le domaine intérieur est non vide, ouvert d'après le lemme III.4.1 et la démonstration de la proposition III.4.2, et fermé par le même argument : si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $\mathcal{W}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N(p_n)$  pointe vers le domaine intérieur, et que de plus  $p_n$  tend vers  $p \in \mathcal{W}$ , alors en choisissant un voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  comme dans le lemme III.4.1, on voit que  $N(p)$  pointe vers le domaine intérieur. Ceci montre l'assertion. Comme  $\mathcal{S}$  est recouvert par de tels ouverts  $\mathcal{W}$ , on voit que en tout  $p$ , le choix de  $N(p)$  comme vecteur normal unitaire à  $\mathcal{S}$  en  $p$  définit globalement un champ de vecteurs normaux unitaires à  $\mathcal{S}$ , autrement dit, une orientation de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Remarque III.4.13.** Parmi les deux orientations possibles d'une surface compacte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont l'existence est assurée par le théorème de Brouwer-Samelson, l'une est distinguée par le fait que  $N$  pointe vers le domaine intérieur. Sauf mention explicite du contraire, les surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  seront toujours orientées selon cette convention (cf. exercice III.2.10).

## III.5 Exercices

**Exercice III.5.1.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  son domaine intérieur et  $p$  un point de  $\mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe une sphère  $\mathbb{S}_r$  de rayon  $r > 0$ , tangente à  $\mathcal{S}$  en  $p$ , contenue dans  $\overline{\Omega}$  et telle que  $\mathcal{S} \cap \mathbb{S}_r = \{p\}$ .

**Exercice III.5.2.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Omega$  son domaine intérieur. Supposons qu'une droite  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  intersecte  $\overline{\Omega}$  seulement en un point  $p$ . Montrer que  $p \in \mathcal{S}$  et que  $D$  est tangente à  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

**Exercice III.5.3.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Omega$  son domaine intérieur. Montrer que si  $p_0 \notin \overline{\Omega}$  il existe au moins deux droites tangentes à  $\mathcal{S}$  passant par  $p_0$ .



# Chapitre IV

## Courbure des surfaces de $\mathbb{R}^3$ . La seconde forme fondamentale

Dans ce chapitre, nous allons étudier la courbure des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . La notion de courbure d'une surface  $\mathcal{S}$  est plus subtile que celle d'une courbe. En effet, pour un arc géométrique paramétré par la longueur de l'arc de  $\mathbb{R}^2$ , nous avons défini la courbure comme un scalaire qui détermine la dérivée du vecteur tangent à la courbe. Pour une surface de  $\mathbb{R}^3$ , la courbure en un point est vue comme un endomorphisme symétrique (pour le produit scalaire ambiant) du plan tangent, donné par la différentielle de l'application associant à un point de la surface un vecteur normal unitaire à celle-ci (application de Gauss). La forme bilinéaire sur l'espace tangent associée à l'endomorphisme symétrique (ou plutôt son opposé, appelé application de Weingarten) décrit ci-dessus s'appelle la seconde forme fondamentale de la surface. Cette terminologie suggère qu'il existe une première forme fondamentale. En effet, celle-ci est juste le produit scalaire sur chaque plan tangent en un point de la surface induit par le produit scalaire ambiant de  $\mathbb{R}^3$ . L'étude des propriétés des surfaces ne dépendant que de la première forme fondamentale fera l'objet du chapitre suivant. Les invariants de similitude attaché à l'application de Weingarten sont les objets d'étude de ce chapitre : courbures et directions principales, courbure de Gauss et courbure moyenne. Nous en donnons des interprétations géométriques, via le théorème de Meusnier et un résultat identifiant la seconde forme fondamentale et la hessienne d'une certaine fonction hauteur. Nous étudions ensuite la régularité des fonctions courbures introduites et donnons leurs formules dans des paramétrages locaux. Nous donnons deux applications globales, déduites d'un résultat de Hilbert : les théorèmes de Jellett et de Liebmann. Le premier affirme qu'une surface connexe compacte de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss strictement positive et de courbure moyenne constante est une sphère. Le second arrive à la même conclusion en supposant la courbure de Gauss constante. Nous établissons enfin un théorème d'existence de voisinage tubulaire d'une surface  $\mathcal{S}$ . L'idée est d'épaissir la surface selon la direction normale pour obtenir un voisinage ouvert de  $\mathbb{R}^3$  difféomorphe à  $\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[$  pour un certain intervalle ouvert  $]-\delta; \delta[$ . Ce résultat technique nous sera utile à de nombreuses reprises dans la suite.

**Notations et conventions.** Nous utiliserons les mêmes notations et conventions qu'au chapitre précédent.

## IV.1 La seconde forme fondamentale

### IV.1.1 L'application de Gauss

Dans cette section, on suppose que toutes les surfaces sont orientables. Rappelons que cette condition est toujours satisfaite localement. Soit  $N$  un champ de vecteurs normaux unitaires sur la surface  $\mathcal{S}$ . Comme  $N(p)$  est de norme 1 pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , on peut voir  $N$  comme une application différentiable de  $\mathcal{S}$  dans la sphère unitaire  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$ . L'application  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  s'appelle **application de Gauss** de la surface orientée  $\mathcal{S}$ .

Par analogie avec les courbes, on s'attend à ce que l'étude des variations de  $N$  au voisinage d'un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  nous donne des renseignements sur la géométrie de la surface dans ce voisinage. Dans le cas des surfaces, cette variation locale n'est plus décrite par un simple scalaire (comme la courbure dans le cas des courbes) mais par la différentielle de  $N$  en  $p$ , qui est une application linéaire

$$dN_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2.$$

Or, l'espace tangent  $T_p\mathcal{S}$  est l'orthogonal de  $N(p)$ , mais c'est aussi le cas de  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ , c'est-à-dire que  $T_p\mathcal{S} = T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  (c'est une vraie égalité, pas un isomorphisme plus ou moins canonique). Ainsi,  $dN_p$  est un endomorphisme de  $T_p\mathcal{S}$ .

#### Proposition IV.1.1.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . En tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , la différentielle  $dN_p$  de l'application de Gauss est symétrique (pour le produit scalaire sur  $T_p\mathcal{S}$  induit de celui sur l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ ).

Démonstration. Il s'agit de montrer que quels que soient  $v, w \in T_p\mathcal{S}$ ,

$$\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle.$$

Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Reprenons les notations du lemme III.2.2. On a

$$\langle \mathbf{x}_u, N \circ \mathbf{x} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_v, N \circ \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Différentions la première égalité par rapport à la variable  $v$  et la seconde par rapport à  $u$ . Par égalité des dérivées partielles secondes  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , on obtient

$$\langle \mathbf{x}_u, (N \circ \mathbf{x})_v \rangle = \langle \mathbf{x}_v, (N \circ \mathbf{x})_u \rangle.$$

Comme pour tout  $(u, v) \in \mathcal{U}$ ,

$$(N \circ \mathbf{x})_v(u, v) = d(N \circ \mathbf{x})_{(u,v)}(0, 1) = dN_{\mathbf{x}(u,v)} \circ d\mathbf{x}_{(u,v)}(0, 1) = dN_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_v(u, v)),$$

et que de même

$$(N \circ \mathbf{x})_u(u, v) = dN_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_u(u, v)),$$

on voit que pour tout  $q = (u, v) \in \mathcal{U}$ ,

$$\langle dN_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q)), \mathbf{x}_v(q) \rangle = \langle \mathbf{x}_u(q), dN_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_v(q)) \rangle.$$

Ceci montre que  $dN_{\mathbf{x}(q)}$  est symétrique. □



**Corollaire IV.1.2.**

En chaque point  $p \in \mathcal{S}$ , la différentielle de l'application de Gauss est un endomorphisme diagonalisable (sur  $\mathbb{R}$ ), dans une base orthonormale (pour le produit scalaire sur  $T_p\mathcal{S}$  induit de celui sur l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ ).

### IV.1.2 La seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss et courbure moyenne

Avant de définir la seconde forme fondamentale sur une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ , il paraît convenable de définir la première forme fondamentale, même si celle-ci ne tient dans ce chapitre qu'un rôle subalterne. Son heure de gloire viendra au chapitre suivant.

**Définition IV.1.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface dans  $\mathbb{R}^3$ . Le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  induit sur chaque plan tangent  $T_p\mathcal{S}$  un produit scalaire, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , que l'on appelle la **première forme fondamentale de la surface  $\mathcal{S}$  en  $p$** .

Nous étant acquittés des convenances concernant l'ordre des priorités terminologiques, nous en venons à la notion qui nous intéresse.

Soient  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ ,  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  l'application de Gauss et  $p \in \mathcal{S}$ . Nous avons vu que l'endomorphisme  $dN_p$  de  $T_p\mathcal{S}$  est symétrique et donc diagonalisable dans une base orthonormale. Sa classe de similitude est donc caractérisée par ses valeurs propres, ou bien par son déterminant et sa trace (respectivement le produit et la somme des deux valeurs propres). D'autre part, un endomorphisme symétrique définit naturellement une forme bilinéaire symétrique. Pour des raisons de conventions historiques, on va plutôt considérer l'endomorphisme symétrique  $L_p = -dN_p$ , appelé **application de Weingarten**.

**Définition IV.1.4.**

La **seconde forme fondamentale** sur  $\mathcal{S}$  est l'application bilinéaire symétrique  $\sigma_p$  définie sur l'espace tangent  $T_p\mathcal{S}$  en chaque point  $p$  de  $\mathcal{S}$  par

$$\sigma_p(v, w) = \langle L_p(v), w \rangle = -\langle dN_p(v), w \rangle, \quad (v, w \in T_p\mathcal{S}).$$

Ceci nous amène à la définition suivante.

**Définition IV.1.5.**

Soient  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ ,  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  l'application de Gauss et  $p \in \mathcal{S}$ . On pose  $L_p = -dN_p$ . Comme l'endomorphisme  $L_p$  de  $T_p\mathcal{S}$  est symétrique et donc diagonalisable dans une base orthonormale, ses valeurs propres sont des réels. Notons-les  $k_1(p)$  et  $k_2(p)$ , avec  $k_1(p) \leq k_2(p)$ . On appelle  $k_1$  et  $k_2$  les **courbures principales** de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Si  $k_1 = k_2 = k$ , alors  $L_p = k \text{Id}_{T_p\mathcal{S}}$ . Si  $k_1$  et  $k_2$  sont distinctes, les deux droites propres sont en somme directe orthogonale. Dans ce cas, les deux droites propres sont appelées **directions principales** de  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

La **courbure de Gauss** de  $\mathcal{S}$  en  $p$  est définie par

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) = \det(L_p).$$

La **courbure moyenne** de  $\mathcal{S}$  en  $p$  est définie par

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2}\text{Tr}(L_p).$$

**Remarque IV.1.6.** Choisissons l'orientation opposée sur  $\mathcal{S}$ . Alors la différentielle de l'application de Gauss est multipliée par  $-\text{Id}$ , les deux valeurs propres sont changées en leur opposées. La courbure de Gauss ne change pas, elle est donc indépendante du choix de l'orientation, en particulier on peut la définir sur une surface non orientable. En revanche, la courbure moyenne est changée en son opposée.

**Exercice IV.1.7.** Calculer courbure de Gauss et courbure moyenne pour un plan, une sphère, un cylindre.

**Exercice IV.1.8.** Soit  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Bx, x \rangle + 2\langle b, x \rangle + c = 0\}$  où  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique,  $b \in \mathbb{R}^3$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $p \mapsto Bp + b$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{S}$ , c'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , ce que l'on suppose dans la suite.

2. Montrer que  $p \mapsto N(p) = \frac{Bp + b}{\|Bp + b\|}$  est une application de Gauss pour  $\mathcal{S}$ . et  $c \in \mathbb{R}$ .

3. En déduire qu'un ellipsoïde a une courbure de Gauss partout strictement positive.

**Exercice IV.1.9.** Soit  $\mathcal{S}$  le paraboloïde hyperbolique dans  $\mathbb{R}^3$  donné implicitement par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}.$$

Montrer que la courbure de Gauss de  $\mathcal{S}$  au point  $(0, 0, 0)$  est négative.

**Exercice IV.1.10.** Soit  $\mathbb{T}^2$  le tore de l'exemple I.4.4 donné implicitement par l'équation

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1.$$

Montrer que

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x(\sqrt{x^2 + y^2} - 2), y(\sqrt{x^2 + y^2} - 2), z(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \right)$$

est une application de Gauss pour  $\mathbb{T}^2$ . Calculer la courbure de Gauss en un point  $p$  de  $\mathbb{T}^2$ . Montrer que  $K(x, y, z) > 0$  si et seulement si  $x^2 + y^2 > 4$  et que  $K(x, y, z) < 0$  si et seulement si  $x^2 + y^2 < 4$ . Montrer que l'image par  $N$  des points où la courbure de Gauss s'annule consiste en les deux pôles (nord et sud) de la sphère unité  $\mathbb{S}^2$ . Montrer que tous les points de  $\mathbb{S}^2$  en dehors des pôles nord et sud admettent deux préimages par  $N$ , l'un où la courbure de Gauss est strictement positive et l'un où la courbure est strictement négative.

## IV.2 Interprétation géométrique

Nous allons donner deux interprétations géométriques de la seconde forme fondamentale.

### IV.2.1 Le théorème de Meusnier

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  sur laquelle nous avons fixé une application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  et la seconde forme fondamentale correspondante. Soient  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $v$  un vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$  et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'un arc paramétré tracé sur  $\mathcal{S}$ , tel que  $\alpha(t_0) = p$  et que  $\alpha'(t_0) = v$  pour un certain  $t_0 \in I$ .

Dans cette situation, on a le résultat suivant qui relie la courbure  $\kappa(t_0)$  de  $\alpha$  en  $t_0$  et la seconde forme fondamentale en  $p$ . Soit  $\theta$  l'angle entre le vecteur normal à  $\mathcal{S}$  en  $p$ ,  $N(p)$ , et le vecteur unitaire normal à la courbe en  $p$ ,  $\vec{n} = \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|} = \frac{\alpha''(t_0)}{\kappa(t_0)}$ .

#### Proposition IV.2.1.

On a, avec les notations qui précèdent,  $\cos \theta \times \kappa(t_0) = \sigma_p(v, v)$ .

*Démonstration.* Comme  $\alpha(t) \in \mathcal{S}$  pour tout  $t \in I$ , on a  $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ , et donc

$$\langle \alpha'(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0, \quad (t \in I).$$

En dérivant par rapport à  $t$  et en évaluant en  $t_0$ , on obtient :

$$\langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = -\langle \alpha'(t_0), dN_p(\alpha'(t_0)) \rangle = -\langle v, dN_p(v) \rangle = \sigma_p(v, v).$$

Or  $\langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = \|\alpha''(t_0)\| \langle \vec{n}, N(p) \rangle = \kappa(t_0) \cos \theta$ . □

Soit  $v$  un vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Considérons le plan  $\mathcal{P}_v$  engendré par  $v$  et par  $N(p)$ .

Par définition du vecteur normal unitaire  $N(p)$ ,

$$T_p\mathcal{S} + \mathcal{P}_v = \mathbb{R}^3.$$

Ceci signifie que  $\mathcal{P}_v$  est transverse à  $\mathcal{S}$  en  $p$ . D'après la proposition III.3.3, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_v \cap \mathcal{V} = \alpha(I)$$

où  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un arc paramétré réalisant un homéomorphisme sur son image. Nous appellerons cette courbe la **section normale** de  $\mathcal{S}$  en  $p$  de direction  $v$ .

On peut supposer que  $\alpha$  est un paramétrage par la longueur de l'arc et que  $v = \alpha'(t_0)$  est le vecteur tangent à  $\alpha$  en un point  $t_0$  de  $I$ , avec  $\alpha(t_0) = p$ . Dans cette situation, la proposition précédente se réécrit comme suit.

**Proposition IV.2.2.**

La courbure algébrique  $\varkappa(t_0)$  (dans le plan  $\mathcal{P}_v$  orienté par  $(v, N(p))$ ) de  $\alpha$  en  $t_0$  est égale à  $\sigma_p(v, v)$ .

*Démonstration.* On reprend le calcul de la démonstration précédente, en utilisant (II.2.1) et en remarquant que

$$\varkappa(t_0) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle.$$

□

Cet énoncé est la formulation en langage moderne d'une observation d'Euler, généralisée ensuite comme ci-dessus par Meusnier, du fait que les courbures des sections normales en un point donné ne sont pas un ensemble arbitraire de nombres, mais les valeurs prises par une forme quadratique de deux variables. En fait, si  $k_1(p)$ ,  $k_2(p)$  sont les courbures principales de  $\mathcal{S}$  en  $p$ , et si  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormale de vecteurs propres (respectivement pour les valeurs propres  $k_1(p)$ ,  $k_2(p)$  de  $L_p$ ), on a

$$\varkappa(t_0) = \langle v, e_1 \rangle^2 k_1(p) + \langle v, e_2 \rangle^2 k_2(p).$$

**Remarque IV.2.3** (Interprétation géométrique du signe de  $\sigma_p(v, v)$ ). Soit  $v$  un vecteur unitaire tangent à une surface  $\mathcal{S}$  en  $p$ , et soit  $N$  le choix d'une orientation sur  $\mathcal{S}$ . Si  $\sigma_p(v, v) > 0$ , alors la section normale  $\mathcal{P}_v \cap \mathcal{S}$  vit localement entièrement du côté du plan tangent affine  $\mathcal{T}_p \mathcal{S}$  vers lequel pointe le vecteur normal  $N(p)$  et d'autre part n'intersecte ce plan tangent qu'en  $p$ .

Réciproquement, si la section normale  $\mathcal{P}_v \cap \mathcal{S}$  vit localement entièrement du côté du plan tangent affine  $\mathcal{T}_p \mathcal{S}$  vers lequel pointe le vecteur normal  $N(p)$ , alors  $\sigma_p(v, v) \geq 0$ .

Dans le cas des courbes, une discussion similaire se trouve dans la section II.6.6.

La remarque précédente entraîne que si la seconde forme fondamentale est définie positive ou définie négative en un point, alors toutes les sections normales à la surface sont localement entièrement d'un seul côté du plan tangent. (En fait, nous verrons dans la proposition IV.2.8 que la surface elle-même est dans ce cas localement d'un seul côté de son plan tangent). En dimension deux, cette condition est équivalente au fait que les deux courbures principales sont de même signe, ou encore que la courbure de Gauss est strictement positive. En revanche, lorsque la courbure de Gauss est strictement négative, alors les sections normales correspondant aux deux directions principales sont situées localement chacune d'un côté différent du plan tangent, en particulier la surface intersecte les deux demi-espaces délimités par ce plan tangent.

Introduisons un peu de terminologie.

**Définition IV.2.4.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ . Les points où la courbure de Gauss est strictement positive sont appelés **points elliptiques** de la surface. Ceux où la courbure de Gauss est strictement négative sont appelés **points hyperboliques**. Ceux où la seconde forme fondamentale admet une valeur propre nulle sans être identiquement nulle sont appelés **points paraboliques**. Enfin, ceux où la seconde forme fondamentale est identiquement nulle sont appelés **points plans**.

**Remarque IV.2.5.** En un point  $p$  d'une surface  $\mathcal{S}$ , tous les vecteurs unitaires tangents  $v$  vérifient

$$k_1(p) \leq \sigma_p(v, v) \leq k_2(p)$$

(on le voit en décomposant  $v$  dans une base orthonormale de vecteurs propres pour  $L_p$ ). Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont donc respectivement le min et le max des courbures algébriques des sections normales à la surface en  $p$ .

En particulier, si les deux courbures principales sont égales, toutes les courbures algébriques des sections normales à la surface en  $p$  sont égales à cette valeur commune. On a de plus dans ce cas  $K(p) = H(p)^2$ . On appelle les points où ceci se produit **points ombilicaux** de  $\mathcal{S}$ . Une surface est dite **totalelement ombilicale** si tous ses points sont des points ombilicaux.

**Exercice IV.2.6** (Classification des surfaces totalelement ombilicales). Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  dont tous les points sont ombilicaux. En chaque point, la différentielle de l'application de Gauss est un multiple de l'identité, on peut donc écrire

$$dN_p = f(p) \operatorname{Id}_{T_p \mathcal{S}}, \quad (p \in \mathcal{S})$$

pour une certaine fonction différentiable  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  et posons  $g = f \circ \mathbf{x}$ . Montrer que

$$g_u \mathbf{x}_v = g_v \mathbf{x}_u.$$

En déduire que  $f$  est constante. Si  $f$  est identiquement nulle, montrer que  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  est contenu dans un plan de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $f$  est identiquement égale à une constante  $c$  non nulle, montrer que

$$\mathbf{x} - \frac{1}{c} N \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est constante. En déduire qu'il existe  $a \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  est contenue dans la sphère de centre  $a$  et de rayon  $\frac{1}{|c|}$ .

En conclure que :

Les seules surfaces connexes de  $\mathbb{R}^3$  totalelement ombilicales sont les sous-ensembles ouverts de plans ou de sphères.

Les seules surfaces connexes compactes de  $\mathbb{R}^3$  totalelement ombilicales sont les sphères.

### IV.2.2 Fonction hauteur et seconde forme fondamentale

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $p_0$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $a$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  soit  $h$  la fonction hauteur relative au plan affine  $P$  passant par  $p_0$  et de vecteur normal  $a$  (cf. exemple I.8.20) :

$$h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \quad p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle.$$

Sa différentielle en un point  $p \in \mathcal{S}$  est

$$dh_p : T_p \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle v, a \rangle,$$

et donc  $p \in \mathcal{S}$  est un point critique de  $h$  lorsque  $T_p \mathcal{S}$  est orthogonal à  $a$ , c'est-à-dire lorsque les plans  $P$  et  $T_p \mathcal{S}$  sont parallèles. Quitte à changer l'orientation de  $\mathcal{S}$ , on peut alors supposer que  $N(p) = a$ . Remarquons qu'un point d'une surface est toujours critique pour la fonction hauteur relative à son plan affine tangent  $\mathcal{T}_p \mathcal{S}$ . Ceci nous permet d'établir le résultat suivant. Rappelons que la hessienne en un point critique d'une application différentiable entre sous-variétés est définie (cf. section I.8.6).

**Proposition IV.2.7.**

La seconde forme fondamentale au point  $p_0 \in \mathcal{S}$  est la hessienne de la fonction hauteur relative à son plan affine tangent  $\mathcal{T}_{p_0} \mathcal{S}$ .

Démonstration. Choisissons un paramétrage local  $\mathbf{x}$  en  $p_0$ . On a

$$d^2 h_{p_0}(v, w) = d^2(h \circ \mathbf{x})_{q_0}(d\mathbf{x}_{p_0}^{-1}(v), d\mathbf{x}_{p_0}^{-1}(w)).$$

Or  $d(h \circ \mathbf{x})_q : y \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle d\mathbf{x}_q(y), N(p_0) \rangle$ , d'où

$$d^2(h \circ \mathbf{x})_{q_0} : (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \langle d^2 \mathbf{x}_{q_0}(y, z), N(p_0) \rangle.$$

Comme pour tout  $q$  dans le domaine du paramétrage

$$\langle d\mathbf{x}_q(y), N(\mathbf{x}(q)) \rangle = 0, \quad (y \in \mathbb{R}^2),$$

on a en différentiant cette identité,

$$\langle d^2 \mathbf{x}_q(y, z), N(\mathbf{x}(q)) \rangle + \langle d\mathbf{x}_q(y), d(N \circ \mathbf{x})_q(z) \rangle = 0, \quad (y, z \in \mathbb{R}^2).$$

Ainsi, on a finalement

$$d^2 h_{p_0}(v, w) = -\langle d\mathbf{x}_{q_0}(d\mathbf{x}_{p_0}^{-1}(v)), dN_{p_0} \circ d\mathbf{x}_{q_0}(d\mathbf{x}_{p_0}^{-1}(w)) \rangle = -\langle v, dN_{p_0}(w) \rangle = \sigma_p(v, w).$$

□

Ce résultat permet d'étudier la position de la surface par rapport à son plan tangent affine en un point.

**Proposition IV.2.8.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée et  $K$  sa courbure de Gauss.

1. Si  $K(p) > 0$  (c'est-à-dire si  $p$  est un point elliptique), alors il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$  est entièrement dans l'un des demi-espaces délimités par le plan affine tangent en  $p$ , le seul point d'intersection entre ce plan affine tangent en  $p$  et  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$  étant  $p$ .
2. Si  $K(p) < 0$  (c'est-à-dire si  $p$  est un point hyperbolique), alors pour chaque voisinage  $\mathcal{W}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$ , il existe des points de  $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$  dans les deux demi-espaces délimités par le plan affine tangent en  $p$ .

**Exercice IV.2.9.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $p_0$  un point elliptique de  $\mathcal{S}$  si et seulement s'il existe un point  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que la fonction

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - b\|^2$$

admette  $p_0$  comme maximum local.

**Exercice IV.2.10.** Montrer qu'il n'existe pas de surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  ayant une courbure négative ou nulle en tout point (on pourra utiliser l'exercice précédent).

## IV.3 Etude des courbures principales

Nous étudions dans cette section la régularité des différentes fonctions courbures introduites sur une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition IV.3.1.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . La courbure de Gauss  $K$  et la courbure moyenne  $H$  sont des fonctions différentiables sur  $\mathcal{S}$ . Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont des fonctions continues sur  $\mathcal{S}$ , différentiables sur l'ouvert des points non ombilicaux de  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Il suffit de faire une étude locale, et pour cela, nous fixons un paramétrage  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  de  $\mathcal{S}$ . L'application de Gauss a été construite dans ce contexte dans le lemme [III.2.2](#)

$$N(\mathbf{x}(q)) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(q).$$

Au point  $p = \mathbf{x}(q)$  les formes bilinéaires symétriques sur  $T_p\mathcal{S}$  que sont la première et la seconde forme fondamentale sont données dans la base  $(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q))$  de  $T_p\mathcal{S}$  par des matrices notées respectivement  $M$  et  $\Sigma$ . Posons

$$M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad E = \|\mathbf{x}_u\|^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \|\mathbf{x}_v\|^2.$$

Les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont clairement différentiables.

De même, pour la seconde forme fondamentale,  $\Sigma = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ , où

$$e(q) = \sigma_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q)), \quad f(q) = \sigma_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)), \quad g(q) = \sigma_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_v(q)).$$

On a

$$\begin{aligned} e(q) &= \sigma_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q)) = -\langle dN_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q)), \mathbf{x}_u(q) \rangle = -\langle (N \circ \mathbf{x})_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle \\ &= \langle (N \circ \mathbf{x})(q), \mathbf{x}_{uu}(q) \rangle, \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que  $\langle N \circ \mathbf{x}(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle = 0$  pour tout  $q \in \mathcal{U}$ , et que donc  $\langle (N \circ \mathbf{x})(q), \mathbf{x}_{uu}(q) \rangle + \langle (N \circ \mathbf{x})_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle = 0$ . On peut continuer le calcul :

$$\begin{aligned} e(q) &= \langle (N \circ \mathbf{x})(q), \mathbf{x}_{uu}(q) \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(q), \mathbf{x}_{uu}(q) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{uu}(q)). \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{uv}(q)), \\ g(q) &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{vv}(q)). \end{aligned}$$

On voit maintenant apparaître les fonctions  $e$ ,  $f$  et  $g$  comme étant différentiables sur  $\mathcal{U}$ .

Introduisons maintenant la matrice  $A$  de la différentielle de l'application de Gauss en  $p = \mathbf{x}(q)$ . On a

$$A = -M^{-1}\Sigma = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{pmatrix},$$

d'où

$$K \circ \mathbf{x} = \det A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H \circ \mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

Comme  $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|^2 > 0$ , on voit donc que  $K$  et  $H$  sont différentiables sur  $\mathcal{U}$ .

Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont elles données par

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

ce qui termine la démonstration. □

**Remarque IV.3.2.** Les formules établies dans la démonstration ci-dessus permettent de calculer explicitement la courbure de Gauss et la courbure moyenne sur l'ouvert  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  de  $\mathcal{S}$  paramétré par  $\mathbf{x}$  en terme des dérivées partielles premières et secondes de  $\mathbf{x}$ . Ecrivons-les pour pouvoir nous y référer plus tard.



$$(IV.3.1) \quad K \circ \mathbf{x} = \det A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H \circ \mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

$$(IV.3.2) \quad E = \|\mathbf{x}_u\|^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \|\mathbf{x}_v\|^2$$

$$(IV.3.3) \quad e(q) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{uu}(q)),$$

$$(IV.3.4) \quad f(q) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{uv}(q)),$$

$$(IV.3.5) \quad g(q) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(q)\|} \det(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_{vv}(q)).$$

**Exercice IV.3.3.** Soit  $\mathcal{S}$  le paraboloïde elliptique donné implicitement par l'équation

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2\}.$$

En remarquant que  $\mathcal{S}$  est le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , calculer les coefficients des première et seconde formes fondamentales. En déduire que

$$K(x, y, z) = \frac{1}{(1 + 2z^2)^2} \quad \text{et} \quad H(x, y, z) = \frac{1 + z^2}{(1 + 2z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Exercice IV.3.4.** Soit  $\mathcal{S}$  l'hélicoïde donné par le paramétrage

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, au), \quad (a \in \mathbb{R}^\times).$$

Vérifier que ce paramétrage définit bien une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer les coefficients des première et seconde formes fondamentales. En déduire que

$$K(\mathbf{x}(u, v)) = - \left( \frac{a}{a^2 + v^2} \right)^2 \quad \text{et} \quad H(\mathbf{x}(u, v)) = 0.$$

**Exercice IV.3.5.** Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne en tout point du tore  $\mathbb{T}^2$  d'équation  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ .

## IV.4 Les théorèmes de Liebmann et Jellett

Nous allons caractériser la sphère parmi les surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  en termes du comportement des courbures de Gauss et courbures moyenne. Pour cela, énonçons un théorème dû à D. Hilbert

### **Théorème IV.4.1** (Hilbert (1945)).

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  et soient  $k_1, k_2$  (avec  $k_1 \leq k_2$ ) les courbures principales de  $\mathcal{S}$ . Supposons qu'en un point  $p \in \mathcal{S}$  on ait

- (i) La courbure de Gauss est strictement positive :  $K(p) > 0$ ,
- (ii)  $k_1$  admet un minimum local en  $p$ .
- (iii)  $k_2$  admet un maximum local en  $p$ .

Alors  $p$  est un point ombilical.

Démonstration. Par un déplacement de l'espace, on amène  $\mathcal{S}$  dans la position où  $p = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  et  $T_p\mathcal{S}$  est le plan d'équation  $z = 0$  et les directions principales en  $p$  sont données par les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Au voisinage de  $p$ , la surface  $\mathcal{S}$  est définie comme un graphe, c'est-à-dire qu'il existe un paramétrage local en  $p$  de la forme

$$\mathbf{x} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)),$$

où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable. On suppose de plus que  $(0, 0) \in \mathcal{U}$  et  $p = \mathbf{x}(0, 0)$ . On a alors

$$f(0, 0) = 0, \quad f_u(0, 0) = 0, \quad f_v(0, 0) = 0.$$

En effet,  $\mathbf{x}_u(0, 0) = (1, 0, f_u(0, 0)) \in T_p\mathcal{S}$  donc  $f_u(0, 0) = 0$ , idem pour  $f_v(0, 0)$  et on a  $\mathbf{x}_u(0, 0) = (1, 0, 0) = e_1$ ,  $\mathbf{x}_v(0, 0) = (0, 1, 0) = e_2$ . Les formules pour les coefficients de la seconde forme fondamentale dans le paramétrage  $\mathbf{x}$  données en (IV.3.3) s'écrivent ici

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Comme les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont les directions principales en  $p$ , on a

$$\sigma_p(e_1, e_1) = e(0, 0) = f_{uu}(0, 0) = k_1(p)\langle e_1, e_1 \rangle = k_1(p),$$

et de même  $f_{uv}(0, 0) = \sigma_p(e_1, e_2) = 0$ ,  $f_{vv}(0, 0) = k_2(p)$ , soit

$$f_{uu}(0, 0) = k_1(p), \quad f_{uv}(0, 0) = 0, \quad f_{vv}(0, 0) = k_2(p).$$

Considérons les courbes paramétrées  $\alpha$  et  $\beta$  données par

$$\alpha(u) = \mathbf{x}(u, 0), \quad \beta(v) = \mathbf{x}(0, v),$$

et

$$E_2(u) = \frac{\mathbf{x}_v(u, 0)}{\|\mathbf{x}_v(u, 0)\|}, \quad E_1(v) = \frac{\mathbf{x}_u(0, v)}{\|\mathbf{x}_u(0, v)\|}.$$

Ces définitions nous donnent immédiatement que  $E_1(v) \in T_{\beta(v)}\mathcal{S}$  et  $E_2(u) \in T_{\alpha(u)}\mathcal{S}$ . On peut donc introduire les fonctions  $h_1$  et  $h_2$

$$h_1 : v \mapsto \sigma_{\beta(v)}(E_1(v), E_1(v)) = \frac{f_{uu}}{(1 + f_u^2)\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(0, v),$$

$$h_2 : u \mapsto \sigma_{\alpha(u)}(E_2(u), E_2(u)) = \frac{f_{vv}}{(1 + f_v^2)\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(u, 0).$$

D'après l'hypothèse (iii),

$$h_2(0) = \sigma_p(e_2, e_2) = k_2(p) \geq k_2(\alpha(u)) \geq \sigma_{\alpha(u)}(E_2(u), E_2(u)) = h_2(u),$$

et de même, d'après l'hypothèse (ii),

$$h_1(0) = \sigma_p(e_1, e_1) = k_1(p) \leq k_1(\beta(v)) \leq \sigma_{\beta(v)}(E_1(v), E_1(v)) = h_1(v).$$

Ainsi la fonction  $h_1$  admet un minimum local en 0 et  $h_2$  un maximum local en ce point. On a donc

$$(IV.4.1) \quad h_2''(0) \leq 0 \leq h_1''(0).$$

Comme

$$h'_2(u) = \left( \frac{f_{uvv}}{(1+f_v^2)\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} - \frac{f_{vv}f_{uv}f_v}{(1+f_v^2)^2\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} - \frac{f_{vv}(f_u f_{uu} + f_v f_{uv})}{(1+f_v^2)(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}} \right) (u, 0),$$

en dérivant une fois de plus, on obtient

$$h''_2(0) = -f_{uu}^2(0, 0)f_{vv}(0, 0) + f_{uuvv}(0, 0).$$

De même,

$$h''_1(0) = -f_{vv}^2(0, 0)f_{uu}(0, 0) + f_{uuvv}(0, 0).$$

De l'inégalité (IV.4.1), on déduit

$$f_{uu}(0, 0)f_{vv}(0, 0)(f_{uu}(0, 0) - f_{vv}(0, 0)) \geq 0.$$

Ceci se réécrit

$$K(p)(k_1(p) - k_2(p)) \geq 0.$$

Or, comme par hypothèse  $K(p) > 0$ , on obtient  $k_1(p) \geq k_2(p)$  et donc  $k_1(p) = k_2(p)$ . Le point  $p$  est ombilical.  $\square$

**Corollaire IV.4.2** (Théorème de Jellett (1853)).

Une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss strictement positive en tout point et de courbure moyenne constante est une sphère.

*Démonstration.* Une surface compacte est orientable. On choisit une orientation, ce qui définit l'application de Gauss et les courbures principales  $k_1 \leq k_2$ . Ces fonctions sont continues sur  $\mathcal{S}$  d'après la proposition IV.3.1. Comme  $\mathcal{S}$  est compacte,  $k_1$  admet son minimum en un point  $a$ . Comme  $k_2 = 2H - k_1$  et que  $H$  est constante,  $k_2$  admet son maximum en ce même point  $a$ . D'autre part, le courbure de Gauss étant strictement positive, nous sommes dans les conditions d'applications du théorème de Hilbert, et le point  $a$  est ombilical. On a donc, pour tout point  $p \in \mathcal{S}$ ,

$$k_1(a) \leq k_1(p) \leq k_2(p) \leq k_2(a) = k_1(a).$$

Il s'ensuit que  $k_1(p) = k_2(p)$  : la surface  $\mathcal{S}$  est totalement ombilicale. Comme elle est compacte, c'est une sphère d'après l'exercice IV.2.6.  $\square$

**Corollaire IV.4.3** (Théorème de Liebmann (1899)).

Une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss constante est une sphère.

*Démonstration.* Soit  $c$  la valeur constante de la courbure de Gauss sur  $\mathcal{S}$ . D'après l'exercice IV.2.10, cette valeur est strictement positive. On reprend alors la démonstration du corollaire précédent en utilisant le fait que le minimum de  $k_1$  est atteint en un point qui est aussi un maximum pour  $k_2$  car le produit  $k_1 k_2 = K$  est constant.  $\square$

**Exercice IV.4.4.** Montrer qu'une surface compacte connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss strictement positive telle que le ratio  $H/K$  est constant est une sphère.

**Exercice IV.4.5.** Montrer qu'une surface compacte connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss strictement positive telle que l'une de ces courbures principales est constante est une sphère.

**Remarque IV.4.6.** On peut montrer (théorème d'Hadamard-Stoker) que si  $\mathcal{S}$  est une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss strictement positive, alors l'application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est un difféomorphisme.

## IV.5 Voisinages tubulaires

Nous allons établir, pour les surfaces de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , un résultat d'existence de voisinages de la surface ayant des propriétés utiles pour démontrer certains résultats globaux. Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Une famille de voisinages de  $\mathcal{S}$  naturelle est donnée par la structure métrique de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout réel  $\delta$  strictement positif, posons

$$B_\delta(\mathcal{S}) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid d(p, \mathcal{S}) < \delta\},$$

où  $d(p, \mathcal{S}) = \inf_{q \in \mathcal{S}} \|p - q\|$ . Il est clair que  $B_\delta(\mathcal{S})$  est un voisinage ouvert de  $\mathcal{S}$ . Décrivons ces voisinages en termes de segments normaux à la surface. Pour tout réel  $\delta$  strictement positif, pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , posons

$$N_\delta(p) = \{p + tN(p); t \in ]-\delta; \delta[$$

où  $N(p)$  est un vecteur normal unitaire à  $\mathcal{S}$  en  $p$ .

### Lemme IV.5.1.

Avec les notations ci-dessus, si  $\mathcal{S}$  est une surface fermée de  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$B_\delta(\mathcal{S}) = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} N_\delta(p).$$

*Démonstration.* Si  $q \in N_\delta(p)$ , il est clair que  $\|p - q\| < \delta$  et donc que  $q \in B_\delta(\mathcal{S})$ . Réciproquement, supposons  $q \in B_\delta(\mathcal{S})$ . Comme  $\mathcal{S}$  est fermée,  $\inf_{p \in \mathcal{S}} \|p - q\|$  est atteint en un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  (on se ramène facilement à une partie fermée bornée de  $\mathcal{S}$ , donc compacte). Le point  $p$  est donc un point critique de  $p \mapsto \|p - q\|^2$ , et donc  $(p - q) \perp T_p \mathcal{S}$ . Comme on a aussi  $\|p - q\| = d(q, \mathcal{S}) < \delta$ , on voit que  $q \in N_\delta(p)$ .  $\square$

Nous allons maintenant faire en sorte de choisir  $\delta$  assez petit, de sorte que l'union dans le lemme précédent soit une union disjointe. Supposons  $\mathcal{S}$  orientable et introduisons l'application

$$F : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (p, t) \mapsto p + tN(p)$$

où  $N$  est un champ de vecteurs normaux unitaires de  $\mathcal{S}$ . Elle est clairement différentiable, de plus

$$F(\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[) = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} N_\delta(p).$$

On cherche donc un  $\delta > 0$  suffisamment petit, de sorte que la restriction de  $F$  à  $\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[$  soit injective. En fait, nous demandons un peu plus, à savoir que la restriction de  $F$  à  $\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[$  soit un difféomorphisme sur son image.

**Définition IV.5.2.**

Si la restriction de

$$F : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (p, t) \mapsto p + tN(p)$$

à  $\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[$  est un difféomorphisme sur son image, on dit que

$$N_\delta(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[) = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} N_\delta(p)$$

est un **voisinage tubulaire** de  $\mathcal{S}$ .

**Lemme IV.5.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Pour chaque point  $p \in \mathcal{S}$ , il existe un voisinage ouvert orientable  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  et un réel  $\delta > 0$  tel que  $N_\delta(\mathcal{V})$  soit un voisinage tubulaire de  $\mathcal{V}$ .

*Démonstration.* Comme l'énoncé est local, on peut, quitte à remplacer  $\mathcal{S}$  par un voisinage orientable du point  $p$ , supposer  $\mathcal{S}$  orientable. Soit  $N$  un champ de vecteurs normaux unitaires, qui permet de définir  $F$  comme ci-dessus. La différentielle de  $F$  au point  $(p, t)$  est donnée par

$$(IV.5.1) \quad dF_{(p,t)}(v, 0) = v + t dN_p(v), \quad (v \in T_p\mathcal{S}), \quad dF_{(p,t)}(0, 1) = N(p).$$

En particulier

$$dF_{(p,0)}(v, 0) = v, \quad dF_{(p,0)}(0, 1) = N(p),$$

et  $dF_{(p,0)}$  est un isomorphisme linéaire de  $T_p\mathcal{S} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Le théorème d'inversion locale nous donne alors l'existence d'un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  et d'un réel  $\delta > 0$  tel que  $F$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{V} \times ]-\delta; \delta[$  sur  $F(\mathcal{V} \times ]-\delta; \delta[)$ .  $\square$

Un argument de compacité nous permet d'assurer l'existence de voisinages tubulaires globaux. Rappelons qu'une surface compacte est orientable (Théorème de Brouwer-Samelson III.4.12).

**Théorème IV.5.4.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ . Alors il existe un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ .

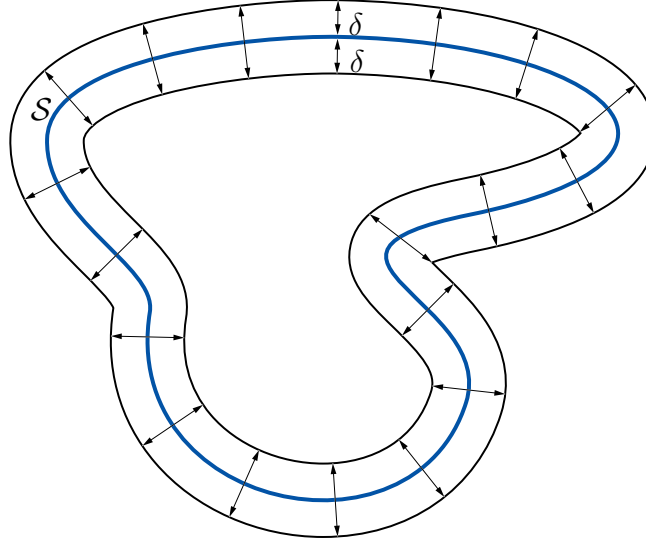


FIGURE IV.1 – Voisinage tubulaire d'une surface

Démonstration. En chaque point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , le lemme précédent établit l'existence d'un voisinage ouvert orientable  $\mathcal{V}_p$  et d'un voisinage tubulaire  $N_{\delta_p}(\mathcal{V}_p)$  de  $\mathcal{V}_p$  d'épaisseur  $\delta_p > 0$ . Or, le recouvrement  $\mathcal{S} = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} \mathcal{V}_p$  admet par compacité un sous-recouvrement fini

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{V}_{p_i}.$$

Posons  $\delta = \min_{i=1, \dots, r} \delta_{p_i}$ . Par construction  $F : \mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un difféomorphisme local. Montrons que l'on peut trouver  $0 < \epsilon < \delta$  tel que  $F$  soit injective sur  $\mathcal{S} \times ]-\epsilon; \epsilon[$ . En effet, si tel n'est pas le cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , il existe des points  $p_n$  et  $q_n$  de  $\mathcal{S}$  tels que

$$N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n) \neq \emptyset.$$

Par compacité, et quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer qu'il existe  $p, q \in \mathcal{S}$  tels que  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$  et  $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$ . D'autre part, soit  $r_n \in N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n)$ . On a

$$\|p_n - q_n\| \leq \|p_n - r_n\| + \|r_n - q_n\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

On en déduit que  $p = q$ . Le lemme précédent assure l'existence d'un voisinage ouvert orientable  $\mathcal{V}$  de  $p$  et d'un voisinage tubulaire  $N_\rho(\mathcal{V})$  de  $\mathcal{V}$  d'épaisseur  $\rho > 0$ . D'autre part, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$ ,  $p_n, q_n \in \mathcal{V}$  et  $\frac{1}{n} < \rho$  et donc pour un tel  $n$ ,

$$N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n) \subset N_\rho(p_n) \cap N_\rho(q_n) = \emptyset.$$

On aboutit ainsi à une contradiction. En conclusion, il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$F : \mathcal{S} \times ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

soit un difféomorphisme local injectif. C'est alors un difféomorphisme sur son image.  $\square$

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientable de  $\mathbb{R}^3$  et supposons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $N_\delta(\mathcal{S})$  soit un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$  (par exemple, d'après le théorème précédent, tel est le cas si  $\mathcal{S}$  est compacte). Soient  $\pi$  et  $r$  les première et seconde composantes respectivement de l'application

$$F^{-1} : N_\delta(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[,$$

appelée respectivement la projection et la distance normale orientée. Ainsi, pour tout point  $x \in N_\delta(\mathcal{S})$ ,  $\pi(x)$  est le point de  $\mathcal{S}$  tel que  $x$  soit sur le segment normal à  $\mathcal{S}$  en  $\pi(x)$  et  $r(x) \in ]-\delta; \delta[$ , est la distance entre  $x$  et  $\pi(x)$ , si  $x$  est du côté de  $\mathcal{S}$  vers lequel pointe  $N(\pi(x))$  et l'opposé de cette distance sinon. Les applications  $\pi$  et  $r$  sont différentiables car  $F^{-1}$  l'est. Dans ce contexte, nous avons la proposition suivante :

**Proposition IV.5.5.**

- (i)  $r^{-1}(\{0\}) = \mathcal{S}$ .
- (ii) Si  $0 < \rho < \delta$ , alors  $N_\rho(\mathcal{S})$  est un autre voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ .
- (iii) Changer l'orientation de  $\mathcal{S}$  ne change pas  $\pi$  et change le signe de  $r$ .
- (iv) Si  $p \in \mathcal{S}$ , et si  $v_1, v_2 \in T_p\mathcal{S}$  sont les directions principales de  $\mathcal{S}$  en  $p$ , et si  $t \in ]-\delta; \delta[$ , on a  $1 - t k_i(p) > 0$ ,  $i = 1, 2$  et

$$\begin{aligned} d\pi_{p+tN(p)}(v_i) &= \frac{1}{1 - t k_i(p)} v_i, & i = 1, 2, & \quad d\pi_{p+tN(p)}(N(p)) = 0, \\ dr_{p+tN(p)}(v_i) &= 0, & i = 1, 2, & \quad dr_{p+tN(p)}(N(p)) = 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Les points (i), (ii) et (iii) sont clairs d'après les définitions. Il ne reste que (iv) à démontrer. Pour cela, considérons une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  une courbe paramétrée dans  $\mathcal{S}$  telle que  $0 \in I$ ,  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v_i$ . On définit une autre courbe  $\beta$  dans  $\mathbb{R}^3$  par

$$\beta(s) = F(\alpha(s), t) = \alpha(s) + tN(\alpha(s)), \quad s \in I.$$

La trace de cette courbe est dans  $N_\beta(\mathcal{S})$  et

$$\begin{aligned} \beta(0) &= p + tN(p), & \beta'(0) &= (1 - t k_i(p)) v_i = dF_{(p,t)}(v_i, 0), \\ \pi(\beta(s)) &= \alpha(s), & r(\beta(s)) &= t, \quad (s \in I). \end{aligned}$$

Comme  $F$  est un difféomorphisme,  $dF_{(p,t)}(v_i, 0) = (1 - t k_i(p)) v_i \neq 0$ . Mais  $]-\delta; \delta[$  est connexe, et en  $t = 0$ ,  $1 - t k_i(p) = 1 > 0$  et donc  $1 - t k_i(p) > 0$  sur  $\mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[$ . De plus

$$d\pi_{p+tN(p)}((1 - t k_i(p)) v_i) = \frac{d}{ds} \left[ \pi(\beta(s)) \right]_{|s=0} = \alpha'(s) = v_i.$$

Donc par linéarité de  $d\pi_{p+tN(p)}$ , et le fait que  $1 - t k_i(p) > 0$ , on a  $d\pi_{p+tN(p)}(v_i) = \frac{1}{1 - t k_i(p)} v_i$ . De même

$$dr_{p+tN(p)}(v_i) = \frac{d}{ds} \left[ r(\beta(s)) \right]_{|s=0} = 0.$$

On considère ensuite le segment  $\gamma$  donné par

$$\gamma(s) = F(p, t + s) = p + (t + s) N(p), \quad (s \in I).$$

On a

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= p + N(p), & \gamma'(0) &= N(p), \\ \pi(\gamma(s)) &= p, & r(\gamma(s)) &= s + t, \quad (s \in I).\end{aligned}$$

En prenant la dérivée en  $s = 0$  dans les deux dernières égalités, on obtient

$$d\pi_{p+tN(p)}(N(p)) = 0, \quad dr_{p+tN(p)}(N(p)) = 1. \quad \square$$

**Remarque IV.5.6** (Surfaces parallèles). Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $N_\delta(\mathcal{S})$ ,  $\delta > 0$  un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ . Comme l'application

$$F : \mathcal{S} \times ]-\delta; \delta[ \longrightarrow N_\delta(\mathcal{S}), \quad (p, t) \mapsto p + tN(p)$$

est un difféomorphisme, pour tout  $t \in ]-\delta; \delta[$ , l'application

$$F_t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto F(p, t)$$

est un homéomorphisme sur son image. La différentielle de  $F_t$  en  $p$  est la restriction à  $T_p\mathcal{S} \times \{0\}$  de

$$dF_{(p,t)} : T_{(p,t)}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}) \simeq T_p\mathcal{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Elle est donc injective puisque  $F$  est un difféomorphisme. D'autre part, si  $p \in \mathcal{S}$  et si  $v \in T_p\mathcal{S}$ , on a d'après (IV.5.1),

$$(IV.5.2) \quad d(F_t)_p(v) = v + t dN_p(v) \in T_p(\mathcal{S}).$$

La différentielle de  $F_t$  en  $p$  est donc un isomorphisme linéaire de  $T_p\mathcal{S}$ . D'après l'exercice I.11.4,  $F_t(\mathcal{S})$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ , que l'on note  $\mathcal{S}_t$ . Comme en tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ ,  $T_p\mathcal{S} = T_{F_t(p)}\mathcal{S}_t$  d'après ce qui précède, on appelle  $\mathcal{S}_t$  la surface parallèle à  $\mathcal{S}$  à distance orientée  $t$ . En particulier, on peut définir une application de Gauss  $N_t$  pour la surface  $\mathcal{S}_t$  en posant  $N_t(F_t(p)) = N(p)$ . En différentiant cette égalité, on obtient

$$(IV.5.3) \quad d(N_t)_{F_t(p)} \circ d(F_t)_p = dN_p.$$

Si  $e_1, e_2$  sont les directions principales de  $\mathcal{S}$  au point  $p$ , on a

$$d(F_t)_p(e_i) = e_i + t dN_p(e_i) = (1 - tk_i(p)) e_i, \quad i = 1, 2.$$

Comme  $d(F_t)_p$  est injective,  $1 - tk_i(p) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  et donc  $1 - 2tH(p) + t^2K(p) \neq 0$ .

De (IV.5.3) on tire que les vecteurs  $e_1, e_2$  sont aussi les directions principales de  $\mathcal{S}$  au point  $F_t(p)$  et que l'on a

$$k_i(F_t(p)) = \frac{k_i(p)}{1 - tk_i(p)}, \quad i = 1, 2,$$

$$K(F_t(p)) = \frac{K(p)}{1 - 2tH(p) + t^2K(p)}, \quad H(F_t(p)) = \frac{H(p)}{1 - 2tH(p) + t^2K(p)}.$$



## IV.6 Exercices

**Exercice IV.6.1.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  et  $N$  son application de Gauss. Soit  $b \in \mathbb{R}^3$ . Considérons la fonction

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - b\|^2$$

- A 1.** Montrer que  $p$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $b$  est sur la droite normale à  $\mathcal{S}$  en  $p$ .  
**A 2.** Supposons que  $p$  soit un point critique de  $f$ . D'après la question 1, on peut écrire

$$b = p + \lambda N(p)$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $d^2 f_p$  la hessienne de  $f$  en  $p$  et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^2$  tracée sur  $\mathcal{S}$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v \in T_p \mathcal{S}$ . Montrer que

$$d^2 f_p(v, v) = 2\|v\|^2 - 2\lambda \langle \alpha''(0), N(p) \rangle$$

et en déduire que

$$d^2 f_p(v, v) = 2\|v\|^2 - 2\lambda \sigma_p(v, v).$$

- B 1.** Montrer que  $p_0$  est un point elliptique de  $\mathcal{S}$  si et seulement s'il existe  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que la fonction

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - b\|^2$$

admette  $p_0$  comme maximum local.

- B 2.** Montrer que si  $\mathcal{S}$  est compacte, il existe un point elliptique sur  $\mathcal{S}$ .  
**B 3.** Montrer que si  $\mathcal{S}$  est compacte connexe, et si l'orientation de  $\mathcal{S}$  est telle que  $N$  pointe vers le domaine intérieur, alors il existe un point  $p$  de  $\mathcal{S}$  où la seconde forme fondamentale  $\sigma_p$  est définie positive.  
**B 4.** Les hypothèses sont les mêmes que dans la question précédente, et l'on suppose en plus que  $\mathcal{S}$  est incluse dans une boule de rayon  $r$ . Montrer qu'il existe un point de  $\mathcal{S}$  vérifiant

$$K(p) \geq \frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad |H(p)| \geq \frac{1}{r}.$$

- C 1.** On fixe  $p \in \mathcal{S}$ . Donner une condition suffisante sur  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour que  $p$  soit un minimum local strict de la fonction

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - b\|^2$$

définie relativement au point  $b = p + \lambda N(p)$ .

- C 2.** Prenons  $b = p + \lambda N(p)$ , avec  $\lambda$  vérifiant la condition trouvée à la question précédente, de sorte que  $p$  soit un minimum local strict de

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - b\|^2.$$

Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  tel que l'intersection de  $\mathcal{V}$  avec la boule fermée  $\bar{B}_\lambda$  de centre  $b$  et de rayon  $|\lambda|$  soit réduite à  $p$ .

- C 3.** On suppose maintenant  $\mathcal{S}$  compacte et connexe, et l'on note  $\Omega$  son domaine intérieur. Montrer qu'il existe une sphère  $\mathbb{S}_r$  de rayon  $r > 0$ , tangente à  $\mathcal{S}$  en  $p$ , contenue dans  $\bar{\Omega}$  et telle que  $\mathcal{S} \cap \mathbb{S}_r = \{p\}$ .

**Exercice IV.6.2.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{S}_{K \geq 0}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{S}$  de courbure de Gauss positive ou nulle. Montrer que la restriction de  $N$  à  $\mathcal{S}_{K \geq 0}$  est surjective. Le résultat reste-t-il vrai si l'on considère plutôt  $\mathcal{S}_{K > 0}$ , l'ensemble des points de  $\mathcal{S}$  de courbure de Gauss strictement positive ?

**Exercice IV.6.3.** 1. Soit  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  l'application de Gauss d'une surface orientée  $\mathcal{S}$ . Montrer que si  $\mathbb{S}^2$  est orientée par l'application de Gauss pointant vers le domaine extérieur, alors le jacobien de  $N$  et la courbure de Gauss coïncident.  
2. Montrer que l'application de Gauss d'une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  est un difféomorphisme local en tout point si et seulement si sa courbure de Gauss est partout strictement positive.

**Exercice IV.6.4.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  de courbure moyenne partout strictement positive et soit  $\Omega$  le domaine intérieur de  $\mathcal{S}$ . Fixons  $q \in \Omega$ . Montrer que si  $p$  est le point de  $\mathcal{S}$  le plus proche de  $q$ , alors  $q = p + tN(p)$  pour un certain réel  $t \in [0; \frac{1}{k_2(p)}]$ .

**Exercice IV.6.5.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientable de  $\mathbb{R}^3$  et supposons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $N_\delta(\mathcal{S})$  soit un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ . Si

$$f : \mathcal{S} \rightarrow ]-\delta; \delta[$$

est une application différentiable, alors montrer que

$$\mathcal{S}_f = \{x \in N_\delta(\mathcal{S}) \mid r(x) = f \circ \pi(x)\},$$

où  $\pi$  est la projection sur  $\mathcal{S}$  et  $r$  la distance normale orientée, est une surface en vérifiant que 0 est une valeur régulière de  $r - f \circ \pi$ .

**Exercice IV.6.6.** Montrer que toute surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  est l'image inverse d'une valeur régulière d'une fonction différentiable  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice IV.6.7.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $N_\delta(\mathcal{S})$ ,  $\delta > 0$  un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{S}_r$  la surface parallèle à  $\mathcal{S}$  à distance orientée  $r$ . Montrer que si  $\mathcal{S}$  est de courbure moyenne constante  $H = \frac{1}{2r}$ , alors la courbure de Gauss  $K$  ne s'annule pas et que  $\mathcal{S}_t$  est de courbure de Gauss constante égale à  $\frac{1}{r^2}$ .

# Chapitre V

## Métrie sur les surfaces. Géométrie intrinsèque

Dans notre étude des courbes et des surfaces est apparue une dichotomie dans la nature des résultats : certains d'entre eux sont d'une nature locale, et d'autres de nature globale. Il existe une autre dichotomie, plus difficile à saisir, entre résultats de nature intrinsèque et résultats de nature extrinsèque. Tentons d'expliquer la différence, qui est subtile car masquée par le fait que nous nous sommes placés dans le cadre des sous-variétés de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . De ce fait, les courbes et surfaces sont munies naturellement d'un produit scalaire en chacun de leurs espaces tangents. Si nous avons travaillé avec des variétés abstraites, il aurait fallu d'une part définir l'espace tangent en un point, et d'autre part munir tous les espaces tangents de structures euclidiennes (variant de manière différentiable, ce qui impose des constructions abstraites relativement techniques, comme le fibré tangent, les tenseurs, etc...) - c'est-à-dire munir notre variété d'une **structure riemannienne**. On peut d'ailleurs munir une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de structures riemanniennes qui ne soient pas héritées de l'espace ambiant. L'adjectif intrinsèque se réfère donc à des concepts ou résultats de la géométrie des variétés étudiées qui ne dépendent que de leur structure riemannienne, et pas de la manière dont elles sont réalisées comme sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$ . Par exemple, la longueur des courbes (suffisamment régulières) tracées sur une surface est une notion intrinsèque. Ceci permet d'introduire sur une surface une métrique intrinsèque, la distance entre deux points étant définie comme la longueur minimale d'une courbe tracée sur la surface joignant ces deux points. Une fois cette distance introduite, on peut définir les isométries entre surfaces. On peut alors reformuler le concept d'intrinsèque : cet adjectif s'applique à un résultat ou une notion qui est invariante par isométrie.

Le *theorema Egregium* (théorème remarquable) de Gauss est le fait que la courbure de Gauss, bien que définie via l'application de Gauss, et sa différentielle, l'application de Weingarten, est une grandeur intrinsèque. Pour le démontrer, nous introduisons les dérivées covariantes, ou connexions, sur les surfaces. Sommairement, une dérivée covariante est une structure qui permet de dériver un champ de vecteurs tangents sur une surface par rapport à un autre champ de vecteurs tangents. Une surface de  $\mathbb{R}^3$  est munie naturellement d'une telle dérivée covariante, et l'on peut exprimer la courbure de Gauss en fonction d'un objet attaché à une dérivée covariante, à savoir son tenseur de courbure. Or, il se trouve qu'une dérivée covariante possédant certaines propriétés (torsion nulle et compatibilité avec la structure riemannienne) est déterminée de manière unique. En particulier, elle ne doit pas dépendre de la réalisation de la surface comme sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , mais seulement de la structure riemannienne. C'est ce que confirment les formules

exprimant cette dérivée covariante.

Nous continuons ensuite notre étude de la métrique intrinsèque d'une surface, en nous intéressant aux courbes minimisant la distance entre deux points. Tout d'abord, nous introduisons la notion de variation d'un arc paramétré : intuitivement, c'est une famille d'arcs déformant un arc donné. Si l'arc de départ est de longueur minimale parmi tous les arcs obtenus par variations à extrémités fixées, il est paramétré proportionnellement par la longueur de l'arc et son accélération est partout normale à la surface. Un arc vérifiant ces propriétés est appelé une géodésique de la surface. Le théorème d'existence et d'unicité des géodésiques affirme qu'étant donnés un point de la surface et un vecteur tangent non nul en ce point, il existe une unique géodésique maximale passant par ce point et de vecteur tangent égal à celui fixé. Ce théorème permet de définir les applications exponentielles (la terminologie vient du fait qu'elles généralisent d'une certaine manière les exponentielles de matrices, mais ce rapport est relativement bien caché). Elles réalisent des difféomorphismes entre des boules du plan tangent en un point et des voisinages de ce point dans la surface. Les propriétés de ces applications exponentielles permettent de montrer que localement, deux points (suffisamment proches) d'une surface sont reliés par une géodésique qui réalise la longueur minimale d'une courbe joignant ces deux points. Le théorème de Hopf-Rinow globalise ce résultat à deux points quelconques d'une surface fermée.

Nous établissons ensuite le théorème de Bonnet. Celui-ci affirme qu'une surface connexe fermée dont la courbure de Gauss est minorée par une constante strictement positive est compacte, et donne une majoration pour son diamètre (la distance maximale entre deux de ses points). Nous terminons le chapitre en démontrant l'existence de paramétrages locaux ayant des propriétés utiles pour simplifier les calculs (paramétrages orthogonaux, paramétrages par les lignes de courbures). Comme application nous caractérisons les surfaces connexes de  $\mathbb{R}^3$  de courbures principales constantes (ce sont les ouverts de plans, sphères, ou cylindres).

## V.1 Métrique sur les surfaces

Nous revenons maintenant sur la première forme fondamentale d'une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . L'importance de celle-ci tient au fait que l'on peut grâce à elle traiter de questions métriques sur  $\mathcal{S}$  sans se référer à l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ . On peut en quelque sorte oublier qu'elle provient du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$ , et la voir comme un objet intrinsèque à la surface  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire comme une famille de formes bilinéaires symétriques dépendant (de manière différentiable) du point  $p \in \mathcal{S}$ . Un certain nombre de notions définies sur  $\mathcal{S}$  ne dépendent que de cette première forme fondamentale, et sont donc « intrinsèques ».

Par exemple, l'angle sous lequel deux courbes paramétrées régulières  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  et  $\beta : J \rightarrow \mathcal{S}$  s'intersectent en  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ , donné par

$$\frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle_{\alpha(t_0)}}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|},$$

est une notion intrinsèque.

De même, la longueur de l'arc d'une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , entre les points  $t_0$  et  $t_1$  de  $I$ , donnée par

$$(V.1.1) \quad \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt$$

est une notion intrinsèque. Remarquons que l'on peut étendre cette formule aux courbes paramétrées continues et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

Réécrivons la formule (V.1.1) dans un paramétrage local. Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local. Soit  $\beta : I \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe paramétrée dans  $\mathcal{U}$  et  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta : I \rightarrow \mathcal{S}$  son image dans  $\mathcal{S}$ . On obtient

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|d\mathbf{x}_{\beta(t)}(\beta'(t))\| dt$$

Si on pose  $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ , on obtient  $\beta'(t) = \beta'_1(t)e_1 + \beta'_2(t)e_2$  où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , d'où

$$d\mathbf{x}_{\beta(t)}(\beta'(t)) = \beta'_1(t) \mathbf{x}_u(\beta(t)) + \beta'_2(t) \mathbf{x}_v(\beta(t)).$$

L'expression de la première forme fondamentale en coordonnées (IV.3.2) donne alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\beta'_1(t)^2 E(\beta(t)) + 2\beta'_1(t)\beta'_2(t)F(\beta(t)) + \beta'_2(t)^2 E(\beta(t))} dt.$$

Posons, de manière quelque peu informelle

$$ds = \|\alpha'(t)\| dt, \quad du = \beta'_1(t) dt, \quad dv = \beta'_2(t) dt.$$

On obtient de la formule ci-dessus la « formule »

$$\int ds = \int \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

ce que l'on exprime par l'identité

$$(V.1.2) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

On doit comprendre cette identité comme une notation exprimant le produit scalaire induit sur les espaces tangents par celui de l'espace ambiant dans un paramétrage. Ceci permet par exemple de calculer en coordonnées locales la longueur d'une courbe tracée sur une surface, en fonction des coefficients de la première forme fondamentale.

La première forme fondamentale permet aussi, lorsque  $\mathcal{S}$  est connexe, de munir celle-ci d'une métrique intrinsèque :

$$d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2) = \inf_{\alpha} L_{\alpha}$$

où  $\alpha$  décrit l'ensemble des courbes paramétrées continues,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  tracées sur  $\mathcal{S}$  joignant  $p_1$  à  $p_2$  (c'est-à-dire  $\alpha(0) = p_1$ ,  $\alpha(1) = p_2$ ) et

$$L_{\alpha} = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt$$

est la longueur de la courbe  $\alpha$ .

### Proposition V.1.1.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface connexe de  $\mathbb{R}^3$ . La fonction  $d_{\mathcal{S}}$  définie ci-dessus est bien une distance sur  $\mathcal{S}$ . C'est une fonction continue de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}_+$  ( $\mathcal{S}$  étant munie de la topologie induite de celle de  $\mathbb{R}^3$ ). Elle munit donc  $\mathcal{S}$  d'une structure d'espace métrique (différente de la structure induite de celle de  $\mathbb{R}^3$  en général). La topologie induite de celle de  $\mathbb{R}^3$  et celle donnée par la distance  $d_{\mathcal{S}}$  sont les mêmes.

Démonstration. L'hypothèse de connexité assure l'existence d'une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  joignant deux points quelconques de la surface (exercice 1.11.12). Ainsi, l'ensemble sur lequel on prend l'inf est non vide. On a évidemment  $d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2) = d_{\mathcal{S}}(p_2, p_1) \geq 0$  quels que soient  $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ . L'inégalité triangulaire est évidente (on voit l'utilité d'avoir considéré des courbes paramétrées continues  $\mathcal{C}^1$  par morceaux plutôt que  $\mathcal{C}^1$ ). Il reste à montrer la propriété de séparation, c'est-à-dire  $[d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2) = 0] \Rightarrow [p_1 = p_2]$ .

Supposons que  $d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2) = 0$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une courbe paramétrée  $\alpha : [0; 1] \rightarrow \mathcal{S}$  avec  $\alpha(0) = p_1$ ,  $\alpha(1) = p_2$  et  $L_{\alpha} < \epsilon$ . On a

$$\|p_1 - p_2\| \leq L_{\alpha} < \epsilon$$

car le chemin le plus court entre deux points dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  est le segment. On obtient  $\|p_1 - p_2\| = 0$ , et donc  $p_1 = p_2$ .

Montrons la continuité de  $d_{\mathcal{S}}$ . Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{S}$ , et  $(a_n)_n$ ,  $(b_n)_n$  deux suites de points de  $\mathcal{S}$  tendant respectivement vers  $a$  et  $b$  respectivement (pour la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ ). Comme

$$d_{\mathcal{S}}(a, b) \leq d_{\mathcal{S}}(a, a_n) + d_{\mathcal{S}}(a_n, b_n) + d_{\mathcal{S}}(b_n, b)$$

on a

$$d_{\mathcal{S}}(a, b) - d_{\mathcal{S}}(a, a_n) - d_{\mathcal{S}}(b_n, b) \leq d_{\mathcal{S}}(a_n, b_n) \leq d_{\mathcal{S}}(a_n, a) + d_{\mathcal{S}}(a, b) + d_{\mathcal{S}}(b, b_n)$$

Il suffit donc de montrer que  $d_{\mathcal{S}}(a, a_n)$  et  $d_{\mathcal{S}}(b, b_n)$  tendent vers 0. Montrons donc que si  $(a_n)_n$  tend vers  $a$ , alors  $d_{\mathcal{S}}(a, a_n)$  tend vers 0.

Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $a$ . On peut supposer que la suite  $(a_n)_n$  est à valeurs dans l'image de ce paramétrage. Posons  $q = \mathbf{x}^{-1}(a)$ ,  $q_n = \mathbf{x}^{-1}(a_n)$ . Soit  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(q, r) \subset \mathcal{U}$ . Pour  $n$  assez grand,  $q_n$  est dans  $\bar{B}(q, r)$ . Considérons pour tout  $n$ , le segment

$$\beta_n : [0; 1] \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto tq + (1 - t)q_n$$

joignant  $q_n$  à  $q$ . Alors

$$\alpha_n : [0; 1] \rightarrow \mathcal{S}, \quad t \mapsto \mathbf{x} \circ \beta_n$$

est un chemin joignant  $a_n$  à  $a$ , et l'on a donc

$$d_{\mathcal{S}}(a_n, a) \leq \int_0^1 \|\alpha'_n(t)\| dt = \int_0^1 \|(\mathbf{x} \circ \beta_n)'(t)\| dt = \int_0^1 \|d\mathbf{x}_{\beta_n(t)}(\beta'_n(t))\| dt$$

Comme  $\mathbf{x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $y \mapsto d\mathbf{x}_y$  est bornée sur le compact  $\bar{B}(q, r)$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $y \in \bar{B}(q, r)$ , pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|d\mathbf{x}_y(v)\| \leq M \|v\|$ . D'autre part  $\beta'_n(t) = q - q_n$ . On obtient donc

$$d_{\mathcal{S}}(a_n, a) \leq M \|q - q_n\|,$$

ce qui montre le résultat voulu.

La continuité de  $d_{\mathcal{S}}$  pour la topologie induite de celle de  $\mathbb{R}^n$  montre que celle-ci est plus fine que la topologie donnée par la distance  $d_{\mathcal{S}}$ . Pour montrer que ces deux topologies sont les mêmes, il suffit donc de voir que la seconde est plus fine que la première, ou encore que la distance euclidienne induite de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\mathcal{S}$  est continue pour la topologie de  $\mathbb{R}^3$  donnée par  $d_{\mathcal{S}}$ . Ceci est immédiat car  $\|a - b\| \leq d_{\mathcal{S}}(a, b)$  quels que soient  $a, b$  dans  $\mathcal{S}$ . Ceci termine la démonstration de la proposition.  $\square$

**Remarque V.1.2.** La distance  $d_{\mathcal{S}}$  est celle qui est pertinente pour d'hypothétiques habitants de la surface (un peu comme jusqu'à une époque récente, les humains sur la surface de la terre). La distance entre deux points  $p_1$  et  $p_2$  est le temps minimal que met un de ces habitants pour aller de  $p_1$  à  $p_2$  en se déplaçant à vitesse 1.

**Exercice V.1.3.** Trouver des exemples de surfaces connexes  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^3$  où la distance  $d_{\mathcal{S}}$  et la distance induite de celle de  $\mathbb{R}^3$  ne sont pas équivalentes. Montrer que si  $\mathcal{S}$  est compacte, ces deux distances sont toujours équivalentes.

Ayant muni les surfaces connexes de  $\mathbb{R}^3$  d'une distance intrinsèque, on peut définir la notion d'isométrie entre surfaces connexes.

**Définition V.1.4.**

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux surfaces connexes de  $\mathbb{R}^3$ . Une **isométrie** de  $\mathcal{S}_1$  vers  $\mathcal{S}_2$  est une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  telle que pour tout couple de points  $(p_1, p_2)$  dans  $\mathcal{S}_1$ ,

$$d_{\mathcal{S}_1}(p_1, p_2) = d_{\mathcal{S}_2}(f(p_1), f(p_2)).$$

**Remarque V.1.5.** Une application qui préserve les distances est nécessairement continue et injective. Nous imposons de plus l'hypothèse de différentiabilité dans la définition d'une isométrie.

Donnons un critère pour qu'une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  soit une isométrie.

**Proposition V.1.6.**

Une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  est une isométrie si elle est injective et si pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$df_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{S}_2$$

est une isométrie linéaire.

Une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  telle que pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,  $df_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{S}_2$  est une isométrie linéaire est appelée une **isométrie infinitésimale** de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{S}_2$ . Remarquons qu'on ne suppose pas ici que les surfaces soient connexes. La proposition exprime donc le fait qu'une isométrie infinitésimale injective est une isométrie.

**Remarque V.1.7.** Réciproquement, supposons que  $f$  soit une isométrie, donc injective. Nous montrerons plus loin (proposition V.5.15) que  $f$  est une isométrie infinitésimale. Ceci justifie l'extension suivante de la notion d'isométrie à des surfaces non nécessairement connexes : une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  est une isométrie si c'est une isométrie infinitésimale injective. De plus, nous avons vu qu'alors  $f$  réalise un difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert de  $\mathcal{S}_2$ .

**Lemme V.1.8.**

Une application différentiable  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  est une isométrie infinitésimale si et seulement si elle préserve la longueur des courbes tracées sur  $\mathcal{S}_1$ .

Démonstration. Soit  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_1$  une courbe paramétrée tracée sur  $\mathcal{S}_1$ . Sa longueur est

$$L_\alpha = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt$$

Soit  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_2$ ,  $\beta = f \circ \alpha$ . Sa longueur est

$$L_\beta = \int_0^1 \|\beta'(t)\| dt = \int_0^1 \|df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| dt.$$

On voit donc que si  $f$  est une isométrie infinitésimale, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\|df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| = \|\alpha'(t)\|$ , et donc  $L_\alpha = L_\beta$ .

Réciproquement, si  $f$  préserve la longueur des courbes tracées sur  $\mathcal{S}_1$ , on a pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$L_\alpha(s) = \int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = L_\beta(s) = \int_0^s \|\beta'(t)\| dt = \int_0^s \|df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| dt.$$

En différentiant par rapport à  $s$  et en évaluant en  $s = 0$ , on obtient

$$\|\alpha'(0)\| = \|df_{\alpha(0)}(\alpha'(0))\|.$$

Or pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}_1$  et tout vecteur  $v$  de  $T_p\mathcal{S}_1$ , on peut trouver une courbe paramétrée  $\alpha$  comme ci-dessus telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v$ . Ceci finit de montrer le lemme.  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition. Supposons que  $f$  soit une isométrie infinitésimale injective. En particulier, la différentielle de  $f$  en chaque point est un isomorphisme linéaire, et par le théorème d'inversion locale,  $f$  est un difféomorphisme local. L'hypothèse d'injectivité nous permet alors d'affirmer que  $f$  réalise un difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert de  $\mathcal{S}_2$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{S}_2$  par cette image, on peut donc supposer que  $f$  est un difféomorphisme entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . D'après le lemme,  $f$  préserve la longueur des courbes tracées sur  $\mathcal{S}_1$ . On a  $d_{\mathcal{S}_1}(a, b) = \inf L_\alpha$  où  $\alpha$  est une courbe joignant les points  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{S}_1$ . Pour un tel  $\alpha$ ,  $f \circ \alpha$  est une courbe joignant les points  $f(a)$  et  $f(b)$  de  $\mathcal{S}_2$ . On a donc

$$L_\alpha = L_{f \circ \alpha} \geq d_{\mathcal{S}_2}(f(a), f(b))$$



En prenant l'inf sur  $\alpha$ , on obtient  $d_{\mathcal{S}_1}(a, b) \geq d_{\mathcal{S}_2}(f(a), f(b))$ . Le difféomorphisme inverse  $f^{-1}$  vérifie les mêmes hypothèses que  $f$ , et le raisonnement ci-dessus appliqué à  $f^{-1}$  nous donne l'inégalité dans l'autre sens, ce qui montre que  $f$  est une isométrie.  $\square$

**Remarque V.1.9.** Il est clair que la composée de deux isométries infinitésimales est une isométrie infinitésimale, et que la composée de deux isométries est une isométrie. D'autre part, comme nous l'avons vu, lorsque  $f$  est une isométrie qui de plus est surjective, c'est alors un difféomorphisme, et son inverse  $f^{-1}$  est encore une isométrie. L'ensemble des isométries bijectives d'une surface  $\mathcal{S}$  dans elle-même est donc un groupe pour la composition des applications que l'on appelle le **groupe d'isométries** de la surface.

**Exercice V.1.10.** Soit  $P$  le plan d'équation  $z = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$  et soit  $C$  le cylindre d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ . Montrer que l'application  $f : P \rightarrow C$ ,  $f(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$  est une isométrie infinitésimale.

## V.2 Théorème fondamental de la théorie des surfaces

Ce théorème est du à O. Bonnet (1867). C'est l'analogue du théorème fondamental de la théorie des courbes planes II.2.25. Commençons par remarquer que les déplacements de  $\mathbb{R}^3$  préservent les formes fondamentales des surfaces.

Soit  $\phi : x \mapsto Ax + b$  un déplacement de  $\mathbb{R}^3$ ,  $A$  étant une matrice dans  $\mathbf{O}(3)$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . En tout point, la différentielle de  $\phi$  est donnée par  $A$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{S}' = \phi(\mathcal{S})$ . Posons

$$f = \phi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'.$$

C'est un difféomorphisme entre les surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ . C'est aussi une isométrie infinitésimale, car

$$(V.2.1) \quad \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)} = \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle_p, \quad (p \in \mathcal{S}), \quad (v, w \in T_p\mathcal{S})$$

Si la surface  $\mathcal{S}$  est orientée, d'application de Gauss  $N$ , l'application

$$N' : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad p' \mapsto A \circ N \circ f^{-1}(p')$$

est une application de Gauss pour  $\mathcal{S}'$  (remarquons que  $T_{f(p)}\mathcal{S}' = A(T_p\mathcal{S})$ ). En différentiant  $N' \circ f = A \circ N$ , on obtient

$$dN'_{f(p)} \circ df_p = A \circ dN_p, \quad (p \in \mathcal{S}).$$

Les secondes formes fondamentales  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont ainsi liées par la relation :

$$(V.2.2) \quad \sigma'_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) = \sigma_p(v, w), \quad (p \in \mathcal{S}), \quad (v, w \in T_p\mathcal{S}).$$

En effet

$$\begin{aligned} \sigma'_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) &= -\langle dN'_{f(p)}(df_p(v)), df_p(w) \rangle = -\langle A(dN_p(v)), df_p(w) \rangle \\ &= -\langle A(dN_p(v)), A(w) \rangle = -\langle dN_p(v), w \rangle = \sigma_p(v, w). \end{aligned}$$

L'équation (V.2.2) s'interprète comme le fait qu'un déplacement de l'espace préserve la seconde forme fondamentale, l'équation (V.2.1) comme le fait qu'elle préserve la première forme fondamentale. Le théorème de Bonnet établit une réciproque.

**Théorème V.2.1** (Théorème fondamental de la théorie des surfaces).

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux surfaces orientées de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{S}_1$  étant de plus connexe. Soient  $N_1$  et  $N_2$  les applications de Gauss associées aux choix d'orientations sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  et  $\sigma_1, \sigma_2$  les secondes formes fondamentales correspondantes.

Si  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  préserve les premières et secondes formes fondamentales sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , alors il existe un déplacement de l'espace  $\Psi$  tel que  $f = \Psi|_{\mathcal{S}_1}$ .

*Démonstration.* Soit  $p_0 \in \mathcal{S}_1$ . Comme  $f$  est un difféomorphisme local, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_1$  de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}_1$  et un voisinage  $\mathcal{W}_2$  de  $f(p_0)$  dans  $\mathcal{S}_2$ , tous deux ouverts et connexes, tels que  $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$  soit un difféomorphisme, et d'après le théorème d'existence de voisinages tubulaires (voir section IV.5), quitte à réduire  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$ , il existe un nombre  $\epsilon > 0$  tel que les voisinages tubulaires  $N_\epsilon(\mathcal{W}_1)$  et  $N_\epsilon(\mathcal{W}_2)$  soient bien définis. Définissons

$$\phi : N_\epsilon(\mathcal{W}_1) \rightarrow N_\epsilon(\mathcal{W}_2), \quad \phi(p + tN_1(p)) = f(p) + t(N_2 \circ f)(p), \quad (|t| < \epsilon, p \in \mathcal{W}_1).$$

Nous allons démontrer que  $\phi$  est une isométrie infinitésimale.

L'application  $\phi$  est différentiable, car  $\phi = F_2 \circ (f \times \text{Id}_{]-\epsilon; \epsilon[}) \circ F_1^{-1}$ , où

$$F_1 : \mathcal{W}_1 \times ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow N_\epsilon(\mathcal{W}_1) \quad \text{et} \quad F_2 : \mathcal{W}_2 \times ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow N_\epsilon(\mathcal{W}_2)$$

sont les difféomorphismes introduits dans la section IV.5. Comme

$$\phi \circ F_1 = F_2 \circ (f \times \text{Id}_{]-\epsilon; \epsilon[}),$$

on a en différentiant

$$d\phi_{F_1(p,t)} \circ d(F_1)_{(p,t)} = d(F_2)_{(f(p),t)} \circ (df_p \times \text{Id}_{\mathbb{R}}).$$

Évaluons ceci en  $(v, 0) \in T_p\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R}$ , en utilisant le fait (voir équation (IV.5.1)) que

$$d(F_1)_{(p,t)}(v, h) = \text{Id}_{T_p\mathcal{S}_1}(v) + td(N_1)_p(v) + hN_1(p), \quad ((v, t) \in T_p\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R})$$

et

$$d(F_2)_{(y,t)}(v, h) = \text{Id}_{T_p\mathcal{S}_2}(v) + td(N_2)_y(v) + hN_2(y), \quad ((v, t) \in T_{f(p)}\mathcal{S}_2 \times \mathbb{R}).$$

On obtient

$$(V.2.3) \quad \left( \text{Id}_{T_{f(p)}\mathcal{S}_2} + td(N_2)_{f(p)} \right) \circ df_p(v) = d\phi_{F_1(p,t)} \circ \left( \text{Id}_{T_p\mathcal{S}_1} + td(N_1)_p \right).$$

De même, en évaluant en  $(0, 1) \in T_p\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R}$ , on obtient

$$(V.2.4) \quad d\phi_{p+tN_1(p)}(N_1(p)) = N_2(f(p)).$$

Comme  $f$  préserve la seconde forme fondamentale par hypothèse, on a

$$\langle d(N_2)_{f(p)}(df_p(u)), df_p(v) \rangle = -\sigma_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = -\sigma_p(u, v) = \langle d(N_1)_p(u), v \rangle,$$

quels que soient  $u, v \in T_p\mathcal{S}_1$ . Comme  $f$  est une isométrie infinitésimale, on en tire

$$d(N_2)_{f(p)} \circ df_p = df_p \circ d(N_1)_p.$$

En reportant dans (V.2.3), ceci nous donne pour tout  $v \in T_p \mathcal{S}_1$ ,

$$df_p \circ (v + td(N_1)_p(v)) = d\phi_{F_1(p,t)} \circ (v + td(N_1)_p(v)).$$

Or  $\text{Id}_{T_p \mathcal{S}_1} + td(N_1)_p$  est un isomorphisme pour tout  $(p, t) \in \mathcal{W}_1 \times ]-\epsilon; \epsilon[$ , donc on obtient finalement,

$$d\phi_{p+td(N_1)_p}(v) = df_p(v), \quad (v \in T_p \mathcal{S}_1), \quad d\phi_{p+td(N_1)_p}(N_1(p)) = N_2(f(p)).$$

Ceci montre que  $\phi$  est une isométrie infinitésimale. Nous allons conclure grâce au lemme suivant.

**Lemme V.2.2.**

Soit  $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  un difféomorphisme entre deux ouverts connexes de  $\mathbb{R}^3$  qui soit aussi une isométrie infinitésimale. Alors  $F$  est la restriction à  $\mathcal{V}_1$  d'un déplacement de l'espace.

Démonstration. Pour tout  $x \in \mathcal{V}_1$ ,  $dF_x$  est un élément de  $\mathbf{O}(3)$ , c'est-à-dire que

$$\langle dF_x(v), dF_x(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad (v, w \in \mathbb{R}^3).$$

Ceci nous donne,

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

En dérivant par rapport à  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , on obtient

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

En utilisant le lemme de Schwarz, on voit que

$$G_{ijk} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle$$

est symétrique en  $i$  et  $j$ , antisymétrique en  $j$  et  $k$ , d'où

$$G_{ijk} = -G_{ikj} = -G_{kij} = G_{kji} = G_{jki} = -G_{jik} = -G_{ijk}.$$

Ainsi

$$G_{ijk} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Or  $\left( \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right)$  forme une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$  en tout point  $x \in \mathcal{V}_1$ , et donc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Les composantes de  $F$  sont par conséquent des fonctions affines. Ainsi comme  $\mathcal{V}_1$  est connexe, il existe un endomorphisme  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^3$  tels que  $F(x) = Ax + b$  pour tout  $x \in \mathcal{V}_1$ . Comme  $dF_x = A$ , on a  $A \in \mathbf{O}(3)$ , et  $F$  est bien la restriction à  $\mathcal{V}_1$  d'un déplacement de  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

Finissons la démonstration du théorème. D'après le lemme  $\phi$  est la restriction à  $N_\epsilon(\mathcal{W}_1)$  d'un déplacement de l'espace. Nous avons donc montré que pour tout  $p_0 \in \mathcal{S}_1$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_1$  de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}_1$  et un déplacement de l'espace  $x \mapsto \psi(x) = Ax + b$  tel que  $\psi|_{\mathcal{W}_1} = f|_{\mathcal{W}_1}$  et  $(N_2 \circ f)|_{\mathcal{W}_1} = (A \circ N_1)|_{\mathcal{W}_1}$ . Comme  $\mathcal{S}_1$  est connexe, ces déplacements du plan doivent tous être les mêmes.  $\square$

## V.3 Dérivée covariante

### V.3.1 Dérivée covariante sur une sous-variété

Soient  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  et  $X$  un champ de vecteurs tangents de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{S}$ . Nous avons vu que  $f \mapsto X \cdot f$  est une dérivation de l'algèbre des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$  (voir section I.9.2).

Nous aimerions maintenant définir de manière similaire la dérivée d'un autre champ de vecteurs tangents  $Y$  selon le champ tangent  $X$ . Il n'existe pas de manière canonique de faire ceci (c'est-à-dire d'une manière qui soit intrinsèque à  $\mathcal{S}$ , et ne dépende pas de son plongement dans l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$ ). Nous allons donc garder une certaine souplesse, en définissant la notion de **dérivée covariante** (on emploie aussi la terminologie **connexion**) comme étant une transformation qui étant donnés deux champs de vecteurs tangents  $X$  et  $Y$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{S}$ , produit un autre champ de vecteurs tangents  $\mathcal{C}^\infty$ , noté  $\nabla_X Y$ , où l'on impose à l'opérateur  $\nabla$  de posséder certaines propriétés généralisant naturellement les règles du calcul différentiel sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

Commençons par étudier le cas où  $\mathcal{S} = \mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Dans ce cas, un champ de vecteurs est simplement une fonction sur  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^N$  et l'on dispose d'une manière canonique de définir une dérivée covariante sur  $\mathcal{U}$ . Soit  $X, Y$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Si l'on note  $Y = (y_1, \dots, y_N)$ , la **dérivée covariante canonique** de  $Y$  en  $p$  selon  $X$  est le vecteur

$$(\bar{D}_X Y)(p) = (d(y_1)_p(X(p)), \dots, d(y_N)_p(X(p))) = dY_p(X(p)) \in \mathbb{R}^N.$$

Il est clair que  $\bar{D}$  définit une application :

$$\bar{D} : \mathcal{X}(\mathcal{U}) \times \mathcal{X}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{U}), \quad (X, Y) \mapsto \bar{D}_X Y.$$

#### Proposition V.3.1.

Soient  $Y, Z, X, W$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  et  $p$  un point de  $\mathcal{U}$ . On a alors :

- (i)  $\bar{D}_X(Y + Z) = \bar{D}_X Y + \bar{D}_X Z$ ,
- (ii)  $\bar{D}_{X+W} Y = \bar{D}_X Y + \bar{D}_W Y$ ,
- (iii)  $\bar{D}_{fX} Y = f (\bar{D}_X Y)$ ,
- (iv)  $\bar{D}_X(fY) = (X \cdot f) Y + f \bar{D}_X Y$ .

Démonstration. Ces propriétés découlent immédiatement de la définition de  $\bar{D}$  et du calcul différentiel élémentaire. On peut aussi le vérifier avec des formules explicites. Si

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

alors

$$(V.3.1) \quad \bar{D}_X(Y) = \sum_{i,j=1}^N a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

□

**Remarque V.3.2.** Remarquons que  $(\bar{D}_X Y)(p)$  ne dépend que de la valeur  $X(p)$  du champ de vecteur  $X$  en  $p$ . D'autre part  $\bar{D}_X Y$  est déterminé par la restriction de  $Y$  à la trace d'une courbe paramétrée  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $\alpha(t_0) = p$  et  $\alpha'(t_0) = X(p)$ . En effet, si on considère

$$I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (y_1(\alpha(t)), \dots, y_N(\alpha(t))) = (y_1(t), \dots, y_N(t)),$$

on a  $\bar{D}_X Y(p) = \bar{D}_X Y(\alpha(t_0)) = (y'_1(t_0), \dots, y'_N(t_0))$ . En particulier, si  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$  est une courbe paramétrée dans  $\mathcal{U}$  dont on note  $\vec{T}$  le vecteur tangent (i.e.  $\vec{T}(t) = \alpha'(t)$  pour tout  $t \in I$ ), et si  $Y$  est un champ de vecteurs défini sur  $\alpha(I)$ , alors  $\bar{D}_{\vec{T}} Y$  est bien défini comme champ de vecteurs sur  $\alpha(I)$ . Si  $Y = \vec{T}$ , on trouve  $\bar{D}_{\vec{T}} \vec{T}(\alpha(t)) = \alpha''(t)$ .

La dérivée covariante canonique  $\bar{D}$  sur  $\mathbb{R}^N$  possède des propriétés relativement au produit scalaire et au crochet de Lie.

**Proposition V.3.3.**

Soient  $X, Y, Z$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . On a :

$$(v) \quad \bar{D}_Y Z - \bar{D}_Z Y = [Y, Z],$$

$$(vi) \quad X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle \bar{D}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{D}_X Z \rangle.$$

Démonstration. On vérifie directement (v) par le calcul en coordonnées, en utilisant la formule pour le crochet établie dans l'exercice I.9.12.

Dans le membre de gauche de (vi), on a noté  $\langle Y, Z \rangle$  la fonction  $p \mapsto \langle Y(p), Z(p) \rangle_p$  sur  $\mathcal{U}$ . Soit  $p$  un point de  $\mathcal{U}$  et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $\alpha(t_0) = p$  et  $\alpha'(t_0) = X(p)$ . Posons  $Y = (y_1, \dots, y_N)$  et  $Z = (z_1, \dots, z_N)$ . Considérons

$$I \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad t \mapsto (y_1(\alpha(t)), \dots, y_N(\alpha(t))) = (y_1(t), \dots, y_N(t)),$$

et

$$I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (z_1(\alpha(t)), \dots, z_N(\alpha(t))) = (z_1(t), \dots, z_N(t)),$$

On a  $\bar{D}_X Y(p) = \bar{D}_X Y(\alpha(t_0)) = (y'_1(t_0), \dots, y'_N(t_0))$  et  $\bar{D}_X Z(p) = \bar{D}_X Z(\alpha(t_0)) = (z'_1(t_0), \dots, z'_N(t_0))$ . Le membre de droite évalué en  $p$  est donc

$$\sum_{i=1}^N y'_i(t_0) z_1(t_0) + y_i(t_0) z'_1(t_0) = \left( \sum_{i=1}^N y_i z_i \right)'(t_0) = (\langle Y \circ \alpha, Z \circ \alpha \rangle)'(t_0) = (X \cdot \langle Y, Z \rangle)(p).$$

□

Le résultat suivant prendra tout son sens un peu plus tard (cf. définition V.3.4) .

**Proposition V.3.4.**

Soient  $X, Y, Z$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . On a :

$$\bar{D}_X(\bar{D}_Y Z) - \bar{D}_Y(\bar{D}_X Z) - \bar{D}_{[X,Y]} Z = 0.$$

*Démonstration.* On le vérifie directement par le calcul en coordonnées, en utilisant la formule pour le crochet établie dans l'exercice I.9.12.  $\square$

Revenons maintenant au cas général des sous-variétés. Ce qui précède nous conduit à la définition suivante.

**Définition V.3.5.**

Soit  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . Une **dérivée covariante**, sur  $\mathcal{S}$  est un opérateur

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{S}) \times \mathcal{X}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{S})$$

vérifiant quels que soient  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\mathcal{S})$ , quelle que soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ ,

- (i)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
- (ii)  $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$ ,
- (iii)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ,
- (iv)  $\nabla_X(fY) = (X \cdot f) Y + f(\nabla_X Y)$ .

**Remarque V.3.6.** La notion de dérivée covariante est fondamentale. Elle permet de faire agir les champs de vecteurs non seulement sur les fonctions, mais aussi sur les autres champs de vecteurs, et plus généralement sur des objets de la théorie appelés champs de tenseurs. C'est une structure supplémentaire dont on peut munir les variétés. En particulier, il n'est pas clair que ceci existe toujours (en fait oui, il y en a même beaucoup).

Dans le cadre qui nous intéresse (sous-variétés dans un espace euclidien, mais plus généralement variétés riemanniennes), il se produit un miracle. Il existe une et une seule dérivée covariante compatible (en un certain sens) avec la structure riemannienne. C'est ce que nous allons développer dans la section suivante pour les surfaces de  $\mathbb{R}^3$ .

**V.3.2 Dérivée covariante sur une surface de  $\mathbb{R}^3$** 

On revient maintenant au cas d'une surface  $\mathcal{S}$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . On note comme ci-dessus  $\bar{D}$  la connexion canonique sur  $\mathbb{R}^3$ . On suppose  $\mathcal{S}$  orientée et on note  $N$  l'application de Gauss correspondante et  $L_p = -dN_p$  l'application de Weingarten au point  $p \in \mathcal{S}$ . Nous allons déduire de  $\bar{D}$  une dérivée covariante sur  $\mathcal{S}$ .

**Définition V.3.7.**

Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  tangents sur  $\mathcal{S}$ . Posons

$$\nabla_X Y = \bar{D}_X Y - \langle LX, Y \rangle N.$$

**Remarque V.3.8.** L'égalité  $\bar{D}_X Y = \nabla_X Y + \langle L(X), Y \rangle N$  est la décomposition orthogonale de  $\bar{D}_X Y$  en sa composante tangentielle  $\nabla_X Y$  et sa composante normale  $\langle L(X), Y \rangle N$ . En effet, comme  $\langle Y, N \rangle = 0$  en tout point, on a

$$X \cdot \langle Y, N \rangle = 0 = \langle \bar{D}_X Y, N \rangle + \langle Y, \bar{D}_X N \rangle = \langle \bar{D}_X Y, N \rangle + \langle Y, dN(X) \rangle = \langle \bar{D}_X Y, N \rangle - \langle Y, L(X) \rangle.$$

La manière de définir cette dérivée covariante est la plus simple qui soit : on utilise la dérivée covariante de l'espace ambiant et la projection orthogonale sur les espaces tangents.

Le résultat qui suit exprime la compatibilité entre la dérivée covariante et la première forme fondamentale.

### Théorème V.3.9.

L'opérateur  $\nabla$  est une dérivée covariante sur  $\mathcal{S}$ , qui vérifie de plus, quels que soient  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{S})$ ,

$$(v) \quad \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z],$$

$$(vi) \quad (X \cdot \langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\nabla_X Y$  est bien un champ tangent à  $\mathcal{S}$ . Il suffit de voir que  $\langle \nabla_X Y, N \rangle = 0$ . Or

$$\langle \nabla_X Y, N \rangle = \langle \bar{D}_X Y, N \rangle - \langle LX, Y \rangle \langle N, N \rangle.$$

Comme  $\langle \bar{D}_X Y, N \rangle + \langle Y, \bar{D}_X N \rangle = X \cdot \langle Y, N \rangle = 0$  (propriété (vi) de  $\bar{D}$ ), on obtient

$$\langle \nabla_X Y, N \rangle = -\langle Y, \bar{D}_X N \rangle - \langle LX, Y \rangle = \langle Y, L(X) \rangle - \langle LX, Y \rangle = 0.$$

Il est clair que le champ  $\nabla_X Y$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $X$  et  $Y$  le sont. Vérifions maintenant les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) d'une dérivée covariante. Elles découlent facilement des propriétés correspondantes de  $\bar{D}$ , de la linéarité de  $L$  et de la bilinéarité du produit scalaire. Enfin, les propriétés (v) et (vi) de  $\nabla$  découlent elles aussi immédiatement des propriétés (v) et (vi) de  $\bar{D}$ .  $\square$

**Remarque V.3.10.** Soient  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{S})$ . La valeur en un point  $p \in \mathcal{S}$  de  $\nabla_X Y$  ne dépend que de la valeur  $X(p)$  de  $X$  en  $p$  et de la restriction de  $Y$  à un arc paramétré  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  passant par  $p$  et de vecteur tangent en  $t$  égal à  $X(p)$ . En effet, d'après la remarque V.3.2, ceci est vrai pour la dérivée covariante canonique  $\bar{D}$  sur  $\mathbb{R}^3$ , et donc cela reste vrai pour sa projection sur  $T_p \mathcal{S}$ .

### V.3.3 Equations de Gauss et de Codazzi-Mainardi

Nous allons maintenant reprendre l'équation de la proposition V.3.4 et la décomposer selon ses composantes tangentielle et normale.

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{D}_X(\bar{D}_Y Z) - \bar{D}_Y(\bar{D}_X Z) - \bar{D}_{[X,Y]} Z \\
&= \bar{D}_X(\nabla_Y Z + \langle L(Y), Z \rangle N) - \bar{D}_Y(\nabla_X Z + \langle L(X), Z \rangle N) - \bar{D}_{[X,Y]} Z \\
&= \bar{D}_X(\nabla_Y Z) + \langle L(Y), Z \rangle L(X) + X \cdot \langle L(Y), Z \rangle N \\
&\quad - \bar{D}_Y(\nabla_X Z) - \langle L(X), Z \rangle L(Y) - Y \cdot \langle L(X), Z \rangle N - \bar{D}_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z) + \langle L(X), \nabla_Y Z \rangle N + X \cdot \langle L(Y), Z \rangle N - \langle L(Y), Z \rangle L(X) \\
&\quad - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \langle L(Y), \nabla_X Z \rangle N - Y \cdot \langle L(X), Z \rangle N + \langle L(X), Z \rangle L(Y) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \langle L([X,Y]), Z \rangle N
\end{aligned}$$

La composante tangentielle donne **l'équation de Gauss** :

$$(V.3.2) \quad \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z = \langle L(Y), Z \rangle L(X) - \langle L(X), Z \rangle L(Y).$$

La composante normale donne

$$\begin{aligned}
&\langle L(X), \nabla_Y Z \rangle + X \cdot \langle L(Y), Z \rangle - \langle L(Y), \nabla_X Z \rangle - Y \cdot \langle L(X), Z \rangle - \langle L([X,Y]), Z \rangle \\
&= \langle \nabla_Y L(X), Z \rangle - \langle \nabla_X L(Y), Z \rangle - \langle L([X,Y]), Z \rangle \\
&= \langle \nabla_X L(Y) - \nabla_Y L(X) - L([X,Y]), Z \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout  $Z$ , on en déduit **l'équation de Codazzi-Mainardi** :

$$(V.3.3) \quad \nabla_X L(Y) - \nabla_Y L(X) - L([X,Y]) = 0$$

Soient  $X, Y$  et  $Z$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  tangents sur  $\mathcal{S}$ . Posons

$$(V.3.4) \quad R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

L'équation (V.3.2) montre que  $R(X, Y)(Z)(p)$ ,  $p \in \mathcal{S}$  ne dépend que des valeurs de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  en  $p$ .

Nous déduisons immédiatement de l'équation (V.3.2) le

### Théorème V.3.11.

Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $X, Y$  deux champs de vecteurs tangents définis dans un voisinage de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $(X_p, Y_p) = (X(p), Y(p))$  soit une base orthonormale de  $T_p \mathcal{S}$ . Alors la courbure de Gauss  $K(p)$  de  $\mathcal{S}$  en  $p$  est donnée par

$$\begin{aligned}
K(p) &= \det L_p = \langle L(Y_p), Y_p \rangle \langle L(X_p), X_p \rangle - \langle L(X_p), Y_p \rangle \langle L_p(Y_p), X_p \rangle \\
&= \langle R(X, Y)(Y), X \rangle(p).
\end{aligned}$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de l'équation de Gauss. □



**Remarque V.3.12.** Donnons une formule pour la courbure de Gauss en coordonnées locales. Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ . Écrivons l'équation de Gauss pour les champs de vecteurs  $\mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$  et  $\mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}$ , en utilisant le fait que  $[\mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}, \mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}] = 0$  (corollaire I.9.16). Pour simplifier, écrivons  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  à la place de  $\mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$  et  $\mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle R(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v - \nabla_{\mathbf{x}_v} \nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \langle L(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle \langle L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle - \langle L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle \langle L(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \sigma(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \sigma(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) - \sigma(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)^2 \\ &= eg - f^2 = (EG - F^2) K \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la formule (IV.3.1). Finalement, on obtient

$$(V.3.5) \quad K(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v - \nabla_{\mathbf{x}_v} \nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle}{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2}(u, v)$$

### V.3.4 Dérivée covariante et première forme fondamentale

Le résultat important qui suit peut être vu comme la formulation moderne du célèbre **Theorema Egregium** (théorème remarquable) de Gauss. En vertu du théorème V.3.11 ci-dessus, il exprime en particulier le fait que la courbure de Gauss ne dépend pas de la seconde forme fondamentale, mais seulement de la première.

#### Théorème V.3.13.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ . La dérivée covariante  $\nabla$  ne dépend que de la première forme fondamentale. En effet, il existe une unique dérivée covariante sur  $\mathcal{S}$  vérifiant (v) et (vi).

*Démonstration.* Il suffit de travailler sur un ouvert  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  où  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  est un paramétrage de  $\mathcal{S}$ . En effet, l'unicité sur chacun de ces ouverts montre que les dérivées covariantes ainsi construites coïncident sur leurs intersections.

En chaque point  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$  forme une base de l'espace tangent. Les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) d'une dérivée covariante montrent que celle-ci est entièrement déterminée par  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathbf{x}_b$  où  $a, b \in \{u, v\}$ . Posons, quels que soient  $a, b \in \{u, v\}$ ,

$$(V.3.6) \quad \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathbf{x}_b = \Gamma_{ab}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{ab}^v \mathbf{x}_v.$$

La dérivée covariante  $\nabla$  est donc entièrement déterminée par les  $\Gamma_{ab}^c$  sur  $\mathcal{U}$ . On appelle ces fonctions les **symboles de Christoffel** de la dérivée covariante  $\nabla$ .

Réciproquement, étant donnés des fonctions  $\Gamma_{ab}^c$  sur  $\mathcal{U}$ , on peut définir  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathbf{x}_b$  par la formule précédente, et étendre ceci en une dérivée covariante  $\nabla$  grâce aux propriétés (i), (ii), (iii), (iv).

Nous avons introduit dans la section IV.3 la matrice de la première forme fondamentale

$$M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{pmatrix}.$$

Notons  $(M^{-1})_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  les coefficients de la matrice inverse.

Si  $\nabla$  est une dérivée covariante vérifiant (v) et (vi), comme  $[\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b] = 0$  quels que soient  $a, b \in \{u, v\}$ , (voir corollaire I.9.16), on a

$$\mathbf{x}_a \cdot \langle \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c \rangle + \mathbf{x}_b \cdot \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_a \rangle - \mathbf{x}_c \cdot \langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \rangle = 2 \langle \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c \rangle.$$

Exprimons ceci à grâce aux symboles de Christoffel. On obtient, quels que soient  $a, b, c \in \{u, v\}$ ,

$$2 \sum_{k \in \{u, v\}} \Gamma_{ab}^k M_{kc} = \mathbf{x}_b \cdot M_{ca} + \mathbf{x}_a \cdot M_{cb} - \mathbf{x}_c \cdot M_{ba}$$

et donc

$$(V.3.7) \quad \Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2} \sum_{c \in \{u, v\}} (M^{-1})_{kc} \left( \frac{\partial M_{cb}}{\partial a} + \frac{\partial M_{ca}}{\partial b} - \frac{\partial M_{ab}}{\partial c} \right).$$

Les symboles de Christoffel, et donc la dérivée covariante  $\nabla$  sont déterminés par la première forme fondamentale.  $\square$

**Corollaire V.3.14** (Theorema Egregium).

Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une isométrie infinitésimale entre deux surfaces orientées de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $K_1, K_2$  leur courbures de Gauss respectives. Alors  $K_1 = K_2 \circ f$ . Autrement dit, les isométries infinitésimales préservent la courbure de Gauss.

Démonstration. D'après le théorème V.3.11, la courbure de Gauss s'exprime en fonction de la dérivée covariante  $\nabla$ . Or celle-ci, bien que définie au départ en utilisant la dérivée covariante canonique sur  $\mathbb{R}^3$  et l'application de Gauss, ne dépend en fait que de la première forme fondamentale. On peut donc exprimer localement la courbure de Gauss en termes des coefficients de la matrice de la première forme fondamentale et de ses dérivées partielles. Une isométrie infinitésimale préservant par définition la première forme fondamentale, il en est de même de la courbure de Gauss.  $\square$

Pour les surfaces, le nombre de symboles de Christoffel reste raisonnable, et on peut écrire des formules plus explicites.

Posons  $A = EG - F^2 = \det M$ . On a

$$M^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{2A} (GE_u - F(2F_u - E_v)) \\
\Gamma_{uu}^v &= \frac{1}{2A} (-FE_u + E(2F_u - E_v)) \\
\Gamma_{uv}^u &= \frac{1}{2A} (GE_v - FG_u) \\
\Gamma_{uv}^v &= \frac{1}{2A} (-FE_v + EG_u) \\
\Gamma_{vu}^u &= \frac{1}{2A} (GE_v - FG_u) \\
\Gamma_{vu}^v &= \frac{1}{2A} (-FE_v + EG_u) \\
\Gamma_{vv}^u &= \frac{1}{2A} (G(2F_v - G_u) - FG_v) \\
\Gamma_{vv}^v &= \frac{1}{2A} (-F(2F_v - G_u) + EG_v).
\end{aligned}$$

On remarque la symétrie en les indices inférieurs.

**Exercice V.3.15.** Montrer que si  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  est un paramétrage local, on a en chaque point de  $\mathcal{U}$

$$\langle (\mathbf{x}_{vv}^T)_u - (\mathbf{x}_{vu}^T)_v, \mathbf{x}_u \rangle = K \circ \mathbf{x} (EG - F^2).$$

Ici,  $\mathbf{x}_{vv}^T$  et  $\mathbf{x}_{vu}^T$  désignent les composantes tangentielles des vecteurs  $\mathbf{x}_{vv}$  et  $\mathbf{x}_{vu}$ .

Soient  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  une isométrie infinitésimale injective entre les surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ ,  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local et  $\mathbf{x}' = f \circ \mathbf{x}$ . Montrer que

$$df_{\mathbf{x}(u,v)}([\mathbf{x}_{uu}]^T(u,v)) = ([\mathbf{x}'_{uu}]^T(u,v)), \quad df_{\mathbf{x}(u,v)}([\mathbf{x}_{uv}]^T(u,v)) = ([\mathbf{x}'_{uv}]^T(u,v)),$$

$$df_{\mathbf{x}(u,v)}([\mathbf{x}_{vv}]^T(u,v)) = ([\mathbf{x}'_{vv}]^T(u,v)).$$

Retrouver le fait que  $K' \circ f = K$ .

**Exercice V.3.16.** Soit  $p$  un point de la surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  tel que, si  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ ,

- (i)  $(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q))$  forme une base orthonormale de  $T_p\mathcal{S}$ .
- (ii)  $\mathbf{x}_{uv}(q) = 0$  et les vecteurs  $\mathbf{x}_{uu}(q)$  et  $\mathbf{x}_{vv}(q)$  sont normaux à la surface.
- (iii) Les coefficients  $E$ ,  $F$  et  $G$  de la première forme fondamentale ont des dérivées premières partielles nulles en  $q$ .
- (iv) Les dérivée premières partielles  $e$ ,  $f$  et  $g$  de la seconde forme fondamentale vérifient  $e_v(q) = f_u(q)$  et  $g_u(q) = f_v(q)$ .

**Exercice V.3.17.** Existe-t-il une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  telle que les coefficients des première et seconde forme fondamentales soient les fonctions constantes

$$E = G = 1, F = 0, \quad e = -g = 1, f = 0.$$

**Exercice V.3.18.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  telle que le coefficient non diagonal  $F$  de la première forme fondamentale soit identiquement nul.

1. Donner des formules simplifiées pour les symboles de Christoffel, et en déduire que la courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

2. On suppose maintenant de plus que le coefficient non diagonal  $f$  de la seconde forme fondamentale est identiquement nul. Montrer que l'équation de Codazzi-Mainardi est alors équivalente au système suivant :

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad g_u = \frac{G_u}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

On pourra commencer par montrer que l'équation de Codazzi-Mainardi

$$\nabla_X L(Y) - \nabla_Y L(X) - L([X, Y]) = 0$$

est satisfaite pour tous les champs de vecteurs tangents  $X$  et  $Y$  sur  $\mathcal{S}$  dès qu'elle l'est pour  $X = \mathbf{x}_u$  et  $Y = \mathbf{x}_v$ .

3. Existe-t-il une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  telle que les coefficients des première et seconde forme fondamentales soient les fonctions

$$E = \cos^2 u, \quad G = 1, \quad F = 0, \quad e = 1, \quad g = \cos^2 u, \quad f = 0?$$

**Exercice V.3.19** (Transport parallèle). Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  un arc paramétré tracé sur  $\mathcal{S}$ . Un champ de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  le long de  $\mathcal{C} = \alpha(I)$  est la donnée en tout point  $p = \alpha(t) \in \mathcal{C}$  d'un vecteur tangent  $Y(p) \in T_p \mathcal{S}$ , de sorte que l'application  $t \mapsto Y(\alpha(t))$  soit différentiable.

On dit que le champ  $Y$  de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  le long de  $\mathcal{C}$  est **parallèle** si

$$\nabla_{\vec{T}} Y = 0$$

où  $\vec{T}$  est le champ de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  le long de  $\mathcal{C}$  défini par  $\vec{T}(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ .

1. Montrer que si les champs  $Y$  et  $Z$  de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  le long de  $\mathcal{C}$  sont parallèles, alors

$$t \mapsto \langle Y(\alpha(t)), Z(\alpha(t)) \rangle$$

est une fonction constante.

2. Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage de  $\mathcal{S}$  et supposons que  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$  où  $\beta : I \rightarrow \mathcal{U}$  est un arc paramétré dans  $\mathcal{U}$ . On pose

$$Y(\alpha(t)) = A(t)\mathbf{x}_u(\beta(t)) + B(t)\mathbf{x}_v(\beta(t)).$$

Ecrire  $\nabla_{\vec{T}} Y$  dans la base  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$  en fonction de  $A, B, A', B', \beta'_1, \beta'_2$  et des symboles de Christoffel.

3. Soit  $p_0 = \alpha(t_0) \in \mathcal{S}$  et  $w_0 \in T_{p_0} \mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe un unique champ  $Y$  de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  le long de  $\mathcal{C}$  qui soit parallèle et tel que  $Y(p_0) = w_0$ .

### V.3.5 Applications : rigidité des sphères

Le résultat suivant montre, entre autre, qu'un ouvert d'une sphère ne peut pas être isométrique à un ouvert du plan.

**Théorème V.3.20** (rigidité des sphères).

Soit  $\mathbb{S}^2(r)$  une sphère de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^3$  et soit  $f : \mathbb{S}^2(r) \rightarrow \mathcal{S}$  une isométrie infinitésimale, où  $\mathcal{S}$  est une surface connexe. Alors  $f$  est la restriction d'un déplacement de l'espace. En particulier,  $\mathcal{S}$  est une autre sphère de rayon  $r$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est une isométrie infinitésimale, c'est en particulier un difféomorphisme local, et donc une application ouverte. Son image est en conséquence un ouvert de  $\mathcal{S}$ . C'est aussi un ensemble fermé, car c'est l'image d'un compact. Comme  $\mathcal{S}$  est connexe, c'est donc une surjection. La sphère  $\mathbb{S}^2(r)$  est de courbure de Gauss constante  $\frac{1}{r^2}$ . Par le théorème de Gauss, la surface  $\mathcal{S}$  est elle aussi de courbure de Gauss constante  $\frac{1}{r^2}$ . Le théorème de Hilbert-Liebmann IV.4.3 nous dit que  $\mathcal{S}$  est aussi une sphère de rayon  $r$ . Le théorème fondamental de la théorie des surfaces V.2.1 affirme qu'alors  $f$  est la restriction d'un déplacement de l'espace.  $\square$

**Remarque V.3.21.** Ce résultat ne se généralise pas à toutes les surfaces connexes compactes. Il existe des surfaces compactes connexes isométriques (et donc difféomorphes) mais qui ne sont pas obtenues l'une de l'autre par un déplacement du plan.

## V.4 Géodésiques

Dans cette section, nous nous intéressons aux courbes tracées sur une surface dont la longueur minimise la distance entre deux points. Lorsque une telle courbe existe, quelles sont ses propriétés ? Comment la caractériser infinitésimalement, puis globalement ? Nous allons tout d'abord introduire la notion de variation d'une courbe, que l'on peut voir comme une famille de courbe proches de notre courbe originale, et voir ce que donne le fait pour celle-ci de minimiser la longueur entre deux points parmi cette famille de courbes proches.

### V.4.1 Variation de la longueur

Commençons donc par introduire la variation d'une courbe paramétrée.

**Définition V.4.1.**

Soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^2$  sur une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Une **variation** de  $\alpha$  est une application de classe  $\mathcal{C}^2$

$$F : ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b] \rightarrow \mathcal{S},$$

définie pour un certain  $\epsilon > 0$ , telle que  $F(0, t) = \alpha(t)$  pour tout  $t \in [a; b]$ . Pour chaque  $u \in ]-\epsilon; \epsilon[$ ,  $t \mapsto F(u, t)$  est une courbe paramétrée à valeurs dans  $\mathcal{S}$ . Lorsque  $F(u, a) = \alpha(a)$  et  $F(u, b) = \alpha(b)$  pour tout  $u \in ]-\epsilon; \epsilon[$ , on dit que la variation est à **extrémités fixées**.

On associe à une variation  $F$  de  $\alpha$  l'application

$$V : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad V(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(0, t),$$

appelée champ variationnel de la variation  $F$ . Il est clair que pour tout  $t \in [a; b]$ ,  $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ , et que si  $F$  est à extrémités fixées  $V(a) = V(b) = 0$ .

Etant donnés une courbe paramétrée sur une surface  $\mathcal{S}$  et un champ de vecteurs tangents à  $\mathcal{S}$  défini sur la courbe, la proposition suivante montre qu'il existe une variation dont c'est le champ variationnel.

**Proposition V.4.2.**

Soit  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  sur une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $V : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application différentiable telle que

$$V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}, \quad (t \in [a; b]).$$

Alors il existe une variation

$$F : ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b] \rightarrow \mathcal{S},$$

de  $\alpha$  dont le champ variationnel est  $V$ . Si de plus  $V(a) = V(b) = 0$ , on peut trouver une telle variation  $F$  dont les extrémités sont fixées.

Démonstration. Comme la trace  $K = \alpha([a; b])$  de la courbe est un compact de  $\mathcal{S}$ , on peut trouver un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $K$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $\mathcal{W}$  admette un voisinage tubulaire  $N_\delta(\mathcal{W})$  pour un certain  $\delta > 0$  (voir section IV.5). D'autre part, toujours par compacité de  $K$ , il existe  $\epsilon' > 0$  tel que si  $d(p, K) < \epsilon'$  (dans  $\mathbb{R}^3$ ), alors  $p \in N_\delta(\mathcal{W})$ . Posons  $\epsilon = \epsilon'(1 + M)^{-1}$  avec  $M = \max_{t \in [a, b]} \|V(t)\|$ . Donc si  $u \in ]-\epsilon; \epsilon[$ , on a pour tout  $t \in [a; b]$ ,

$$d(\alpha(t) + uV(t), K) \leq \epsilon \|V(t)\| \leq \epsilon M \leq \epsilon'.$$

On a donc  $\alpha(t) + uV(t) \in N_\delta(\mathcal{W})$  quels que soient  $t \in [a; b]$  et  $u \in ]-\epsilon; \epsilon[$ . Maintenant, définissons la variation  $F : ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b]$  par

$$F(u, t) = \pi(\alpha(t) + uV(t)), \quad (u, t) \in ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b],$$

où  $\pi$  est la projection de  $N_\delta(\mathcal{W})$  sur  $\mathcal{W}$  (voir section IV.5) Il est alors clair que  $F$  est différentiable. On a  $F(0, t) = \pi(\alpha(t)) = \alpha(t)$  et le champ variationnel de  $F$  vérifie (on utilise la proposition IV.5.5, (iv)),

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, t) = \frac{d}{du} \left[ \pi(\alpha(t) + uV(t)) \right]_{|u=0} = d\pi_{\alpha(t)}(V(t)) = V(t)$$

car  $\alpha(t) \in \mathcal{S}$  et  $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ . De plus, si  $V(a) = V(b) = 0$ ,

$$F(u, a) = \pi(\alpha(a) + uV(a)) = \pi(\alpha(a)) = \alpha(a), \quad (u \in ]\epsilon; \epsilon[).$$

De même  $F(u, b) = \alpha(b)$  pour tout  $u \in ]\epsilon; \epsilon[$ . □

La longueur de la courbe paramétrée  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  est

$$L_\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Si  $F$  est une variation de  $\alpha$ , on introduit donc pour tout  $u \in ]\epsilon; \epsilon[$ ,

$$L_F(u) = \int_a^b \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(u, t) \right\| dt.$$

La fonction  $L_F$  est appelée longueur de la variation  $F$ . On a  $L_F(0) = L_\alpha$ .

Supposons maintenant que  $\alpha$  soit un paramétrage par la longueur de l'arc. On a  $\|\alpha'(t)\| = 1$  et donc comme  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , il existe  $0 < \delta < \epsilon$  tel que  $\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(u, t) \right\| > 0$  pour tout  $u \in ]-\delta; \delta[$  et tout  $t \in [a; b]$ . Il s'ensuit que  $L_F$  est différentiable sur  $]-\delta; \delta[$  et que

$$L'_F(u) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) (u, t) dt.$$

Calculons maintenant  $L'_F(0)$ . On a pour tout  $t \in [a; b]$  :

$$2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) (0, t) \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| (0, t) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 \right) (0, t) = 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle (0, t).$$

Or comme  $\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| (0, t) = \|\alpha'(t)\| = 1$ , on obtient :

$$(V.4.1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) (0, t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle (0, t).$$

### Théorème V.4.3.

Soit  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage par la longueur de l'arc d'une courbe de la surface  $\mathcal{S}$  et soit  $F : ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  une variation de  $\alpha$ . Si  $L_F$  est la longueur de la variation  $F$ , on a

$$L'_F(0) = \langle V(b), \alpha'(b) \rangle - \langle V(a), \alpha'(a) \rangle - \int_a^b \langle V(t), \alpha''(t) \rangle dt$$

où  $V$  est le champ variationnel de  $F$ .

Démonstration. Il découle de (V.4.1) que

$$(V.4.2) \quad L'_F(0) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle(0, t) dt.$$

Une intégration par partie donne alors

$$L'_F(0) = \left[ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle(0, t) \right]_{(0,a)}^{(0,b)} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle(0, t) dt.$$

Or  $\frac{\partial F}{\partial t}(0, t) = \alpha'(t)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, t) = \alpha''(t)$  et  $\frac{\partial F}{\partial u}(0, t) = V(t)$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

#### Corollaire V.4.4.

Un arc paramétré  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  sur une surface  $\mathcal{S}$  a une **longueur critique**, c'est-à-dire que  $L'_F(0) = 0$  pour toute variation  $F$  de  $\alpha$  a extrémités fixées, si et seulement si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $[\alpha''(t)]^T \wedge \alpha'(t) = 0$ . En d'autres termes, en tout point, la composante tangentielle de l'accélération est proportionnelle à la vitesse. Si  $\alpha$  est un paramétrage par la longueur de l'arc, cette condition est équivalente à  $[\alpha''(t)]^T = 0$ .

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à voir que le fait pour  $\alpha$  d'avoir une longueur critique reste vrai par changement de paramétrage. Soit  $\theta : [c; d] \rightarrow [a; b]$  un difféomorphisme et  $\beta = \alpha \circ \theta$ , le nouveau paramétrage de la courbe. Il est clair que toute variation de  $\beta$  s'obtient à partir d'une variation de  $\alpha$  par composition avec  $\theta$  sur la première variable et réciproquement. Plus explicitement, si  $F$  est une variation de  $\alpha$ ,  $F_1(s, t) = F(s, \theta(t))$  est une variation de  $\beta$  et d'après les formules précédant (V.4.1),

$$\begin{aligned} L'_{F_1}(0) &= \pm \int_c^d \frac{\left\langle \frac{\partial F_1}{\partial t}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial t} \right\rangle(0, t)}{\left\| \frac{\partial F_1}{\partial t} \right\|(0, t)} dt = \pm \int_c^d \frac{(\theta'(t))^2}{|\theta'(t)|} \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle(0, \theta(t))}{\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|(0, \theta(t))} dt \\ &= \pm \int_a^b \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle(0, t)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|(0, t)} dt = \pm L'_F(0). \end{aligned}$$

Le signe  $\pm$  devant les intégrales est  $+$  si  $\theta$  préserve l'orientation et  $-$  sinon.

Vérifions de même que la condition  $[\alpha''(t)]^T \wedge \alpha'(t) = 0$  est elle aussi invariante par changement de paramétrage. Avec les notations qui précèdent  $\beta = \alpha \circ \theta$ ,  $\beta' = (\alpha' \circ \theta) \theta'$ ,  $\beta'' = (\alpha'' \circ \theta) \theta' + (\alpha' \circ \theta) \theta''$ , d'où  $[\beta'']^T = [(\alpha'' \circ \theta)]^T \theta' + (\alpha' \circ \theta) \theta''$  et

$$[\beta'']^T \wedge \beta' = ([(\alpha'' \circ \theta)]^T \theta' + (\alpha' \circ \theta) \theta'') \wedge (\alpha' \circ \theta) \theta' = (\theta')^2 [(\alpha'' \circ \theta)]^T \wedge (\alpha' \circ \theta)$$

Comme  $\theta'$  ne s'annule pas, l'annulation de  $[\alpha'']^T \wedge \alpha'$  est équivalente à celle de  $[\beta'']^T \wedge \beta'$ .

On peut donc supposer que  $\alpha$  est un paramétrage par la longueur de l'arc. Comme dans ce cas  $\|\alpha'\| = 1$ , on a  $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$ , c'est-à-dire que l'accélération est orthogonale à la vitesse. Ceci explique que la condition  $[\alpha'']^T \wedge \alpha' = 0$  est équivalente à  $[\alpha'']^T = 0$ .



La formule du théorème précédent, nous donne pour une variation  $F$  de  $\alpha$  à extrémités fixées,

$$L'_F(0) = - \int_a^b \langle V(t), \alpha''(t) \rangle dt$$

où  $V$  est le champ variationnel de  $F$ . Supposons que  $L'_F(0) = 0$  pour toute variation  $F$  de  $\alpha$  à extrémités fixées. La proposition V.4.2 montre qu'il existe une variation  $F$  à extrémités fixées dont le champ variationnel est  $V(t) = h(t)[\alpha''(t)]^T$ , pour toute fonction  $h$  différentiable sur  $[a; b]$ , strictement positive sur  $]a; b[$  et telle que  $h(a) = h(b) = 0$ . Donc

$$\int_a^b h(t) \|\alpha''(t)\|^2 dt = 0$$

quelle que soit la fonction  $h$  comme ci-dessus, et on en déduit que  $[\alpha''(t)]^T = 0$ .

Réciproquement, si l'arc paramétré  $\alpha$  vérifie  $[\alpha''(t)]^T = 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , la formule du théorème montre que  $L'_F(0) = 0$  pour toute variation  $F$  de  $\alpha$  à extrémités fixées.  $\square$

## V.4.2 Géodésiques

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  un arc paramétré tracé sur  $\mathcal{S}$  et supposons que la longueur de  $\alpha$  minimise la longueur de tous les arcs paramétrés joignant  $p_1 = \alpha(a)$  à  $p_2 = \alpha(b)$ . En particulier, la longueur de  $\alpha$  est critique, au sens du corollaire V.4.4. Supposons de plus que  $\alpha$  soit un paramétrage par la longueur d'arc. On a donc pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $[\alpha''(t)]^T = 0$ . Physiquement,  $\alpha$  est le chemin que décrit une particule se déplaçant sur la surface  $\mathcal{S}$  soumise seulement à la force nécessaire pour la maintenir sur  $\mathcal{S}$ . Du point de vue du physicien vivant sur la surface, c'est la trajectoire d'une particule ne subissant aucune force extérieure, selon les lois de Newton. Ceci nous conduit à la définition suivante.

### Définition V.4.5.

Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  un arc paramétré tracé sur  $\mathcal{S}$ . On dit que  $\alpha$  est une **géodésique** si pour tout  $t \in I$ ,

$$\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}\mathcal{S}.$$

**Remarque V.4.6.** Si  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$  est une géodésique de  $\mathcal{S}$ , on a pour tout  $t \in I$ ,

$$\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

et donc, la norme du vecteur tangent à la courbe est constante. Notons aussi que la propriété d'être une géodésique dépend du paramétrage, puisque par exemple une géodésique est nécessairement donnée par un paramétrage proportionnel à la longueur de l'arc. Ce n'est donc pas une propriété de l'arc géométrique défini par  $\alpha$  et encore moins de sa trace.

**Proposition V.4.7.**

On peut exprimer la propriété d'être une géodésique en terme de la dérivée covariante  $\nabla$  de  $\mathcal{S}$  : soit  $p = \alpha(t) \mapsto \vec{T}(p) = \alpha'(t)$  l'application qui tout point de la courbe associe le vecteur tangent en  $p$  (on peut, quitte à restreindre  $I$ , supposer que  $\alpha$  est injectif pour lever l'ambiguïté due à des points multiples, car la propriété est locale). La courbe  $\alpha$  est une géodésique si et seulement si pour tout  $t \in I$ ,  $\nabla_{\vec{T}} \vec{T}(\alpha(t)) = 0$  (ceci a bien un sens d'après la remarque V.3.10).

*Démonstration.* En effet, en reprenant le calcul de la remarque V.3.2, on trouve en  $p = \alpha(t)$ ,

$$\bar{D}_{\vec{T}} \vec{T}(p) = \alpha''(t),$$

et donc  $\nabla_{\vec{T}} \vec{T} = [\bar{D}_{\vec{T}} \vec{T}(p)]^T = [\alpha''(t)]^T$ .  $\square$

En conséquence, le premier résultat que nous obtenons est que les géodésiques sont préservées par isométries infinitésimales.

**Théorème V.4.8.**

Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  une isométrie infinitésimale, et soit  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$  une géodésique de  $\mathcal{S}_1$ , alors  $f \circ \alpha$  est une géodésique de  $\mathcal{S}_2$ .

*Démonstration.* La condition d'être une géodésique est une condition locale. Une isométrie infinitésimale est localement un difféomorphisme, on peut donc supposer que tel est le cas entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . La condition d'être une géodésique se traduit par  $\nabla_{\vec{T}} \vec{T} = 0$  où  $\vec{T}$  est le champ de vecteurs tangents à  $\alpha$ . Comme une isométrie infinitésimale préserve par définition la première forme fondamentale, et que la dérivée covariante ne dépend que de celle-ci d'après le théorème de Gauss, les géodésiques sont préservées par une isométrie infinitésimale.  $\square$

**Exemple V.4.9** (Géodésiques du plan). Soit  $P$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $p_0$  et de vecteur normal unitaire  $b$ . Soit  $\alpha : ]a; b[ \rightarrow P$  un arc paramétré tracé sur  $P$ . On a donc pour tout  $t \in ]a; b[$

$$\langle \alpha(t), b \rangle = 0,$$

d'où

$$\langle \alpha''(t), b \rangle = 0$$

et donc  $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)} P$ . L'arc paramétré  $\alpha$  est donc une géodésique si et seulement si  $\alpha''(t) = 0$  pour tout  $t$ . Il s'ensuit que  $\alpha$  est de la forme  $\alpha(t) = ct + d$ ,  $c, d \in \mathbb{R}^3$ , et que la trace de  $\alpha$  est un segment de droite dans le plan  $P$ .

**Exemple V.4.10** (Géodésiques de la sphère). Soient  $\mathbb{S}^2(a, r)$  la sphère de rayon  $r$  centrée en  $a$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\alpha : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{S}^2(a, r)$  un arc paramétré par la longueur de l'arc tracé sur  $\mathbb{S}^2(a, r)$ . On a pour tout  $t \in ]a; b[$

$$\|\alpha(t) - a\|^2 = r^2,$$

d'où

$$2\langle \alpha(t) - a, \alpha'(t) \rangle = 0, \quad \text{puis } \langle \alpha(t) - a, \alpha''(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha(t) - a, \alpha''(t) \rangle + 1 = 0.$$

Comme le plan tangent  $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2(a, r)$  est le plan orthogonal au vecteur  $\alpha(t) - a$ , la composante normale du vecteur  $\alpha''(t)$  est

$$\langle \alpha''(t), \frac{\alpha(t) - a}{r} \rangle \frac{\alpha(t) - a}{r} = -\frac{1}{r^2}(\alpha(t) - a),$$

et sa composante tangentielle est

$$[\alpha''(t)]^T = \alpha''(t) + \frac{1}{r^2}(\alpha(t) - a).$$

Ainsi,  $\alpha$  est une géodésique si et seulement si pour tout  $t \in ]a; b[$ ,

$$r^2\alpha''(t) + \alpha(t) - a = 0, \quad \|\alpha(t) - a\|^2 = r^2, \quad \|\alpha'(t)\| = 1.$$

Les solutions sont de la forme

$$\alpha(t) = a + p \cos \frac{t}{r} + rv \sin \frac{t}{r}, \quad \text{où } \|p\| = r, \quad \|v\| = 1, \quad \langle p, v \rangle = 0.$$

Autrement dit,  $p$  et  $v$  étant comme ci-dessus,  $\alpha$  est un arc du grand cercle intersection de  $\mathbb{S}^2(a, r)$  et du plan engendré par  $p$  et  $v$  passant par  $a$ , parcouru à vitesse constante.

**Exemple V.4.11** (Géodésiques du cylindre). Soit  $\mathcal{C}$  le cylindre d'axe  $z$  et de rayon 1, et soit  $\alpha : ]a; b[ \rightarrow \mathcal{C}$  un arc paramétré par la longueur de l'arc tracé sur  $\mathcal{C}$ . Posons  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . On a pour tout  $t \in ]a; b[$ ,

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1, \quad x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 1,$$

d'où

$$x''(t)x(t) + x'(t)^2 + y''(t)y(t) + y'(t)^2 = x''(t)x(t) + y''(t)y(t) + 1 - z'(t)^2 = 0.$$

Le plan tangent à  $\mathcal{C}$  en  $\alpha(t)$  est le plan orthogonal au vecteur  $(x(t), y(t), 0)$ . Ainsi,  $\alpha$  est une géodésique si et seulement si pour tout  $t \in ]a; b[$ , le vecteur  $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$  et le vecteur  $(x(t), y(t), 0)$  sont liés. Ceci donne

$$z''(t) = 0, \quad x''(t)y(t) - x(t)y''(t) = 0.$$

De ceci on tire facilement

$$x''(t) = (z'(t)^2 - 1)x(t), \quad y''(t) = (z'(t)^2 - 1)y(t),$$

A une rotation d'axe  $z$  suivie d'une translation parallèle à cet axe près, on peut supposer que la condition initiale est  $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ ,  $\alpha'(0) = (0, a, b)$  où  $a^2 + b^2 = 1$ . Les équations s'intègrent alors pour donner

$$x(t) = \cos(at), \quad y(t) = \sin(at), \quad z(t) = tb.$$

Les géodésiques du cylindres sont donc des hélices, et les cas limites, c'est-à-dire les droites verticales et les cercles parallèles au plan  $x, y$ .

### V.4.3 Existence et unicité des géodésiques

Nous allons maintenant montrer un théorème d'existence et d'unicité des géodésiques, en exhibant un système d'équations différentielles dont celles-ci sont solutions. Pour cela, revenons sur la dérivée covariante  $\nabla$  et la façon dont elle s'exprime en coordonnées locales avec les symboles de Christoffel.

Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs tangents sur une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage de  $\mathcal{S}$ . Posons  $\mathcal{W} = \mathbf{x}(\mathcal{U})$ .

Ecrivons, pour tout  $p \in \mathcal{W}$

$$X(p) = F_1(p)\mathbf{x}_u(p) + F_2(p)\mathbf{x}_v(p), \quad Y(p) = G_1(p)\mathbf{x}_u(p) + G_2(p)\mathbf{x}_v(p).$$

Calculons  $\nabla_X Y(p)$  dans la base  $(\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p))$  en fonction de  $F_1, F_2, G_1, G_2$  et des symboles de Christoffel.

Les propriétés de la dérivée covariante  $\nabla$  (définition V.3.5) donnent

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= F_1((\mathbf{x}_u \cdot G_1)\mathbf{x}_u + G_1 \nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u + (\mathbf{x}_u \cdot G_2)\mathbf{x}_v + G_2 \nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_v) \\ &\quad + F_2((\mathbf{x}_v \cdot G_1)\mathbf{x}_u + G_1 \nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_u + (\mathbf{x}_v \cdot G_2)\mathbf{x}_v + G_2 \nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

et en introduisant les symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned} (V.4.3) \quad \nabla_X Y &= F_1(\mathbf{x}_u \cdot G_1)\mathbf{x}_u + F_1 G_1(\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v) \\ &\quad + F_1(\mathbf{x}_u \cdot G_2)\mathbf{x}_v + F_1 G_2(\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v) \\ &\quad + F_2(\mathbf{x}_v \cdot G_1)\mathbf{x}_u + F_2 G_1(\Gamma_{vu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vu}^v \mathbf{x}_v) \\ &\quad + F_2(\mathbf{x}_v \cdot G_2)\mathbf{x}_v + F_2 G_2(\Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

Si l'on pose, pour tout  $p \in \mathcal{W}$ ,

$$\nabla_X Y(p) = H_1(p)\mathbf{x}_u(p) + H_2(p)\mathbf{x}_v(p),$$

on obtient

$$(V.4.4) \quad \begin{aligned} H_1(p) &= F_1(p)(\mathbf{x}_u \cdot G_1)(p) + F_1 G_1(p) \Gamma_{uu}^u(p) + F_1 G_2(p) \Gamma_{uv}^u(p) \\ &\quad + F_2(p)(\mathbf{x}_v \cdot G_1)(p) + F_2 G_1(p) \Gamma_{vu}^u(p) + F_2 G_2(p) \Gamma_{vv}^u(p) \end{aligned}$$

$$(V.4.5) \quad \begin{aligned} H_2(p) &= F_1(p)(\mathbf{x}_u \cdot G_2)(p) + F_1 G_1(p) \Gamma_{uu}^v(p) + F_1 G_2(p) \Gamma_{uv}^v(p) \\ &\quad + F_2(p)(\mathbf{x}_v \cdot G_2)(p) + F_2 G_1(p) \Gamma_{vu}^v(p) + F_2 G_2(p) \Gamma_{vv}^v(p). \end{aligned}$$

Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Posons  $f_1 = F_1 \circ \mathbf{x}$ ,  $f_2 = F_2 \circ \mathbf{x}$ . Le champ de vecteurs  $X$  est l'image par  $d\mathbf{x}$  du champ de vecteurs  $q \mapsto f_1(q)e_1 + f_2(q)e_2$ . En effet, en posant  $\mathbf{x}(q) = p$ ,

$$d\mathbf{x}_q(f_1(q)e_1 + f_2(q)e_2) = f_1(q)d\mathbf{x}_q(e_1) + f_2(q)d\mathbf{x}_q(e_2) = F_1(p)\mathbf{x}_u(p) + F_2(p)\mathbf{x}_v(p) = X(p).$$

De même, avec  $g_1 = G_1 \circ \mathbf{x}$ ,  $g_2 = G_2 \circ \mathbf{x}$ ,  $h_1 = H_1 \circ \mathbf{x}$ ,  $h_2 = H_2 \circ \mathbf{x}$  on obtient

$$d\mathbf{x}_q(g_1(q)e_1 + g_2(q)e_2) = Y(p), \quad d\mathbf{x}_q(h_1(q)e_1 + h_2(q)e_2) = \nabla_X Y(p).$$

On a aussi

$$(\mathbf{x}_u \cdot F_1)(p) = d(F_1)_p(\mathbf{x}_u(p)) = d(F_1)_p(d\mathbf{x}_q(e_1)) = d(f_1)_q(e_1),$$

et de même

$$(\mathbf{x}_v \cdot F_1)(p) = d(f_1)_q(e_2), \quad (\mathbf{x}_u \cdot F_2)(p) = d(f_2)_q(e_1), \quad (\mathbf{x}_v \cdot F_2)(p) = d(f_2)_q(e_2),$$

Idem pour  $G_1$  et  $G_2$ . Les équations (V.4.4) et (V.4.5) donnent donc :

$$(V.4.6) \quad h_1(q) = f_1(q) d(g_1)_q(e_1) + f_1 g_1(q) \Gamma_{uu}^u(q) + f_1 g_2(q) \Gamma_{uv}^u(q)$$

$$(V.4.7) \quad h_2(q) = f_1(q) d(g_2)_q(e_1) + f_1 g_1(q) \Gamma_{vu}^u(q) + f_2 g_2(q) \Gamma_{vv}^u(q) \\ + f_2(q) d(g_2)_q(e_2) + f_2 g_1(q) \Gamma_{vu}^v(q) + f_2 g_2(q) \Gamma_{vv}^v(q).$$

On a posé,  $\Gamma_{uu}^u(q) = \Gamma_{uu}^u(p)$ , etc, plutôt que  $\Gamma_{uu}^u(\mathbf{x}(q))$ , etc, car ceci ne cause pas de confusion et allège l'écriture.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{S}$  un arc paramétré tracé dans  $\mathcal{W}$  et posons  $\beta : \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma : \mathbf{c}$ 'est un arc paramétré dans  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ . Traduisons la condition pour  $\gamma$  d'être une géodésique en une équation différentielle vérifiée par  $\beta$ , en utilisant les équations (V.4.6) et (V.4.7). Posons pour  $t \in I$ ,  $\gamma(t) = p = \mathbf{x}(q) = \mathbf{x}(\beta(t))$ , et  $\gamma'(t) = \vec{T}(t) = X(p) = F_1(p)\mathbf{x}_u(p) + F_2(p)\mathbf{x}_v(p)$ . Comme d'autre part

$$\gamma'(t) = d\mathbf{x}_{\beta(t)}(\beta'(t))$$

On voit que le champ correspondant à  $X$  sur  $\gamma(I)$  est le champ

$$f_1(q) e_1 + f_2(q) e_2 = \beta'_1(t) e_1 + \beta'_2(t) e_2,$$

où  $q = \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ . La condition d'être une géodésique, à savoir  $\nabla_{\vec{T}} \vec{T} = 0$  se traduit donc par

$$(V.4.8) \quad 0 = f_1(q) d(f_1)_q(e_1) + f_1^2(q) \Gamma_{uu}^u(q) + f_1 f_2(q) \Gamma_{uv}^u(q)$$

$$(V.4.9) \quad 0 = f_2(q) d(f_1)_q(e_2) + f_2 f_1(q) \Gamma_{vu}^u(q) + f_2^2(q) \Gamma_{vv}^u(q) \\ 0 = f_1(q) (d(f_2)_q(e_1) + f_1^2(q) \Gamma_{uu}^v(q) + f_1 f_2(q) \Gamma_{uv}^v(q) \\ + f_2(q) (d(f_2)_q(e_2) + f_2 f_1(q) \Gamma_{vu}^v(q) + f_2^2(p) \Gamma_{vv}^v(q)).$$

Comme  $\beta'_1(t) = f_1(\beta(t))$ , on obtient en dérivant

$$\beta''_1(t) = d(f_1)_q(\beta'(t)) = d(f_1)_q(\beta'_1(t)e_1 + \beta'_2(t)e_2) \\ = \beta'_1(t)d(f_1)_q(e_1) + \beta'_2(t)d(f_1)_q(e_2) = f_1(q)d(f_1)_q(e_1) + f_2(q)d(f_1)_q(e_2).$$

De même

$$\beta''_2(t) = f_1(q)d(f_2)_q(e_1) + f_2(q)d(f_2)_q(e_2).$$

En reportant dans (V.4.8) et (V.4.9), on obtient finalement :

$$(V.4.10) \quad \beta''_1(t) = -\beta'_1(t)^2 \Gamma_{uu}^u(t) - \beta'_1 \beta'_2(t) \Gamma_{uv}^u(t) - \beta'_2(t) \beta'_1(t) \Gamma_{vu}^u(t) - \beta'_2(t)^2 \Gamma_{vv}^u(t)$$

$$(V.4.11) \quad \beta''_2(t) = -\beta'_1(t)^2 \Gamma_{uu}^v(t) - \beta'_1 \beta'_2(t) \Gamma_{uv}^v(t) - \beta'_2 \beta'_1(t) \Gamma_{vu}^v(t) - \beta'_2(t)^2 \Gamma_{vv}^v(t).$$

Là encore, nous avons posé  $\Gamma_{uu}^u(t) = \Gamma_{uu}^u(\gamma(t))$ , etc, pour simplifier les notations.

Ainsi, pour conclure  $t \mapsto \gamma(t)$  est une géodésique si et seulement si  $t \mapsto \beta(t)$  vérifie le système différentiel (V.4.10), (V.4.11). Ce système d'ordre 2 est équivalent au système

d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_3(t), \\ x'_2(t) = x_4(t), \\ x'_3(t) = - \sum_{i,j=3,4} x_i(t)x_j(t) \Gamma_{ij}^u(x_1(t), x_2(t)), \\ x'_4(t) = - \sum_{i,j=3,4} x_i(t)x_j(t) \Gamma_{ij}^v(x_1(t), x_2(t)), \end{cases}$$

les  $\Gamma_{ij}^u$ ,  $\Gamma_{ij}^v$  étant les symboles de Christoffel où les indices inférieurs  $u$  et  $v$  ont été remplacés respectivement par 3 et 4.

Les solutions de ce système sont les courbes intégrales du champ de vecteurs

$$K : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left( x_3, x_4, - \sum_{i,j=3,4} x_i x_j \Gamma_{ij}^u(x_1, x_2), - \sum_{i,j=3,4} x_i x_j \Gamma_{ij}^v(x_1, x_2) \right).$$

Via un paramétrage local, la condition pour  $\gamma$  d'être une géodésique dans  $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$  se traduit donc par un système différentiel d'ordre 2 sur le domaine du paramétrage  $\mathcal{U}$ , où encore à un système d'ordre 1 sur  $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^2$ , dont l'étude revient à celle des courbes intégrales du champ de vecteurs  $K$  ci-dessus. Exprimons de même la recherche des géodésiques dans  $\mathcal{S}$  comme la recherche des courbes intégrales d'un champ de vecteurs. Rappelons que

$$T\mathcal{S} = \{(p, v) ; p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  (cf. exercice I.11.3). Le champ de vecteurs en question est un champ sur  $T\mathcal{S}$ . Localement il est l'image par un paramétrage  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  du champ  $K$  introduit ci-dessus. Plus exactement, rappelons qu'un paramétrage de  $T\mathcal{S}$  est obtenu à partir de  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  en posant

$$(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathcal{S}, \quad (q, w) \mapsto (\mathbf{x}, d\mathbf{x}_q(w)).$$

#### Lemme V.4.12.

Il existe un unique champ de vecteurs  $G$  sur  $T\mathcal{S}$  dont les courbes intégrales sont exactement les courbes paramétrées de la forme  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ ,  $\gamma$  une géodésique de  $\mathcal{S}$ .

**Démonstration.** Démontrons l'unicité. Considérons un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ . Supposons que les courbes intégrales de  $G$  soient de la forme  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ , avec  $\gamma$  géodésique de  $\mathcal{S}$ . Avec les notations introduites ci-dessus, les courbes paramétrées  $t \mapsto (\beta(t), \beta'(t))$  sont solutions du système (V.4.10), (V.4.11). L'unicité des solutions d'un tel système (courbes intégrales du champ  $K$ ) montre l'unicité de  $G$ . Pour l'existence, l'argument est encore une fois local. A partir d'un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  et du champ de vecteur  $K$ , on obtient un champ de vecteurs  $G$  sur  $T\mathcal{W} = \{(p, v) \in T\mathcal{S} ; p \in \mathcal{W} = \mathbf{x}(\mathcal{U})\}$  en posant

$$G(\mathbf{x}(q), d\mathbf{x}_q(w)) = d(\mathbf{x}, d\mathbf{x})_{q,w}(K(q, w)).$$

□

Le théorème I.10.11 s'applique alors, et l'on obtient en particulier

**Théorème V.4.13** (Existence et unicité des géodésiques).

Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $p \in \mathcal{S}$  et tout vecteur tangent  $v \in T_p\mathcal{S}$ , il existe  $\epsilon = \epsilon(p, v) \in ]0; +\infty]$  et une unique géodésique  $\gamma = \gamma_{p,v} : ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow \mathcal{S}$  vérifiant

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v,$$

tels que l'intervalle  $]-\epsilon; \epsilon[$  soit maximal pour ces conditions. D'autre part l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ (p, v, t) \mid p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}, t \in ]-\epsilon(p, v); \epsilon(p, v)[ \right\}$$

est un ouvert de  $T\mathcal{S} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{S} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  où

$$T\mathcal{S} = \{ (p, v) \mid p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S} \} \subset \mathcal{S} \times \mathbb{R}^3$$

et l'application  $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}, (p, v, t) \mapsto \gamma_{p,v}(t)$  est différentiable.

**Remarque V.4.14.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $p \in \mathcal{S}$  et  $v \in T_p\mathcal{S}$ . Soit

$$\gamma = \gamma_{p,v} : ]-\epsilon(p, v); \epsilon(p, v)[ \longrightarrow \mathcal{S}$$

la géodésique dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème ci-dessus. Pour tout  $s > 0$ , définissons

$$\gamma_s : ]-\frac{\epsilon(p, v)}{s}; \frac{\epsilon(p, v)}{s}[ \longrightarrow \mathcal{S}, \quad t \mapsto \gamma(st).$$

Alors  $\gamma_s$  est une autre géodésique de  $\mathcal{S}$ , en fait un reparamétrage homothétique de  $\gamma$ , et

$$\gamma_s(0) = p, \quad \gamma'_s(0) = sv.$$

Le théorème d'unicité des géodésiques nous donne alors  $\frac{\epsilon(p, v)}{s} = \epsilon(p, sv)$  et  $\gamma_s = \gamma_{p,sv}$ , ou autrement dit

$$(V.4.12) \quad \gamma(p, v, st) = \gamma(p, sv, t), \quad \left( t \in ]-\frac{\epsilon(p, v)}{s}; \frac{\epsilon(p, v)}{s}[ \right).$$

## V.5 Exponentielle

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . On reprend les notations de la section précédente, en particulier

$$T\mathcal{S} = \{ (p, v) \mid p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S} \} \subset \mathcal{S} \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{E} = \left\{ (p, v, t) \mid p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}, t \in ]-\epsilon(p, v); \epsilon(p, v)[ \right\}$$

On note

$$\mathcal{E}_1 = \{ (p, v, 1) \mid p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}, (p, v, 1) \in \mathcal{E} \}.$$

On peut identifier  $\mathcal{E}_1$  avec un ouvert  $\mathcal{E}_0$  de  $T\mathcal{S}$  via la projection

$$\mathcal{E}_1 \rightarrow T\mathcal{S}, \quad (p, v, 1) \mapsto (p, v).$$

On définit alors l'exponentielle

$$\exp : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{S}, \quad (p, v) \mapsto \gamma(p, v, 1).$$

**Remarque V.5.1.** Si l'on prend comme condition initiale  $(p, v) = (p, 0)$ , la géodésique  $\gamma_{p,0}$  est l'application constante égale à  $p$ , définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier  $(p, 0, 1) \in \mathcal{E}_1$  pour tout  $p \in \mathcal{S}$  et  $\exp(p, 0) = p$ , ( $p \in \mathcal{S}$ ). Ceci montre que l'ouvert  $\mathcal{E}_0$  est non vide et contient  $\mathcal{S}$  (vue comme sous-ensemble de  $T\mathcal{S}$  via l'inclusion  $p \mapsto (p, 0)$ ).

**Remarque V.5.2.** Si  $(p, v) \in \mathcal{E}_0$ , alors d'après la remarque V.4.12, pour tout  $s \in [0; 1]$ ,  $(p, sv) \in \mathcal{E}_0$  et  $\exp(p, sv) = \gamma(p, sv, 1) = \gamma(p, v, s)$ .

**Remarque V.5.3.** Nous avons vu que  $\mathcal{E}_0$  est un ouvert de  $T\mathcal{S}$ , dont la topologie est celle induite de  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3$ . En particulier, pour tout point  $p \in \mathcal{S}$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que si  $v \in T_p\mathcal{S}$ ,  $\|v\| < \epsilon$ , alors  $(p, v) \in \mathcal{E}_0$ . D'autre part, la remarque précédente montre que l'ensemble des  $v \in T_p\mathcal{S}$  tels que  $(p, v) \in \mathcal{E}_0$  est un ouvert étoilé de  $T_p\mathcal{S}$  contenant 0. Notons-le  $\mathcal{E}(T_p\mathcal{S})$  et définissons

$$\exp_p : \mathcal{E}(T_p\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{S}, \quad v \mapsto \exp(p, v).$$

Il est immédiat que  $\exp_p$  est différentiable et vérifie  $\exp_p(0) = p$ . D'autre part

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt} [\exp_p(tv)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\gamma(p, tv, 1)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\gamma(p, v, t)]_{t=0} = v,$$

ce qui montre que  $d(\exp_p)_0 = \text{Id}_{T_p\mathcal{S}}$ .

En appliquant le théorème d'inversion locale, on obtient :

**Proposition V.5.4.**

Pour tout point  $p$  d'une surface  $\mathcal{S}$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que l'application

$$\exp_p : B(0, \epsilon) \subset T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

soit un difféomorphisme sur son image.

Cette image est appelée la **boule géodésique** de centre  $p$  et de rayon  $\epsilon$  et notée  $B_{geo}(p, \epsilon)$ . Remarquons que  $\exp_p$  est alors un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . D'autre part, tout point  $y \in B_{geo}(p, \epsilon)$  est sur une géodésique passant par  $p$ . Réciproquement, si  $y \in B_{geo}(p, \epsilon)$ , toute géodésique joignant  $p$  à  $y$  est un reparamétrage homothétique de  $t \mapsto \exp_p(tv)$  où  $v = \exp^{-1}(y) \in T_p\mathcal{S}$ . On appelle celle-ci la **géodésique radiale** joignant  $p$  à  $y$ .

Etudions maintenant la différentielle de  $\exp_p$  en d'autres points.



**Lemme V.5.5 (Gauss).**

Soit  $p$  un point d'une surface  $\mathcal{S}$ , et soit  $\epsilon > 0$  tel que l'application

$$\exp_p : B(0, \epsilon) \subset T_p \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

soit définie. Alors, si  $v \in B(0, \epsilon) \subset T_p \mathcal{S}$ , on a quels que soient  $u, w \in T_p \mathcal{S}$ ,

$$\begin{cases} \|(d \exp_p)_v(u)\| = \|u\| \text{ si } u \parallel v \\ \langle (d \exp_p)_v(u), (d \exp_p)_v(w) \rangle = 0 \text{ si } u \parallel v \text{ et } w \perp v. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha : I \rightarrow T_p \mathcal{S}$  un arc paramétré défini sur un intervalle ouvert contenant 0 tel que  $\alpha(0) = v$ ,  $\alpha'(0) = w$  et  $\|\alpha(t)\| = \|v\|$  pour tout  $t \in I$  (c'est-à-dire que la trace de  $\alpha$  est contenue dans le cercle de centre  $0 \in T_p \mathcal{S}$  passant par  $v$ ). Pour  $\delta > 0$  suffisamment petit, pour tout  $s \in ]-1 - \delta; 1 + \delta[$  et tout  $t \in I$ , on a  $s\alpha(t) \in B(0, \epsilon)$ . On définit alors

$$F : ]-1 - \delta; 1 + \delta[ \times I \rightarrow \mathcal{S}, \quad (s, t) \mapsto \exp_p(s\alpha(t)).$$

On a donc, en utilisant (V.4.12)

$$F(s, t) = \exp_p(s\alpha(t)) = \gamma(p, s\alpha(t), 1) = \gamma(p, \alpha(t), s) = \gamma_{p, \alpha(t)}(s),$$

et en différenciant par rapport à  $s$ , on obtient

$$d(\exp_p)_{s\alpha(t)}(\alpha(t)) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \gamma'_{p, \alpha(t)}(s).$$

En  $s = 1$ ,  $t = 0$  et en prenant la norme (rappelons qu'une géodésique est paramétrée proportionnellement à la longueur de l'arc, et donc  $\|\gamma'_{p, \alpha(t)}(s)\| = \|\gamma'_{p, \alpha(t)}(0)\| = \|\alpha(t)\| = \|v\|$ ), on arrive à

$$\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|,$$

ce qui donne la première égalité du lemme. En dérivant maintenant par rapport à  $t$  l'égalité

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right\|^2 = \|\alpha(t)\|^2 = \|v\|^2,$$

on obtient,

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle = 0.$$

De ceci, on déduit

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right\rangle.$$

Comme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) = \gamma''_{p, \alpha(t)}(s)$$

est toujours normal à la surface puisque  $\gamma_{p, \alpha(t)}$  est une géodésique, et que  $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$  est tangent à  $\mathcal{S}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle = 0.$$

Ainsi  $\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \rangle$  ne dépend pas de  $s$ . Mais comme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \frac{d}{dt} [\exp_p(s\alpha(t))] = s(d\exp_p)_{s\alpha(t)}(\alpha'(t)),$$

ceci signifie que

$$s\langle d(\exp_p)_{s\alpha(t)}(\alpha(t)), d(\exp_p)_{s\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle$$

ne dépend pas de  $s$ . En écrivant l'égalité des expressions obtenues en  $(s, t) = (0, 0)$  et  $(s, t) = (1, 0)$ , il vient

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = 0,$$

qui est la deuxième égalité du lemme.  $\square$

Ainsi, en tout point  $p$  de la surface, l'application exponentielle préserve la longueur des radiales issues de l'origine et la perpendicularité de celles-ci avec l'image des cercles centrés à l'origine.

Nous allons déduire de ceci le premier résultat vers une réciproque du corollaire V.4.4. Pour cela, en vue d'une utilisation ultérieure du théorème d'Ascoli-Arzelà, nous aurons besoin de considérer une classe de courbes paramétrées plus générale que les courbes continues,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Nous introduisons donc la classe des **courbes paramétrées lipschitziennes**, c'est-à-dire les courbes  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  telles que il existe une constante  $c$  vérifiant

$$\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\| \leq c|t_1 - t_2|, \quad (t_1, t_2 \in I).$$

Une telle courbe paramétrée est bien sûr continue, mais elle est même absolument continue. En particulier sa dérivée  $\alpha'(t)$  existe presque partout et est bornée :  $\|\alpha'(t)\| \leq c$ . On peut donc définir la longueur d'une telle courbe comme dans le cas des courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

#### Proposition V.5.6.

Soit  $B_{geo}(p, \delta)$  une boule géodésique de rayon  $\delta > 0$  de centre  $p$  sur une surface  $\mathcal{S}$ . Si  $\alpha : [a; b] \rightarrow B_{geo}(p, \delta)$  est une courbe paramétrée lipschitzienne, avec  $\alpha(a) = p$ , alors

$$L_\alpha \geq L_\gamma$$

où  $\gamma$  est l'unique géodésique radiale paramétrée par la longueur de l'arc joignant  $p$  à  $\alpha(b)$ . Si l'égalité a lieu, les traces de  $\alpha$  et  $\gamma$  coïncident.

Démonstration. Si pour  $c \in ]a; b]$ ,  $\alpha(c) = p$ , l'unique géodésique radiale paramétrée par la longueur de l'arc joignant  $p$  à  $\alpha(c)$  est la courbe constante égale à  $p$ , qui est plus courte que n'importe quelle lacet joignant  $p$  à lui-même. On peut donc supposer  $\alpha(t) \neq p$  pour tout  $t \in ]a; b]$ , et écrire  $\alpha(b) = \exp_p v$  pour un certain  $v \in B(0, \delta) \in T_p \mathcal{S}$ . On pose aussi

$$\alpha(t) = \exp_p \beta(t), \quad t \in [a; b]$$

où  $\beta : [a; b] \rightarrow T_p\mathcal{S}$  est une courbe paramétrée lipschitzienne vérifiant  $\beta(a) = 0$  et  $\beta(b) = v$  et  $\beta(t) \neq 0$  pour tout  $t \in ]a; b]$ . On a donc

$$L_\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|(\exp_p \circ \beta)'(t)\| dt = \int_a^b \|d(\exp_p)_{\beta(t)}(\beta'(t))\| dt.$$

Pour tout  $t \in [a; b]$ , soit  $w(t) \in T_p\mathcal{S}$  tel que  $(\frac{\beta(t)}{\|\beta(t)\|}, w(t))$  soit une base orthonormale de  $T_p\mathcal{S}$ . On a alors partout où  $\beta'(t)$  est définie,

$$\beta'(t) = \frac{1}{\|\beta(t)\|^2} \langle \beta'(t), \beta(t) \rangle \beta(t) + \langle \beta'(t), w(t) \rangle w(t).$$

Le lemme de Gauss nous donne

$$\|d(\exp_p)_{\beta(t)}(\beta'(t))\| \geq \frac{1}{\|\beta(t)\|} |\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle|$$

où l'égalité a lieu lorsque  $\beta'(t)$  et  $\beta(t)$  sont liés. En conséquence

$$L_\alpha \geq \int_a^b \frac{1}{\|\beta(t)\|} |\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle| dt \geq \left| \int_a^b \frac{1}{\|\beta(t)\|} \langle \beta'(t), \beta(t) \rangle dt \right| = \left[ \|\beta(t)\| \right]_a^b = \|v\| = L_\gamma.$$

S'il y a égalité, alors  $\beta'(t)$  et  $\beta(t)$  sont liés pour tout  $t \in [a; b]$  où  $\beta'$  est définie. La trace de  $\beta$  est alors contenue dans la droite passant par 0 et  $v$  dans  $T_p\mathcal{S}$  et donc la courbe  $\alpha$  a même trace que la géodésique radiale joignant  $p$  et  $\alpha(b)$ .  $\square$

**Exercice V.5.7.** Si  $p$  est un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , montrer que  $\mathbb{S}^2 \setminus \{-p\}$  est une boule géodésique centrée en  $p$ . Quel est son rayon ?

**Exercice V.5.8.** Donner un exemple de géodésique sur une surface  $\mathcal{S}$  dont la longueur est plus grande que celle d'une autre courbe paramétrée continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ayant les mêmes extrémités.

Nous allons maintenant donner un résultat qui améliore celui de la proposition V.5.4, en vue d'une réciproque du corollaire V.4.4. Soit  $p_0$  un point d'une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  et soient  $\mathcal{V}$  un voisinage ouvert de  $p_0$  et  $\epsilon > 0$  tel que  $\exp_p$  soit défini sur la boule  $B(0, \epsilon) \in T_p\mathcal{S}$  pour tout  $p \in \mathcal{V}$ . Un tel ouvert  $\mathcal{V}$  et un tel  $\epsilon$  existent car le domaine de définition de flot géodésique  $\mathcal{E}$  est ouvert.

Considérons un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  en  $p_0$  d'image contenue dans  $\mathcal{V}$ , posons  $q_0 = \mathbf{x}^{-1}(p_0)$ . Choisissons  $\delta > 0$  de tel sorte que si  $w \in B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^2$ , alors  $\|d\mathbf{x}_q(w)\| < \epsilon$  pour tout  $q \in \mathcal{U}$  (ce que l'on peut toujours faire en remplaçant au besoin  $\mathcal{U}$  par un voisinage ouvert de  $p_0$  relativement compact inclus dans  $\mathcal{U}$ ). Définissons alors

$$E : \mathcal{U} \times B(0, \delta) \longrightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \quad (q, w) \mapsto (\mathbf{x}(q), \exp_{\mathbf{x}(q)}(d\mathbf{x}_q(w))).$$

C'est une application différentiable, et  $E(q_0, 0) = (p_0, p_0)$ . Calculons la différentielle de  $E$  en  $(q_0, 0)$  : c'est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  dans  $T_{p_0}\mathcal{S} \times T_{p_0}\mathcal{S}$ . Si  $w \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} dE_{(q_0, 0)}(w, 0) &= \frac{d}{dt} [E(q_0 + tw, 0)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [(\mathbf{x}(q_0 + tw), \exp_{\mathbf{x}(q_0 + tw)}(0))]_{t=0} \\ &= (d\mathbf{x}_{q_0}(w), d\mathbf{x}_{q_0}(w)). \end{aligned}$$

D'autre part

$$dE_{(q_0,0)}(0, w) = \frac{d}{dt} [E(q_0, tw)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [(p_0, \exp_{p_0}(td\mathbf{x}_{q_0}(w)))]_{t=0} = (0, d\mathbf{x}_{q_0}(w)).$$

Comme la différentielle  $d\mathbf{x}_q$  est injective en tout point  $q \in \mathcal{U}$ ,  $dE_{(q_0,0)}$  est un isomorphisme, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert de  $(q_0, 0)$  dans  $\mathcal{U} \times B(0, \delta)$ , que l'on peut prendre de la forme  $\mathcal{U}' \times B(0, \rho)$  avec  $\mathcal{U}'$  voisinage ouvert de  $q_0$  dans  $\mathcal{U}$  et  $\rho \leq \delta$ , tel que

$$E : \mathcal{U}' \times B(0, \rho) \longrightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S},$$

soit un difféomorphisme sur son image, qui est un voisinage de  $(p_0, p_0)$  dans  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ . Il s'ensuit que si  $q \in \mathcal{U}'$ , l'application partielle

$$E_q : \{q\} \times B(0, \rho) \longrightarrow \{\mathbf{x}(q)\} \times \mathcal{S}$$

est aussi un difféomorphisme sur son image.

Comme  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{x}^{-1}$  sont bornées sur  $\mathcal{U}'$ , on peut trouver des réels strictement positifs  $\eta < \rho$  et  $\tau < \delta$  tels que pour tout  $q \in \mathcal{U}'$ ,

$$d\mathbf{x}_q(B(0, \eta)) \subset B(0, \tau) \subset d\mathbf{x}_q(B(0, \rho)).$$

Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage ouvert de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}$  tel que

$$\mathcal{W} \times \mathcal{W} \subset E(\mathcal{U}' \times B(0, \eta)).$$

Ainsi, la boule ouverte  $B(0, \eta) \subset \mathbb{R}^2$  contenue dans  $B(0, \rho)$ , a son image par  $E_q$  dans la boule géodésique  $B_{geo}(\mathbf{x}(q), \tau) \subset \mathcal{S}$ . Une deuxième conséquence est que si  $p_1$  et  $p_2$  sont des points dans  $\mathcal{W}$ , on peut écrire

$$p_1 = \mathbf{x}(q), \quad p_2 = \exp_{\mathbf{x}(q)}(d\mathbf{x}_q(w))$$

pour un certain  $q \in \mathcal{U}'$  et un certain  $w \in B(0, \eta) \subset \mathbb{R}^2$ . On en déduit

$$\mathcal{W} \subset \exp_{p_1}(d\mathbf{x}_q(B(0, \eta))) \subset \exp_{p_1}(B(0, \tau)).$$

Nous avons donc montré le résultat suivant :

**Proposition V.5.9** (existence de voisinages normaux).

Chaque point  $p_0$  d'une surface  $\mathcal{S}$  possède un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  tel qu'il existe  $\tau > 0$  vérifiant : pour tout  $p \in \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W}$  est contenu dans la boule géodésique  $B_{geo}(p, \tau)$ . Un tel voisinage est appelé **voisinage normal** de  $p_0$  de rayon  $\tau$  dans  $\mathcal{S}$ .

Comme première conséquence de ce résultat, nous obtenons le fait que si  $\mathcal{S}$  est une surface fermée dans  $\mathbb{R}^3$ , alors les géodésiques dont l'existence et l'unicité sont assurés par le théorème V.4.13 sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**Corollaire V.5.10.**

Soient  $\mathcal{S}$  une surface fermée de  $\mathbb{R}^3$  et  $p \in \mathcal{S}$ ,  $v \in T_p\mathcal{S}$ . Alors la géodésique  $\gamma = \gamma_{p,v}$  de conditions initiales  $(p, v) \in T\mathcal{S}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Il s'ensuit que l'application exponentielle est définie sur la totalité de  $T\mathcal{S}$ .

**Remarque V.5.11.** Si  $\mathcal{S}$  est compacte, le résultat découle directement du théorème I.10.12.

Démonstration. Soient  $(p, v) \in T\mathcal{S}$  avec  $v \neq 0$  et supposons que le réel strictement positif  $\epsilon(p, v)$  donné par le théorème V.4.13 soit fini. Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tendant vers  $\epsilon(p, v)$  par valeurs inférieures. C'est une suite de Cauchy, et comme

$$\|\gamma(t_n) - \gamma(t_m)\| \leq \left\| \int_{t_n}^{t_m} \gamma'(t) dt \right\| \leq \|v\| |t_n - t_m|,$$

la suite  $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{S}$ . Elle converge donc vers un point  $q$  de  $\mathcal{S}$ , puisque l'on a supposé  $\mathcal{S}$  fermée. Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage normal de  $q$  de rayon  $\epsilon$  dans  $\mathcal{S}$ . Comme  $\gamma$  est continue, l'image d'un intervalle  $]\delta; \epsilon(p, v)[$  est dans  $\mathcal{W}$  si  $\delta$  est bien choisi. Prenons  $t_0 \in ]\delta; \epsilon(p, v)[$  tel que  $\epsilon(p, v) - t_0 < \epsilon$  et posons  $r = \gamma(t_0)$ . On a alors  $\gamma(t) = \exp_r((t - t_0)u)$  pour tout  $t \in ]\delta; \epsilon(p, v)[$ , où  $u$  est un vecteur dans  $T_r\mathcal{S}$  tel que  $\|u\| = \|v\|$ . Ceci montre que  $\gamma$  peut être étendu au-delà de  $\epsilon(p, v)$  (au moins jusqu'à  $t_0 + \epsilon$ ). Ceci constitue une contradiction, et donc  $\epsilon(p, v) = +\infty$ . Il s'ensuit que  $1 < \epsilon(p, v)$  pour tout  $(p, v) \in T\mathcal{S}$ , et donc que  $\exp(p, v) = \gamma(p, v, t)$  est défini.  $\square$

Une seconde conséquence de l'existence de voisinage normaux est la fait que si une courbe à une longueur minimale parmi toutes les courbes continues et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux joignant deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{S}$ , alors cette courbe a une trace qui coïncide avec celle d'une géodésique.

**Théorème V.5.12.**

Soit  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  une courbe paramétrée lipschitzienne joignant deux points  $p = \alpha(a)$  et  $q = \alpha(b)$  d'une surface ayant une longueur inférieure ou égale à toute courbe paramétrée continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux joignant ces deux points. Alors il existe une géodésique dont la trace coïncide avec celle de  $\alpha$ .

Démonstration. Pour tout  $t \in [a; b]$ , il existe un voisinage normal  $\mathcal{W}_t$  de  $\alpha(t)$  dans  $\mathcal{S}$ . On a alors un recouvrement  $[a; b] = \bigcup_t \alpha^{-1}(\mathcal{W}_t)$  du compact  $[a; b]$  par les ouverts  $\alpha^{-1}(\mathcal{W}_t)$ . Soit  $\delta$  le nombre de Lebesgue de ce recouvrement (cf. proposition IX.4.1) (c'est-à-dire que pour tout  $s \in [a; b]$ ,  $[s - \delta; s + \delta] \cap [a; b]$  est inclus dans l'un des  $\alpha^{-1}(\mathcal{W}_t)$ ). Si  $[c; d] \subset [a; b]$  est de longueur plus petite que  $\delta$ , alors  $\alpha([c; d])$  est inclus dans l'un des  $\mathcal{W}_t$ , et en particulier dans une boule géodésique de centre  $\alpha(c)$ . La courbe  $\alpha([c; d])$  minimise la longueur des courbes entre  $\alpha(c)$  et  $\alpha(d)$ . La proposition V.5.6 nous dit qu'alors  $\alpha([c; d])$  coïncide avec la trace d'une géodésique radiale issue de  $\alpha(c)$ . Comme ceci est vrai pour tout sous-intervalle  $[c; d]$  de  $[a; b]$  de longueur plus petite que  $\delta$ , le résultat est démontré.  $\square$

**Remarque V.5.13.** Rappelons que nous avons défini, quels que soient  $p, q \in \mathcal{S}$ ,

$$d_{\mathcal{S}}(p, q) = \inf L_{\alpha}$$

où l'inf est pris sur toutes les courbes paramétrées  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  continues,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux telles que  $\alpha(a) = p$  et  $\alpha(b) = q$ . Le théorème suivant montre que si  $\mathcal{S}$  est fermée, cet inf est toujours atteint, et il l'est pour une géodésique.

**Théorème V.5.14 (Hopf-Rinow).**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface connexe, fermée dans  $\mathbb{R}^3$  et soient  $p_1, p_2$  deux points de  $\mathcal{S}$ . Alors il existe une géodésique  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  avec  $\gamma(a) = p_1$ ,  $\gamma(b) = p_2$ , et de longueur plus petite ou égale à la longueur de toute courbe continue  $\mathcal{C}^1$  par morceaux joignant ces deux points.

*Démonstration.* Si  $p_1 = p_2$ , le résultat est évident. Supposons que  $p_1 \neq p_2$  et fixons deux réels  $a < b$ . Soit  $\Gamma_{p_1, p_2}$  l'ensemble des courbes paramétrées  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  continues,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux telles que  $\alpha(a) = p_1$  et  $\alpha(b) = p_2$ . Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\Gamma_{p_1, p_2}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\alpha_n} = d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2)$ . On reparamètre au besoin ces courbes pour que sur chaque sous-intervalle où  $\alpha_n$  est régulière, le paramétrage soit proportionnel à un paramétrage par la longueur de l'arc, c'est-à-dire

$$\|\alpha'_n(t)\| = c_n$$

pour une certaine constante strictement positive  $c_n$ . On a alors

$$L_{\alpha_n} = \int_a^b \|\alpha'_n(t)\| dt = c_n |b - a|.$$

En particulier, la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et donc est bornée. Si  $t_1, t_2 \in [a; b]$ , on a

$$\|\alpha_n(t_1) - \alpha_n(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \alpha'_n(t) dt \right\| \leq c_n |t_1 - t_2|.$$

Le théorème d'Ascoli-Arzelà [IX.3.1](#) affirme que l'on peut trouver une suite extraite de  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers une courbe paramétrée lipschitzienne  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Comme  $\mathcal{S}$  est fermée,  $\alpha$  est tracée dans  $\mathcal{S}$ . De plus

$$L_{\alpha} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \leq (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{\alpha_n} = d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2).$$

La courbe  $\alpha$  a donc une longueur inférieure ou égale à la longueur de toute courbe continue  $\mathcal{C}^1$  par morceaux joignant  $p$  et  $q$ . Le théorème [V.5.12](#) permet de conclure la démonstration.  $\square$

Finalement, nous énonçons une réciproque de la proposition [V.1.6](#).

**Proposition V.5.15.**

Une isométrie  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  est une isométrie infinitésimale injective.

Démonstration. Il est évident que  $f$  est injective et c'est un homéomorphisme sur son image car son inverse  $f^{-1} : f(\mathcal{S}_1) \rightarrow \mathcal{S}_1$  est aussi une isométrie. Soit  $p \in \mathcal{S}_1$  et soit  $B_{geo}(p, \epsilon)$ , une boule géodésique dans  $\mathcal{S}$ , de rayon  $\epsilon > 0$  et de centre  $p$ . Soit  $v \in B(0, \epsilon) \subset T_p \mathcal{S}$  et soit  $\gamma = \gamma_{p,v}$  la géodésique radiale issue de  $p$  et de direction  $v$ . On a alors pour tout  $s \in [-1; 1]$ ,

$$d_{\mathcal{S}_1}(p, \gamma(s)) = L_{\gamma|_{[0;s]}} = s \|v\|.$$

Comme  $f$  est une isométrie, et donc préserve la distance intrinsèque, on a pour tout  $s \in [-1; 1]$ ,

$$d_{\mathcal{S}_1}(p, \gamma(s)) = d_{\mathcal{S}_2}(f(p), f(\gamma(s))).$$

Or, par définition,  $d_{\mathcal{S}_2}(f(p), f(\gamma(s)))$  est plus petite que la longueur de toute courbe paramétrée continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\mathcal{S}_2$  joignant  $f(p)$  et  $f(\gamma(s))$ . En particulier ceci s'applique à la courbe  $\beta = f \circ \gamma$ , et donc

$$s \|v\| = d_{\mathcal{S}_1}(p, \gamma(s)) \leq \int_0^s \|\beta'(t)\| dt = \int_0^s \|df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\| dt.$$

Les termes extrêmes de cette inégalité sont des fonctions de  $\mathcal{S}$  qui s'annulent en  $s = 0$  et dérivables à droite en 0. En prenant les dérivées à droites en 0, on obtient

$$\|v\| \leq df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \|df_p(v)\|.$$

Ceci montre que  $df_p$  est injective. On en déduit que  $f$  est un difféomorphisme local, et donc un difféomorphisme de  $\mathcal{S}_1$  sur son image. Ainsi  $f(\mathcal{S}_1)$  est une sous-variété. En considérant  $f^{-1}$ , on montre l'inégalité inverse. On a donc pour tout  $v \in B_\epsilon(0) \subset T_p \mathcal{S}_1$ ,

$$\|df_p(v)\| = \|v\|.$$

Ceci s'étend par linéarité à tout  $v \in T_p \mathcal{S}$  et montre que  $df_p$  est une isométrie linéaire.  $\square$

## V.6 Théorème de Bonnet.

### Lemme V.6.1.

Soit  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{S}$  une géodésique paramétrée par le longueur de l'arc d'une surface fermée  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $N$  une application de Gauss sur  $\mathcal{S}$  et soit  $K$  la courbure de Gauss. La variation de  $\gamma$  donnée par

$$F(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sf(t)B(t)), \quad (s, t) \in \mathbb{R} \times [a; b],$$

où  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable et  $B(t) = \gamma'(t) \wedge (N \circ \gamma)(t)$ , est bien définie. La variation de la longueur  $L_F$  vérifie

$$L_F''(0) = \int_a^b (f'(t)^2 - (K \circ \gamma)(t)f(t)^2) dt.$$

Démonstration. Comme  $\mathcal{S}$  est fermée, l'application exponentielle est définie sur  $T\mathcal{S}$  tout entier (cf. corollaire V.5.10). Ceci montre que la variation  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R} \times [a; b]$ . Son champ variationnel associé est

$$V : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto f(t)B(t).$$

Si  $L_F$  est la longueur de la variation, on a

$$L_F''(s) = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|(s, t) \right) dt.$$

Exprimons ceci en partant de

$$2 \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 \right) = 2 \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right)$$

En dérivant encore par rapport à  $s$ , on obtient

$$\left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial s^2 \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} \right\rangle = \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) \right)^2 + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right).$$

Donc

$$(V.6.1) \quad L_F''(s) = \int_a^b \left( \frac{\left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial s^2 \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} \right\rangle - \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) \right)^2}{\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|} \right) (s, t) dt$$

Notre but est maintenant d'évaluer ceci en  $s = 0$ . Remarquons que pour tout  $t \in [a; b]$ ,  $(\gamma'(t), N(\gamma(t)), B(t))$  est une base orthonormée directe de  $T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ . Pour simplifier, notons simplement  $N(t)$  pour  $N(\gamma(t))$ . On a donc  $\langle \gamma'(t), N(t) \rangle = 0$ , d'où

$$\langle \gamma''(t), N(t) \rangle = -\langle \gamma'(t), dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \rangle = \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)).$$

De plus,  $\gamma$  étant une géodésique,  $\gamma''(t)$  est normal au plan tangent, donc colinéaire à  $N(t)$  et

$$(V.6.2) \quad \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) = \gamma'(t), \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) \right\| = \|\gamma'(t)\| = 1,$$

$$(V.6.3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, t) = \gamma''(t) = \langle \gamma''(t), N(t) \rangle N(t) = \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) N(t).$$

D'autre part  $\langle N(t), N(t) \rangle = 1$ , donc  $\langle N(t), N'(t) \rangle = 0$ , ce qui montre que  $N'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ , et par conséquent

$$(V.6.4) \quad \begin{aligned} N'(t) &= dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \langle dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t) + \langle dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), B(t) \rangle B(t) \\ &= -\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \gamma'(t) - \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t)) B(t). \end{aligned}$$

Calculons, en utilisant que  $\gamma''(t)$  est colinéaire à  $N(\gamma(t))$  et (V.6.4)

$$(V.6.5) \quad \begin{aligned} B'(t) &= (\gamma' \wedge N)'(t) = (\gamma''(t) \wedge N(t)) + (\gamma'(t) \wedge N'(t)) \\ &= \gamma'(t) \wedge N'(t) = -\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t)) \gamma'(t) \wedge B(t) = \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t)) N(t). \end{aligned}$$

La définition de l'exponentielle et l'homogénéité des géodésiques permettent d'écrire, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R} \times [a; b]$ ,

$$(V.6.6) \quad F(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sf(t)B(t)) = \gamma(\gamma(t), sf(t)B(t), 1) = \gamma(\gamma(t), f(t)B(t), s).$$

On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, t) = \gamma'_{\gamma(t), f(t)B(t)}(0) = f(t)B(t).$$



En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient en utilisant (V.6.5) :

$$(V.6.7) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(0, t) = f'(t)B(t) + f(t)B'(t) = f'(t)B(t) + f(t)\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t)) N(t)$$

De ceci on déduit

$$(V.6.8) \quad \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} \right\rangle(0, t) = f'(t)^2 + f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t))^2.$$

Pour évaluer le premier terme de l'intégrale dans (V.6.1), on repart de l'équation (V.6.6), que l'on dérive cette fois deux fois en  $s$ ,

$$(V.6.9) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, t) = \gamma''_{\gamma(t), f(t)B(t)}(0) = f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) N(t).$$

La dernière égalité fait appel au théorème de Meusnier (proposition IV.2.1).

On écrit, en tenant compte de (V.6.9) et (V.6.2)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial s^2 \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle(0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle(0, t) - \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right\rangle(0, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \langle N(t), \gamma'(t) \rangle) - f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \langle N(t), \gamma''(t) \rangle \\ &= -f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \langle N(t), N(t) \rangle \\ &= -f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \end{aligned}$$

Rappelons l'équation (V.4.1)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) (0, t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} \right\rangle(0, t).$$

On a donc

$$(V.6.10) \quad \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \right) \right)^2 (0, t) = \left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(0, t), \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(0, t) \right\rangle \right)^2 \\ = (\langle \gamma'(t), f'(t)B(t) + f(t)\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t))N(t) \rangle)^2 = 0.$$

En reportant tout ceci dans (V.6.1) (en  $s = 0$ ), on aboutit à

$$\begin{aligned} L_F''(0) &= \int_a^b [-f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + f'(t)^2 + f(t)^2 \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t))^2] dt \\ &= \int_a^b \left[ f(t)^2 (\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), B(t))^2 - \sigma_{\gamma(t)}(B(t), B(t)) \sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))) + f'(t)^2 \right] dt. \\ &= \int_a^b [-f(t)^2 (K \circ \gamma)(t) + f'(t)^2] dt. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que  $(\gamma'(t), B(t))$  est une base orthonormale de  $T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ .  $\square$

**Théorème V.6.2** (Théorème de Bonnet).

Soit  $\mathcal{S}$  une surface connexe, fermée dans  $\mathbb{R}^3$  dont la courbure de Gauss vérifie  $\inf_{p \in \mathcal{S}} K(p) > 0$ . Alors  $\mathcal{S}$  est compacte et la distance maximale intrinsèque entre deux points de  $\mathcal{S}$  est inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{\sqrt{\inf_{p \in \mathcal{S}} K(p)}}$ . A fortiori, son diamètre, en tant que sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ , est inférieur ou égal à cette même constante.

*Démonstration.* Posons  $k = \inf_{p \in \mathcal{S}} K(p) > 0$ . Comme les courbures principales sont solutions réelles de l'équation  $X^2 - 2HX + K = 0$ , le discriminant de ce binôme est positif ou nul, donc

$$H^2 - K \geq 0$$

et il y a égalité si et seulement si l'on se trouve en un point ombilical. On a donc  $H^2 \geq K \geq k > 0$ . En chaque point de la surface, on considère un voisinage orientable de ce point, et l'on choisit l'orientation de sorte que  $H$  reste strictement positif sur ce voisinage. Ces choix locaux sont compatibles, et la surface est donc orientable (en fait, toute surface fermée est orientable). De plus, le théorème de Hopf-Rinow s'applique, et étant donné deux points  $p_1$  et  $p_2$  de  $\mathcal{S}$ , on sait qu'il existe une géodésique, paramétrée par la longueur de l'arc  $\gamma : [0; L] \rightarrow \mathcal{S}$  telle que  $\gamma(0) = p_1$ ,  $\gamma(L) = p_2$  et  $d_{\mathcal{S}}(p_1, p_2) = L_{\gamma}$ . On applique alors le lemme V.6.1 à cette géodésique et l'on en conclut que

$$L_F''(0) = \int_0^L (f'(t)^2 - (K \circ \gamma)(t)f(t)^2) dt \leq \int_0^L (f'(t)^2 - k^2 f(t)^2) dt,$$

où  $F(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sf(t)B(t))$ ,  $(s, t) \in \mathbb{R} \times [a; b]$ ,  $f : [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable et  $B(t) = \gamma'(t) \wedge (N \circ \gamma)(t)$ . Pour une fonction  $f$  qui s'annule en 0 et  $L$ , la variation  $F$  est à extrémités fixées, et la fonction longueur  $L_F$  admet un minimum en  $s = 0$ . En particulier,  $L_F'(0) = 0$  et  $L_F''(0) \geq 0$ . Par conséquent

$$0 \leq \int_0^L (f'(t)^2 - k^2 f(t)^2) dt$$

pour toute fonction différentiable  $f : [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(0) = f(L) = 0$ . Prenons la fonction  $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right)$ . Un calcul élémentaire donne alors  $\frac{\pi^2}{2L} - \frac{kL}{2} \geq 0$ . On obtient donc

$$\|p_1 - p_2\| \leq L_{\gamma} = L \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Ceci étant vrai quels que soient  $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ , on obtient

$$\text{Diam}(\mathcal{S}) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\inf_{p \in \mathcal{S}} K(p)}}. \quad \square$$

**Remarque V.6.3.** L'inégalité du théorème de Bonnet est optimale, comme le montre le cas des sphères. Pour une sphère de rayon  $r$ , la courbure de Gauss est constante égale à  $\frac{1}{r^2}$ , et la distance maximale intrinsèque entre deux points est atteinte pour deux points antipodaux et vaut  $\pi r$  (en revanche son diamètre en tant que partie de  $\mathbb{R}^3$  vaut  $2r$ ).

**Remarque V.6.4.** L'hypothèse de stricte positivité de  $\inf_{p \in \mathcal{S}} K(p)$  ne pas être affaiblie. On peut le voir en considérant le cas du paraboloïde elliptique

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2\},$$

qui est le graphe de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Sa courbure de Gauss en  $p = (x, y, z)$  vaut  $K(p) = \frac{1}{(1 + 2z^2)^2}$  qui est toujours positif ou nul.

**Exercice V.6.5.** Énoncer et démontrer un résultat analogue au théorème de Bonnet pour les sous-variétés de dimension 1 du plan  $\mathbb{R}^2$ .

## V.7 Paramétrages spéciaux des surfaces

Nous allons nous servir du théorème I.10.11 sur le flot des champs de vecteurs tangents sur les sous-variétés, pour trouver des paramétrages locaux des surfaces possédant certaines propriétés. Ceci nous permettra de simplifier certains calculs utilisant des paramétrages locaux. Nous renvoyons au théorème I.10.11 pour la définition du flot.

### Proposition V.7.1.

Soient  $X$  un champ de vecteurs tangents sur une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$  son flot. Soit  $p_0$  un point de  $\mathcal{S}$  tel que  $X(p) \neq 0$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}$  de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}$  et une fonction différentiable  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  sans point critique tel que si  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{W}$  est une courbe intégrale de  $X$ , alors  $f \circ \alpha$  est constante. En d'autres termes, le noyau de  $df_p$  est exactement la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $X(p)$ , pour tout  $p \in \mathcal{W}$ .

Démonstration. Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage ouvert de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}$ , et  $\epsilon > 0$  tel que le flot  $F$  soit défini sur  $] -\epsilon; \epsilon[ \times \mathcal{W}$  (l'existence d'un tel voisinage et de  $\epsilon$  est garanti par le fait que  $\mathcal{D}$  (cf. théorème I.10.11) est ouvert dans  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ ). D'autre part, comme  $X(p_0) \neq 0$ , on peut par continuité supposer que  $X$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{W}$ . Soit  $v \in T_{p_0}\mathcal{S}$  un vecteur linéairement indépendant de  $X(p_0)$ , et soit  $\alpha : ] -\delta; \delta[ \rightarrow \mathcal{W}$  une courbe paramétrée telle que  $\alpha(0) = p_0$  et  $\alpha'(0) = v$ . Définissons l'application

$$G : ] -\delta; \delta[ \times ] -\epsilon; \epsilon[ \longrightarrow \mathcal{S}, \quad (s, t) \mapsto F(t, \alpha(s)).$$

On a  $G(0, 0) = F(0, \alpha(0)) = F(0, p_0) = p_0$  et en différentiant par rapport à  $s$  et en évaluant en  $s = 0$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds} [F(0, \alpha(s))]_{s=0} = \frac{d}{ds} [\alpha(s)]_{s=0} = v.$$

En différentiant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s, t) = \frac{d}{dt} [F(t, \alpha(s))] = (X \circ F)(t, \alpha(s)) = X(G(s, t)).$$

En particulier, comme  $X(p_0)$  et  $v$  sont linéairement indépendants,  $dG_{(0,0)}$  est injective. Le théorème d'inversion locale s'applique, et l'on peut donc trouver un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  tel que

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$$

soit un difféomorphisme. On pose alors  $f = \pi_1 \circ G^{-1}$  où  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) est la projection sur la première (resp. la deuxième) composante dans  $\mathbb{R}^2$ . On a alors

$$df_{G(s,t)} \circ dG_{(s,t)} = d(\pi_1)_{(s,t)} = \pi_1,$$

pour tout  $(s,t) \in \mathcal{U}$ . En particulier  $df_{G(s,t)} \neq 0$  en tout point  $(s,t) \in \mathcal{U}$  et donc  $f$  n'a pas de point critique sur  $\mathcal{W}$ . D'autre part, si  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{W}$  est la courbe intégrale de  $X$  passant par  $p_0$  en 0, et si l'on pose  $g = \pi_2 \circ G^{-1}$ , on a

$$G(f(\alpha(u)), g(\alpha(u))) = G(\pi_1 \circ G^{-1}(\alpha(u)), \pi_2 \circ G^{-1}(\alpha(u))) = \alpha(u), \quad (u \in I).$$

De ceci, on tire

$$\begin{aligned} X(\alpha(u)) &= \alpha'(u) = (f \circ \alpha)'(u) \frac{\partial G}{\partial s}(f(\alpha(u)), g(\alpha(u))) + (g \circ \alpha)'(u) \frac{\partial G}{\partial t}(f(\alpha(u)), g(\alpha(u))) \\ &= (f \circ \alpha)'(u) \frac{\partial G}{\partial s}(f(\alpha(u)), g(\alpha(u))) + (g \circ \alpha)'(u) X(G(f(\alpha(u)), g(\alpha(u)))), \quad (u \in I). \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\partial G}{\partial s}$  et  $X$  sont linéairement indépendants en chaque point de  $\mathcal{U}$ ,  $(f \circ \gamma)'(u) = 0$  pour tout  $u \in I$ . Ceci montre que  $f \circ \alpha$  est constante. La dernière assertion de la proposition est alors immédiate.  $\square$

### Théorème V.7.2.

Soient  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $X_1, X_2$  deux champs de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}$ , tels qu'en un point  $p_0 \in \mathcal{S}$ ,  $X_1(p_0)$  et  $X_2(p_0)$  soient linéairement indépendants. Il existe alors un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  de  $\mathcal{S}$  en  $p_0$  tel que  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  soient respectivement colinéaires à  $X_1 \circ \mathbf{x}$  et  $X_2 \circ \mathbf{x}$ . Autrement dit les courbes

$$u \mapsto \mathbf{x}(u, 0) \quad \text{et} \quad v \mapsto \mathbf{x}(0, v)$$

sont des reparamétrages des courbes intégrales de  $X_1$  et  $X_2$ .

Démonstration. Soient  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$  et  $f_1, f_2$  les voisinages ouverts de  $p_0$  dans  $\mathcal{S}$  et les fonctions de ces voisinages dans  $\mathbb{R}$  donnés par la proposition ci-dessus. Définissons

$$H : \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(p) = (f_2(p), f_1(p)).$$

Alors  $\ker dH_p = \ker d(f_1)_p \cap \ker d(f_2)_p = \{0\}$ , ce qui montre que  $dH_p$  est inversible. Le théorème d'inversion locale nous donne un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $p$  dans  $\mathcal{S}$  et un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que

$$H : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$$

soit un difféomorphisme. Posons alors  $\mathbf{x} = H^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ . On a en effet

$$f_2(\mathbf{x}(u, v)) = u, \quad f_1(\mathbf{x}(u, v)) = v, \quad ((u, v) \in \mathcal{U}),$$

d'où

$$d(f_2)_{\mathbf{x}(u, v)}(\mathbf{x}_v(u, v)) = 0, \quad d(f_1)_{\mathbf{x}(u, v)}(\mathbf{x}_u(u, v)) = 0.$$

Ceci termine la démonstration car les noyaux respectifs de  $d(f_2)_p$  et  $d(f_1)_p$  sont engendrés respectivement par  $X_2(p)$  et  $X_1(p)$ .  $\square$

**Exemple V.7.3** (Paramétrage orthogonal). Soit  $\mathbf{y} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local d'une surface  $\mathcal{S}$ . En chaque point de  $p = \mathbf{y}(u, v)$ , le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt nous donne une base orthogonale de  $T_p \mathcal{S}$  à partir de la base  $(\mathbf{y}_u(u, v), \mathbf{y}_v(u, v))$ ,

$$X_1(p) = \frac{\mathbf{y}_u(u, v)}{\|\mathbf{y}_u(u, v)\|}, \quad X_2(p) = \mathbf{y}_v(u, v) - \langle \mathbf{y}_v(u, v), \mathbf{y}_u(u, v) \rangle \frac{\mathbf{y}_u(u, v)}{\|\mathbf{y}_u(u, v)\|^2}.$$

Ces champs de vecteurs tangents sont clairement différentiables, et le théorème nous donne en chaque point un paramétrage local  $\mathbf{x}$  tel que  $\langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 0$  pour tout  $(u, v)$  dans le domaine de définition de ce paramétrage. On appelle un tel paramétrage un **paramétrage orthogonal**.

**Exemple V.7.4** (Paramétrage par les lignes de courbures). Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  sans point ombilicaux. Soient  $p \in \mathcal{S}$  et  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local orthogonal de  $\mathcal{S}$  en  $p$ , avec  $q = \mathbf{x}^{-1}(p) \in \mathcal{U}$ . L'application de Weingarten en  $L_p$  se diagonalise dans une base orthogonale de  $T_p \mathcal{S}$ . Si la base  $(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q))$ , qui est une base orthogonale de  $T_p \mathcal{S}$ , se trouve être une base de diagonalisation de  $L_p$ , quitte à échanger les variables  $u$  et  $v$ , on peut alors supposer que  $L_p(\mathbf{x}_u(q)) = k_2(p) \mathbf{x}_u(q)$  et  $L_p(\mathbf{x}_v(q)) = k_1(p) \mathbf{x}_v(q)$ . Comme le point  $p$  n'est pas ombilical, on a  $k_1(p) \neq k_2(p)$ , et donc

$$(V.7.1) \quad L_p((\mathbf{x}_u(q)) \neq k_1(p) \mathbf{x}_u(q) \quad \text{et} \quad L_p((\mathbf{x}_v(q)) \neq k_2(p) \mathbf{x}_v(q).$$

Si la base  $(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q))$ , n'est une base une base de diagonalisation de  $L_p$ , (V.7.1) reste vrai.

Posons, pour tout  $r \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{aligned} Z_1(r) &= L_{\mathbf{x}(r)}(\mathbf{x}_u(r)) - k_1(\mathbf{x}(r)) \mathbf{x}_u(r) \\ Z_2(r) &= L_{\mathbf{x}(r)}(\mathbf{x}_v(r)) - k_2(\mathbf{x}(r)) \mathbf{x}_v(r). \end{aligned}$$

Ce sont des fonctions continues sur  $\mathcal{U}$ , qui ne s'annulent pas en  $q$ , et donc qui ne s'annulent pas sur un voisinage de  $q$ . Quitte à réduire  $\mathcal{U}$ , on peut donc supposer que  $Z_1$  et  $Z_2$  ne s'annulent pas. Comme l'endomorphisme  $L_{\mathbf{x}(r)}$  vérifie

$$(L_{\mathbf{x}(r)} - k_1(\mathbf{x}(r)) \text{Id}_{T_{\mathbf{x}(r)} \mathcal{S}})(L_{\mathbf{x}(r)} - k_2(\mathbf{x}(r)) \text{Id}_{T_{\mathbf{x}(r)} \mathcal{S}}) = 0,$$

on a

$$L_{\mathbf{x}(r)}(Z_1(r)) = k_2(\mathbf{x}(r)) Z_1(r) \quad \text{et} \quad L_{\mathbf{x}(r)}(Z_2(r)) = k_1(\mathbf{x}(r)) Z_2(r).$$

Les champs de vecteurs  $X_1 = Z_1 \circ \mathbf{x}^{-1}$  et  $X_2 = Z_2 \circ \mathbf{x}^{-1}$  sont différentiables (on utilise la proposition IV.3.1). En chaque point, ils donnent une base de diagonalisation de l'application de Weingarten. En particulier, ils sont orthogonaux. En appliquant le théorème

V.7.2, on obtient l'existence en chaque point de  $\mathcal{S}$  d'un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  tel que en tout point  $q \in \mathcal{U}$ , les vecteurs de la base  $(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q))$  de  $T_{\mathbf{x}(q)}\mathcal{S}$  soient les directions principales en  $p = \mathbf{x}(q)$ .

On appelle ce type de paramétrage un **paramétrage par les lignes de courbures**, puisque par définition, une ligne de courbure sur une surface  $\mathcal{S}$  est une courbe dont tout vecteur tangent est un vecteur propre de l'application de Weingarten.

Comme application de l'existence de ces paramétrages spéciaux, nous allons montrer le résultat suivant qui décrit les surfaces (connexes, orientées) de  $\mathbb{R}^3$  dont les courbures principales sont constantes.

**Théorème V.7.5.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface connexe et orientée de  $\mathbb{R}^3$  dont les courbures principales sont constantes. Alors  $\mathcal{S}$  est un ouvert d'un plan, d'une sphère ou d'un cylindre droit.

*Démonstration.* Soient  $N$  l'application de Gauss de la surface orientée  $\mathcal{S}$  et  $k_1, k_2$  ses courbures principales. Si  $\mathcal{S}$  est totalement ombilicale, c'est un ouvert d'un plan ou d'une sphère d'après l'exercice IV.2.6. On se place donc dans le cas où  $k_1 \neq k_2$ . En chaque point  $p \in \mathcal{S}$ , il existe alors un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  par les lignes de courbures, c'est-à-dire que pour tout  $q \in \mathcal{U}$ , on a

$$dN_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_u(q)) = -k_1 \mathbf{x}_u(q), \quad dN_{\mathbf{x}(q)}(\mathbf{x}_v(q)) = -k_2 \mathbf{x}_v(q), \quad \langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle = 0.$$

On dérive les deux premières égalités respectivement par rapport à  $v$  et  $u$ , pour obtenir

$$(N \circ \mathbf{x})_{uv} = -k_1 \mathbf{x}_{uv}(q), \quad (N \circ \mathbf{x})_{vu} = -k_2 \mathbf{x}_{vu}(q).$$

Comme par le lemme de Schwarz  $(N \circ \mathbf{x})_{uv} = (N \circ \mathbf{x})_{vu}$  et  $\mathbf{x}_{uv}(q) = \mathbf{x}_{vu}(q)$ , mais que  $k_1 \neq k_2$ , on a nécessairement  $\mathbf{x}_{uv}(q) = 0$ . En dérivant par rapport à  $v$  l'équation  $\langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle = 0$ , et en tenant compte de  $\mathbf{x}_{uv}(q) = 0$ , on aboutit à  $\langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle = 0$ . Rappelons que le théorème de Gauss (remarque V.3.12) nous donne :

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v}(\mathbf{x}_v) - \nabla_{\mathbf{x}_v} \nabla_{\mathbf{x}_u}(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle = (K \circ \mathbf{x})(EG - F^2).$$

Or  $\nabla_{\mathbf{x}_u}(\mathbf{x}_v)$  est la composante tangentielle de  $\mathbf{x}_{uv}$  et est donc nulle. De même  $\nabla_{\mathbf{x}_v}(\mathbf{x}_v)$  est la composante tangentielle de  $\mathbf{x}_{vv}$  et l'équation  $\langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle = 0$  nous montre que cette composante tangentielle est colinéaire à  $\mathbf{x}_v(q)$ . Écrivons donc  $\nabla_{\mathbf{x}_v}(\mathbf{x}_v) = h \mathbf{x}_v$  pour une certaine fonction différentiable  $h$  de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ . On a donc

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v}(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}_u}(h \mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle = \langle h \nabla_{\mathbf{x}_u}(\mathbf{x}_v) + h_u \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

L'équation de Gauss s'écrit finalement  $(K \circ \mathbf{x})(EG - F^2) \equiv 0$ , et comme  $EG - F^2$  ne s'annule pas, on en déduit que la courbure de Gauss est partout nulle sur  $\mathcal{S}$ . Quitte à changer l'orientation de  $\mathcal{S}$ , on peut supposer que  $k_1 = 0 < k_2$ . On a alors  $dN_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_u) = (N \circ \mathbf{x})_u = 0$  sur  $\mathcal{U}$ . Montrons que les calculs faits ci-dessus impliquent que le champ de vecteurs  $\frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}$  est constant. On a tout d'abord

$$\left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_u, N \circ \mathbf{x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, N \circ \mathbf{x} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, (N \circ \mathbf{x})_u \right\rangle = 0.$$

D'autre part

$$\left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_u, \mathbf{x}_v \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, \mathbf{x}_v \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, \mathbf{x}_{vu} \right\rangle = 0,$$

et enfin

$$\left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_u, \mathbf{x}_u \right\rangle = \|\mathbf{x}_u\| \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right\rangle = 0$$

car  $\frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}$  est un champ de vecteurs unitaires. Comme en tout point de  $\mathcal{U}$ ,  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N \circ \mathbf{x})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , on conclut que  $\left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_u = 0$ .

Calculons maintenant  $\left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_v$  :

$$\left( \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} \right)_v = \frac{\mathbf{x}_{uv}}{\|\mathbf{x}_u\|} - \frac{\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle}{\|\mathbf{x}_u\|^3} = 0.$$

Ceci montre que le champ de vecteurs unitaires  $\frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}$  est constant (on a bien sûr supposé  $\mathcal{U}$  connexe). Il existe donc  $a \in \mathbb{S}^2$  tel que  $\frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} = a$ , et ainsi

$$\langle \mathbf{x}_v, a \rangle = 0, \quad \langle N, a \rangle = 0.$$

Considérons l'application

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad q = (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) - \langle \mathbf{x}(u, v), a \rangle a + \frac{1}{k_2} N \circ \mathbf{x}(u, v).$$

On a

$$G_u(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) - \langle \mathbf{x}_u(u, v), a \rangle a + \frac{1}{k_2} (N \circ \mathbf{x})_u(u, v) = 0$$

et

$$G_v(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v) - \langle \mathbf{x}_v(u, v), a \rangle a + \frac{1}{k_2} (N \circ \mathbf{x})_v(u, v) = 0.$$

Ceci montre que  $G$  est constante sur  $\mathcal{U}$ . Posons

$$\mathbf{x}(u, v) - \langle \mathbf{x}(u, v), a \rangle a + \frac{1}{k_2} N \circ \mathbf{x}(u, v) = c,$$

où  $c \in \mathbb{R}^3$ . On voit facilement que  $\langle c, a \rangle = 0$ . On a donc trouvé deux vecteurs orthogonaux de  $\mathbb{R}^3$ ,  $a$  et  $c$ , tel que

$$\mathbf{x}(u, v) - \langle \mathbf{x}(u, v), a \rangle a - c = -\frac{1}{k_2} N \circ \mathbf{x}(u, v).$$

En prenant les normes, on obtient

$$\|\mathbf{x}(u, v) - c\|^2 - \langle \mathbf{x}(u, v) - c, a \rangle = \frac{1}{k_2^2}.$$

Autrement dit, la distance du point  $p = \mathbf{x}(u, v) \in \mathcal{S}$  à la droite  $D$  passant par  $c$  de vecteur directeur  $a$  est constante et égale à  $\frac{1}{k_2}$ . Ceci montre que  $\mathbf{x}(\mathcal{U})$  est inclus dans le cylindre droit de rayon  $\frac{1}{k_2}$  et d'axe  $D$ . Comme  $\mathcal{S}$  est connexe, ce cylindre est le même pour tous les paramétrages locaux, et ceci termine la démonstration.  $\square$

## V.8 Exercices

**Exercice V.8.1.** Montrer que le groupe des isométries d'une sphère  $\mathbb{S}^2(a, r)$  dans  $\mathbb{R}^3$  coïncide avec le sous-groupe des déplacements de l'espace qui fixent le centre  $a$  de  $\mathbb{S}^2(a, r)$ . Montrer que ce sous-groupe est isomorphe à  $\mathbf{O}(3)$ .

**Exercice V.8.2.** Que dire d'une surface compacte  $\mathcal{S}$  dont l'application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est une isométrie ?

**Exercice V.8.3.** Considérons les applications

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}_+^\times \times ]0; 2\pi[ &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (u \cos v, u \sin v, \log u), \\ \mathbf{x}' : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (u \cos v, u \sin v, v), \end{aligned}$$

Montrer qu'elles définissent des surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$   $f = \mathbf{x}' \circ \mathbf{x}^{-1}$  vérifie  $K = K' \circ f$  mais n'est pas une isométrie.

**Exercice V.8.4** (Trièdre de Darboux). Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  orientée par une application de Gauss  $N$ . Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{S}$  une géodésique paramétrée par la longueur de l'arc sur  $\mathcal{S}$ . Définissons

$$T, N, B : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(t) = \gamma'(t), \quad N(t) = N(\gamma(t)), \quad B(t) = T(t) \wedge N(t).$$

Alors  $T, N, B$  sont différentiables, et pour tout  $t \in I$ ,  $(T(t), N(t), B(t))$  est une base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(T(t), B(t))$  est une base orthonormale de  $T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ . Montrer que pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} T'(t) &= \sigma_{\gamma(t)}(T(t), T(t)) N(t) \\ N'(t) &= -\sigma_{\gamma(t)}(T(t), T(t)) T(t) - \sigma_{\gamma(t)}(T(t), B(t)) B(t) \\ B'(t) &= \sigma_{\gamma(t)}(T(t), B(t)) N(t) \end{aligned}$$

En déduire :

1. Si  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{S}$  une géodésique de  $\mathcal{S}$  telle que

$$\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$$

pour tout  $t \in I$ , alors la trace de  $\gamma$  est un segment de droite.

2. Si les géodésiques de  $\mathcal{S}$  sont des courbes planes, alors la surface est contenue dans un plan ou dans une sphère.

**Exercice V.8.5.** Discutez du problème de l'unicité des traces des géodésiques joignant deux points donnés dans le cas d'un plan, d'une sphère et d'un cylindre. En déduire que pour la sphère unité, une géodésique de longueur strictement inférieure à  $\pi$  minimise la distance entre ses extrémités.

**Exercice V.8.6.** Montrer que la distance intrinsèque entre deux points de la sphère unité est inférieure ou égale à  $\pi$ , et égale à  $\pi$  si et seulement si les deux points sont antipodaux.

**Exercice V.8.7.** Montrer que si  $p$  et  $q$  sont deux points non antipodaux de la sphère unité, il existe un point  $m$  sur la géodésique joignant  $p$  à  $q$  à égale distance de  $p$  et  $q$ , et que  $p$  et  $q$  sont échangés par la rotation de  $\mathbb{R}^3$  d'angle  $\pi$  et d'axe  $m$ .



**Exercice V.8.8** (Equations d'Euler-Lagrange). Soit  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto L(x, y, z)$  de classe (au moins)  $\mathcal{C}^2$ . Pour toute fonction  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t)$  de classe (au moins)  $\mathcal{C}^2$ , on pose

$$I_f = \int_a^b L(t, f(t), f'(t)) dt.$$

Une variation de  $f$  est une fonction de classe (au moins)  $\mathcal{C}^2$

$$F : ]-\epsilon; \epsilon[ \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, t) \mapsto F(u, t)$$

telle que  $F(0, t) = f(t)$ . Elle est à extrémités fixées si pour tout  $u \in ]-\epsilon; \epsilon[$ ,  $F(u, a) = f(a)$  et  $F(u, b) = f(b)$ , ce que l'on suppose par la suite. Son champ variationnel est défini par  $V(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(0, t)$ .

Posons

$$I_F(u) = \int_a^b L(t, F(u, t), \frac{\partial F}{\partial t}(u, t)) dt.$$

1. Montrer que

$$I'_F(u) = \left[ \frac{\partial L}{\partial z}(t, F(u, t), \frac{\partial F}{\partial t}(u, t)) \frac{\partial F}{\partial u}(u, t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u}(u, t) \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial z} \right) (t, F(u, t), \frac{\partial F}{\partial t}(u, t)) dt.$$

2. On suppose dans la suite que la variation  $F$  est à extrémités fixées. Montrer que  $I'_F(0) = 0$  si et seulement si

$$\int_a^b V(t) \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial z} \right) (t, f(t), f'(t)) dt.$$

3. En déduire que  $f$  est critique pour  $I$  (c'est-à-dire  $I'_F(0) = 0$  pour toute variation  $F$  de  $f$ ) si et seulement si

$$\left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial z} \right) (t, f(t), f'(t)) = 0.$$

3. Montrer que si  $L$  ne dépend pas de  $x$ , mais seulement des variables  $y$  et  $z$ , et si  $f$  est critique pour  $I$ , alors la quantité

$$H(t) = f'(t) \frac{\partial L}{\partial z}(f(t), f'(t)) - L(f(t), f'(t))$$

est constante.

**Exercice V.8.9.** Si  $p$  est un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , montrer que  $\mathbb{S}^2 \setminus \{-p\}$  est une boule géodésique centrée en  $p$ . Quel est son rayon ?

**Exercice V.8.10.** Soient  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  deux isométries infinitésimales entre surfaces,  $\mathcal{S}$  étant connexe. Montrer que si  $f$  et  $g$  coïncident en un point  $p \in \mathcal{S}$  ainsi que leurs différentielles, alors elles coïncident partout. Pour cela, montrer tout d'abord que l'ensemble des points de  $\mathcal{S}$  où  $f$  et  $g$  coïncident ainsi que leurs différentielles est fermé dans  $\mathcal{S}$ . Montrer ensuite qu'il est ouvert en utilisant le théorème d'existence de boules géodésiques.

**Exercice V.8.11.** Soit  $B_{geo}(p, \epsilon)$  une boule géodésique sur une surface connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow T_p\mathcal{S}$  une paramétrisation locale par la longueur de l'arc du cercle unité de  $T_p\mathcal{S}$ . Définissons

$$\Phi : ]0; \epsilon[ \times I \rightarrow \mathcal{S}, \quad \Phi(t, s) = \exp_p(t\alpha(s)).$$

Montrer que la courbure de Gauss  $K$  de  $\mathcal{S}$  vérifie

$$\|\Phi_s\|_{tt} + (K \circ \Phi) \|\Phi_s\| = 0$$

pour tout  $(t, s) \in ]0; \epsilon[ \times I$ .

**Exercice V.8.12** (Formule de Bertrand-Puiseux). Soit  $B_{geo}(p, \epsilon)$  une boule géodésique sur une surface connexe  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $t \in ]0; \epsilon[$ , notons  $\mathcal{C}_t$  le cercle de centre 0 et de rayon  $t$  de  $T_p\mathcal{S}$ . Le cercle géodésique en  $p$  de rayon  $t$  est alors  $\exp_p(\mathcal{C}_t)$ . Notons  $L_t$  sa longueur. Montrer que l'on a

$$K(p) = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{2\pi t - L_t}{\pi t^3}.$$

**Exercice V.8.13** (Théorème de Minding). Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux surfaces connexes de  $\mathbb{R}^3$  de même courbure de Gauss constante  $c$  et soient  $p \in \mathcal{S}$ ,  $p' \in \mathcal{S}'$  et  $\epsilon > 0$  tels que les boules géodésiques  $B_{geo}(p, \epsilon)$  et  $B_{geo}(p', \epsilon)$  soient définies. Fixons une isométrie linéaire  $\phi$  entre  $T_p\mathcal{S}$  et  $T_{p'}\mathcal{S}'$  et posons

$$f : B_{geo}(p, \epsilon) \longrightarrow B_{geo}(p', \epsilon), \quad f = \exp_{p'} \circ \phi \circ \exp_p^{-1}.$$

Montrer que  $f$  est une isométrie infinitésimale.

**Exercice V.8.14.** Montrer que si  $\mathcal{S}$  est une surface connexe fermée de  $\mathbb{R}^3$  de courbure de Gauss identiquement nulle, alors pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , l'application  $\exp_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  est une isométrie infinitésimale.

# Chapitre VI

## Intégration sur les surfaces

Dans ce chapitre, nous allons développer une théorie de l'intégration sur les surfaces. L'idée est d'utiliser les paramétrages locaux pour importer sur la surface l'intégrale de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ . La difficulté technique est de faire ceci de telle sorte que le résultat ne dépende pas du paramétrage local choisi, et que l'on puisse recoller de manière cohérente les contributions des paramétrages locaux. On peut aisément généraliser cette théorie aux sous-variétés de dimension quelconque, nous laissons cette tâche au lecteur courageux. L'intégrale sur les surfaces possède des propriétés similaires à celles de l'intégrale de Lebesgue (changement de variables, théorèmes de Fubini, de convergence dominée, de continuité et dérivabilité sous le signe somme, etc). Nous démontrons ensuite une formule de changement de variable dans les intégrales, où le changement de variables n'est pas un difféomorphisme, mais simplement une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cette formule est basée sur le théorème de Sard : les points critiques ne contribuent pas à l'intégrale, et au voisinage des points réguliers, le changement de variable est un difféomorphisme. Nous démontrons grâce à cette formule le théorème de Chern-Lashoff : l'intégrale de la partie positive de la courbure de Gauss sur une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  est au moins égale à  $4\pi$ . Nous l'utilisons ensuite pour établir la formule de Green-Ostrogradski, reliant l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs sur un domaine régulier de  $\mathbb{R}^3$  au flux de ce champ sur la frontière du domaine. La formule de Green-Ostrogradski a de nombreuses applications, en physique par exemple (théorème de Gauss pour l'électrostatique, théorème d'Archimède). Nous donnons une démonstration du théorème de point fixe de Brouwer pour la boule unité de  $\mathbb{R}^3$  basée sur la formule de Green-Ostrogradski.

### VI.1 Déterminant jacobien

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux sous-variétés (respectivement de  $\mathbb{R}^{N_1}$  et  $\mathbb{R}^{N_2}$ ) de même dimension  $m$ , et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application différentiable. Nous allons définir la valeur absolue du déterminant jacobien de  $\varphi$  en  $p$  qui intervient dans les formules de changement de variables.

**Lemme VI.1.1.**

Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels euclidiens de même dimension finie  $m$ , et soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases orthonormales de  $V$  et  $W$  respectivement, et  $M$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . Alors  $|\det(M)|$  est indépendant du choix des bases orthonormales  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{B}'_1$  et  $\mathcal{B}'_2$  deux autres bases orthonormales de  $V$  et  $W$  respectivement, et  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) la matrice de passage entre  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  (resp. entre  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}'_2$ ). La matrice  $M'$  de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}'_1$  et  $\mathcal{B}'_2$  est égale à  $P_1^{-1}MP_2$  et comme  $P_1$  et  $P_2$  sont des matrices orthogonales, on a

$$|\det(M')| = |\det(P_1^{-1}MP_2)| = |\det(M)|.$$

□

Revenons à notre application  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ . Grâce au lemme précédent on peut définir  $|\det(d\varphi_p)|$  en tout point  $p$  de  $\mathcal{S}_1$ .

**Définition VI.1.2.**

Avec les notations qui précèdent, on pose pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$|\text{Jac}(\varphi)(p)| = |\det(d\varphi_p)|.$$

On appelle cette quantité la **valeur absolue du déterminant jacobien** de  $\varphi$  en  $p$ .

**Remarque VI.1.3.** Il est important de noter que seule la valeur absolue du déterminant jacobien est bien définie, pas le déterminant jacobien lui-même.

Il est clair que la valeur absolue du déterminant jacobien se comporte de la manière attendue vis-à-vis de la composition des applications.

**Proposition VI.1.4.**

Soient  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$  trois sous-variétés de même dimension  $m$ , et soient

$$\varphi_1 : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2, \quad \varphi_2 : \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_3,$$

deux applications différentiables. On a alors pour tout  $p \in \mathcal{S}_1$ ,

$$|\text{Jac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(p)| = |\text{Jac}(\varphi_2)(\varphi_1(p))| |\text{Jac}(\varphi_1)(p)|.$$

**Exemple VI.1.5.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage de  $\mathcal{S}$ . On a alors pour tout  $(u, v) \in \mathcal{U}$ ,

$$(VI.1.1) \quad \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| = |\text{Jac}(\mathbf{x}(u, v))|$$

En effet, soit  $e_1, e_2$  une base orthonormale de  $T_p\mathcal{S}$ , où  $p = \mathbf{x}(u, v)$ . La matrice de  $d\mathbf{x}_{(u,v)}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et la base  $(e_1, e_2)$  est

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u(u, v), e_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_v(u, v), e_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u(u, v), e_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_v(u, v), e_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

dont la valeur absolue du déterminant est bien la norme de  $\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)$ .

## VI.2 Définition de l'intégrale sur les surfaces

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{S}$ . Nous voulons définir l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{W}$ , notée

$$\int_{\mathcal{W}} f(p) \, dp.$$

Supposons dans un premier temps que  $\mathcal{W}$  est l'image d'un paramétrage local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ . On pose alors

$$(VI.2.1) \quad \int_{\mathcal{W}} f(p) \, dp = \int_{\mathcal{U}} f \circ \mathbf{x}(u, v) \, |\text{Jac}(\mathbf{x}(u, v))| \, du \, dv.$$

L'intégrale de droite est l'intégrale de Lebesgue sur l'ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f \circ \mathbf{x}$ . L'hypothèse minimale sur  $f$  est donc que  $(f \circ \mathbf{x}) \, |\text{Jac}(\mathbf{x})|$  soit intégrable au sens de Lebesgue sur  $\mathcal{U}$ . Par exemple, tel est le cas si  $f$  est continue à support compact.

**Remarque VI.2.1.** En vertu de (VI.1.1), on peut réécrire ceci sous la forme

$$(VI.2.2) \quad \int_{\mathcal{W}} f(p) \, dp = \int_{\mathcal{U}} f \circ \mathbf{x}(u, v) \, \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Vérifions que la définition donnée ci-dessus ne dépend pas du paramétrage  $\mathbf{x}$ . Soit  $\phi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  un difféomorphisme, et posons

$$\mathbf{x}' : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \circ \phi.$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{U}'} f \circ \mathbf{x}'(u', v') \, |\text{Jac}(\mathbf{x}'(u', v'))| \, du' \, dv' \\ &= \int_{\mathcal{U}'} f \circ \mathbf{x} \circ \phi(u', v') \, |\text{Jac}(\mathbf{x} \circ \phi(u', v'))| \, du' \, dv'. \\ &= \int_{\mathcal{U}'} f \circ \mathbf{x} \circ \phi(u', v') \, |\text{Jac}(\mathbf{x}(\phi(u', v')))| \, |\text{Jac}(\phi(u', v'))| \, du' \, dv'. \\ &= \int_{\mathcal{U}} f \circ \mathbf{x}(u, v) \, |\text{Jac}(\mathbf{x}(u, v))| \, du \, dv. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variables  $(u, v) = \phi(u', v')$ .

Ce calcul montre que  $(f \circ \mathbf{x}) |\text{Jac}(\mathbf{x})|$  est intégrable au sens de Lebesgue sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si  $(f \circ \mathbf{x}') |\text{Jac}(\mathbf{x}')|$  est intégrable au sens de Lebesgue sur  $\mathcal{U}'$  et que de plus dans ce cas  $\int_{\mathcal{W}} f \, dp$  ne dépend pas du paramétrage choisi.

Pour définir l'intégrale sur  $\mathcal{S}$ , utilisons l'existence de partitions de l'unité sur  $\mathcal{S}$  (corollaire I.6.4). Considérons un recouvrement localement fini de  $\mathcal{S}$  par des ouverts de la forme  $\mathcal{W}_i = \mathbf{x}_i(\mathcal{U}_i)$  où les  $\mathbf{x}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{S}$  sont des paramétrages locaux de  $\mathcal{S}$  et une partition de l'unité  $(\psi_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R})_i$  subordonnée à ce recouvrement. Posons alors :

**Définition VI.2.2.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ . On définit l'intégrale d'une fonction  $f$  continue à support compact sur  $\mathcal{S}$  par

$$\int_{\mathcal{S}} f(p) \, dp = \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{W}_i} f \psi_i \, dp = \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{U}_i} ((f \psi_i) \circ \mathbf{x}_i)(u, v) |\text{Jac}(\mathbf{x}_i(u, v))| \, du \, dv.$$

où les  $\mathcal{W}_i$  et les  $\psi_i$  sont comme ci-dessus.

Comme  $f$  est continue à support compact, les  $((f \psi_i) \circ \mathbf{x}_i) |\text{Jac}(\mathbf{x}_i)|$  sont intégrables sur  $\mathcal{U}_i$ , pour tout  $i$ . De plus, le recouvrement étant localement fini, et le support de  $f$  étant compact, seul un nombre fini de  $f \psi_i$  sont non nulles : en effet, chaque point du support de  $f$  admet un voisinage ouvert qui ne rencontre qu'un nombre fini de  $\mathcal{W}_i$ . Ces voisinages forment un recouvrement ouvert de  $\text{Supp}(f)$ . Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Les ouverts de celui-ci n'intersectent qu'un nombre fini de  $\mathcal{W}_i$ , donc il en est de même de  $\text{Supp}(f)$ .

Montrons que cette définition de l'intégrale ne dépend pas de la partition de l'unité choisie. En effet, si  $(\mathcal{W}'_i = \mathbf{x}'_i(\mathcal{U}'_i), \psi'_{i'})_{i' \in I'}$  est une autre partition de l'unité de  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{W}_i} f \psi_i \, dp &= \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{W}_i} f \left( \sum_{i' \in I'} \psi'_{i'} \right) \psi_i \, dp = \sum_{i \in I, i' \in I'} \int_{\mathcal{W}_i} \psi'_{i'} \psi_i f \, dp \\ &= \sum_{i \in I, i' \in I'} \int_{\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}'_{i'}} \psi'_{i'} \psi_i f \, dp = \sum_{i' \in I'} \int_{\mathcal{W}'_{i'}} f \left( \sum_{i \in I} \psi_i \right) \psi'_{i'} \, dp = \sum_{i' \in I'} \int_{\mathcal{W}'_{i'}} f \psi'_{i'} \, dp. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que  $\sum_{i' \in I'} \psi'_{i'} = \sum_{i \in I} \psi_i = 1$  et que les  $\psi_i$  (resp. les  $\psi'_{i'}$ ) sont à support dans  $\mathcal{W}_i$  (resp.  $\mathcal{W}'_{i'}$ ).

Notons  $\mathcal{C}_c(\mathcal{S})$  l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles et à support compact sur  $\mathcal{S}$ . Il est clair que  $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{S}) \mapsto \int_{\mathcal{S}} f \, dp$  définit une forme linéaire continue (pour la topologie de la convergence uniforme sur  $\mathcal{S}$ ) et positive (l'intégrale d'une fonction positive est positive). Autrement dit, c'est une mesure de Radon sur l'espace localement compact, dénombrable à l'infini  $\mathcal{S}$  (voir [7], Chapitre 7). On peut donc définir les notions d'ensembles mesurables sur  $\mathcal{S}$  (en particulier les ensembles de mesure nulle), ainsi que les fonctions mesurables et intégrables (on peut aussi procéder comme dans le chapitre 5 de [7] à partir de l'intégrale des fonctions continues à support compact, en remplaçant

$\mathbb{R}^N$  par  $\mathcal{S}$ ). On est ainsi capable d'intégrer sur  $\mathcal{S}$  une classe de fonctions bien plus large que les fonctions continues à support compact.

Nous laissons au lecteur les détails de cette construction. Nous nous contentons de donner les principaux résultats concernant cette intégrale.

**Remarque VI.2.3.** On a défini dans la section I.8.7 un ensemble de mesure nulle  $A$  dans une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^N$  comme un ensemble tel que  $\mathbf{x}^{-1}(A)$  est de mesure nulle pour tout paramétrage  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{S}$ . Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition coïncide avec celle donnée ci-dessus.

On peut voir alors qu'une partie  $A$  de  $\mathcal{S}$  est de mesure nulle si et seulement si

$$\int_{\mathcal{S}} \chi_A \, dp = 0$$

où  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ .

**Exemple VI.2.4.** Une réunion dénombrables de points et de courbes dans  $\mathcal{S}$  est de mesure nulle.

Notons maintenant quelques propriétés de l'intégrale sur  $\mathcal{S}$  héritée directement des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

**Proposition VI.2.5.**

Soient  $f, g$  deux fonctions intégrables sur  $\mathcal{S}$ . On a alors

(i) Si  $f$  et  $g$  sont intégrables et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $f + \lambda g$  est intégrable et

$$\int_{\mathcal{S}} (f + \lambda g) \, dp = \int_{\mathcal{S}} f \, dp + \lambda \int_{\mathcal{S}} g \, dp.$$

(ii) Si  $f$  et  $g$  sont intégrables et  $f \leq g$ , alors

$$\int_{\mathcal{S}} f \, dp \leq \int_{\mathcal{S}} g \, dp.$$

Si de plus  $f$  et  $g$  sont continues, l'égalité a lieu si et seulement si  $f = g$ .

(iv) Si  $f = g$  presque partout sur  $\mathcal{S}$ , alors

$$\int_{\mathcal{S}} f \, dp = \int_{\mathcal{S}} g \, dp.$$

**Exemple VI.2.6.** Une réunion dénombrables de points et de courbes dans  $\mathcal{S}$  est de mesure nulle.

La proposition ci-dessus permet de définir l'aire d'un ouvert relativement compact de  $\mathcal{S}$  :

**Définition VI.2.7.**

Soit  $\mathcal{W}$  un ouvert relativement compact de  $\mathcal{S}$ . L'aire de  $\mathcal{W}$  est

$$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{W}} dp.$$

**Exemple VI.2.8** (Aire du tore). Soit  $\mathcal{S}$  le tore de révolution autour de l'axe  $\{x = y = 0\}$  dont les distances minimale et maximale à l'axe sont respectivement  $a - r$  et  $a + r$ . Alors le paramétrage

$$\mathbf{x} : ]0; 2\pi[ \times ]0; 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

recouvre entièrement  $\mathcal{S}$  à l'exception de la réunion de deux cercles. On calcule alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{]0; 2\pi[ \times ]0; 2\pi[} \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Un calcul élémentaire donne

$$\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| = r(a + r \cos u),$$

d'où

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{]0; 2\pi[ \times ]0; 2\pi[} r(a + r \cos u) \, du \, dv = 4\pi^2 ar.$$

**Exercice VI.2.9.** Soit  $\mathcal{S}$  le tore de l'exemple précédent. Calculer

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp$$

où  $K$  est la courbure de Gauss de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple VI.2.10** (Aire de la sphère). Soit  $\mathbb{S}^2(r)$  la sphère de centre 0 et de rayon  $r > 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Le paramétrage

$$\mathbf{x} : ]0; \pi[ \times ]0; 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u),$$

recouvre entièrement  $\mathbb{S}^2(r)$  à l'exception d'un méridien. On a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{]0; \pi[ \times ]0; 2\pi[} \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Comme

$$\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| = r^2 |\sin u|.$$

ce qui donne

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{]0; \pi[ \times ]0; 2\pi[} r^2 |\sin u| \, du \, dv = 4\pi r^2.$$



## VI.3 Propriétés de l'intégrale sur les surfaces

Une des caractéristiques fondamentale de l'intégrale de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^m$  est la formule de changement de variables par un difféomorphisme. Celle-ci se transfère immédiatement à l'intégrale sur les surfaces.

### **Théorème VI.3.1** (Changement de variables).

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\phi$  un difféomorphisme entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . On a alors pour toute fonction intégrable  $f : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathcal{S}_1} (f \circ \phi)(p_1) |\text{Jac}(\phi)(p_1)| dp_1 = \int_{\mathcal{S}_2} f(p_2) dp_2$$

**Exemple VI.3.2** (Fonctions impaires sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ ). Soit  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue impaire, c'est-à-dire vérifiant  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^2$ . On a alors

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(p) dp = \int_{\mathbb{S}^2} f(-p) dp = \int_{\mathbb{S}^2} f(p) dp = 0,$$

la première égalité découlant du changement de variables  $x \mapsto -x$ .

Donnons maintenant une version du théorème de Fubini.

**Théorème VI.3.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $h : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $I \times \mathcal{S}$ . Supposons que

$$\int_I \left( \int_{\mathcal{S}} |h(t, p)| \, dp \right) dt < \infty,$$

ou bien que

$$\int_{\mathcal{S}} \left( \int_I |h(t, p)| \, dt \right) dp < \infty.$$

Alors pour presque tout  $t \in I$ , la fonction  $p \mapsto h(t, p)$  est intégrable sur  $\mathcal{S}$ , et pour presque tout  $p \in \mathcal{S}$ , la fonction  $t \mapsto h(t, p)$  est intégrable sur  $I$ . De plus, les fonctions

$$p \in \mathcal{S} \mapsto \int_I h(t, p) \, dt, \quad t \in I \mapsto \int_{\mathcal{S}} h(t, p) \, dp$$

sont intégrables sur  $\mathcal{S}$  et  $I$  respectivement. Enfin

$$\int_I \left( \int_{\mathcal{S}} h(t, p) \, dp \right) dt = \int_{\mathcal{S}} \left( \int_I h(t, p) \, dt \right) dp,$$

et l'on note simplement

$$\int_{I \times \mathcal{S}} h(t, p) \, dp \, dt$$

cette quantité.

*Démonstration.* Ceci découle du théorème de Fubini usuel et de la définition de l'intégrale sur les surfaces.  $\square$

**Exercice VI.3.4.** (Aire d'une surface parallèle) Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ . Reprenons les notations de la remarque IV.5.6 sur les surfaces parallèles. L'application  $F_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_t$  est un difféomorphisme. Montrer que

$$|\text{Jac}(F_t)(p)| = 1 - 2tH(p) + t^2K(p).$$

En déduire que l'aire de la surface parallèle  $\mathcal{S}_t$  vérifie

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_t) = \mathcal{A}(\mathcal{S}) - 2t \int_{\mathcal{S}} H(p) \, dp + t^2 \int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp.$$

**Exercice VI.3.5.** (Volume délimité par des surfaces parallèles) On continue avec les notations de l'exercice précédent. Soient  $\Omega$  et  $\Omega_t$  les domaines intérieurs de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_t$  respectivement. Pour  $t > 0$   $\Omega_t \subset \Omega$  et posons alors  $\Omega'_t = \Omega \setminus \overline{\Omega_t}$ . Montrer que

$$\text{Vol}(\Omega'_t) = \int_{\Omega'_t} dp = \int_{\mathcal{S} \times ]0; t[} |\text{Jac}(F)(s, p)| \, dp \, ds,$$

puis que

$$|\text{Jac}(F)(s, p)| = 1 - 2tH(p) + t^2K(p),$$

et en déduire

$$\text{Vol}(\Omega'_t) = t\mathcal{A}(\mathcal{S}) - t^2 \int_{\mathcal{S}} H(p) \, dp + \frac{t^3}{3} \int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp.$$

**Exercice VI.3.6.** (Intégrales en coordonnées sphériques.) Soit  $\bar{B}(0, 1)$  la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur  $\bar{B}(0, 1)$ . Montrer que

$$\int_{\bar{B}(0,1)} f(x) \, dx = \int_{[0;1]} \left( \int_{\mathbb{S}^2} f(\rho p) \, dp \right) \, d\rho.$$

Les théorèmes suivants regroupent des résultats de convergence, de continuité et de dérivabilité de la théorie de l'intégration sur les surfaces, hérités de ceux bien connus pour l'intégrale de Lebesgue, dans une version suffisant à nos besoins ultérieurs. La vérification de leur validité est facile à partir de la définition de l'intégrale sur les surfaces et nous la laissons au lecteur.

**Théorème VI.3.7** (Convergence dominée et monotone).

Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $\mathcal{S}$ , à valeurs réelles et intégrables sur  $\mathcal{S}$ . Supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque partout vers une fonction  $f$ .

**A.** Supposons qu'il existe une fonction  $g$ , définie et intégrable sur  $\mathcal{S}$ , telle que  $|f_n| \leq g$ . Alors  $f$  est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f_n(p) \, dp = \int_{\mathcal{S}} f(p) \, dp.$$

**B.** Supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit monotone et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f_n(p) \, dp$  existe et est finie. Alors  $f$  est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f_n(p) \, dp = \int_{\mathcal{S}} f(p) \, dp.$$

**Théorème VI.3.8** (Continuité et dérivabilité sous le signe somme).

Soient  $\mathcal{S}$  une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $I$  un intervalle ouvert et  $h : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors :

**A.** la fonction

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\mathcal{S}} h(t, p) \, dp$$

est continue.

**B.** Supposons de plus que pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , la fonction  $t \mapsto h(t, p)$  soit dérivable. Notons cette dérivée  $\frac{\partial h}{\partial t}(t, p)$ . Si la fonction  $(p, t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(t, p)$  est continue, alors la fonction

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\mathcal{S}} h(t, p) \, dp$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(t) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial h}{\partial t}(t, p) \, dp.$$

## VI.4 Formule de changement de variables

Nous allons démontrer une formule de changement de variables pour les intégrales sur les surfaces qui ne suppose pas que celui-ci soit un difféomorphisme. Cette formule est basée sur le théorème de Sard. Commençons par une version sur les ouverts de  $\mathbb{R}^m$ , valide en toute dimension  $m$ .

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $\overline{\mathcal{U}}$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $x$  est une valeur régulière de  $\phi$ , alors  $\phi^{-1}(\{x\})$  est discret dans  $\overline{\mathcal{U}}$  (ceci est une conséquence directe du théorème d'inversion locale) et donc fini. On peut donc définir

(VI.4.1)

$$n(\phi, f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sum_{p \in \phi^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{U}} f(p), & \text{si } x \text{ est une valeur régulière de } \phi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème de Sard nous dit que l'ensemble des valeurs critiques de  $\phi$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^m$ . Remarquons que si  $\phi$  est un difféomorphisme, alors  $n(\phi, f)$  est égale à  $f \circ \phi^{-1}$  sur  $\phi(\mathcal{U})$ . C'est la raison pour laquelle le théorème ci-dessous établit une formule de changement de variable généralisant celle vue en calcul intégral.

**Théorème VI.4.1.**

Avec les notations qui précèdent, supposons que  $p \mapsto f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)|$  soit intégrable sur  $\mathcal{U}$ . Alors  $n(\phi, f)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^m$  et

$$\int_{\mathbb{R}^m} n(\phi, f)(x) \, dx = \int_{\mathcal{U}} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^m$  contenant  $\overline{\mathcal{U}}$  et notons encore  $\phi$  un prolongement différentiable de  $\phi$  à  $\mathcal{V}$ . Soit  $\mathcal{V}_1$  un autre ouvert de  $\mathbb{R}^m$  avec

$$\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{V}_1 \subset \overline{\mathcal{V}_1} \subset \mathcal{V}.$$

Supposons tout d'abord qu'aucun point de  $\mathcal{V}_1$  n'est critique pour  $\phi$ . Alors, d'après le théorème d'inversion locale, pour tout  $p \in \mathcal{U}$ , il existe un voisinage ouvert connexe  $\mathcal{V}_p$  de  $p$  dans  $\mathcal{U}$  tel que  $\phi|_{\mathcal{V}_p}$  soit un difféomorphisme entre  $\mathcal{V}_p$  et son image. La famille des ouverts  $(\mathcal{V}_p)_{p \in \mathcal{U}}$  recouvre  $\overline{\mathcal{U}}$ , et soit  $\delta$  un nombre de Lebesgue de ce recouvrement (cf. proposition IX.4.1). Considérons le pavage cubique standard de  $\mathbb{R}^m$  par les hypercubes de côté  $\ell$  choisi de sorte qu'un hypercube soit contenu dans une boule fermée de rayon  $\delta$  (prendre  $\sqrt{m/2}\ell \leq \delta$ ). Un nombre fini de ces hypercubes  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  suffit à recouvrir  $\overline{\mathcal{U}}$ , et quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer que tous les  $C_i$  sont dans  $\mathcal{V}_1$ . Chaque  $C_i$  est aussi dans un des  $\mathcal{V}_p$ , et donc  $\phi|_{C_i}$  est un difféomorphisme sur son image. Comme  $p \mapsto f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)|$  est intégrable sur  $\mathcal{U}$ , elle l'est sur chaque  $C_i \cap \mathcal{U}$ , et la formule de changement de variable en calcul intégral s'écrit pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\int_{C_i \cap \mathcal{U}} (f \circ \phi^{-1})(x) \, dx = \int_{C_i \cap \mathcal{U}} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp.$$

Le théorème découle alors de la somme de ces identités car  $n(\phi, f) = f \circ \phi^{-1}$  dans ce cas, et cette fonction s'annule hors de  $\phi(\mathcal{U})$ .

On déduit le théorème en toute généralité à partir de ce cas particulier de la façon suivante. Considérons l'ensemble

$$M = \{p \in \mathcal{V}; |\text{Jac}(\phi)(p)| = 0\}.$$

Alors  $K = M \cap \overline{\mathcal{U}}$  est compact. On peut trouver une suite décroissante d'ouverts  $(\mathcal{U}_k)_{k \in \mathbb{N}^\times}$  telle que pour tout  $k$ ,

$$K \subset \mathcal{U}_k, \quad \text{Vol}(\mathcal{U}_k) \leq \text{Vol}(K) + \frac{1}{k}.$$

La démonstration du théorème de Sard (I.8.43) montre que pour tout  $k \in \mathbb{N}^\times$ , on peut trouver un ouvert  $\mathcal{W}_k$  tel que

$$K \subset \mathcal{W}_k \subset \overline{\mathcal{W}_k} \subset \mathcal{U}_k, \quad \text{Vol}(\phi(\mathcal{W}_k)) \leq \frac{1}{k}.$$

L'ouvert  $\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}$  vérifie alors la condition du cas particulier envisagé ci-dessus (pas de points critiques pour  $\phi$  dans son adhérence). Donc

$$\int_{\mathbb{R}^m} n(\phi|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}}, f|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}})(x) \, dx = \int_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp.$$

L'intégrale du terme de droite tend lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  vers

$$\int_{\mathcal{U} \setminus K} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp.$$

Ceci est donc la limite du terme de gauche. Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \phi(M)$ , d'après la définition de  $n(\phi, f)$ , le fait que  $\phi$  soit différentiable sur  $\overline{\mathcal{U}}$  et le fait que chaque valeur régulière de  $\phi$  n'ait qu'un nombre fini de préimages dans  $\mathcal{U}$ , il existe  $k_x$  tel que pour tout  $k \geq k_x$ ,  $n(\phi|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}}, f|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}})(x) = n(\phi, f)(x)$ . Si  $f$  est à valeurs positives ou nulles, le théorème de convergence monotone implique que  $n(\phi, f)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^3$ , et que

$$\int_{\mathcal{U} \setminus K} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp = \int_{\mathbb{R}^m} n(\phi, f)(x) \, dx.$$

Dans le cas où le signe de  $f$  n'est pas constant, le théorème de convergence dominée permet de conclure car

$$|n(\phi|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}}, f|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}})| \leq n(\phi|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}}, |f|_{\mathcal{U} \setminus \overline{\mathcal{W}_k}}) \leq n(\phi, |f|).$$

Enfin, il reste à remarquer que

$$\int_{\mathcal{U} \setminus K} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp = \int_{\mathcal{U}} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp$$

car  $|\text{Jac}(\phi)(p)| = 0$  si  $p \in K$ . □

Nous allons appliquer ce qui précède pour établir le résultat suivant dans le cas des surfaces.

**Théorème VI.4.2** (Changement de variables).

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\phi$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Soit  $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f |\text{Jac}(\phi)|$  est intégrable sur  $\mathcal{S}_1$ . Alors la fonction  $n(\phi, f)$  définie par

$$n(\phi, f)(q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} f(p),$$

est bien définie sur  $\mathcal{S}_2$  en dehors d'une partie de mesure nulle et est intégrable sur  $\mathcal{S}_2$ . De plus

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(p) |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp = \int_{\mathcal{S}_2} n(\phi, f)(q) \, dq.$$

Démonstration. Soit  $(\mathcal{W}_i, \psi_i)_{i \in I}$  (resp.  $(\mathcal{W}_j, \psi_j)_{j \in J}$ ) une partition de l'unité associée à un recouvrement de  $\mathcal{S}_1$  (resp. de  $\mathcal{S}_2$ ), où les  $\mathcal{W}_i$  (resp. les  $\mathcal{W}_j$ ) sont les images de paramétrages  $\mathbf{x}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathbf{x}_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{S}_2$ ).

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\mathbf{x}_i} & \mathcal{W}_i & \hookrightarrow & \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{S}_2 & \hookleftarrow & \mathcal{W}_j & \xleftarrow{\mathbf{x}_j} & \mathcal{U}_j \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow n(\phi, f) & & & & \\ & & & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & & & \end{array}$$

Fixons  $i \in I$  et  $j \in J$  et posons

$$\mathcal{W}_{ij} = \mathcal{W}_i \cap \phi^{-1}(\mathcal{W}_j), \quad \mathcal{U}_{ij} = \mathbf{x}_i^{-1}(\mathcal{W}_{ij}).$$

Posons  $\phi_{ij} = \mathbf{x}_j^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_i : \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_j$  et pour tout  $q \in \mathcal{U}_{ij}$ ,

$$f_{ij}(q) = f((\mathbf{x}_i(q)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(\phi(\mathbf{x}_i(q)))|^{-1} \psi_i(\mathbf{x}_i(q)) \psi_j((\phi(\mathbf{x}_i(q)))).$$

Voici donc la situation à laquelle nous appliquons la formule de changement de variable :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}_{ij} & \xrightarrow{\mathbf{x}_i} & \mathcal{W}_{ij} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{W}_j & \xrightarrow{\mathbf{x}_j^{-1}} & \mathcal{U}_j \\ \downarrow f_{ij} & & & & & & \downarrow n(\phi_{ij}, f_{ij}) \\ \mathbb{R} & & & & & & \mathbb{R} \end{array}.$$

Ici, pour tout  $q_1 \in \mathcal{U}_j$ ,  $n(\phi_{ij}, f_{ij})(q_1) = \sum_{q \in \phi_{ij}^{-1}(q_1)} f_{ij}(q)$ . On obtient

$$\int_{\mathcal{U}_{ij}} f_{ij}(q) |\text{Jac}(\phi_{ij})(q)| \, dq = \int_{\mathcal{U}_j} n(\phi_{ij}, f_{ij})(q_1) \, dq_1.$$

Sommons sur  $i$  et  $j$  le terme de gauche de cette égalité, en utilisant le fait que

$$|\text{Jac}(\phi_{ij})(q)| = |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(\phi(\mathbf{x}_i(q)))| |\text{Jac}(\phi)(\mathbf{x}_i(q))| |\text{Jac}(\mathbf{x}_i)(q)|.$$

Ceci donne

$$\sum_{i,j} \int_{\mathcal{U}_{ij}} f((\mathbf{x}_i(q)) \psi_i(\mathbf{x}_i(q)) \psi_j((\phi \circ \mathbf{x}_i)(q)) |\text{Jac}(\phi)(\mathbf{x}_i(q))| |\text{Jac}(\mathbf{x}_i)(q)| \, dq.$$

Comme  $(\mathcal{W}_{ij}, \psi_i(\psi_j \circ \phi))_{ij}$  est une partition de l'unité de  $\mathcal{S}_1$ , ceci est égal à

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(p) |\text{Jac}(\phi(p))| \, dp.$$

Sommons maintenant sur  $i$  et  $j$  le terme de droite, en notant  $p_1 = \mathbf{x}_j(q_1)$  et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} n(\phi_{ij}, f_{ij})(q_1) &= \sum_{q \in \phi_{ij}^{-1}(\{q_1\})} f_{ij}(q) \\ &= \sum_{q \in \phi_{ij}^{-1}(\{q_1\})} f((\mathbf{x}_i(q)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(\phi(\mathbf{x}_i(q)))|^{-1} \psi_i(\mathbf{x}_i(q)) \psi_j((\phi \circ \mathbf{x}_i)(q)) \\ &= \sum_{p \in \phi^{-1}(\{p_1\}) \cap \mathcal{W}_{ij}} f(p) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(\phi(p))|^{-1} \psi_i(p) \psi_j(\phi(p)) \\ &= n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(p_1) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(p_1)|^{-1} \psi_j(p_1) \\ &= n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(\mathbf{x}_j(q_1)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j^{-1})(\mathbf{x}_j(q_1))|^{-1} \psi_j(\mathbf{x}_j(q_1)) \\ &= n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(\mathbf{x}_j(q_1)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j)(q_1)| \psi_j(\mathbf{x}_j(q_1)). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} \int_{\mathcal{U}_j} n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(\mathbf{x}_j(q_1)) \psi_j(\mathbf{x}_j(q_1)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j)(q_1)| \, dq_1 \\
&= \sum_j \int_{\mathcal{U}_j} \left( \sum_i n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(\mathbf{x}_j(q_1)) \right) \psi_j(\mathbf{x}_j(q_1)) |\text{Jac}(\mathbf{x}_j)(q_1)| \, dq_1 \\
&= \int_{\mathcal{S}_2} \left( \sum_i n(\phi, f|_{\mathcal{W}_{ij}} \psi_i)(p_1) \right) \, dp_1 \\
&= \int_{\mathcal{S}_2} n(\phi, f)(p_1) \, dp_1.
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\int_{\mathcal{S}_1} f(p) |\text{Jac}(\phi(p))| \, dp = \int_{\mathcal{S}_2} n(\phi, f)(p_1) \, dp_1.$$

□

Donnons maintenant une première application de cette formule de changement de variable

**Théorème VI.4.3** (Chern-Lashoff).

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $K$  sa courbure de Gauss. Notons  $K^+ = \max\{0, K\}$ . On a alors

- A.  $\int_{\mathcal{S}} K^+(p) \, dp \geq 4\pi$ .
- B.  $\int_{\mathcal{S}} |K(p)| \, dp \geq 4\pi$  et si l'égalité est atteinte,  $\mathcal{S}$  a une courbure de Gauss positive ou nulle en tout point.

Démonstration. Soit  $A \subset \mathcal{S}$  l'ensemble des points où la courbure de Gauss est positive ou nulle. Appliquons la formule de changement de variable du théorème VI.4.2 à  $\phi = N$ , l'application de Gauss de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{S}^2$  et  $f = \chi_A$ , la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ . On obtient

$$\int_{\mathcal{S}} \chi_A(p) |\text{Jac}(N)(p)| \, dp = \int_{\mathbb{S}^2} n(N, \chi_A)(q) \, dq.$$

Rappelons que la restriction de l'application de Gauss à  $A$  est surjective d'après l'exercice IV.6.2, et donc  $n(N, \chi_A)(q) \geq 1$  pour tout  $q \in \mathbb{S}^2$ . Ainsi l'intégrale de droite est minorée par  $4\pi$ . D'autre part  $\chi_A(p) |\text{Jac}(N)(p)| = K^+(p)$ . Ceci prouve la première inégalité. La seconde inégalité et le cas d'égalité résultent de  $|K| \geq K^+$ . □

## VI.5 Théorème de Green-Ostrogradski

Rappelons la définition de la divergence d'un champ de vecteurs. Rappelons que  $\mathbb{R}^3$  est munie de la dérivée covariante canonique  $\bar{D}$  (cf. section V.3.1).



**Proposition VI.5.1.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$ . La quantité

$$\sum_{i=1}^3 \langle \bar{D}_{e_i} X(p), e_i \rangle,$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ , est indépendante du choix de cette base.

*Démonstration.* Soit  $(f_1, f_2, f_3)$  une autre base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ . Alors il existe une unique matrice orthogonale  $A = (a_{ij})_{ij}$  telle que  $Ae_i = f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \langle \bar{D}_{f_i} X(p), f_i \rangle &= \sum_{i=1}^3 \langle \bar{D}_{\sum_k a_{ki} e_k} X(p), \sum_j a_{ji} e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 a_{ki} a_{ji} \langle \bar{D}_{e_k} X(p), e_j \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{D}_{e_i} X(p), e_i \rangle. \end{aligned}$$

Ceci permet de définir la divergence d'un champ de vecteurs sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition VI.5.2.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ . La **divergence** de  $X$ , notée  $\text{Div} X$ , est la fonction

$$\text{Div} X : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \sum_{i=1}^3 \langle \bar{D}_{e_i} X(p), e_i \rangle.$$

**Remarque VI.5.3.** Dans la base canonique, en posant  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , on obtient

$$\text{Div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}.$$

**Définition VI.5.4.**

Un **domaine régulier** de  $\mathbb{R}^3$  est un ouvert  $\Omega$  dont la frontière  $\partial\Omega$  est une surface compacte (mais pas nécessairement connexe).

Par exemple, si  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux surfaces compactes connexes disjointes dont les domaines intérieurs respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  vérifient  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  alors  $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$  est un domaine régulier et  $\partial\Omega = \mathcal{S}_1 \amalg \mathcal{S}_2$ .

En particulier, si  $\mathcal{S}$  est une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ , et si  $\mathcal{S}_t$  est la surface parallèle à  $\mathcal{S}$  pour  $t > 0$  suffisamment petit, l'ouvert  $V_t(\mathcal{S})$  délimité par ces deux surfaces est un domaine régulier et  $\partial V_t(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \amalg \mathcal{S}_t$ .

**Théorème VI.5.5** (Green-Ostrogradski).

Soit  $\Omega$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^3$  délimité par la surface compacte  $\mathcal{S}$ . Si  $X : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un champ de vecteurs que l'on peut prolonger en un champ différentiable défini sur un ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $\overline{\Omega}$ , alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div} X = - \int_{\mathcal{S}} \langle X, N \rangle$$

où  $N$  est le champ normal unitaire à la surface  $\mathcal{S}$  pointant vers le domaine  $\Omega$ .

Démonstration. Il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où  $\Omega$  est le domaine intérieur d'une surface compacte connexe  $\mathcal{S}$ . Plaçons nous dans ce cas.

Soit  $P$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x = 0$  et considérons la projection orthogonale  $\pi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $P$  donnée par

$$p \mapsto \pi(p) = p - \langle p, a \rangle a, \quad (p \in \mathcal{S}),$$

où  $a$  est le vecteur  $(1, 0, 0)$  orthogonal à  $P$ . Posons  $b = (0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 0, 1)$ , de sorte que  $(a, b, c)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(b, c)$  est une base orthonormale de  $P$ . La restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{S}$  est une application différentiable dont la différentielle en tout point  $p$  est la restriction de  $\pi$  à  $T_p \mathcal{S}$ . Calculons  $|\operatorname{Jac}(\pi)(p)|$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormale de  $T_p \mathcal{S}$ .

$$\begin{aligned} |\operatorname{Jac}(\pi)(p)| &= \left| \langle d\pi_p(e_1), b \rangle \langle d\pi_p(e_2), c \rangle - \langle d\pi_p(e_2), b \rangle \langle d\pi_p(e_1), c \rangle \right| \\ &= \left| \langle e_1 - \langle e_1, a \rangle a, b \rangle \langle e_2 - \langle e_2, a \rangle a, c \rangle - \langle e_2 - \langle e_2, a \rangle a, b \rangle \langle e_1 - \langle e_1, a \rangle a, c \rangle \right| \\ &= \left| \langle e_1, b \rangle \langle e_2, c \rangle - \langle e_2, b \rangle \langle e_1, c \rangle \right| \\ &= |\det(e_1, e_2, a)| = |\langle e_1 \wedge e_2, a \rangle| = |\langle N(p), a \rangle|, \end{aligned}$$

où  $N$  est l'application de Gauss de  $\mathcal{S}$ . □

Considérons l'application

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \operatorname{sgn}(\langle N(p), a \rangle) \langle X(p), a \rangle$$

où  $\operatorname{sgn}$  vaut 1 sur  $\mathbb{R}_+^\times$ ,  $-1$  sur  $\mathbb{R}_-^\times$  et 0 en 0. Cette fonction est intégrable sur  $\mathcal{S}$ , car  $X$  est continu sur  $\mathcal{S}$  donc borné. En appliquant la formule de changement de variables du théorème VI.4.2, on obtient

$$(VI.5.1) \quad \int_{\mathcal{S}} f(p) |\operatorname{Jac}(\pi)(p)| \, d(p) = \int_{\mathbb{R}^2} n(\pi, f)(0, y, z) \, dy \, dz.$$

Un point  $x$  de  $P$  est une valeur régulière de  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow P$  si pour tout  $p \in \mathcal{S}$  tel que  $\pi(p) = x$ ,  $d\pi_p : T_p \mathcal{S} \rightarrow P$  est inversible, i.e.  $|\operatorname{Jac}(\pi)(p)| = |\langle N(p), a \rangle| \neq 0$ . Le théorème de Sard I.8.43 implique alors que pour presque toute les droites  $D$  perpendiculaires à

$P$ , les points  $p$  de l'intersection de  $D$  et de  $\mathcal{S}$  vérifient  $\langle N(p), a \rangle \neq 0$ , c'est-à-dire que  $a \notin T_p \mathcal{S}$ , et donc  $\mathcal{S}$  intersecte  $D$  transversalement. Comme  $\mathcal{S}$  est compact, le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{S}$  et une telle droite  $D$  est fini. Les segments de droite ouverts obtenus en enlevant à  $D$  les points de  $\mathcal{S} \cap D$  sont alternativement dans  $\Omega$  et dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ , d'après la proposition III.4.2. Comme  $\Omega$  est borné, les segments non bornés de  $D \setminus (\mathcal{S} \cap D)$  sont dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ , et ainsi le nombre de points de  $\mathcal{S} \cap D$  est pair. Autrement dit, si la droite  $D$  est paramétrée par

$$D = \{q + ta, q \in P, t \in \mathbb{R}\},$$

alors il existe  $t_1 < t_2 < \dots < t_{2k-1} < t_{2k}$  tels que  $\mathcal{S} \cap D = \{q + t_i a, i = 1, \dots, 2k\}$ ,

$$\begin{aligned} \{q + ta, t \in ]t_{2i-1}; t_{2i}[ \} &\subset \Omega, \quad (i = 1, \dots, k) \\ \{q + ta, t \in ]t_{2i}; t_{2i+1}[ \} &\subset (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}), \quad (i = 0, \dots, k+1), \end{aligned}$$

où l'on a posé  $t_0 = -\infty$  et  $t_{2k+1} = +\infty$ . Pour  $t$  suffisamment proche de l'un des  $t_i$ ,  $q + ta$  est dans un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ , et si  $r$  est la distance orientée à  $\mathcal{S}$  (voir proposition IV.5.5), alors pour tout  $i = 1, \dots, k$ ,

$$r(q + (t - t_{2i-1})a) < 0 \text{ si } t < t_i, \quad r(q + (t - t_{2i-1})a) > 0 \text{ si } t > t_i,$$

et donc

$$0 \leq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r(q + (t - t_{2i-1})a) dr_{q+t_{2i-1}a}(a) = \langle N(q + t_{2i-1}a), a \rangle.$$

Comme  $\langle N(q + t_{2i-1}a), a \rangle \neq 0$ , on a  $\langle N(q + t_{2i-1}a), a \rangle > 0$ . De même,  $\langle N(q + t_{2i}a), a \rangle < 0$ .

De ceci, on déduit que pour toute valeur régulière  $q = (0, y, z)$  de  $\pi$ , on a

$$\begin{aligned} n(\pi, f) &= \sum_{i=1, \dots, 2k} f(q + t_i a) = \sum_{i=1, \dots, 2k} \operatorname{sgn}(\langle N(q + t_i a), a \rangle) \langle X(q + t_i a), a \rangle \\ &= \sum_{i=1, \dots, k} \langle X(q + t_{2i-1}a), a \rangle - \langle X(q + t_{2i}a), a \rangle \end{aligned}$$

Notons  $X = (X_1, X_2, X_3)$  dans la base canonique et remarquons que  $\langle X, a \rangle = X_1$ . Prolongeons le champ de vecteurs  $X$ , ainsi que toutes ses dérivées partielles, par 0 en dehors de  $\overline{\Omega}$  (ce prolongement n'est donc pas nécessairement continu). On a

$$\begin{aligned} n(\pi, f) &= \sum_{i=1, \dots, k} X_1(q + t_{2i-1}a) - X_1(q + t_{2i}a) \\ &= - \sum_{i=1, \dots, k} \int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} \frac{\partial X_1}{\partial x}(q + ta) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_1}{\partial x}(q + ta) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_1}{\partial x}(x, y, z) dx \end{aligned}$$

En reportant dans (VI.5.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \langle N(p), a \rangle X_1(p) dp &= \int_{\mathbb{R}^2} n(\pi, f)(0, y, z) dy dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_1}{\partial x}(x, y, z) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial X_1}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

On obtient une identité similaire pour les composantes sur  $x$  et  $y$ . En sommant, on aboutit à la formule de Green-Ostrogradski.  $\square$

**Exemple VI.5.6.** Donnons une application au calcul du volume du domaine intérieur  $\Omega$  d'une surface compacte  $\mathcal{S}$ , en considérant le champ de vecteurs

$$p \in \overline{\Omega} \mapsto p.$$

On a  $\text{Div} X = 3$ , et la formule de Green-Ostrogradski donne

$$\text{Vol}(\Omega) = -\frac{1}{3} \int_{\mathcal{S}} \langle p, N(p) \rangle dp.$$

Pour la sphère  $\mathbb{S}^2(r)$  de centre 0 et de rayon  $r$ , ceci donne en utilisant l'exemple VI.2.10,

$$\text{Vol}(B(0, r)) = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2(r)} \langle p, N(p) \rangle dp = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2(r)} r dp = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

**Exemple VI.5.7** (Théorème de Gauss pour l'électrostatique). Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  son domaine intérieur, et  $Y$  le champ de vecteurs différentiable défini sur  $\overline{\Omega}$  par

$$Y(p) = \frac{p - a}{\|p - a\|^3}$$

où  $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . On calcule

$$\bar{D}_v Y(p) = \frac{v}{\|p - a\|^3} - 3 \frac{\langle p - a, v \rangle}{\|p - a\|^5} (p - a), \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

et l'on voit que  $\text{Div}(Y)$  est partout nulle. On obtient donc par la formule de Green-Ostrogradski

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p - a, N(p) \rangle}{\|p - a\|^3} dp = 0.$$

Si  $a \in \Omega$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B(a, \epsilon) \subset \Omega$ . L'ouvert  $\Omega' = \Omega \setminus \bar{B}(a, \epsilon)$  est un domaine régulier, de frontière  $\mathcal{S} \amalg \mathbb{S}(a, \epsilon)$ . Dans ce cas, la formule de Green-Ostrogradski donne

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p - a, N(p) \rangle}{\|p - a\|^3} dp + \int_{\mathbb{S}(a, \epsilon)} \frac{\langle p - a, N(p) \rangle}{\|p - a\|^3} dp = 0.$$

Mais la deuxième intégrale se calcule car  $N(p) = \frac{p - a}{\|p - a\|} = \frac{1}{\epsilon}(p - a)$ , et l'on arrive à

$$-\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p - a, N(p) \rangle}{\|p - a\|^3} dp = 4\pi.$$

**Exemple VI.5.8.** Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant l'origine, et soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour tout  $r > 0$  suffisamment petit, la boule  $B(0, r)$  est contenue dans  $\mathcal{V}$ , et l'on peut définir

$$\phi : r \mapsto \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathbb{S}^2(r)} f(p) dp$$

sur un intervalle  $]0; R[$ . Soient  $r$  et  $r_0$  dans  $]0; R[$ . L'homothétie de rapport  $\frac{r}{r_0}$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2(r_0)$  sur  $\mathbb{S}^2(r)$ , et la formule de changement de variables donne alors

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathbb{S}^2(r)} f(p) \, dp = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{\mathbb{S}^2(r_0)} f\left(\frac{rp}{r_0}\right) \, dp.$$

Le théorème de continuité et différentiabilité [VI.3.8](#) montre que  $\phi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , et l'on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = f(0).$$

On prolonge  $\phi$  par continuité en 0 en posant  $\phi(0) = f(0)$ . On a aussi

$$\phi'(r) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{\mathbb{S}^2(r_0)} \left\langle \nabla f\left(\frac{rp}{r_0}\right), \frac{p}{r_0} \right\rangle \, dp,$$

et

$$\phi'(0) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{\mathbb{S}^2(r_0)} \left\langle \nabla f(0), \frac{p}{r_0} \right\rangle \, dp = 0,$$

la dernière égalité étant obtenue en effectuant le changement de variables  $p \mapsto -p$  dans l'intégrale. Posons  $X(p) = \nabla f\left(\frac{rp}{r_0}\right)$ . On a alors  $\text{Div} X(p) = \frac{r}{r_0} \Delta f\left(\frac{rp}{r_0}\right)$ . Par la formule de Green-Ostrogradski, on obtient

$$\frac{\phi'(r)}{r} = \frac{1}{4\pi r_0^3} \int_{B(0, r_0)} \Delta f\left(\frac{rp}{r_0}\right) \, dp,$$

et en passant à la limite en 0,

$$\phi''(0) = \frac{\Delta f(0) \text{Vol}(B(0, r_0))}{4\pi r_0^3} = \frac{\Delta f(0)}{3}.$$

La règle de l'Hôpital permet alors de conclure que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathbb{S}^2(r)} f(p) \, dp - f(0) \right) = \frac{\Delta f(0)}{6}.$$

### VI.5.1 Applications : le théorème de point fixe de Brouwer

Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  son domaine intérieur, et  $X, Y$  les champs de vecteurs différentiables définis sur  $\overline{\Omega}$  par

$$X(p) = \langle p, a \rangle b, \quad Y(p) = \langle p, a \rangle (p \wedge b)$$

où  $a, b$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . La formule de Green-Ostrogradski appliquée à ces champs de vecteurs donne

$$(VI.5.2) \quad \int_{\mathcal{S}} \langle p, a \rangle N(p) \, dp = -\text{Vol}(\Omega) a,$$

$$(VI.5.3) \quad \int_{\mathcal{S}} \langle p, a \rangle (p \wedge N(p)) \, dp = -\text{Vol}(\Omega) G \wedge a,$$

$$\text{où } G = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} x \, dx.$$

**Exercice VI.5.9.** Attendez d'être dans votre bain, interprétez ces deux égalités et sortez dans la rue en criant «  $\epsilon\nu\rho\eta\kappa\alpha$  ».

Rappelons que si  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable, son **gradient**  $\nabla f$  est le champ de vecteurs

$$\nabla f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

défini par

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

**Exercice VI.5.10.** Montrer que si  $f, g, h : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des applications différentiables,

$$\text{Div}(\nabla f \wedge \nabla g) = 0,$$

$$\det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = \text{Div}(h(\nabla f \wedge \nabla g)).$$

**Proposition VI.5.11.**

Soit  $\Omega$  le domaine intérieur délimité par une surface compacte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application différentiable telle que  $\phi|_{\mathcal{S}} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$ . Alors

$$\int_{\Omega} \text{Jac}(\phi)(x) \, dx = \text{Vol}(\Omega).$$

Démonstration. Posons  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . D'après l'exercice ci-dessus

$$\text{Jac}(\phi)(x) = \det(d\phi_x) = \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) = \text{Div}(\phi_3(\nabla \phi_1 \wedge \nabla \phi_2)),$$

et le théorème de Green-Ostrogradski donne

$$\int_{\Omega} \text{Jac}(\phi)(x) \, dx = - \int_{\mathcal{S}} \phi_3(p) \det(\nabla \phi_1(p), \nabla \phi_2(p), N(p)) \, dp$$

Comme  $\phi|_{\mathcal{S}} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$ ,  $\phi_3(p) = p_3$  si  $p \in \mathcal{S}$  et de plus

$$\langle \nabla \phi_i(p), v \rangle = d(\phi_i)_p(v) = v_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad v \in T_p \mathcal{S},$$

on obtient

$$\int_{\Omega} \text{Jac}(\phi)(x) \, dx = - \int_{\mathcal{S}} p_3 \det(e_1, e_2, N(p)) \, dp.$$

La fin de la démonstration découle de l'identité (VI.5.2).

**Théorème VI.5.12.**

Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Omega$  son domaine intérieur. Il n'existe pas d'application différentiable  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\phi|_{\mathcal{S}} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$  et  $\Phi(\Omega) \subset \mathcal{S}$ .

Démonstration. Supposons qu'une telle application  $\phi$  existe. Pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $v \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$d\phi_x(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(x + tv) \in T_{\phi(x)}\mathcal{S}.$$

Ainsi l'image de  $d\phi_x$ , pour tout  $x \in \Omega$ , est de dimension au plus deux, et

$$\text{Jac}(\phi)(x) = \det(d\phi_x) = 0.$$

Ceci est en contradiction avec le résultat de la proposition précédente.  $\square$

**Théorème VI.5.13** (Point fixe de Brouwer).

Soit  $\phi : \bar{B}(0, r) \rightarrow \bar{B}(0, r)$  une application différentiable. Alors  $\phi$  admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $x \in \bar{B}(0, r)$  tel que  $\phi(x) = x$ .

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Pour tout  $x \in \bar{B}(0, r)$ , notons  $\psi(x)$  le point d'intersection de la demi-droite d'origine  $\phi(x)$  et passant par  $x$  avec  $\mathbb{S}(0, r)$ . L'application  $\psi$  vérifie alors les hypothèses du théorème précédent, ce qui est impossible.  $\square$

## VI.6 Exercices

**Exercice VI.6.1** (Théorème de Pappus). Soit  $\mathcal{S}$  une surface de révolution d'axe  $D$ , engendrée par un arc paramétré  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Montrer que l'aire de  $\mathcal{S}$  est égale à

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_I d(\alpha(s), D) \, ds$$

**Exercice VI.6.2.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont la courbure de Gauss ne s'annule pas et supposons que l'application de Gauss soit injective. Montrer que

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp = 4\pi.$$

Que se passe-t-il si on suppose seulement que  $N$  est injective, mais rien sur la courbure de Gauss ?

**Exercice VI.6.3.** Montrer que quelques soient  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle p, a \rangle \langle p, b \rangle \, dp = \frac{4}{3}\pi \langle a, b \rangle,$$

et en déduire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle Ap, p \rangle \, dp = \frac{4}{3}\pi \text{ trace}(A).$$

**Exercice VI.6.4.** Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice inversible. Montrer que l'application

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{Ap}{\|Ap\|}$$

est un difféomorphisme. En déduire que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp = \frac{4\pi}{\det(A)}.$$

**Exercice VI.6.5.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{S}_t$  une surface parallèle à  $\mathcal{S}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_t$  les domaines intérieurs à  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_t$  respectivement. Montrer que

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) dp = \int_{\mathcal{S}_t} K(p) dp,$$

puis que

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \text{Vol}(\Omega) + \frac{t}{3} \int_{\mathcal{S}} (2H(p)\langle p, N(p) \rangle - 1) dp + \frac{t^2}{3} \int_{\mathcal{S}} (2H(p) - K(p)\langle p, N(p) \rangle - 1) dp - \frac{t^3}{3} \int_{\mathcal{S}} K(p) dp.$$

**Exercice VI.6.6.** Soient  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,  $N$  l'application de Gauss, et  $a \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que

$$\int_{\mathcal{S}} \langle N(p), a \rangle dp = 0.$$

**Exercice VI.6.7.** Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application  $f$  est harmonique, c'est-à-dire que  $\Delta(f) = 0$ , où  $\Delta$  est le Laplacien ( $\Delta(f) = \text{Div}(\nabla f)$ ).
- (ii) Pour tout  $x \in \mathcal{V}$  et tout  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(x, r) \subset \mathcal{V}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathbb{S}(x, r)} f(p) dp.$$

- (iii) Pour tout  $x \in \mathcal{V}$  et tout  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(x, r) \subset \mathcal{V}$ ,

$$\int_{\mathbb{S}(x, r)} \langle \nabla f(p), p \rangle dp = 0.$$

**Exercice VI.6.8.** Montrer que si  $\mathcal{S}$  est une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\int_{\mathcal{S}} H(p)^2 dp \geq 4\pi,$$

le cas d'égalité ayant lieu si et seulement si  $\mathcal{S}$  est une sphère.



# Chapitre VII

## Théorème de Gauss-Bonnet

L'un des résultats les plus beaux et célèbres de la géométrie différentielle « classique » est le théorème (ou formule) de Gauss-Bonnet, qui relie la courbure de Gauss totale d'une surface compacte (c'est-à-dire l'intégrale de sa courbure de Gauss) et un invariant topologique de la surface, sa caractéristique d'Euler (un entier algébrique).

La première version de ce résultat est une version locale, due à Gauss, reliant l'intégrale de la courbure de Gauss sur un triangle géodésique, et la somme des angles de ce triangle (celle-ci excède celle-là de  $\pi$ ). Plus tard, en 1848, Bonnet généralise cette formule à toute région simplement connexe (*i.e.* « sans trous ») d'une surface.

Un théorème de Poincaré et Hopf affirme d'autre part que la caractéristique d'Euler est égale à la somme des indices des zéros d'un champ de vecteurs sur la surface n'ayant que des zéros isolés. Les indices des champs de vecteurs sont définis par la théorie du degré des applications entre surfaces compactes.

La caractéristique d'Euler est le plus souvent introduite en utilisant des outils de topologie algébrique (triangulations) qui dépassent le cadre de ce cours. La version que nous donnons ici est une version globale, hybride entre les résultats de Gauss-Bonnet et de Poincaré-Hopf. Nous montrons que la courbure de Gauss totale est égale à  $2\pi$  fois la somme des indices des zéros d'un champ de vecteurs tangents sur la surface n'ayant que des zéros isolés. D'autre part, nous montrons que pour certains champs, dits non dégénérés, cette somme est un entier et qu'elle est invariante par difféomorphismes.

Cette relation entre deux quantités de nature apparemment très différentes est très révélatrice de l'esprit de la géométrie différentielle moderne, qui cherche à faire le lien entre la structure topologique globale d'une surface (ou plus généralement d'une variété riemannienne), et des propriétés de ses courbures.

### VII.1 Degré d'une application entre surfaces compactes

Dans la section [VI.1](#), nous avons défini la valeur absolue du déterminant jacobien d'une application différentiable entre surfaces, sans les supposer orientées. Lorsque les surfaces sont orientées, nous pouvons donner une définition plus fine qui tient compte du signe. Commençons par un analogue orienté du lemme [VI.1.1](#)

**Lemme VII.1.1.**

Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels euclidiens orientés de même dimension finie  $m$ , et soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases orthonormales directes de  $V$  et  $W$  respectivement, et  $M$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . Alors  $\det(M)$  est indépendant du choix des bases orthonormales directes  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

La démonstration est la même que pour le lemme VI.1.1, en remarquant qu'un endomorphisme linéaire envoyant une base orthonormale directe sur une autre base orthonormale directe est de déterminant 1.  $\square$

**Définition VII.1.2.**

Soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  une application différentiable entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Supposons  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  orientables, et orientées par le choix d'applications de Gauss respectives  $N$  et  $N'$ . On définit pour tout  $p \in \mathcal{S}$ , le **déterminant jacobien**

$$\text{Jac}(\phi)(p) = \det(d\phi_p) = \det(d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2), N'(\phi(p)))$$

pour toute base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $T_p\mathcal{S}$ , orientée positivement, c'est-à-dire telle que  $\det(e_1, e_2, N(p)) = 1$ .

**Remarques VII.1.3.** 1. Ce déterminant jacobien n'est bien défini que parce que les surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont orientées. Le changement d'une de ces orientations change son signe .

2. Lorsqu'on prend la valeur absolue du déterminant jacobien défini ci-dessus, on retrouve bien la définition donnée dans la section VI.1

$$|\text{Jac}(\phi)(p)| = \|d\phi_p(e_1) \wedge d\phi_p(e_2)\|, \quad (p \in \mathcal{S}).$$

3. Soient  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  et  $\psi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}''$  des applications différentiables entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . On a

$$\text{Jac}(\psi \circ \phi)(p) = \text{Jac}(\psi)(\phi(p)) \text{Jac}(\phi)(p).$$

Ce déterminant jacobien nous permet de définir le degré d'une application différentiable entre surfaces compactes (et donc orientées).

**Définition VII.1.4.**

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  orientées par leur application de Gauss  $N$  et  $N'$ , respectivement. Soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  une application différentiable. Le **degré** de  $\phi$  est défini comme le nombre réel

$$\deg(\phi) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}')} \int_{\mathcal{S}} \text{Jac}(\phi)(p) \, dp.$$

Il est clair que le degré est additif relativement aux composantes connexes de  $\mathcal{S}$ . C'est pourquoi il suffit d'étudier le cas où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont connexes. D'autre part si l'une des orientations de  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{S}'$  est changée, le degré change de signe.

**Remarque VII.1.5.** Si  $\mathcal{S}$  est connexe et  $\phi$  est un difféomorphisme, son déterminant jacobien garde un signe constant, positif si et seulement si  $\phi$  préserve l'orientation (c'est-à-dire que pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $(d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2), N'(\phi(p)))$  est une base directe de  $\mathbb{R}^3$ ). Dans ce cas, on a

$$\deg(\phi) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}')} \int_{\mathcal{S}} \text{Jac}(\phi)(p) \, dp = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}')} \int_{\mathcal{S}} |\text{Jac}(\phi)(p)| \, dp = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}')} \int_{\mathcal{S}'} 1 \, dp = 1.$$

De même, si  $\phi$  renverse l'orientation, on a  $\deg(\phi) = -1$ .

**Remarque VII.1.6.** Considérons deux applications différentiables

$$\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \psi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}''.$$

Supposons que  $\phi$  soit un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Comme le déterminant jacobien est multiplicatif, d'après la remarque VII.1.3.3, on a

$$\begin{aligned} \deg(\psi \circ \phi) &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}'')} \int_{\mathcal{S}} \text{Jac}(\psi \circ \phi)(p) \, dp = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}'')} \int_{\mathcal{S}} (\text{Jac}(\psi) \circ \phi) \text{Jac}(\phi) \, dp \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}'')} \int_{\mathcal{S}'} \text{Jac}(\psi) \, dp = \deg \psi. \end{aligned}$$

De même, si  $\phi$  est un difféomorphisme qui inverse l'orientation

$$\deg(\psi \circ \phi) = -\deg \psi.$$

**Remarque VII.1.7.** Considérons l'application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Pour calculer son degré, il est naturel de choisir sur  $\mathcal{S}$  l'orientation définie par  $N$ . Prenons comme base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $T_p \mathcal{S}$ ,  $p \in \mathcal{S}$ , des vecteurs propres de l'application de Weingarten  $-dN_p$  (en supposant toujours  $(e_1, e_2)$  orientée positivement). On a alors

$$\text{Jac}(N)(p) = \det(dN_p) = \det(dN_p(e_1), dN_p(e_2), N(p)) = k_1(p)k_2(p) = K(p).$$

Ainsi, le déterminant jacobien de l'application de Gauss est la courbure de Gauss, si l'on choisit l'orientation de  $\mathbb{S}^2$  par les vecteurs unitaires normaux sortants. C'est pourquoi dans ce chapitre, contrairement aux conventions précédentes, on suppose que les surfaces compactes sont orientées par leur application de Gauss ayant leur vecteurs pointés vers l'extérieur de la surface. En conséquence,

$$(VII.1.1) \quad \deg(N) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp.$$

**Exemple VII.1.8.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathcal{S}$  (pas nécessairement tangents :  $X$  est ici juste une application différentiable de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^3$ ) qui ne s'annule pas. On peut donc poser

$$\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{X(p)}{\|X(p)\|}.$$

Pour avancer dans le calcul de son degré, nous avons besoin d'une expression pour  $d\phi$ . Donnons quelques éléments de ce calcul.

Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  ne contenant pas 0, et si

$$f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|},$$

alors

$$df_x(h) = -\frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^3}, \quad (x \in \mathcal{U}, h \in \mathbb{R}^3).$$

Considérons maintenant

$$g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Grâce au calcul précédent, on a

$$dg_x(h) = \frac{h}{\|x\|} - \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^3} x, \quad (x \in \mathcal{U}, h \in \mathbb{R}^3).$$

De ceci on tire

$$d\phi_p(v) = dg_{X(p)}(dX_p(v)) = \frac{dX_p(v)}{\|X(p)\|} - \frac{\langle X(p), dX_p(v) \rangle}{\|X(p)\|^3} X(p), \quad (p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}).$$

Soient  $(e_1, e_2)$  une base orthonormale orientée positivement de  $T_p\mathcal{S}$ . La définition du degré fait intervenir le déterminant jacobien

$$\det(d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2), N(\phi(p))),$$

où  $N$  est la normale sortante à la sphère  $\mathbb{S}^2$  en  $\phi(p)$ , c'est-à-dire  $\phi(p) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$ . Les règles de calculs des déterminants impliquent alors que

$$\begin{aligned} \det(d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2), N(\phi(p))) &= \det\left(d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2), \frac{X(p)}{\|X(p)\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|X(p)\|^3} \det(dX_p(e_1), dX_p(e_2), X(p)). \end{aligned}$$

En conséquence

$$(VII.1.2) \quad \deg \phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\|X(p)\|^3} \det(dX_p(e_1), dX_p(e_2), X(p)) \, dp.$$

**Exemple VII.1.9.** Continuons le calcul dans un cas particulier de l'exemple précédent, où  $X$  est un champ de vecteurs sur une surface compacte connexe  $\mathcal{S}$  ne contenant pas 0, donné par

$$p \mapsto X(p) = Ap, \quad (p \in \mathcal{S})$$

où  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  inversible. Dans ce cas, pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $dX_p = A$ , et si  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormale orientée positivement de  $T_p\mathcal{S}$ ,

$$\det(Ae_1, Ae_2, Ap) = \langle p, N(p) \rangle \det A.$$

On obtient donc

$$\deg \phi = \frac{\det A}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p, N(p) \rangle}{\|Ap\|^3} dp.$$

Pour calculer le terme de droite plus avant, introduisons un autre champ de vecteurs, défini sur  $\mathbb{R}^3$  privé de l'origine.

$$p \mapsto Y(p) = \frac{p}{\|Ap\|^3}, \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Ce champ est différentiable, et

$$dY_p(h) = \frac{h}{\|Ap\|^3} - 3 \frac{\langle Ap, Av \rangle}{\|Ap\|^5} p, \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, h \in \mathbb{R}^3).$$

Sa divergence est donc donnée par

$$\text{Div}(Y)(p) = \frac{3}{\|Ap\|^5} (\|Ap\|^2 - \langle Ap, Ae_1 \rangle \langle p, e_1 \rangle - \langle Ap, Ae_2 \rangle \langle p, e_2 \rangle - \langle Ap, Ae_3 \rangle \langle p, e_3 \rangle),$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  est ici la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . En écrivant

$$\|Ap\|^2 = \langle Ap, Ap \rangle = \langle Ap, A(\langle p, e_1 \rangle e_1 + \langle p, e_2 \rangle e_2 + \langle p, e_3 \rangle e_3) \rangle,$$

on voit que cette divergence est partout nulle.

Si 0 n'est pas dans le domaine intérieur  $\Omega$  de  $\mathcal{S}$ , le théorème de Green-Ostrogradski donne

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \langle Y(p), N(p) \rangle dp = \int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p, N(p) \rangle}{\|Ap\|^3} dp.$$

Ainsi, dans ce cas,  $\deg \phi = 0$ .

Si 0 est dans le domaine intérieur  $\Omega$  de  $\mathcal{S}$ , on prend une boule fermée  $\bar{B}(0, \epsilon)$  contenue dans  $\Omega$  et on pose  $\Omega' = \Omega \setminus \bar{B}(0, \epsilon)$ . Le théorème de Green-Ostrogradski appliqué au domaine régulier  $\Omega'$  donne alors

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle p, N(p) \rangle}{\|Ap\|^3} dp = \int_{\mathcal{S}} \langle Y(p), N(p) \rangle dp = - \int_{\mathbb{S}^2(0, \epsilon)} \langle Y(p), \frac{p}{\epsilon} \rangle dp = \epsilon \int_{\mathbb{S}^2(0, \epsilon)} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp.$$

On trouve finalement que

$$\deg \phi = \frac{\epsilon \det A}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2(0, \epsilon)} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp,$$

si  $\mathcal{S}$  est orientée vers le domaine intérieur. Transformons le terme de droite en une intégrale sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  en appliquant le changement de variable  $p \mapsto \epsilon p$ . On obtient

$$\deg \phi = \frac{\det A}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp,$$

L'exercice VI.6.4 calcule l'intégrale dans le terme de droite, et l'on obtient

$$\deg \phi = \begin{cases} 1 & \text{si } \det A > 0 \\ -1 & \text{si } \det A < 0 \end{cases}.$$

### VII.1.1 Invariance du degré par homotopie

Grâce à la formule de Green-Ostrogradski, nous démontrons le théorème suivant, dont l'un des corollaires est l'invariance du degré par homotopie.

**Théorème VII.1.10.**

Soit  $\Omega$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière  $\partial\Omega$  est une union (disjointe) de surfaces compactes connexes  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$ . Soit

$$\phi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathcal{S}'$$

une application différentiable de  $\bar{\Omega}$  vers une surface compacte  $\mathcal{S}'$  de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors

$$\deg \phi|_{\mathcal{S}_1} + \deg \phi|_{\mathcal{S}_2} + \dots + \deg \phi|_{\mathcal{S}_k} = 0,$$

où l'on a choisi les orientations des  $\mathcal{S}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , de manière compatible, c'est-à-dire toutes avec le vecteur normal dirigé vers le domaine extérieur (ou toutes vers le domaine intérieur).

*Démonstration.* La démonstration repose sur la formule de Green-Ostrogradski appliquée au champ de vecteurs  $X = X_\phi$  défini sur  $\bar{\Omega}$  de la façon suivante. Choisissons une application de Gauss  $N'$  sur  $\mathcal{S}'$  et posons

$$X = X_\phi = (\det(N' \circ \phi, \phi_y, \phi_z), \det(\phi_x, N' \circ \phi, \phi_z), \det(\phi_x, \phi_y, N' \circ \phi)).$$

Calculons la divergence de ce champ de vecteurs. On obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(X) &= \frac{\partial}{\partial x} \det(N' \circ \phi, \phi_y, \phi_z) + \frac{\partial}{\partial y} \det(\phi_x, N' \circ \phi, \phi_z) + \frac{\partial}{\partial z} \det(\phi_x, \phi_y, N' \circ \phi) \\ &= \det((N' \circ \phi)_x, \phi_y, \phi_z) + \det(\phi_x, (N' \circ \phi)_y, \phi_z) + \det(\phi_x, \phi_y, (N' \circ \phi)_z). \end{aligned}$$

Or, si  $p \in \bar{\Omega}$ , on a

$$\phi_y(p) = d\phi_p(0, 1, 0) \in T_{\phi_p}\mathcal{S}', \quad \phi_z(p) = d\phi_p(0, 0, 1) \in T_{\phi_p}\mathcal{S}',$$

$$(N' \circ \phi)_x = d(N' \circ \phi)_p(1, 0, 0) = dN'_{\phi(p)}(d\phi_p(1, 0, 1)) \in T_{\phi_p}\mathcal{S}',$$

ce qui montre que les vecteurs

$$(N' \circ \phi)_x(p), \phi_y(p), \phi_z(p)$$

sont liés, et donc

$$\det((N' \circ \phi)_x(p), \phi_y(p), \phi_z(p)) = 0.$$

De même

$$\det(\phi_x(p), (N' \circ \phi)_y(p), \phi_z(p)) = \det(\phi_x(p), \phi_y(p), (N' \circ \phi)_z(p)) = 0.$$

Le champ de vecteurs  $X$  est à divergence nulle. La formule de Green-Ostrogradski pour ce champ de vecteurs s'écrit

$$(VII.1.3) \quad \int_{\mathcal{S}_1} \langle X, N_1 \rangle + \dots + \int_{\mathcal{S}_k} \langle X, N_k \rangle = 0,$$

où les  $N_i$  sont les applications de Gauss des surfaces  $\mathcal{S}_i$ . Pour tout  $p \in \mathcal{S}_i$ , soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormale de  $T_p \mathcal{S}_i$  orientée positivement (i.e.  $\det(e_1, e_2, N_i(p)) = 1$ ). On a  $\langle X, N_i \rangle(p) = \langle X(p), e_1 \wedge e_2 \rangle = \det(X(p), e_1, e_2)$ . Ecrivons ceci autrement, en considérant pour tout  $p \in \bar{\Omega}$ , les deux formes antisymétriques sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$(VII.1.4) \quad (u, v) \mapsto \det(X(p), u, v),$$

$$(VII.1.5) \quad (u, v) \mapsto \det((N' \circ \phi)(p), d\phi_p(u), d\phi_p(v)).$$

Soit  $(u_1, u_2, u_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . La définition du champ de vecteurs  $X_\phi$  implique que

$$\begin{aligned} \det(X(p), u_1, u_2) &= \langle X(p), u_3 \rangle = \det((N' \circ \phi)(p), d\phi_p(u_1), d\phi_p(u_2)), \\ \det(X(p), u_1, u_3) &= -\langle X(p), u_2 \rangle = -\det((N' \circ \phi)(p), d\phi_p(u_1), d\phi_p(u_3)), \\ \det(X(p), u_2, u_3) &= -\langle X(p), u_1 \rangle = \det((N' \circ \phi)(p), d\phi_p(u_2), d\phi_p(u_3)), \end{aligned}$$

et ainsi par linéarité, ces deux formes sont égales. On en déduit que

$$\begin{aligned} \langle X, N_i \rangle(p) &= \langle X(p), e_1 \wedge e_2 \rangle = \det(X(p), e_1, e_2) = \det((N' \circ \phi)(p), d\phi_p(e_1), d\phi_p(e_2)) \\ &= \text{Jac}(\phi|_{\mathcal{S}_i}). \end{aligned}$$

Finalement, en reportant dans (VII.1.3), on obtient la formule voulue.  $\square$

Tirons quelques corollaires de ce résultat, dont le théorème d'invariance du degré par homotopie.

#### Corollaire VII.1.11.

Si une application différentiable  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  entre surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  s'étend de manière en une application différentiable de  $\bar{\Omega}$  dans  $\mathcal{S}'$ , où  $\Omega$  est le domaine intérieur à  $\mathcal{S}$ , alors  $\deg \phi = 0$ .

#### Corollaire VII.1.12.

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  de domaines intérieurs respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  telles que  $\mathcal{S}_2 \subset \Omega_1$ . Alors  $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2$  est un domaine régulier de frontière  $\mathcal{S}_1 \amalg \mathcal{S}_2$ .

Si  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{S}'$  est une application différentiable à valeurs dans la surface compacte  $\mathcal{S}'$ , alors

$$\deg \phi|_{\mathcal{S}_1} = \deg \phi|_{\mathcal{S}_2}.$$

**Corollaire VII.1.13** (Invariance du degré par homotopie).

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  et  $\phi : \mathcal{S} \times [a; b] \rightarrow \mathcal{S}'$  une application différentiable. Posons, pour tout  $t \in [a; b]$ ,  $\phi_t(p) = \phi(t, p)$ . Alors

$$\deg \phi_a = \deg \phi_b.$$

En d'autres termes deux applications homotopes dans l'espace des applications différentiables ont même degré.

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$  de sorte que  $N_{2\epsilon}(\mathcal{S})$  soit un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ . Soient  $\Omega$  et  $\Omega_\epsilon$  les domaines intérieurs respectifs de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_\epsilon$ , la surface parallèle à  $\mathcal{S}$  à distance  $\epsilon$  et  $\Omega' = \Omega \setminus \overline{\Omega_\epsilon}$  le domaine régulier de frontière  $\mathcal{S} \amalg \mathcal{S}_\epsilon$ . Définissons

$$\psi : \overline{\Omega'} \longrightarrow \mathcal{S}', \quad \psi(F(p, t)) = \psi(p + tN(p)) = \phi\left(p, a + \frac{t}{\epsilon}(b - a)\right),$$

où  $F : \mathcal{S} \times ]-2\epsilon; 2\epsilon[ \rightarrow N_{2\epsilon}(\mathcal{S})$ ,  $(p, t) \mapsto p + tN(p)$  est l'application étudiée dans la section IV.5. Comme  $F$  est différentiable,  $\psi$  l'est de même, et le corollaire précédent donne

$$\deg \psi|_{\mathcal{S}} = \deg \psi|_{\mathcal{S}_\epsilon},$$

où les orientations de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_\epsilon$  ont été choisies de manière compatibles. Or, il découle de la définition de  $\psi$  que  $\psi|_{\mathcal{S}} = \phi_a$  et  $\psi|_{\mathcal{S}_\epsilon} = \phi_b \circ F_\epsilon^{-1}$ . Comme  $F_\epsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_\epsilon$  est un difféomorphisme qui préserve l'orientation, on a  $\deg \phi_b \circ F_\epsilon^{-1} = \deg \phi_b$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

Une application remarquable de l'invariance du degré par homotopie est le théorème suivant de Brouwer.

**Théorème VII.1.14** (de la sphère chevelue).

Un champ de vecteurs tangents à la sphère  $\mathbb{S}^2$  s'annule nécessairement.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un champ de vecteurs tangents à la sphère  $X$  ne s'annulant jamais. Alors  $V = \frac{X}{\|X\|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est différentiable et  $\langle V(p), p \rangle = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{S}^2$ . Définissons

$$\phi : \mathbb{S}^2 \times [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad (p, \theta) \mapsto p \cos \theta + V(p) \sin \theta$$

Cette application réalise une homotopie entre  $\phi_0 = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  et  $\phi_\pi = -\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ . Or on calcule que les degrés respectifs de ces deux applications sont 1 et  $-1$  (car  $-\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  renverse l'orientation), ce qui contredit l'invariance du degré par homotopie.  $\square$

**Exercice VII.1.15.** Démontrer le théorème de Brouwer pour la boule  $\bar{B}(0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$  : toute application différentiable  $\phi$  de  $\bar{B}(0, 1)$  dans elle-même admet un point fixe.



## VII.2 Indice d'un zéro d'un champ de vecteurs

Nous allons introduire l'indice d'un champ de vecteurs en un zéro de celui-ci, d'abord pour des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , puis pour des champs de vecteurs tangents définis sur une surface.

### Définition VII.2.1.

Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $X : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs sur  $\mathcal{V}$ . On dit qu'un point  $a \in \mathcal{V}$  est un **zéro isolé** de  $X$  si  $X(a) = 0$  et s'il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}'$  de  $a$  dans  $\mathcal{V}$  tel que  $X$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{V}' \setminus \{a\}$ .

Si  $a$  n'est pas un zéro de  $X$ , remarquons qu'un voisinage avec les mêmes propriétés existe toujours. Dans un cas comme dans l'autre, fixons un tel voisinage  $\mathcal{V}'$ . Soit  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(a, r) \subset \mathcal{V}'$ . Soit

$$\phi : \mathbb{S}^2(a, r) \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{X}{\|X\|}(p).$$

On définit alors l'**indice** de  $X$  en  $a$  par :

$$i(X, a) = \deg \phi.$$

**Remarque VII.2.2.** Le corollaire VII.1.12 montre que l'indice de  $X$  en  $a$  ne dépend pas du  $r$  choisi. D'autre part, si  $X(a) \neq 0$ , le champ de vecteurs  $\phi$  se prolonge à  $\bar{B}(a, r)$  et dans ce cas  $i(X, a) = 0$  d'après le corollaire VII.1.11. D'autre part, ce même résultat montre que l'on peut, à la place de la boule  $\bar{B}(a, r)$ , prendre n'importe quel domaine régulier connexe  $\Omega$  contenant  $a$  et dont l'adhérence  $\bar{\Omega}$  est contenue dans  $\mathcal{V}'$  et prendre le degré de  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , où  $\mathcal{S}$  est la frontière de  $\Omega$ , c'est-à-dire une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous allons calculer l'indice de  $X$  en  $a$  lorsque  $a$  est un zéro non dégénéré de  $X$ . Par ceci, nous entendons que  $X(a) = 0$  et  $dX_a$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . (De manière équivalente,  $\text{Jac}(X)(a) = \det(dX_a) \neq 0$ .) Le théorème d'inversion locale montre que si  $a$  est un zéro non-dégénéré de  $X$ , alors c'est un zéro isolé. On dit que le champ  $X$  est non dégénéré s'il est **non dégénéré** en chacun de ses zéros. Dans ce cas, l'ensemble de ses zéros est discret dans  $\mathcal{V}$ .

**Remarque VII.2.3.** Ici, nous considérons des champs de vecteurs  $X$  définis sur des ouverts de  $\mathbb{R}^3$ , et sont donc simplement des applications différentiables d'un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Leur différentielle est donc une notion bien définie, on peut considérer  $dX$ ,  $dX_p$ ,  $\text{Jac}(X)$ , etc. Rappelons que généralement, pour un champ de vecteurs tangents à une sous-variété, ces objets ne sont pas définis.

### Lemme VII.2.4.

Soit  $X$  un champ de vecteurs non dégénéré sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors l'indice de  $X$  en un zéro  $a$  est égal à 1 si  $\text{Jac}(X)(a) > 0$  et  $-1$  si  $\text{Jac}(X)(a) < 0$ .

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'approcher  $X$  au voisinage de  $a$  par  $dX_a$  et de se ramener ainsi à l'exemple VII.1.9. On a par définition (cf. exemple VII.1.8)

$$i(X, a) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2(a, r)} \frac{1}{\|X(p)\|^3} \det(dX_p(e_1), dX_p(e_2), X(p)) dp$$

où  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormale de  $T_p\mathbb{S}^2(a, r)$  positivement orientée, l'orientation de  $\mathbb{S}^2(a, r)$  étant vers le domaine extérieur. On effectue un changement de variable dans l'intégrale en utilisant le difféomorphisme

$$\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}(a, r), \quad p \mapsto a + rp.$$

On trouve

$$i(X, a) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{r^2}{\|X(a + rp)\|^3} \det(dX_{a+rp}(e_1), dX_{a+rp}(e_2), X(a + rp)) dp.$$

Comme  $X$  s'annule en  $a$  et est non dégénéré en ce point

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{X(a + rp)}{r} = dX_a(p) \neq 0, \quad (p \in \mathbb{S}^2)$$

Le terme sous l'intégrale ci-dessus converge donc lorsque  $r$  tend vers 0 vers la fonction continue

$$p \in \mathbb{S}^2 \mapsto \frac{1}{\|dX_a(p)\|^3} \det(dX_a(e_1), dX_a(e_2), dX_a(p)) = \frac{\det(dX_a)}{\|dX_a(p)\|^3},$$

et donc

$$i(X, a) = \frac{\det(dX_a)}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|dX_a(p)\|^3} dp.$$

Or, par l'exercice VI.6.4

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|dX_a(p)\|^3} dp = \frac{4\pi}{|\det(dX_a)|}.$$

La conclusion du lemme en découle.  $\square$

Considérons maintenant des champs de vecteurs tangents sur des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ , orientée par le choix d'une application de Gauss  $N$ , et soit  $X$  un champ de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}$ . On adapte facilement la définition de zéro isolé :  $a \in \mathcal{S}$  est un zéro isolé s'il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $a$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $X$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{W} \setminus \{a\}$ . Dans ce cas, sur une boule centrée en  $a$  et de rayon  $r$  suffisamment petit, incluse dans un voisinage tubulaire de  $\mathcal{W}$ , on définit un nouveau champ de vecteurs  $Y$  par

$$Y(F(p, t)) = Y(p + tN(p)) = X(p) + tN(p), \quad (p \in \mathcal{W} \cap B(a, r)), (t \in [0; r]),$$

où  $F(p, t) = p + tN(p)$  est l'application étudiée dans la section IV.5. Ainsi,  $Y$  est un champ de vecteurs différentiable sur  $\bar{B}(a, r)$  dont  $a$  est zéro isolé.

#### Définition VII.2.5.

Avec les notations qui précèdent, on définit l'indice  $i(X, a)$  de  $X$  en  $a$  comme étant l'indice de  $Y$  en  $a$ .

**Remarque VII.2.6.** Comme pour les champs de vecteurs sur les ouverts de  $\mathbb{R}^3$ , on vérifie immédiatement que  $i(X, a)$  ne dépend ni du choix de  $\mathcal{W}$ , ni du choix de  $r$ . D'autre part, si  $X$  ne s'annule pas en  $a$ , on a  $i(X, a) = 0$ .

**Remarque VII.2.7.** Cette définition de l'indice en un zéro isolé d'un champ de vecteurs tangents à une surface peut paraître surprenante : on a utilisé un prolongement idoine du champ à un voisinage tubulaire pour se ramener à une situation dans  $\mathbb{R}^3$ . Il paraît plus naturel de définir directement l'indice en dimension 2 de la même manière qu'en dimension 3, mais en utilisant cette fois le degré des applications de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$  étudiée dans le premier chapitre. C'est cette approche que l'on trouve généralement dans la littérature. Bien sûr, au bout du compte, les deux définitions sont équivalentes (ceci demande un peu de travail pour le démontrer). Notre définition a pour seul mérite d'être adaptée à la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet.

Notre but est maintenant de donner une définition de champ de vecteurs tangents non dégénéré sur une surface. Comme la remarque VII.2.3 l'indique, la différentielle de  $X$  n'est pas une notion bien définie intrinsèquement. En revanche, on peut voir aussi  $X$  comme une application de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , pour laquelle la notion de différentielle est définie. Le problème est que pour  $p \in \mathcal{S}$ ,  $dX_p$  est alors une application linéaire de  $T_p\mathcal{S}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , et pas dans  $T_p\mathcal{S}$ . Lorsque  $a$  est un zéro de  $X$ , tout s'arrange. En effet, supposons que  $a$  soit un zéro de  $X$ . Soient  $v \in T_a\mathcal{S}$  et soit  $\gamma : ]-\epsilon; \epsilon[$  un arc paramétré dans  $\mathcal{S}$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . On a alors

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle N \circ \gamma(t), X \circ \gamma(t) \rangle = \langle N(a), dX_a(v) \rangle,$$

et donc  $dX_a(T_a\mathcal{S}) \subset T_a\mathcal{S}$ . Ceci permet de considérer  $dX_a$  comme un endomorphisme de  $T_a\mathcal{S}$ , ce que l'on fera dans la suite sans autre commentaire. On dit que  $X$  est **non dégénéré** en  $a$  si  $dX_a$  est inversible (comme endomorphisme de  $T_a\mathcal{S}$ ), autrement dit si  $\text{Jac}(X)(a) = \det(dX_a) \neq 0$ .

Montrons que cette propriété est équivalente au fait que le champ de vecteurs  $Y$  construit ci-dessus à partir de  $X$  pour définir l'indice est non dégénéré en  $a$ . Comme  $Y|_{B(a,r) \cap \mathcal{W}} = X|_{B(a,r) \cap \mathcal{W}}$ , on a

$$(dY_a)_{T_a\mathcal{S}} = dX_a,$$

et comme de plus, comme pour tout  $t$  suffisamment petit,  $Y(a + tN(a)) = X(a + tN(a)) = N(a)$ , on a

$$dY_a(N(a)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Y(a + tN(a)) = N(a)$$

on en conclut que

$$\det(dX_a) = \det(dY_a).$$

Ceci prouve l'assertion.

De tout ceci, on tire le résultat suivant.

**Proposition VII.2.8.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangents sur la surface  $\mathcal{S}$  et soit  $a \in \mathcal{S}$ . Si  $X(a) \neq 0$ , alors  $i(X, a) = 0$ . Si  $X(a) = 0$ , alors  $dX_a$  est un endomorphisme de  $T_a\mathcal{S}$ . Si c'est un isomorphisme, autrement dit si  $a$  est un zéro non dégénéré de  $X$ , alors c'est un zéro isolé et en outre

$$i(X, a) = \begin{cases} +1 & \text{si } \det(dX_a) > 0 \\ -1 & \text{si } \det(dX_a) < 0. \end{cases}$$

De plus, si le champ  $X$  est non dégénéré et que  $\mathcal{S}$  est compacte, alors  $X$  n'a qu'un nombre fini de zéros et

$$\sum_{a \in \mathcal{S} \mid X(a)=0} i(X, a) \in \mathbb{Z}.$$

**Exemple VII.2.9** (Champs conformes sur la sphère). Soit  $a$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ . Définissons le champ de vecteurs  $A$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  par

$$A : p \in \mathbb{S}^2 \mapsto A(p) = a - \langle a, p \rangle p.$$

On a  $\langle p, A(p) \rangle = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{S}^2$  et donc  $A$  est un champ de vecteurs tangents. Ce champ possède exactement deux zéros antipodaux, à savoir  $\pm a$ . D'autre part, si  $p \in \mathbb{S}^2$  et  $v \in T_p\mathbb{S}^2$ , on a

$$dA_p(v) = -\langle a, v \rangle p - \langle a, p \rangle v.$$

En particulier

$$dA_a(v) = -v, \quad dA_{-a}(v) = v.$$

Les endomorphismes  $dA_a$ , et  $dA_{-a}$  des espaces tangents  $T_a\mathbb{S}^2$  et  $T_{-a}\mathbb{S}^2$  préservent l'orientation. Donc d'après la proposition [VII.2.8](#)

$$i(A, a) = i(A, -a) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{p \in \mathbb{S}^2 \mid A(p)=0} i(A, p) = 2.$$

**Exemple VII.2.10** (Champ sans zéro sur le tore). Considérons le tore  $\mathbb{T}^2$  d'équation

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1.$$

Nous avons calculé en [IV.1.10](#) que

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x(\sqrt{x^2 + y^2} - 2), y(\sqrt{x^2 + y^2} - 2), z(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \right)$$

est une application de Gauss pour  $\mathbb{T}^2$ . On introduit le champ de vecteurs suivants sur  $\mathbb{T}^2$  :

$$X(x, y, z) = \left( \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

et l'on vérifie que c'est bien un champ de vecteurs tangents. Ce champ de vecteurs ne s'annule pas.

Une propriété fondamentale des champs non dégénérés est que l'on peut les transférer d'une surface à une autre via un difféomorphisme. Ceci ne change pas les indices des zéros.

**Proposition VII.2.11.**

Soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  un difféomorphisme entre deux surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $X$  un champ de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}$ . On définit le champ de vecteurs  $\phi_*(X)$  sur  $\mathcal{S}'$  en posant

$$\phi_*(X)(\phi(p)) = d\phi_p(X(p)), \quad (p \in \mathcal{S}).$$

Si  $X$  est non dégénéré, alors il en est de même de  $\phi_*(X)$ . De plus,  $p$  est un zéro de  $X$  si et seulement si  $\phi(p)$  est un zéro de  $\phi_*(X)$  et dans ce cas

$$i(\phi_*(X), \phi(p)) = i(X, p).$$

*Démonstration.* Par définition,  $Y = \phi_*(X)$  est une application de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle qu'en tout  $p \in \mathcal{S}'$ ,  $Y(p) \in T_p \mathcal{S}'$ . Montrons que cette application est différentiable. Soit  $p' = \phi(p) \in \mathcal{S}'$  et soit  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $p$ . Alors  $\phi \circ \mathbf{x}$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}'$  en  $p'$ . De plus, pour tout  $(u, v) \in \mathcal{U}$ ,

$$Y(\phi \circ \mathbf{x}(u, v)) = d\phi_{\mathbf{x}(u, v)} X(\mathbf{x}(u, v)).$$

Cette écriture fait apparaître  $(u, v) \mapsto Y(\phi \circ \mathbf{x}(u, v))$  comme une application différentiable de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et montre que  $Y$  est différentiable. Comme  $\phi$  est un difféomorphisme, pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $d\phi_p$  est un isomorphisme linéaire, et ainsi  $Y(\phi(p)) = 0$  si et seulement si  $X(p) = 0$ . Nous voulons maintenant montrer que si  $p$  est un zéro de  $X$ , alors  $p$  est un zéro non dégénéré de  $X$  si et seulement si  $\phi(p)$  est un zéro non dégénéré de  $Y$ . Il s'agit donc d'étudier la relation entre  $dX_p$  et  $dY_{\phi(p)}$ , le premier étant un endomorphisme de  $T_p \mathcal{S}$  et le second de  $T_{\phi(p)} \mathcal{S}'$ . Montrons que

$$dY_{\phi(p)} \phi(p) \circ d\phi_p = d\phi_p \circ dX_p.$$

Soit  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  un arc paramétré tracé sur  $\mathcal{S}$  tel que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v \in T_p \mathcal{S}$ . On a pour tout  $t$ ,

$$Y(\phi(\gamma(t))) = d\phi_{\gamma(t)}(X(\gamma(t))),$$

ce qui donne en dérivant

$$dY_{\phi(\gamma(t))}(d\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))) = d^2\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t), X(\gamma(t))) + d\phi_{\gamma(t)}(dX_{\gamma(t)}(\gamma'(t))).$$

En  $t = 0$ , le terme gênant s'annule car  $p$  est un zéro de  $X$ , et l'on obtient

$$dY_{\phi(p)} \phi(p) \circ d\phi_p(v) = d\phi_p \circ dX_p(v),$$

ce qui démontre l'assertion. De celle-ci, il est clair que  $p$  est un zéro non dégénéré de  $X$  si et seulement si  $\phi(p)$  est un zéro non dégénéré de  $Y$ . La proposition VII.2.8 montre alors que  $i(X, p) = i(Y, \phi(p))$ .  $\square$

### VII.3 La formule de Gauss-Bonnet/ Poincaré-Hopf

Venons-en au résultat principal de ce chapitre.

#### Théorème VII.3.1.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $X$  un champ de vecteurs tangents sur  $\mathcal{S}$  n'ayant que des zéros isolés. Alors

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp = 2\pi \sum_{a \in \mathcal{S} \mid X(a)=0} i(X, a),$$

où  $K$  est la courbure de Gauss de la surface  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* En travaillant composante connexe par composante connexe, on peut supposer la surface  $\mathcal{S}$  connexe. Comme  $\mathcal{S}$  est compacte, le nombre de zéros isolés est fini. Notons l'ensemble des zéros  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . Choisissons  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, de sorte que  $N_{2\epsilon}(\mathcal{S})$  soit un voisinage tubulaire de  $\mathcal{S}$ . Soient  $\Omega_{-\epsilon}$  et  $\Omega_{\epsilon}$  les domaines intérieurs respectifs de  $\mathcal{S}_{-\epsilon}$  et  $\mathcal{S}_{\epsilon}$ , les surfaces parallèles à  $\mathcal{S}$  à distance orientée  $-\epsilon$  et  $\epsilon$  de  $\mathcal{S}$  respectivement (remarquons qu'ici les surfaces compactes sont orientées vers leur domaine intérieur) et  $\Omega' = \Omega_{-\epsilon} \setminus \overline{\Omega_{\epsilon}}$  le domaine régulier de frontière  $\mathcal{S}_{-\epsilon} \amalg \mathcal{S}_{\epsilon}$ . Soit

$$F : \mathcal{S} \times ]-\epsilon; \epsilon[ \rightarrow \Omega', \quad (p, t) \mapsto p + tN(p)$$

le difféomorphisme étudié dans la section IV.5. Choisissons  $r > 0$  assez petit, de sorte que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la boule  $B_i = \bar{B}(a_i, r)$  soit contenue dans  $\Omega'$ , et que de plus toutes ces boules soient disjointes. Posons  $\Omega'' = \Omega' \setminus (\bigcup_{i=1, \dots, k} B_i)$ . C'est un domaine régulier de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\mathcal{S}_{-\epsilon} \amalg \mathcal{S}_{\epsilon} \amalg \left( \bigcup_{i=1, \dots, k} \mathbb{S}^2(a_i, r) \right)$ . Considérons comme précédemment le champ de vecteurs  $Y$  défini sur  $N_{2\epsilon}(\mathcal{S})$  par

$$Y(F(p, t)) = Y(p + tN(p)) = X(p) + tN(p), \quad ((p, t) \in \mathcal{S} \times ]-\epsilon; \epsilon[).$$

Comme  $F$  est un difféomorphisme,  $Y$  est différentiable. D'autre part,  $Y$  s'annule exactement aux points  $a_1, \dots, a_k$ . En conséquence  $Y$  ne s'annule pas sur  $\Omega''$ . D'après le théorème VII.1.10 appliqué à

$$\phi : \overline{\Omega''} \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{Y(p)}{\|Y(p)\|},$$

on a

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi|_{\mathbb{S}^2(a_i, r)} + \deg \phi|_{\mathcal{S}_{-\epsilon}} + \deg \phi|_{\mathcal{S}_{\epsilon}} = 0.$$

Il faut prendre garde que dans cette formule, les degrés sont calculés avec une orientation compatible de toutes les surfaces bordant le domaine  $\Omega''$  (par exemple orientées vers  $\Omega''$ ). Si l'on exprime ceci en choisissant cette fois les orientations intérieures de chaque surface compacte, on obtient

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi|_{\mathbb{S}^2(a_i, r)} = \deg \phi|_{\mathcal{S}_{-\epsilon}} - \deg \phi|_{\mathcal{S}_{\epsilon}}.$$

Pour tout  $\rho \in ]-2\epsilon; 2\epsilon[$ , on a

$$Y|_{\mathcal{S}_\rho} = X \circ F_\rho^{-1} + \rho N \circ F_\rho^{-1} = (X + \rho N) \circ F_\rho^{-1}.$$

Comme de plus  $F_\rho$  est un difféomorphisme préservant l'orientation, on a d'après la remarque VII.1.6,

$$\deg \phi|_{\mathcal{S}_\rho} = \deg \left( \frac{Y}{\|Y\|} \right)_{|\mathcal{S}_\rho} = \deg \left( \frac{X + \rho N}{\|X + \rho N\|} \right).$$

D'autre part, l'invariance du degré par homotopie montre que

$$\deg \left( \frac{X + \rho N}{\|X + \rho N\|} \right) = \begin{cases} \deg N & \text{si } \rho > 0 \\ \deg(-N) & \text{si } \rho < 0, \end{cases}.$$

En effet, si  $\rho > 0$ , on construit une homotopie

$$\psi : [0; \rho^{-1}] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (t, p) \mapsto \frac{N(p) + tX(p)}{\|N(p) + tX(p)\|}$$

entre  $\psi_0 = N$  et  $\psi_{\rho^{-1}} = \frac{X + \rho N}{\|X + \rho N\|}$ , et de même si  $\rho < 0$ ,

$$\psi : [\rho^{-1}; 0] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (t, p) \mapsto -\frac{N(p) + tX(p)}{\|N(p) + tX(p)\|}$$

est une homotopie entre  $\psi_{\rho^{-1}} = \frac{X + \rho N}{\|X + \rho N\|}$  et  $\psi_0 = -N$ . Comme  $N$  est le champ de vecteurs normaux unitaires orientés vers l'intérieur sur  $\mathcal{S}$ , et que  $\deg N$  a été calculé en (VII.1.1), on a

$$\deg \phi|_{\mathcal{S}_{-\epsilon}} = -\deg \phi|_{\mathcal{S}_\epsilon} = \deg N = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. □

### Corollaire VII.3.2.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ . Tous les champs de vecteurs sur  $\mathcal{S}$  dont les zéros sont isolés ont la même somme d'indices de leur zéros.

Pour une sphère, cette somme vaut 2, d'après l'exemple VII.2.9. Ceci montre en particulier qu'un champ de vecteurs tangents sur la sphère admet au moins un zéro. Pour un tore, cette somme vaut 0 (exemple VII.2.10).

Notre but est maintenant de montrer que toute surface compacte admet des champs de vecteurs tangents non dégénérés. D'après la proposition VII.2.8, ceci implique que la somme des indices de leur zéros est un entier. Pour cela, nous allons maintenant considérer un type particulier de champs de vecteurs sur une surface  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Rappelons que le gradient  $\nabla f$  est défini par

$$df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle, \quad (v \in T_p \mathcal{S}), \quad \langle \nabla f(p), N(p) \rangle = 0.$$

En particulier,  $\nabla f(p) \in T_p \mathcal{S}$  pour tout  $p \in \mathcal{S}$ .

**Proposition VII.3.3.**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Alors

- A.** le champ  $\nabla f$  a pour zéros les points critiques de  $f$ .
- B.** Soit  $a \in \mathcal{S}$  un zéro de  $\nabla f$ . Alors  $a$  est un zéro non dégénéré si et seulement si la hessienne  $(d^2f)_p$  (cf. section I.8.6) en ce point critique est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le plan  $T_a\mathcal{S}$ .
- C.** L'indice de  $\nabla f$  en  $a$  est  $+1$  si  $a$  est un extremum local de  $f$ , et égal à  $-1$  si c'est un point selle.

*Démonstration.* Comme pour tout  $p \in \mathcal{S}$  et tout  $v \in T_p\mathcal{S}$ ,  $df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$ , le point **A** est clair, car  $df_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  est soit nulle, auquel cas le point  $p$  est critique, soit de rang un.

Pour le point **B**, supposons que  $p$  soit un point critique de  $f$ , et donc un zéro du champ de vecteurs  $\nabla f$ . Soit  $v \in T_p\mathcal{S}$  et soit  $\gamma : ]-\epsilon; \epsilon[$  un arc paramétré tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = v$ . La définition du gradient nous dit que

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t).$$

Dérivons ceci, et évaluons en  $t = 0$ . On obtient

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = \langle d(\nabla f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle = \langle d(\nabla f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

et donc

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}(f \circ \gamma)(t) = \langle d(\nabla f)_p(v), v \rangle + \langle \nabla f(p), \gamma''(0) \rangle = \langle d(\nabla f)_p(v), v \rangle.$$

Le terme de gauche est par définition  $(d^2f)(v, v)$ . Il s'ensuit que la forme bilinéaire symétrique  $d^2f_p$  est non dégénérée si et seulement si  $p$  est un zéro non dégénéré du champ de vecteurs  $\nabla f$ .

Démontrons maintenant le point **C**. Si  $p$  est un point critique non dégénéré de  $f$ , alors la proposition VII.2.8 implique que  $i(\nabla f, p) = 1$  si  $\det(d^2f_p) > 0$  et  $i(\nabla f, p) = -1$  si  $\det(d^2f_p) < 0$ . Le premier cas a lieu la forme bilinéaire symétrique  $d^2f_p$  est définie positive ou définie négative, c'est-à-dire lorsque  $p$  est un extremum local, et le second cas lorsque  $d^2f_p$  est de signature  $(1, 1)$ , c'est-à-dire lorsque  $p$  est un point selle.  $\square$

Considérons par exemple la fonction hauteur relativement à un plan de  $\mathbb{R}^3$  de vecteur normal unitaire  $a \in \mathbb{R}^3$ .

$$h_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p, a \rangle.$$

Sa différentielle est

$$dh_p(v) = \langle v, a \rangle, \quad (p, v \in \mathbb{R}^3)$$

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte et notons encore  $h_a$  la restriction de  $h_a$  à  $\mathcal{S}$ . Dans ce contexte, on a la



**Proposition VII.3.4.**

Il existe un ensemble  $A \subset \mathbb{S}^2$  de mesure nulle tel que pour tout  $a \in \mathbb{S}^2 \setminus A$ , le gradient  $\nabla h_a$  est un champ de vecteur tangents non dégénéré sur  $\mathcal{S}$ . De plus, la somme des indices de ses zéros vérifie

$$\sum_{p \in \mathcal{S} \mid \nabla h_a(p)=0} i(\nabla h_a, p) = \deg(N, a) + \deg(N, -a).$$

où pour tout  $b \in \mathbb{S}^2$  valeur régulière de  $N$ ,

$$\deg(N, b) = \sum_{p \in N^{-1}(\{b\})} \begin{cases} 1 & \text{si } K(p) > 0 \\ -1 & \text{si } K(p) < 0 \end{cases}.$$

*Démonstration.* Soit  $N$  l'application de Gauss pour la surface  $\mathcal{S}$ . On définit  $A \subset \mathbb{S}^2$  comme le complémentaire des points de  $\mathbb{S}^2$  qui sont des valeurs régulières à la fois de  $N$  et  $-N$ . Le théorème de Sard (I.8.43) nous dit que  $A$  est de mesure nulle. Soit  $a \in \mathbb{S}^2 \setminus A$ . Les points critiques de la fonction hauteur  $h_a$  sur  $\mathcal{S}$  sont les points de  $\mathcal{S}$  où le plan tangent est perpendiculaire à  $a$ , c'est à dire les points  $p \in \mathcal{S}$  tels que  $\pm N(p) = a$ . Comme justement  $a$  est valeur régulière de  $N$  et  $-N$ , le déterminant jacobien de  $N$  ne s'annule pas en ces points. Mais le déterminant jacobien de l'application de Gauss est la courbure de Gauss, et c'est aussi le déterminant de la hessienne de  $h_a$  (voir proposition IV.2.7). La proposition VII.2.8 montre alors que le champ de vecteur  $\nabla h_a$  est non dégénéré et que l'indice en chacun de ses zéros est  $+1$  ou  $-1$  selon le signe de la courbure de Gauss en ces points.  $\square$

On peut maintenant énoncer le théorème de Gauss-Bonnet/Hopf-Poincaré sous une forme plus complète.

**Théorème VII.3.5** (Gauss-Bonnet/Poincaré-Hopf).

A toute surface compacte  $\mathcal{S}$ , on associe un entier, que l'on appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{S}$  et que l'on note  $\chi(\mathcal{S})$ , qui possède les propriétés suivantes.

- A. Si  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont difféomorphes,  $\chi(\mathcal{S}_1) = \chi(\mathcal{S}_2)$ .
- B. Si  $X$  est un champ de vecteurs tangents à la surface compacte  $\mathcal{S}$  dont les zéros sont isolés, on a

$$\sum_{a \in \mathcal{S} \mid X(a)=0} i(X, a) = \chi(\mathcal{S}).$$

- C. Si  $K$  est la courbure de Gauss de la surface  $\mathcal{S}$ ,

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp = 2\pi \chi(\mathcal{S}).$$

- D. Si  $N$  est l'application de Gauss de la surface  $\mathcal{S}$ ,

$$2 \deg N = \chi(\mathcal{S}).$$

On dit qu'une surface de  $\mathbb{R}^3$  est une sphère topologique si elle est difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Le théorème implique qu'une telle sphère topologique a une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à deux, comme le montre le calcul explicite de l'exemple VII.2.9. Sa courbure de Gauss totale est égale à  $4\pi$ , et la somme des indices des zéros d'un champ de vecteurs tangents est égale à 2. En particulier, un tel champ s'annule nécessairement.

De même, une surface de  $\mathbb{R}^3$  est un tore topologique si elle est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$ . Un tore topologique a une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle (exemple VII.2.10). Sa courbure de Gauss totale est égale nulle, ainsi que la somme des indices des zéros d'un champ de vecteurs tangents.

**Remarque VII.3.6.** (culturelle) La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  est toujours un entier pair plus petit ou égal à 2, et réciproquement, tout entier pair plus petit ou égal à 2 est la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ .

## VII.4 Exercices

**Exercice VII.4.1.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe orientée de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que si l'application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  se prolonge en une application différentiable de  $\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , où  $\bar{\Omega}$  est l'adhérence du domaine intérieur de  $\mathcal{S}$ , alors

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp = 0.$$

Appliquer ceci au tore.

**Exercice VII.4.2.** Soit  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  une application différentiable entre deux surfaces connexes compactes orientées de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}'$  l'ensemble des valeurs régulières de  $\phi$ .

1. Montrer que pour tout  $q \in \mathcal{W}$ ,  $\phi^{-1}(\{q\})$  est un ensemble fini.

On pose pour tout  $q \in \mathcal{W}$ ,

$$\deg(\phi, q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(\{q\})} \epsilon_\phi(p)$$

où  $\epsilon_\phi(p) = 1$  si  $\text{Jac}(\phi)(p) > 0$  et  $\epsilon_\phi(p) = -1$  si  $\text{Jac}(\phi)(p) < 0$ .

2. Montrer que  $q \mapsto \deg(\phi, q)$  est une fonction localement constante sur  $\mathcal{W}$  qui vérifie

$$\deg \phi = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{S}')} \int_{\mathcal{S}'} \deg(\phi, q) \, dq.$$

3. Montrer que si  $f$  est une fonction intégrable sur  $\mathcal{S}'$ , on a

$$\int_{\mathcal{S}} (f \circ \phi)(p) \, \text{Jac}(\phi)(p) \, dp = \int_{\mathcal{S}'} f(q) \, \deg(\phi, q) \, dq.$$



# Chapitre VIII

## Rappels et compléments de calcul différentiel

Le calcul différentiel classique a pour objet d'étude les applications entre  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  (fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles). En fait, on a parfois besoin d'étendre le cadre de cette étude à certains espaces de dimension infinie. La propriété cruciale qui permet cette généralisation est celle de complétude. Nous rappelons dans ce chapitre les points principaux du calcul différentiel dans les espaces de Banach.

### VIII.1 Généralités sur les espaces de Banach

Les espaces vectoriels normés dans ce chapitre sont tous définis sur le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Un espace de Banach  $E$  est un espace vectoriel normé, qui, en tant qu'espace métrique, est **complet**, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente. Nous renvoyons le lecteur au cours de première année de Frank Pacard [7], chapitre II et IV, pour ce qui concerne la théorie de base des espaces métriques complets et des espaces de Banach. Dans la suite, nous utiliserons sans plus de commentaires la caractérisation suivante des espaces de Banach.

#### Proposition VIII.1.1.

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Alors  $E$  est complet si et seulement si toute série à valeurs dans  $E$  normalement convergente est convergente.

#### VIII.1.1 Théorème de Baire

Un résultat important concernant les espaces métriques complets et que nous utiliserons dans la démonstration du théorème de l'application ouverte est le théorème de Baire.

**Théorème VIII.1.2** (Théorème de Baire (1899)).

Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. De manière équivalente, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Voir [7] théorème 4.1.

**VIII.1.2 Applications linéaires continues**

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés. On note  $\mathcal{L}(E; F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . Rappelons qu'une application linéaire  $T : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si elle est continue en 0 et ceci a lieu si et seulement si  $T$  est bornée, c'est-à-dire que

$$\|T\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

D'autre part, si  $F$  est un espace de Banach,  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}(E; F)$  et  $(\mathcal{L}(E; F), \|\cdot\|)$  est un espace de Banach. (Voir cours de F. Pacard [7]).

Remarquons que

$$\|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F.$$

Si  $E$  est un espace de Banach, la norme  $\|\cdot\|$  définie ci-dessus sur  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$  est une **norme d'algèbre**, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (A, B \in \mathcal{L}(E)).$$

Plus généralement, si  $A$  et  $B$  se composent, disons  $A \in \mathcal{L}(F; G)$ ,  $B \in \mathcal{L}(E; F)$ , alors  $AB \in \mathcal{L}(E; G)$  et l'inégalité ci-dessus est valable.

**Exercice VIII.1.3.** Soit  $F$  un espace vectoriel normé. Montrer que  $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$  s'identifie canoniquement à  $F$  par  $T \mapsto T(1)$ .

**VIII.1.3 Applications multilinéaires continues**

Nous avons rappelé qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés est continue si et seulement si elle est continue en 0 et ceci a lieu si et seulement si elle est bornée sur la boule unité. Ceci s'étend aux applications multilinéaires comme suit.

**Proposition VIII.1.4.**

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  et  $F$  des espaces vectoriels normés et soit

$$f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $f$  est continue en tout point de  $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$  ;
- (b)  $f$  est continue en 0 ;
- (c)  $f$  est bornée sur le produit des boules unités  $B_{E_1}(0, 1) \times \cdots \times B_{E_n}(0, 1)$ .

Pour une démonstration, voir thm 1.8.1, [2]. Remarquons qu'il n'y a pas lieu de se demander de quelle norme est munie l'espace produit  $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ . La continuité des applications est une propriété topologique, la proposition fait donc sens dès que  $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$  est muni d'une topologie (ici la topologie produit).

On note  $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$  l'espace des applications multilinéaires continues de  $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$  dans  $F$ .

On peut munir  $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$  de la norme

$$\|f\| = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in B_{E_1}(0, 1) \times \cdots \times B_{E_n}(0, 1)} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F.$$

Comme dans le cas des applications linéaires, si  $F$  est un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$  muni de cette norme est encore un espace de Banach.

**VIII.1.4 L'isomorphisme canonique  $\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$** 

Intéressons-nous maintenant au cas des applications bilinéaires de  $E_1 \times E_2$  dans  $F$ , où  $E_1, E_2$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés. Nous allons exhiber une isométrie (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire respectant les normes)

$$\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)).$$

Pour cela, posons pour toute  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ ,

$$\Phi(f)(x)(y) = f(x, y), \quad (x \in E_1, y \in E_2)$$

On vérifie immédiatement que pour tout  $x \in E_1$ ,  $y \mapsto \Phi(f)(x)(y)$  est une application linéaire de  $E_2$  dans  $F$ . Comme par définition

$$\|f(x, y)\|_F \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}, \quad (x \in E_1, y \in E_2),$$

il est clair que pour tout  $x \in E_1$ ,  $\Phi(f)(x)$  est continue, donc  $\Phi(f)(x) \in \mathcal{L}(E_2; F)$ . De même, on vérifie que  $x \mapsto \Phi(f)(x)$  est linéaire de  $E_1$  dans  $\mathcal{L}(E_2; F)$ . Comme

$$\|\Phi(f)(x)\| = \sup_{y \in B_{E_2}(0, 1)} \|\Phi(f)(x)(y)\|_F = \sup_{y \in B_{E_2}(0, 1)} \|f(x, y)\|_F \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1},$$

l'application  $\Phi(f) : x \mapsto \Phi(f)(x)$  est linéaire continue de  $E_1$  dans  $\mathcal{L}(E_2; F)$ , de norme au plus  $\|f\|$ . L'application  $f \mapsto \Phi(f)$  est donc bien définie de  $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$  dans  $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2; F))$ . Bien entendu, elle est linéaire, et la majoration

$$\|\Phi(f)(x)\| \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1}, \quad (x \in E_1)$$

obtenue ci-dessus implique que  $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$ . On en déduit que  $\Phi$  est continue, de norme au plus 1.

Nous allons maintenant définir une application qui est l'inverse de  $\Phi$ . Posons, pour tout  $g \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$ ,

$$\Psi(g)(x, y) = g(x)(y), \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

L'application  $\Psi(g)$  est évidemment bilinéaire. Comme  $\|g(x)\| \leq \|g\| \times \|x\|_{E_1}$ , on a

$$\|\Psi(g)(x, y)\|_F = \|g(x)(y)\|_F \leq \|g(x)\| \times \|y\|_{E_2} \leq \|g\| \times \|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}, \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

Ceci montre que  $\Psi(g)$  est bilinéaire continue, de norme au plus  $\|g\|$ . Comme  $g \mapsto \Psi(g)$  est linéaire,  $\Psi$  est une application linéaire de  $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$  dans  $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ , qui s'avère donc être continue et de norme au plus 1.

Comme par construction,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont inverses l'une de l'autre,  $\Phi$  est un isomorphisme linéaire entre  $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$  et  $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$  d'inverse  $\Psi$ , ces deux applications linéaires étant continues de norme au plus 1. Montrons maintenant que ce sont des isométries. On a  $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{L}(E_1, E_2; F)}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ ,

$$\|f\| = \|\Psi \circ \Phi(f)\| \leq \|\Psi\| \times \|\Phi(f)\| \leq \|\Psi\| \times \|\Phi\| \times \|f\| \leq \|f\|.$$

On en conclut que  $\|\Phi(f)\| = \|f\|$ , ce qui prouve que  $\Phi$  (et donc  $\Psi$ ) est une isométrie.

## VIII.2 Théorème de l'application ouverte et corollaires

### VIII.2.1 Théorème de l'application ouverte

Nous allons maintenant énoncer et démontrer un théorème important de la théorie des espaces de Banach, le théorème de l'application ouverte. Il est dû à J. Schauder (1930).

#### **Théorème VIII.2.1** (Application ouverte).

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et surjective. Alors l'image par  $f$  d'un ouvert de  $E$  est un ouvert de  $F$ .

Démonstration. Par translation et linéarité, il suffit de montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que  $B_F(0, c) \subset f(B_E(0, 1))$ . Notons  $B = B_E(0, 1)$  la boule unité ouverte de  $E$  et  $\bar{B}$  son adhérence. Comme  $f$  est surjective, et que par continuité,  $f(\bar{B}) \subset \overline{f(B)}$ , on a :

$$F = f(E) = f\left(\bigcup_{n \geq 1} n \bar{B}\right) = \bigcup_{n \geq 1} n f(\bar{B}) = \bigcup_{n \geq 1} n \overline{f(B)}.$$

Comme  $F$  est complet, d'après le théorème de Baire, l'un des  $n \overline{f(B)}$  est d'intérieur non vide. Donc  $\overline{f(B)}$  est d'intérieur non vide. Comme  $\overline{f(B)}$  est un convexe symétrique (par rapport à 0), il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\bar{B}_F(0, \alpha) \subset \overline{f(B)}$ . Nous allons montrer que ceci



implique que pour tout  $\beta < \alpha$ ,  $\bar{B}_F(0, \beta) \subset f(B)$ . En remplaçant  $f$  par  $\frac{1}{\alpha}f$ , il suffit de montrer que pour tout  $\lambda < 1$ ,  $\bar{B}_F(0, 1) \subset \overline{f(B)} \Rightarrow \bar{B}_F(0, \lambda) \subset f(B)$ .

Soient des réels strictement positifs  $\epsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = 1 - \lambda$ . Soit  $y \in \bar{B}_F(0, \lambda)$ .

Comme :

$$\bar{B}_F(0, \lambda) = \lambda \bar{B}_F(0, 1) \subset \lambda \overline{f(B)} = \overline{f(B_E(0, \lambda))},$$

il existe  $x_1 \in E$  tel que  $\|x_1\|_E < \lambda$ ,  $\|y - f(x_1)\|_F \leq \epsilon_1$ . On a donc

$$y - f(x_1) \in \bar{B}_F(0, \epsilon_1) = \epsilon_1 \bar{B}_F(0, 1) \subset \epsilon_1 \overline{f(B)} = \overline{f(B_E(0, \epsilon_1))}.$$

Ainsi il existe  $x_2 \in E$  tel que  $\|x_2\|_E < \epsilon_1$  et  $\|y - f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq \epsilon_2$ . En continuant ce procédé, on obtient des éléments  $x_n \in E$ ,  $n \geq 1$ , tels que :

$$\|x_n\|_E < \epsilon_{n-1}, \quad \|y - f(x_1) - f(x_2) - \cdots - f(x_n)\|_F \leq \epsilon_n.$$

Alors

$$\sum_{n \geq 1} \|x_n\|_E < \lambda + \sum_{n \geq 1} \epsilon_n \leq 1.$$

Comme  $E$  est complet, la série  $\sum x_n$  converge dans  $E$ . Notons  $x$  sa somme. On a  $\|x\|_E < 1$ , et puisque  $f$  est continue,  $f(x) = \sum_{n \geq 1} f(x_n) = y$ . Donc  $y \in f(B)$ , ce que l'on voulait montrer.  $\square$

## VIII.2.2 Théorème d'isomorphisme de Banach

Une conséquence facile à obtenir du théorème de l'application ouverte est le résultat suivant, dû à S. Banach.

### **Théorème VIII.2.2 (de Banach).**

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach, et soit  $f : E \rightarrow F$  un isomorphisme linéaire, continu. Alors son inverse  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est continu.

Démonstration. En effet, le théorème de l'application ouverte implique qu'il existe  $c > 0$  tel que  $B_F(0, c) \subset f(B_E(0, 1))$ . On a alors  $\|f^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ .  $\square$

### **Corollaire VIII.2.3.**

Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes telles que  $E$  soit complet pour chacune d'elles. Alors si ces deux normes sont comparables, elles sont équivalentes.

Démonstration. Dire qu'elles sont comparables signifie que l'une d'elles est plus fine que l'autre : il existe  $k > 0$  tel que  $\|x\|_1 \leq k \|x\|_2$  pour tout  $x \in E$ . Mais cela signifie que l'application identité  $\text{Id} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$  qui est linéaire et bijective, est continue ; elle est donc bicontinue, et les deux normes sont équivalentes.  $\square$

### VIII.2.3 Théorème du graphe fermé

Un énoncé équivalent au théorème de l'application ouverte est le **théorème du graphe fermé**.

#### Théorème VIII.2.4 (Graphe fermé).

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f$  est continue si et seulement si son graphe

$$\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \in E \times F, x \in E\}$$

est fermé.

Démonstration. Si  $f$  est continue, son graphe est évidemment fermé. Démontrons la réciproque. Munissons  $E$  d'une seconde norme  $\|\cdot\|_f$  définie par :

$$\|x\|_f = \|x\|_E + \|f(x)\|_F, (x \in E).$$

Elle est plus fine que  $\|\cdot\|_E$  et la condition que le graphe de  $f$  soit fermé dit que  $(E, \|\cdot\|_f)$  est un espace complet (on le voit comme un sous-espace fermé dans l'espace complet  $E \times F$  via l'injection  $x \mapsto (x, f(x))$ ). Les normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_f$  sont donc équivalentes : il existe donc  $C > 1$  tel que, pour tout  $x \in E$  :

$$\|x\|_f \leq C \|x\|_E,$$

soit

$$\|f(x)\|_F \leq (C - 1) \|x\|_E.$$

□

## VIII.3 Applications différentiables. Différentielle

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace vectoriel normé  $E$  contenant 0. Rappelons que l'on écrit  $f(x) = o(x)$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in B_E(0, \delta) \cap \mathcal{U}$ ,  $|f(x)| < \epsilon \|x\|_E$ .

#### Définition VIII.3.1.

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$ . On dit que l'application  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  s'il existe une application linéaire continue,  $df_a : E \rightarrow F$  telle que

$$(VIII.3.1) \quad \|f(a+h) - f(a) - df_a(h)\|_F = o(h).$$

On appelle  $df_a$  la différentielle de  $f$  au point  $a$ .

On dit que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  si elle est différentiable en tout point de  $\mathcal{U}$ .

**Exemple VIII.3.2.** Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  une application d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $F$ , que l'on suppose différentiable au point  $a \in \mathcal{U}$ . Alors  $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ . Comme  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$  est canoniquement isomorphe à  $F$  (cf. exercice VIII.1.3), on peut identifier  $df_a$  avec un vecteur de  $F$  (le vecteur tangent de  $f$  en  $a$ , donné par  $df_a(1)$ ). Lorsque  $F = \mathbb{R}$ , on note plus couramment  $f'(a)$  le réel  $df_a(1)$ .

**Remarque VIII.3.3.** Dans la définition de la différentielle, il est exigé que  $df_a : E \rightarrow F$  soit continue. Ceci entraîne la continuité de  $f$  en  $a$ . Alternativement, on peut exiger la continuité en  $a$  dans la définition de la différentiabilité. Une application linéaire  $df_a$  vérifiant (VIII.3.1) est alors nécessairement continue.

### VIII.3.1 Propriétés de la différentielle

On rappelle maintenant les propriétés de linéarité et de composition des différentielles. On peut trouver les démonstrations des propositions qui suivent dans [2].

**Proposition VIII.3.4** (Linéarité de la différentielle).

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$  et  $f, g : E \rightarrow F$  des applications différentiables en un point  $x$  de  $\mathcal{U}$ . Alors toute combinaison linéaire  $\lambda f + \mu g$  de  $f$  et de  $g$  est encore différentiable au point  $x$ , et

$$d(\lambda f + \mu g)_x = \lambda df_x + \mu dg_x.$$

**Proposition VIII.3.5** (Composition des différentielles).

Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$ ,  $f : E \rightarrow F$  une application différentiable en un point  $x$  de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $F$  contenant  $f(x)$  et  $g : F \rightarrow G$  une application différentiable en  $f(x)$ . Alors  $g \circ f$  est différentiable en  $x$ , et

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

### VIII.3.2 Quelques exemples

**Exemple VIII.3.6.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue entre deux espaces de Banach. Alors  $f$  est partout différentiable, et sa différentielle en tout point est  $f$ .

En effet,  $f(x_0 + h) - f(x) - f(h) = 0$  quels que soient  $x_0$  et  $h$  dans  $E$ .

**Exemple VIII.3.7.** Soient  $E_1, E_2$  et  $F$  des espaces de Banach. On munit l'espace vectoriel  $E_1 \times E_2$  de la norme  $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ . Il n'est pas difficile de voir que  $E_1 \times E_2$  est alors complet. Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  une application bilinéaire continue. La différentielle de  $f$  au point  $(a, b)$  est donnée par

$$df_{(a,b)}(h, k) = f(a, k) + f(h, b), \quad (h \in E_1, k \in E_2).$$

En effet, on a alors

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) - df_{(a,b)}(h, k) = f(h, k).$$

Or  $\|f(h, k)\|_F \leq \|f\| \times \|h\|_{E_1} \times \|k\|_{E_2} = o((h, k))$ .

**Exercice VIII.3.8.** Reprendre l'exemple ci-dessus dans le cadre plus général des applications multilinéaires continues de la section [VIII.1.3](#).

### VIII.3.3 Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces de Banach

Soient  $E, F_1, \dots, F_n$  des espaces de Banach. On munit  $F = F_1 \times \dots \times F_n$  de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_F = \|x_1\|_{F_1} + \dots + \|x_n\|_{F_n}$$

qui en fait un espace de Banach. On considère pour chaque indice  $i = 1, \dots, n$ , la projection canonique

$$p_i : F \rightarrow F_i, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

et l'injection canonique

$$\iota_i : F_i \rightarrow F, \quad x_i \mapsto (0, \dots, x_i, \dots, 0)$$

(des 0 partout sauf à la  $i$ -ème place).

On a alors

$$(VIII.3.2) \quad p_i \circ \iota_i = \text{Id}_{F_i}, \quad \sum_{i=1}^n \iota_i \circ p_i = \text{Id}_F.$$

On en déduit le résultat suivant.

#### Proposition VIII.3.9.

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F = F_1 \times \dots \times F_n$  une application continue, où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de l'espace de Banach  $E$ . Pour que  $f$  soit différentiable au point  $a \in \mathcal{U}$ , il faut et il suffit que pour tout  $i$ ,  $f_i := p_i \circ f$  soit différentiable au point  $a$ , et l'on a alors

$$df_a = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ (df_i)_a.$$

Démonstration. Si  $f$  est différentiable en  $a$ , les  $f_i = p_i \circ f$  le sont aussi d'après le théorème de composition des différentielles et le fait que les  $p_i$  sont linéaires. La formule de composition des différentielles donne

$$(df_i)_a = p_i \circ df_a.$$

Réciproquement, si l'on suppose toutes les  $f_i$  différentiable en  $a$ , on obtient de [\(VIII.3.2\)](#) que

$$f = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ p_i \circ f = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ f_i.$$

La fonction  $f$  est donc différentiable en  $a$ , sa différentielle en  $a$  étant bien

$$df_a = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ (df_i)_a.$$

d'après la formule de composition des différentielles.  $\square$

**Exemple VIII.3.10.** Soient  $E$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  et  $G$  des espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$ , et

$$f_1 : \mathcal{U} \rightarrow F_1, \quad f_2 : \mathcal{U} \rightarrow F_2, \quad b : F_1 \times F_2 \rightarrow E$$

où  $b$  est bilinéaire continue. On définit  $g : \mathcal{U} \rightarrow G$  par  $g(x) = b(f_1(x), f_2(x))$ . Supposons que  $f_1$  et  $f_2$  soient différentiables au point  $a \in \mathcal{U}$ . Alors il en est de même de  $g$ , et

$$dg_a(h) = b((df_1)_a(h), f_2(a)) + b(f_2(a), (df_2)_a(h)).$$

En effet, on écrit  $g$  comme composée de  $b$  et de  $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$  de  $\mathcal{U}$  dans  $F_1 \times F_2$ . On utilise alors la proposition qui précède, la formule de composition des différentielles, et la formule de la différentielle d'une application bilinéaire (cf. exemple VIII.3.7).

### VIII.3.4 Différentielles partielles

On se place maintenant dans le cas où  $E = E_1 \times \cdots \times E_m$  est un produit d'espaces de Banach. Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$  et soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  une application de  $\mathcal{U}$  à valeurs dans un espace de Banach  $F$ .

Fixons un point  $a = (a_1, \dots, a_m)$  de  $\mathcal{U}$ , et pour tout  $i = 1, \dots, m$  considérons les applications partielles

$$f_{[i]} : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

définies respectivement sur des voisinages ouverts de  $a_i$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition VIII.3.11.

Avec les notations ci-dessus, si  $f$  est différentiable au point  $a \in \mathcal{U}$ , pour tout  $i = 1, \dots, m$ , l'application partielle  $f_{[i]}$  est différentiable en  $a_i$ . On note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  la différentielle de  $f_{[i]}$  en  $a_i$ . C'est un élément de  $\mathcal{L}(E_i; F)$  que l'on appelle la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$ . En outre, on a

$$(VIII.3.3) \quad df_a(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i), \quad (h_1 \in E_1, \dots, h_m \in E_m).$$

**Démonstration.** Comme dans la section précédente, on note  $\iota_i$  l'injection canonique de  $E_i$  dans  $E$  et  $p_i$  la projection canonique de  $E$  sur  $E_i$ . On a alors  $f_{[i]} = f \circ \lambda_i$ , où  $\lambda_i(x_i) = a + \iota_i(x_i - a_i)$ . Comme  $\iota_i$  est linéaire, elle est partout différentiable, et si  $f$  est différentiable au point  $a \in \mathcal{U}$ , il en est de même de  $f_{[i]}$  au point  $a_i$  par le théorème de composition des différentielles. De plus, on a par la formule de composition  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a \circ \iota_i$ . Comme

$\sum_{i=1}^m \iota_i \circ p_i = \text{Id}_E$ , on a  $\sum_{i=1}^m df_a \circ \iota_i \circ p_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i = df_a$ , ce qui donne bien (VIII.3.3).  $\square$

**Remarque VIII.3.12.** Contrairement à la proposition VIII.3.9, la proposition n'établit qu'une implication et non une équivalence. En effet, il est faux d'affirmer que la différentiabilité des applications partielles implique la différentiabilité de  $f$  en un point. Nous reviendrons sur cette question en VIII.4.1.

### VIII.3.5 Applications de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$

La combinaison des cas étudiés dans les deux sections précédentes nous permet de retrouver les notions et notations usuelles du calcul différentiel pour les fonctions de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Fixons un point  $a \in \mathbb{R}^m$ . Les applications partielles  $f_{[i]}$  en  $a$  ont été définies dans la section précédente, et les applications  $f_j$  dans la section VIII.3.3. De même, pour tout  $i = 1, \dots, m$  et tout  $j = 1, \dots, n$ , on peut définir  $f_{[i]j}$  et  $f_{j[i]}$ . Il est facile de voir que ces deux fonctions définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  coïncident, et nous noterons plus commodément  $f_{i,j}$  cette fonction. Si  $f$  est différentiable en  $a$ , les  $f_{i,j}$  sont dérivables en  $a_i$ ,  $f'_{i,j}(a_i) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$  (il y a là un léger abus de notations. En effet  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$  est définie comme une application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On identifie ici naturellement une telle application linéaire et un nombre réel comme dans l'exercice VIII.1.3) et

$$(VIII.3.4) \quad df_a = \sum_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, n} \iota_i \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_j.$$

Autrement dit, l'application linéaire  $df_a$  est représentée dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  par la matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes  $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a))_{j,i}$ . On appelle cette matrice la **matrice jacobienne** de  $F$  en  $a$ . Son déterminant noté  $\text{Jac}(f)(a)$ , s'appelle le **déterminant jacobien**, ou simplement **jacobien**, de  $f$  en  $a$ . L'équation (VIII.3.4) s'écrit alors

$$df_a(h_1, \dots, h_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \vdots & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

où l'on identifie un élément de  $\mathbb{R}^n$  et le « vecteur colonne » (c'est-à-dire une matrice à  $n$  ligne et une colonne) qui lui est associé.

## VIII.4 Théorème des accroissements finis

Nous énonçons maintenant une version du théorème des accroissement finis pour les applications entre espaces de Banach. La démonstration se trouve dans [2], section I.3.

**Théorème VIII.4.1** (Théorème des accroissements finis).

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$  et  $f : E \rightarrow F$  une application différentiable sur  $\mathcal{U}$ . Soient  $a$  et  $b$  des points de  $E$ . Si le segment  $[a, b] = \{ta + (1-t)b; t \in [0, 1]\}$  est contenu dans  $\mathcal{U}$ , alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|df_{ta + (1-t)b}\| \times \|b - a\|_E.$$

En particulier, si  $\mathcal{U}$  est convexe, et que  $\sup_{x \in \mathcal{U}} \|df_x\| \leq k$  pour une constante  $k$  positive, alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b - a\|_E.$$

**Corollaire VIII.4.2.**

Si  $\mathcal{U}$  est connexe, et que  $df_x$  est nulle pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , alors  $f$  est constante sur  $\mathcal{U}$ .

*Démonstration.* Ceci découle directement du théorème si  $\mathcal{U}$  est convexe. Le cas d'un ouvert  $\mathcal{U}$  connexe s'en déduit en utilisant le fait qu'un espace de Banach est localement convexe (tout point admet un voisinage convexe aussi petit que l'on souhaite). Ainsi, l'hypothèse implique que  $f$  est localement constante. Or une fonction localement constante sur un ouvert connexe est constante. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

**VIII.4.1 Classe  $\mathcal{C}^k$  et différentielles d'ordre supérieur**

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$ . On définit, pour une application  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ , le fait d'être de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ , par récurrence.

Classe  $\mathcal{C}^0$  :  $f$  est continue.

Classe  $\mathcal{C}^1$  :  $f$  est différentiable en tout point  $x \in \mathcal{U}$  et l'application

$$df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad x \mapsto df_x$$

est continue.

Classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  :  $f$  est différentiable en tout point  $x \in \mathcal{U}$  et  $df$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Classe  $\mathcal{C}^\infty$  :  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Les espaces  $\mathcal{L}(E; F)$ ,  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ ,  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$ , etc, sont des espaces de Banach. Ainsi les questions de continuité et de différentiabilité successive de  $f$ ,  $df$ ,  $d(df)$ , etc, rentrent-elles bien dans le cadre de notre étude.

Replaçons nous dans le cadre de la section VIII.3.4 :  $E = E_1 \times \cdots \times E_m$  est un produit d'espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $E$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  une application de  $\mathcal{U}$  à valeurs dans un espace de Banach  $F$ . Nous avons défini la notion de dérivée partielle (notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ). Nous avons alors le résultat suivant, qui complète la proposition VIII.3.11.

**Proposition VIII.4.3.**

Avec les notations ci-dessus, pour que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ , il faut et il suffit que  $f$  admette des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  en tout point de  $\mathcal{U}$ , et que celles-ci soient continues.

Pour que  $f$  soit différentiable au point  $a$ , il suffit que les dérivées partielles existent en tout point  $x$  dans un voisinage de  $a$  et qu'elles soient continues en  $a$ .

Pour une démonstration, voir [2], théorème 3.7.1 et proposition 3.7.2.

**Exemple VIII.4.4.** Une application linéaire continue est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Elle est égale à sa différentielle en tout point. Ses différentielles d'ordre supérieur sont nulles.

Intéressons nous de plus près maintenant au cas de la classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose donc que  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  est une application d'un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace de Banach  $E$  à valeurs dans un espace de Banach  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ceci signifie que l'application

$$df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad x \mapsto df_x$$

est partout définie sur  $\mathcal{U}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$ , en particulier, sa différentielle est une application

$$d(df) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$$

Or, nous avons vu dans la section VIII.1.4 que l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E, E; F).$$

La différentielle seconde  $d(df)_a$  en un point  $a$  peut donc être vue comme une application bilinéaire de  $E \times E \rightarrow F$ .

**Théorème VIII.4.5 (Lemme de Schwarz).**

La différentielle seconde  $d(df)_a$  est une application bilinéaire symétrique de  $E \times E$  dans  $F$ .

Voir [2], théorème I.5.1.1)

**Exercice VIII.4.6.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que le théorème ci-dessus est bien équivalent dans ce cas au fait que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f.$$



VIII.4.2 Un exemple d'application  $\mathcal{C}^\infty : f \mapsto f^{-1}$ 

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach.

**Théorème VIII.4.7.**

L'ensemble  $\text{Iso}(E; F)$  des isomorphismes bicontinus de  $E$  dans  $F$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E; F)$  et l'application

$$\Psi : \text{Iso}(E; F) \rightarrow \text{Iso}(F; E), \quad f \mapsto f^{-1}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , sa différentielle en  $f$  étant donnée par

$$d\Psi_f(g) = -f^{-1} \circ g \circ f^{-1}, \quad (g \in \mathcal{L}(E; F)).$$

*Démonstration.* Il se peut que  $\text{Iso}(E; F)$  soit vide, dans ce cas, le théorème est trivialement vrai. On se place dans le cas où  $\text{Iso}(E; F)$  est non vide. Soit  $f_0 \in \text{Iso}(E; F)$ . Montrons que pour tout  $g \in \mathcal{L}(E; F)$  de norme suffisamment petite,  $f_0 + g$  est encore inversible. En composant par  $f_0^{-1}$ , il s'agit de montrer que  $\text{Id}_E + f_0^{-1}g$  est inversible et donc de montrer que si  $h \in \mathcal{L}(E)$  est de norme suffisamment petite, alors  $\text{Id}_E - h$  est inversible. Or on sait que tel est le cas si  $\|h\| < 1$ , l'inverse de  $\text{Id} - h$  étant donné par la série normalement convergente  $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$ .

Montrons maintenant que  $\Psi : \text{Iso}(E; F) \rightarrow \text{Iso}(F; E)$ ,  $f \mapsto f^{-1}$  est continue. Fixons  $f_0 \in \text{Iso}(E; F)$  et montrons la continuité en ce point. Posons  $f = f_0 + g$ ,  $h = -f_0^{-1}g$ , où  $g$  est de norme suffisamment petite, de sorte que si  $\|h\| < 1$ ,

$$f = f_0(\text{Id}_E - h), \quad (\text{Id}_E - h)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} h^n \text{ et } f^{-1} = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} h^n \right) f_0^{-1}.$$

On a alors

$$f^{-1} - f_0^{-1} = \left( \sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1},$$

d'où

$$\|f^{-1} - f_0^{-1}\| \leq \left( \sum_{n \geq 1} \|h\|^n \right) \|f_0^{-1}\| \leq \frac{\|h\|}{1 - \|h\|} \|f_0^{-1}\|.$$

Lorsque  $f$  tend vers  $f_0$ ,  $g$  tend vers 0 donc  $h$  aussi, ce qui montre que  $f^{-1}$  tend vers  $f_0^{-1}$ .

Montrons maintenant que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On reprend les mêmes notations que ci-dessus. Il s'agit de montrer que pour  $f = f_0 + g$  proche de  $f_0$ ,

$$\|f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1}g f_0^{-1}\| = o(g).$$

Or, on a vu que

$$f^{-1} - f_0^{-1} = \left( \sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1} g f_0^{-1} &= \left( \sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1} - f_0^{-1} g f_0^{-1} = \left( \left( \sum_{n \geq 1} h^n \right) - f_0^{-1} g \right) f_0^{-1} \\ &= \left( \sum_{n \geq 2} h^n \right) f_0^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1} g f_0^{-1}\| = \left\| \left( \sum_{n \geq 2} h^n \right) f_0^{-1} \right\| \leq \left( \sum_{n \geq 2} \|h^n\| \right) \|f_0^{-1}\| = \frac{\|h^2\|}{1 - \|h\|} \|f_0^{-1}\|.$$

Le terme de droite est bien un  $o(h)$ , donc un  $o(g)$ . Ceci montre que  $\Psi$  est différentiable en  $f_0$ , de différentielle

$$d\Psi_{f_0}(g) = -f_0^{-1} \circ g \circ f_0^{-1}, \quad (g \in \mathcal{L}(E; F)).$$

L'application  $f \mapsto d\Psi_f$  est la composée de  $f \mapsto f^{-1}$ , dont on a vu qu'elle est continue, de  $h \mapsto (-h, h)$  de  $\mathcal{L}(F; E)$  dans  $\mathcal{L}(F; E) \times \mathcal{L}(F; E)$ , qui est linéaire continue, et de

$$L \times R : \mathcal{L}(F; E) \times \mathcal{L}(F; E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; F), \mathcal{L}(F; E)),$$

$$(h_1, h_2) \mapsto L \times R(h_1, h_2) : \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; E), \quad g \mapsto h_1 \circ g \circ h_2,$$

qui est aussi linéaire, continue (car de norme plus petite que  $\|h_1\| \|h_2\|$ ).

Elle est donc continue, ce qui montre que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par récurrence, on montre que si  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , elle est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ ; elle est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  $\square$

## VIII.5 Inversion locale et théorème des fonctions implicites

### VIII.5.1 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de S. Banach (également attribué à E. Picard) a de nombreuses applications, en particulier le théorème des fonctions implicites et le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles. Nous donnons ici la démonstration d'une version avec paramètre.

#### **Théorème VIII.5.1 (Point fixe de Banach).**

Soient  $X$  un espace topologique,  $Y$  un espace métrique complet et

$$g : X \times Y \rightarrow Y$$

une application continue. Soit  $a \in [0; 1[$ . On suppose que pour tout  $x \in X$ , l'application

$$g_x : Y \rightarrow Y, \quad y \mapsto g(x, y)$$

est  $a$ -lipschitzienne. Alors, pour tout  $x \in X$ , l'application  $g_x$  admet un unique point fixe  $\varphi(x)$  et l'application  $X \rightarrow Y, x \mapsto \varphi(x)$  est continue.

Démonstration. On rappelle tout d'abord la version élémentaire du théorème : si  $(Y, d)$  est un espace métrique complet et  $g : Y \rightarrow Y$  est une application  $a$ -lipschitzienne, alors  $g$  admet un unique point fixe. En effet, soit  $y_0 \in Y$ . Montrons que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence par  $y_{n+1} = g(y_n)$  est de Cauchy. Quels que soient  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ ,

$$d(y_n, y_m) = d(g^m(g^{n-m}(y_0)), g^m(y_0)) \leq a^m d(g^{n-m}(y_0), y_0).$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} d(g^{n-m}(y_0), y_0) &\leq \sum_{j=1}^{n-m} d(g^j(y_0), g^{j-1}(y_0)) \leq \sum_{j=1}^{n-m} a^{j-1} d(g(y_0), y_0) \\ &\leq \frac{1 - a^{n-m}}{1 - a} d(g(y_0), y_0) \leq \frac{1}{1 - a} d(g(y_0), y_0). \end{aligned}$$

D'où

$$d(y_n, y_m) \leq \frac{a^m}{1 - a} d(g(y_0), y_0),$$

ce qui montre que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Comme  $Y$  est complet, cette suite est convergente. Appelons  $y$  sa limite. Par continuité de  $g$ , on a

$$g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = y,$$

ce qui montre que  $y$  est un point fixe de  $g$ . Ce point fixe est clairement unique, car si  $y_1 \neq y$  est un autre point fixe,

$$d(y_1, y) = d(g(y_1), g(y)) \leq a d(y_1, y),$$

ce qui est impossible.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème de Banach avec paramètre. D'après ce qui précède,  $g_x$  admet un unique point fixe  $\varphi(x)$ . Il s'agit de montrer que  $\varphi : X \rightarrow Y$  est continue. On a, quels que soient  $x_1, x_2 \in X$ ,

$$\begin{aligned} d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) &\leq d(g(x_1, \varphi(x_1)), g(x_2, \varphi(x_2))) \\ &\leq d(g(x_1, \varphi(x_1)), g(x_2, \varphi(x_1))) + d(g(x_2, \varphi(x_1)), g(x_2, \varphi(x_2))) \\ &\leq d(g(x_1, \varphi(x_1)), g(x_2, \varphi(x_1))) + a d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)), \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - a) d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq d(g(x_1, \varphi(x_1)), g(x_2, \varphi(x_1))).$$

De la continuité de  $x \mapsto g(x, y)$  pour  $y$  fixé, on déduit la continuité de  $x \mapsto \varphi(x)$ . □

## VIII.5.2 Théorème des fonctions implicites

Nous renvoyons à la section [VIII.3.4](#) pour les notations concernant les différentielles partielles.

**Théorème VIII.5.2** (fonctions implicites).

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$ ,  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $F$ ,  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , de  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  dans  $G$  et  $(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  tel que la différentielle partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  soit un isomorphisme bicontinu de  $F$  dans  $G$ . Alors il existe un ouvert  $\mathcal{U}_0$  de  $\mathcal{U}$  contenant  $x_0$ , un ouvert  $\mathcal{V}_0$  de  $\mathcal{V}$  contenant  $y_0$  et une application  $\varphi$ , définie sur  $\mathcal{U}_0$  à valeurs dans  $\mathcal{V}_0$  telle que :

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \forall (x, y) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0, f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ si et seulement si } y = \varphi(x).$$

En outre, sur tout ouvert convexe  $\mathcal{U}_0$  de  $\mathcal{U}$  contenant  $x_0$ , il existe au plus une application continue  $\varphi$  vérifiant les deux conditions précédentes.

L'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , et sa différentielle est donnée par

$$d\varphi_x = \left( -\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

Démonstration. On applique le théorème de point fixe de Banach en écrivant l'équation  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  sous la forme  $y = g(x, y)$ , où

$$g(x, y) = y - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y) - f(x_0, y_0)).$$

L'application  $g : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $g(x_0, y_0) = y_0$  et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \text{Id} - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par continuité de  $\frac{\partial g}{\partial y}$ , il existe  $r_0 > 0$  et  $s > 0$  tels que  $\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s) \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V}$  et  $\|\frac{\partial g}{\partial y}\| \leq \frac{1}{2}$  sur  $\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$ . On peut aussi supposer que  $\|\frac{\partial f}{\partial x}\|$  est bornée sur  $\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$ , disons  $\|\frac{\partial f}{\partial x}\| \leq M$ .

On adopte les notations du théorème VIII.5.1, en particulier  $g_x$  est l'application  $y \mapsto g(x, y)$  de  $\mathcal{V}$  dans  $G$ . Pour tout  $(x, y) \in \bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$ ,  $d(g_x)_y = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  et d'après l'inégalité des accroissements finis,  $g_x$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Soient  $r \leq r_0$ ,  $x \in \bar{B}(x_0, r)$  et  $y \in \bar{B}(y_0, s)$ . On a

$$\begin{aligned} \|g_x(y) - y_0\| &= \|g_x(y) - g_{x_0}(y_0)\| \leq \|g_x(y) - g_x(y_0)\| + \|g_x(y_0) - g_{x_0}(y_0)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y - y_0\| + \left\| \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \right\| \leq \frac{s}{2} + \left\| \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \right\| Mr. \end{aligned}$$

Prenons  $r = \min(r_0, \frac{s}{2M\|\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}\|})$ , de sorte que  $g_x(\bar{B}(y_0, s)) \subset \bar{B}(y_0, s)$ .

Comme toute boule fermée d'un espace de Banach est un espace métrique complet, le théorème du point fixe s'applique à

$$g : \bar{B}(x_0, r) \times \bar{B}(y_0, s) \rightarrow \bar{B}(y_0, s).$$

On en déduit que  $g_x$  à un unique point fixe  $\varphi(x)$ , et que  $x \mapsto \varphi(x)$  est continue de  $\bar{B}(x_0, r)$  dans  $\bar{B}(y_0, s)$ . De plus,  $\varphi$  est à valeurs dans  $\bar{B}(y_0, s)$  et vérifie  $\varphi(x_0) = y_0$  par unicité.

On pose donc  $\mathcal{U}_0 = B(x_0, r)$  et  $\mathcal{V}_0 = B(y_0, s)$ , ce qui achève la démonstration de la première assertion.

L'application  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$  de  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{L}(F, G)$  est continue et en  $x_0$  elle est à valeurs dans l'ouvert  $\text{Iso}(F, G)$  de  $\mathcal{L}(F, G)$  des isomorphismes bicontinus entre  $F$  et  $G$ . Quitte à réduire  $\mathcal{U}_0$ , on peut supposer que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$  est un isomorphisme bicontinu entre  $F$  et  $G$  pour tout  $x \in \mathcal{U}_0$ .

Soient  $(x, y) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$  fixé et  $(h, w) \in E \times F$  suffisamment petit, de sorte que  $(x + h, y + w) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$ . Puisque  $f$  est de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\psi(h, w) = f(x + h, y + w) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(w)$$

vérifie  $\|\psi(h, w)\| = o(\|(h, w)\|)$ .

Appliquons ceci à  $y = \varphi(x)$  et  $w = \varphi(x + h) - \varphi(x)$ . Comme  $f(x + h, \varphi(x + h)) - f(x, \varphi(x)) = 0$ , on obtient

$$\psi(h, \varphi(x + h) - \varphi(x)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))(h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(\varphi(x + h) - \varphi(x)).$$

En appliquant  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1}$ , on en déduit

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))(h)\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \psi(h, \varphi(x + h) - \varphi(x))$$

Comme  $\|\psi(h, w)\| = o(\|(h, w)\|)$ , on a

(\*) : pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

si  $\|h\| + \|\varphi(x + h) - \varphi(x)\| < \delta$ , alors  $\|\psi(h, \varphi(x + h) - \varphi(x))\| \leq \eta(\|h\| + \|\varphi(x + h) - \varphi(x)\|)$ .

Notons  $M_1$  et  $M_2$  respectivement les normes des applications linéaires  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))$ .

Si  $\|h\| + \|\varphi(x + h) - \varphi(x)\| < \delta$ , on obtient

$$\|\varphi(x + h) - \varphi(x)\| \leq M_1 M_2 \|h\| + M_2 \eta (\|h\| + \|\varphi(x + h) - \varphi(x)\|).$$

Choisissons  $\eta = \frac{1}{2M_2}$ . On a alors

$$\|\varphi(x + h) - \varphi(x)\| \leq (2M_1 M_2 + 1)\|h\|$$

dès que  $\|h\| + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \delta$ , ce qui se produit, par continuité de  $\varphi$ , dès que  $\|h\|$  est suffisamment petit, disons  $\|h\| < \delta_1$ .

Pour  $\|h\| < \delta_1$ , on a alors  $\|h\| + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq (2M_1M_2 + 2)\|h\|$ . Réinjectons ceci dans (\*), pour obtenir l'assertion suivante

(\*\*) : pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que

si  $\|h\| < \delta_2$ , alors  $\|\psi(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))\| \leq \eta(\|h\| + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|) \leq \eta(2M_1M_2 + 2)\|h\|$ .

Finalement, en écrivant

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))(h)\right)\| = \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \psi(h, \varphi(x+h) - \varphi(x)) \right\|,$$

on conclut que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que si  $\|h\| < \delta_2$ , alors

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))(h)\right)\| \leq \eta M_2(2M_1M_2 + 2)\|h\|.$$

Autrement dit,  $\varphi$  est différentiable en  $x$ , et

$$d\varphi_x = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

Comme  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))$  et  $\varphi$  sont continues, ceci implique que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ . Si  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , on en déduit facilement par récurrence que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^p$  grâce au théorème de différentiabilité d'une fonction composée.  $\square$

### VIII.5.3 Théorèmes d'inversion locale et globale

L'énoncé du théorème d'inversion locale fait appel à la notion de  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme entre ouverts d'espaces de Banach.

#### Définition VIII.5.3.

Soit  $f$  une application de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{V}$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert d'un espace de Banach réel  $E$  et  $\mathcal{V}$  un ouvert d'un espace de Banach  $F$ . On dit que  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si  $f$  est une bijection de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{V}$ , de classe  $\mathcal{C}^k$ , ainsi que  $f^{-1}$ .

Le théorème d'inversion locale est l'énoncé suivant, que nous déduisons du théorème des fonctions implicites.

#### Théorème VIII.5.4 (Théorème d'inversion locale).

Soit  $f$  une application de  $\mathcal{U}$  dans  $F$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert d'un espace de Banach réel et  $F$  un espace de Banach et soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{U}$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  et si la différentielle de  $f$  au point  $x_0$  est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_0$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_0$  de  $f(x_0)$  tels que  $f$  se restreigne en un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{V}_0$ .

Démonstration. On considère  $g : F \times \mathcal{U} \rightarrow E$ ,  $g(y, x) = f(x) - y$ . Par construction  $g(x, y) = 0$  équivaut à  $f(x) = y$ . L'application  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et l'on a  $g(f(x), x) = 0$ . De plus  $\frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0), x_0) = df_{x_0}$  est un isomorphisme, et donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_1$  de  $(f(x_0), x_0)$  dans  $F \times \mathcal{U}$  et une application  $\varphi : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tels que

$$\{(y, x) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_1 \mid f(x) = y\} = \{(y, \varphi(y)) \mid y \in \mathcal{V}_0\}.$$

On pose alors  $\mathcal{U}_0 = \varphi^{-1}(\mathcal{V}_0)$  : c'est un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$  et  $f$  induit une bijection de  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{V}_0$  d'inverse  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^p$ .  $\square$

**Corollaire VIII.5.5** (Théorème d'inversion globale).

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathcal{U}$  dans  $F$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert d'un espace de Banach réel et  $F$  un espace de Banach. Si  $f$  est injective et si pour tout  $x$  de  $\mathcal{U}$  la différentielle  $df_x$  de  $f$  au point  $x$  est un isomorphisme bicontinu, alors  $f(\mathcal{U})$  est un ouvert et la bijection réciproque, de  $f(\mathcal{U})$  dans  $\mathcal{U}$ , est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

## VIII.6 Equations différentielles

Nous allons énoncer et démontrer dans cette section les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles dont nous avons besoin dans le texte. Nous adoptons une terminologie à caractère géométrique (champ de vecteurs, courbes intégrales, etc).

### VIII.6.1 Champs de vecteurs et courbes intégrales

**Définition VIII.6.1.**

On appelle **champ de vecteurs** sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  une application continue

$$X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^N.$$

On appelle **courbe intégrale** de classe  $\mathcal{C}^p$ , du champ de vecteurs  $X$  une courbe paramétrée  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0, telle que pour tout  $t \in J$ ,  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ . Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale**  $x_0 \in \mathcal{U}$  si  $\alpha(0) = x_0$ .

Nous avons imposé que 0 soit dans l'intervalle de définition des courbes intégrales pour simplifier les énoncés concernant les conditions initiales. Ce choix est purement conventionnel, et bien entendu aucune perte de généralité n'en découle.

**Définition VIII.6.2.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Un **flot local** en  $x_0$  de  $X$  est la donnée d'un voisinage ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$ , d'un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et d'une application  $F : J \times \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{U}'$ , la courbe paramétrée

$$\alpha_x : J \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto F(t, x)$$

soit une courbe intégrale de  $X$  de condition initiale  $x$ .

**Remarque VIII.6.3.** L'intervalle de définition  $J$  de la courbe intégrale  $\alpha_x$  est indépendant de  $x \in \mathcal{U}$ .

**VIII.6.2 Existence et unicité d'un flot local****Théorème VIII.6.4.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Supposons que  $X$  soit localement lipschitzien (c'est-à-dire que pour tout  $x_0 \in \mathcal{U}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$  et une constante  $k \geq 0$  telle que  $X$  soit  $k$ -lipschitzien sur  $\mathcal{U}_1$ ). Soit  $x_0 \in \mathcal{U}$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant 0 et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$ , tels qu'il existe un et un seul flot local en  $x_0$  défini et continu sur  $J \times \mathcal{U}'$ .

Si le champ de vecteurs  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors  $F$  aussi.

Démonstration. Quitte à restreindre  $\mathcal{U}$ , on peut supposer que  $X$  est  $k$ -lipschitzien sur  $\mathcal{U}$ . On cherche une application  $F(t, x)$  définie sur  $J \times \mathcal{U}'$ , vérifiant

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = X(F(t, x)) \quad \text{et} \quad F(0, x) = x.$$

Ceci équivaut à

$$(VIII.6.1) \quad F(t, x) = x + \int_0^t X(F(s, x)) \, ds.$$

Nous allons trouver une telle application  $F$  comme point fixe d'un opérateur grâce au théorème de Banach [VIII.5.1](#).

Supposons dans un premier temps  $k > 0$ . Soit  $a > 0$  tel que  $\bar{B}(x_0, 2a) \subset \mathcal{U}$ . Posons  $\ell = \sup_{x \in \bar{B}(x_0, 2a)} \|X(x)\|$ . Soit  $b > 0$ ,  $b < \inf(\frac{a}{\ell}, \frac{1}{k})$ . Montrons l'existence et l'unicité d'un flot local en  $x_0$  défini sur  $J \times \mathcal{U}' = ]-b; b[ \times B(x_0, a)$ .

Pour cela, introduisons pour tout  $x \in B(x_0, a)$ , l'opérateur

$$S_x : \phi \mapsto S_x(\phi), \quad S_x(\phi)(t) = x + \int_0^t X(\phi(s)) \, ds,$$

agissant sur les fonctions continues  $\phi$  de  $J$  dans  $\mathcal{U}$ . Un point fixe  $\phi_x$  de  $S_x$  donne une solution de [\(VIII.6.1\)](#) en posant  $F(t, x) = \phi_x(t)$ , et réciproquement. Il nous faut chercher



un espace fonctionnel stable par  $S_x$ , qui soit un espace métrique complet, pour pouvoir appliquer le théorème de Banach.

Munissons  $\mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a))$  de la norme de la convergence uniforme sur le compact  $[-b; b]$ , notée  $\|\cdot\|_\infty$  : c'est un espace de Banach. Il est clair que l'application  $t \mapsto S_x(\phi)(t)$  est définie et continue pour toute application  $\phi \in \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a))$  et que  $S_x(\phi)(0) = x$ . Montrons que  $S_x(\phi)(t) \in \bar{B}(x_0, 2a)$ . On a

$$\begin{aligned} \|S_x(\phi)(t) - x_0\| &= \|x - x_0 + \int_0^t X(\phi(s)) \, ds\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \int_0^t \|X(\phi(s))\| \, ds \leq a + b\ell \leq 2a. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est le fait que l'on a choisi  $b < \frac{a}{\ell}$ .

Ainsi  $S_x$  envoie  $\mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a))$  dans lui-même. Montrons maintenant que  $S_x$  est une application contractante. Soient  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a))$ .

$$\begin{aligned} \|S_x(\phi_1) - S_x(\phi_2)\|_\infty &= \sup_{t \in [-b; b]} \left\| \int_0^t X(\phi_1(s)) - X(\phi_2(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in [-b; b]} \int_0^t \|X(\phi_1(s)) - X(\phi_2(s))\| \, ds. \end{aligned}$$

Or,  $X$  est  $k$ -lipschitzien, donc pour tout  $s \in [-b; b]$ ,

$$\|X(\phi_1(s)) - X(\phi_2(s))\| \leq k \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| \leq k \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\|S_x(\phi_1) - S_x(\phi_2)\|_\infty \leq kb \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.$$

Comme on a choisi  $b < \frac{1}{k}$ ,  $S_x$  est contractante.

Les conditions d'application du théorème de Banach sont donc vérifiées pour l'application :

$$S : B(x_0, a) \times \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a)) \rightarrow \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a)), \quad (x, \phi) \mapsto S_x(\phi).$$

Pour tout  $x \in B(x_0, a)$ , il existe un point fixe  $\alpha_x$  de  $S_x$ . D'autre part  $S_x(\alpha_x)(0) = \alpha_x(0) = x$ . Posons

$$F(t, x) = \alpha_x(t).$$

Il est clair que  $F$  vérifie (VIII.6.1). Comme d'après le théorème de Banach,  $x \mapsto \alpha_x$  est continue de  $B(x_0, a)$  dans  $\mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a))$ , et que l'application d'évaluation

$$[-b; b] \times \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a)) \rightarrow \bar{B}(x_0, 2a), \quad (t, \phi) \mapsto \phi(t)$$

est elle-aussi évidemment continue,  $F$  est définie et continue sur  $[-b; b] \times B(x_0, 2a)$  et est un flot local en  $x_0$ . Les applications  $\alpha_x : ]-b; b[ \rightarrow \mathcal{U}$  sont des courbes intégrales de  $X$ .

Si  $k = 0$ , le champ  $X$  est constant, disons  $X(x) = v$  pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , et si  $b < \frac{a}{\ell}$ , il existe un et un seul flot local en  $x_0$  défini et continu sur  $]-b; b[ \times B(x_0, a)$ , à savoir

$$F(t, x) = x + tv.$$

Pour la dernière assertion concernant la régularité du flot local, nous renvoyons le lecteur à [8]. Remarquons simplement que si le champ est  $\mathcal{C}^1$ , il est localement lipschitzien d'après le théorème des accroissements finis.  $\square$

#### Corollaire VIII.6.5.

La démonstration du théorème établit l'existence et l'unicité locale des courbes intégrales avec condition initiale : étant donné  $x_0 \in \mathcal{U}$ , il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant 0, tel qu'il existe une et une seule courbe intégrale définie sur  $J$  de condition initiale  $x_0$ .

### VIII.6.3 Flot global

Nous nous intéressons maintenant au problème du prolongement des courbes intégrales.

#### Proposition VIII.6.6.

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , définies respectivement sur des intervalles ouverts  $J_1$  et  $J_2$  contenant 0, des courbes intégrales de  $X$  ayant même condition initiale. Alors elles coïncident sur  $J_1 \cap J_2$ .

Démonstration. L'ensemble  $A$  des points  $t$  de  $J_1 \cap J_2$  tels que  $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$  est fermé dans  $J_1 \cap J_2$  par continuité. Il est ouvert d'après le corollaire VIII.6.5. Comme  $J_1 \cap J_2$  est un intervalle ouvert non vide, donc connexe, on a  $A = J_1 \cap J_2$ .  $\square$

#### Définition VIII.6.7.

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $x_0 \in \mathcal{U}$ . Définissons  $J(x_0)$  comme l'union de tous les intervalles ouverts  $J$  contenant 0 tels qu'il existe une courbe intégrale  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$  de condition initiale  $x_0$ . La proposition montre qu'il existe une unique courbe intégrale  $\alpha_{x_0}$  de condition initiale  $x_0$  définie sur  $J(x_0)$ . On appelle cette courbe intégrale la **courbe intégrale maximale** de  $X$  de condition initiale  $x_0$ .

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ , on note  $I + c$  l'intervalle  $\{t \in \mathbb{R}; t - c \in I\}$ .

**Théorème VIII.6.8.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $x_0 \in \mathcal{U}$  et  $\alpha$  la courbe intégrale maximale de condition initiale  $x_0$  définie sur l'intervalle  $J(x_0)$ . Soit  $t_1 \in J(x_0)$ . Alors la courbe intégrale

$$\beta : J(x_0) - t_1 \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto \beta(t) = \alpha(t + t_1)$$

est la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x_1 = \alpha(t_1)$ .

*Démonstration.* Il est évident que  $\beta$  est une courbe intégrale de  $X$  de condition initiale  $x_1$  et tout aussi évident qu'elle est maximale, puisque  $\alpha$  l'est.  $\square$

**Définition VIII.6.9.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Posons

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \mid t \in J(x)\}.$$

L'application

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}, \quad F(t, x) = \alpha_x(t)$$

où  $\alpha_x$  est la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x$ , définie sur  $J(x)$ , est appelée **flot global** de  $X$ , et  $\mathcal{D}$  est son domaine de définition

**Remarque VIII.6.10.** Reformulons le théorème VIII.6.8, en posant pour tout  $(t, x) \in \mathcal{D}$ ,

$$G_t \cdot x = \alpha_x(t) = F(t, x).$$

où  $\alpha_x$  la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x$ . On a alors, lorsque  $(t, x)$  et  $(s, G_t \cdot x)$  sont dans  $\mathcal{D}$ ,

$$(VIII.6.2) \quad G_s \cdot (G_t \cdot x) = G_{t+s} \cdot x.$$

Si  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ ,  $G_t$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $t \mapsto G_t$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe des bijections de  $\mathcal{U}$ .

**Théorème VIII.6.11.**

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ . Alors :

- a.  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ .
- b.  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathcal{D}$ .

Démonstration. Soit  $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ . Nous allons montrer qu'il existe un voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$  inclus dans  $\mathcal{D}$  où  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . Remarquons que si  $t_0 = 0$ , le théorème d'existence d'un flot local montre qu'un tel voisinage existe.

Introduisons l'ensemble  $A$  des  $s \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $s$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$  vérifiant

- (i)  $J \times \mathcal{U}' \subset \mathcal{D}$ .
- (ii)  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $J \times \mathcal{U}'$ .

Posons

$$Q_{x_0} = \{t \in J(x_0) \cap \mathbb{R}_+ ; [0; t] \subset A\}.$$

Nous voulons établir que  $Q_{x_0} = J(x_0) \cap \mathbb{R}_+$ . Nous avons déjà remarqué que  $0 \in Q_{x_0}$ ; en particulier  $Q_{x_0}$  est non vide. On voit donc que  $Q_{x_0}$  est un intervalle commençant en 0. Soit  $b$  sa borne supérieure (éventuellement  $+\infty$ ). Si  $b = +\infty$ , a fortiori la borne supérieure de  $J(x_0)$  est aussi  $+\infty$ . Supposons  $b$  fini. Montrons que  $b$  est aussi la borne supérieure de  $J(x_0)$ . En effet, dans le cas contraire,  $b \in J(x_0)$ . Il existe alors un flot local  $F_1$  en  $x_1 = F(b, x_0)$ , défini sur  $] -a; a[ \times \mathcal{U}_1$ , où  $\mathcal{U}_1$  est un voisinage ouvert de  $x_1$  dans  $\mathcal{U}$ . Il existe  $\eta$  tel que si  $t_2 \in ]b - \eta; b[$ , alors  $x_2 = F(t_2, x_0) \in \mathcal{U}_1$ . Prenons  $t_2$  dans l'intervalle  $] \max(b - a, b - \eta); b[$ . On a alors  $t_2 \in Q_{x_0}$  et il existe un intervalle  $J_2$  contenant  $t_2$  et un ouvert  $\mathcal{U}_2$  de  $\mathcal{U}$  contenant  $x_0$  tels que  $J_2 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{D}$  et  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $J_2 \times \mathcal{U}_2$ . Comme  $x_2 = F(t_2, x_0) \in \mathcal{U}_1$ , et que  $x \mapsto F(t_2, x)$  est continue, en restreignant au besoin  $J_2$  et  $\mathcal{U}_2$ , on peut supposer que  $F(t_2, x) \in \mathcal{U}_1$  pour tout  $x \in \mathcal{U}_2$ . Il existe une courbe intégrale de condition initiale  $F(t_2, x)$  définie sur  $] -a; a[$  par  $\tau \mapsto F_1(\tau, F(t_2, x))$ . Donc pour  $t \in ] -a + t_2; a + t_2[$ ,  $t - t_2 \in ] -a; a[$  et  $t \mapsto F_1(t - t_2, F(t_2, x))$  est une courbe intégrale qui passe par  $F(t_2, x)$  en  $t_2$ . Ainsi  $F$  est définie sur  $] -a + t_2; a + t_2[ \times \mathcal{U}_2$  (unicité locale). L'intervalle  $I_2 = ] -a + t_2; a + t_2[$  contient  $b$ , car  $t_2 \geq b - a$ , et pour tout  $t \in I_2$ , pour tout  $x \in \mathcal{U}_2$ ,  $F(t, x)$  est défini, donc  $I_2 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{D}$ . De plus  $F$  coïncide avec  $F_1$  sur  $I_2 \times \mathcal{U}_2$ , donc est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur cet ouvert. Il en résulte que  $]b; t_2 + a[ \subset Q_{x_0}$ , ce qui contredit la définition de  $b$ . Donc  $b = \sup J(x_0)$ .

On raisonne de même avec

$$P_{x_0} = \{t \in J(x_0) \cap \mathbb{R}_- \mid [t; 0] \subset A\}$$

et les bornes inférieures, pour aboutir à la conclusion que

$$Q_{x_0} \cup P_{x_0} = J(x_0).$$

Le théorème est conséquence immédiate de ce résultat. □

## VIII.6.4 Champs de vecteurs dépendant du temps

Généralisons les définitions de champs de vecteurs et de courbes intégrales.

**Définition VIII.6.12.**

On appelle **champ de vecteurs dépendant du temps** sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  une application continue

$$X : I \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0. On appelle **courbe intégrale** de classe  $\mathcal{C}^p$ , du champ de vecteurs  $X$  une courbe paramétrée  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  définie sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenu dans  $I$  et contenant 0, telle que pour tout  $t \in J$ ,  $\alpha'(t) = X(t, \alpha(t))$ . Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale**  $x_0 \in \mathcal{U}$  si  $\alpha(0) = x_0$ .

La définition de flot local en  $x_0 \in \mathcal{U}$  reste inchangée. Les théorèmes d'existence et d'unicité des flots se déduisent de ceux établis dans la section précédente, comme suit. Définissons

$$X_1 : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (t, x) \mapsto (1, X(t, x)).$$

Alors  $X_1$  est un champ de vecteurs sur l'ouvert  $I \times \mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Si  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , il en est de même de  $X_1$ . Si on suppose  $X$  de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $X_1$  admet en tout point un unique flot local  $F_1$  de classe  $\mathcal{C}^p$ , d'après le théorème VIII.6.4.

Soient  $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$  et  $F_1$  un flot local en  $(t_0, x_0)$ , défini sur  $J \times I' \times \mathcal{U}'$ , où  $I'$  est un intervalle contenant  $t_0$  et contenu dans  $I$ , et  $\mathcal{U}'$  est un ouvert contenant  $x_0$  et contenu dans  $\mathcal{U}$ . Notons  $\beta$  et  $\bar{F}$  les projections de  $F_1$  sur  $I$  et  $\mathcal{U}$  respectivement, de sorte que pour tout  $(s, t, x) \in J \times I' \times \mathcal{U}'$ , on ait  $F_1(s, t, x) = (\beta(s, t, x), \bar{F}(s, t, x))$ . Alors, pour tout  $(s, t, x) \in J \times I' \times \mathcal{U}'$ , on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial s}(s, t, x) = \left( \frac{\partial \beta}{\partial s}(s, t, x), \frac{\partial \bar{F}}{\partial s}(s, t, x) \right) = X_1(s, F_1(s, t, x)) = (1, X(F_1(s, t, x))),$$

et

$$F_1(0, (t, x)) = (\beta(0, t, x), \bar{F}(0, t, x)) = (t, x).$$

De ceci, on déduit que pour tout  $(s, t, x) \in J \times I' \times \mathcal{U}'$ ,  $\beta(s, t, x) = s + t$  et

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial s}(s, t, x) = X(s + t, \bar{F}(s, t, x)), \quad \bar{F}(0, t, x) = x.$$

Prenons maintenant  $t_0 = 0$ , de sorte que  $I'$  contienne 0. Posons pour tout  $(s, x) \in J \times \mathcal{U}'$ ,  $F(s, x) = \bar{F}(s, 0, x)$ . On a alors pour tout  $(s, x) \in J \times \mathcal{U}'$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = X(s, F(s, x)), \quad F(0, x) = x.$$

ce qui montre que  $F$  est un flot local de  $X$  en  $x_0$ . Ce flot est au moins aussi régulier que  $F_1$ , donc de classe  $\mathcal{C}^p$ .

Une courbe intégrale  $s \mapsto \alpha(s)$  de  $X$  définie sur  $J$  et de condition initiale  $x \in \mathcal{U}'$  donne une courbe intégrale de  $X_1$ ,  $s \mapsto \alpha_1(s) = (s, \alpha(s))$  de condition initiale  $(0, x)$ . L'unicité de  $\alpha_1$  donne l'unicité de  $\alpha$ . Nous avons donc établi :

**Théorème VIII.6.13.**

Soient  $X : I \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^N$  un champ de vecteurs dépendant du temps de classe  $\mathcal{C}^p$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $x_0 \in \mathcal{U}$ . Alors il existe un intervalle  $J$  ouvert contenant 0 et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}'$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{U}$  tels qu'il existe un et un seul flot local en  $x_0$  défini sur  $J \times \mathcal{U}'$ . Si le champ de vecteurs  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , alors  $F$  aussi.

La proposition VIII.6.6 reste valable sans modification pour les champs de vecteurs dépendant du temps grâce au théorème qui précède. On peut donc définir de la même manière les courbes intégrales maximales de  $X$  de condition initiale  $x_0$ , définie sur un intervalle  $J(x_0)$ . La définition du flot global sur son domaine de définition  $\mathcal{D}$  est elle-aussi inchangée, ainsi que le théorème VIII.6.11.

En revanche, le théorème VIII.6.8 et la formule (VIII.6.2) ne sont plus valides. En effet, si  $t \mapsto \alpha(t)$  est une courbe intégrale de  $X$ , il n'en est plus de même de  $t \mapsto \beta(t) = \alpha(t + t_0)$ . Il est facile de vérifier que  $\beta$  est une courbe intégrale pour le champ de vecteurs  $(t, x) \mapsto X(t + t_0, x)$ .

**Exercice VIII.6.14.** Si l'on définit

$$G_t^s \cdot x = F(t + s, x)$$

où  $F$  est le flot global de  $X$ , montrer que la formule qui généralise (VIII.6.2) est

$$G_{t+s}^r \cdot x = G_t^{r+s} \cdot (G_s^r \cdot x)$$

où l'on suppose que toutes les opérations à effectuer sont bien définies.

# Chapitre IX

## Rappels de topologie et d'analyse

### IX.1 Connexité

Un espace topologique  $X$  est **connexe** si toute application continue  $f$  de  $X$  dans  $\{0, 1\}$  (muni de la topologie discrète) est constante. Comme les singletons  $\{0\}$  et  $\{1\}$  sont des ouverts de  $\{0, 1\}$ , si  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  est continue,  $f^{-1}(\{0\})$  et  $f^{-1}(\{1\})$  sont des ouverts disjoints de  $X$ . Si  $f$  est non constante, elle est surjective, et l'on a donc

$$X = f^{-1}(\{0\}) \coprod f^{-1}(\{1\})$$

union disjointe de deux ouverts non vides. Donc si  $X$  n'est pas connexe, il est union disjointe de deux ouverts non vides. Réciproquement, si  $X$  est union disjointe de deux ouverts non vides, disons  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ , alors l'application  $f$  qui vaut 0 sur  $\mathcal{U}$  et 1 sur  $\mathcal{V}$  est continue, et  $X$  n'est pas connexe.

Un espace topologique  $X$  est **connexe par arcs** si pour tout couple de points  $(x, y) \in X \times X$ , il existe une application continue  $f : [0; 1] \rightarrow X$  telle que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .

**Exercice IX.1.1.** Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.

**Exercice IX.1.2.** Soient  $X$  un espace topologique,  $Y$  et  $Z$  deux parties connexes de  $X$ . Si leur intersection est non vide, montrer que leur réunion est connexe. Plus généralement si  $(X_\alpha)_\alpha$  est une famille quelconque de parties connexes de  $X$ , et si leur intersection est non vide, montrer que leur réunion est connexe.

Montrer les assertions obtenues en remplaçant connexe par connexe par arcs.

Étant donné un point  $x$  dans un espace topologique  $X$ , la réunion de toutes les parties connexes contenant  $x$  est connexe. C'est la plus grande (au sens de la relation d'inclusion) de toutes les parties connexes contenant  $x$ . On la note  $C_x$  et on l'appelle **composante connexe** de  $x$  dans  $X$ . Les composantes connexes sont des parties fermées, car l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Au minimum, on a  $C_x = \{x\}$ ; cela signifie que  $\{x\}$  est le seul sous-ensemble connexe de  $X$  contenant  $x$  mais pas forcément que  $x$  est un point isolé. Au maximum, on a  $C_x = X$ ; c'est le cas où  $X$  est connexe.

Les composantes connexes des points de  $X$  sont donc les parties connexes maximales pour l'inclusion (il n'y en a qu'une si l'espace est connexe). Elles forment une partition de  $X$ , autrement dit : ce sont les classes d'une relation d'équivalence sur  $X$ .

**Exemples IX.1.3.**

1.  $\mathbb{R}^\times$  a deux composantes connexes :  $\mathbb{R}_+^\times$  et  $\mathbb{R}_-^\times$ .
2. Dans  $\mathbb{N}$  et plus généralement dans un espace muni de la topologie discrète, les composantes connexes sont les singletons.
3. Dans  $\mathbb{Q}$  aucun point n'est isolé, mais les composantes connexes sont aussi les singletons. Le même phénomène se produit pour l'ensemble de Cantor.
4. Le groupe  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  des matrices inversibles de taille  $n$  a deux composantes connexes, données par le signe du déterminant.

On peut, de la même manière, définir les composantes connexes par arcs d'un espace topologique  $X$

Un espace topologique  $X$  est **localement connexe** (resp. **localement connexe par arcs**) si pour tout point  $x \in X$ , tout voisinage de  $x$  contient un voisinage connexe de  $x$  (resp. connexe par arcs). Par exemple, l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est localement connexe par arcs. D'après l'exercice qui précède, un espace localement connexe par arcs est localement connexe.

Dans un espace localement connexe (resp. localement connexe par arcs), les composantes connexes (resp. les composantes connexes par arcs), sont ouvertes. En effet, pour tout point  $x$  d'une telle composante  $U$ , il existe un ouvert contenant  $x$  et connexe (resp. connexe par arcs), donc inclus dans  $U$ .

Tout espace connexe et localement connexe par arcs (par exemple : tout ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$  est (globalement) connexe par arcs. En effet, si  $U$  est une composante connexe par arcs d'un tel espace  $X$  (non vide) alors, d'après la propriété précédente,  $U$  est ouvert, et son complémentaire (réunion des autres composantes connexes par arcs) aussi, si bien que  $U$  est un ouvert-fermé non vide du connexe  $X$  donc est égal à  $X$ .

## IX.2 Homéomorphismes

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux espaces topologiques.

On dit que  $f$  est un **homéomorphisme** si  $f$  est une bijection continue entre  $X$  et  $Y$  dont l'inverse  $f^{-1}$  est continue.

On dit que  $f$  est un **plongement** si c'est un homéomorphisme sur son image  $f(X)$  (celle-ci étant munie de la topologie induite de  $Y$ ). En particulier  $f$  est injective.

## IX.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici l'énoncé du théorème d'Ascoli-Arzelà. Pour une démonstration, nous renvoyons au cours de première année de F. Pacard ([7], théorème 4.10).



**Théorème IX.3.1** (Théorème d'Ascoli-Arzelà).

On suppose que  $(X; d)$  est un espace métrique compact, que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; \mathbb{R}^N)$  est une famille équicontinue sur  $X$  et que pour tout  $x \in X$ , l'ensemble

$$\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

est borné. Alors, de toute suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  on peut extraire une sous-suite qui converge dans  $\mathcal{C}(X; \mathbb{R}^N)$  (pour la norme de la convergence uniforme).

## IX.4 Nombre de Lebesgue d'un recouvrement

**Proposition IX.4.1.**

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^N$ , et soit  $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$  un recouvrement de  $K$  par des ouverts  $\mathcal{U}_i$ . Alors il existe  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante : pour tout  $k \in K$ , il existe  $i \in I$  tel que  $\bar{B}(k, \delta) \subset \mathcal{U}_i$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , soit  $F_n$  l'ensemble des  $k \in K$  tels qu'il n'existe pas de  $i \in I$  vérifiant  $\bar{B}(k, \frac{1}{n}) \subset \mathcal{U}_i$ . C'est une suite décroissante de parties de  $K$ , et si la conclusion de la proposition est fausse,  $F_n$  est non vide pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Soit alors  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$  une suite de points de  $K$  telle que  $k_n \in F_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Cette suite admet une valeur d'adhérence dans le compact  $K$ , et quitte à extraire une sous-suite, on peut tout aussi bien supposer que  $k_n$  admet une limite  $k$  dans  $K$ .

Soit  $i \in I$  tel que  $k \in \mathcal{U}_i$ , et soit  $\epsilon$  tel que  $\bar{B}(k, \epsilon) \subset \mathcal{U}_i$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}^\times$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $k_n \in \bar{B}(k, \epsilon/3)$ . On a donc pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\bar{B}(k_n, \epsilon/3) \subset \mathcal{U}_i$ . Or  $k_n \in F_n$ , donc  $\bar{B}(k_n, \frac{1}{n})$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{U}_i$ , d'où nécessairement  $\frac{1}{n} > \epsilon/3$ . On aboutit à une contradiction pour  $n$  assez grand.  $\square$

On appelle un nombre  $\delta$  vérifiant la propriété de la proposition un **nombre de Lebesgue** du recouvrement  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ .



# Chapitre X

## Problèmes

### Devoir à la maison

à rendre le 07/06/2013

**Exercice I.** On note  $p : t \mapsto (\cos t, \sin t)$  la projection standard de  $\mathbb{R}$  sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Soient  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  du cercle dans lui-même,  $\bar{f} = f \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $\bar{f}$ .

1. Montrer que pour presque tout  $y \in \mathbb{S}^1$ , si  $t \in \mathbb{R}$  est tel que  $\bar{f}(t) = y$ , alors  $\tilde{f}'(t) \neq 0$ .
2. Fixons  $y \in \mathbb{S}^1$  vérifiant la propriété du 1, et soit

$$A = \{t \in [0; 2\pi[ \mid \bar{f}(t) = y\}.$$

Pour tout  $t \in A$ , posons  $\epsilon(t) = +1$  si  $\tilde{f}'(t) > 0$  et  $\epsilon(t) = -1$  si  $\tilde{f}'(t) < 0$ . Montrer que

$$\deg f = \sum_{t \in A} \epsilon(t).$$

**Exercice II.** Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre sur  $\mathbb{K}$  des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , munie de la norme  $\|X\| = \text{Tr}({}^t X X)$ . Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'exponentielle de  $X$ , notée  $\exp X$ , désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

1. Montrer les propriétés suivantes de l'exponentielle. Quels que soient  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :
  - (i) Si  $X$  et  $Y$  commutent  $\exp X \exp Y = \exp(X + Y)$ .
  - (ii) L'exponentielle est à valeurs dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  et

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X).$$

- (iii) Quels que soient  $t, s$  dans  $\mathbb{K}$ ,

$$\exp(sX) \exp(tX) = \exp((s+t)X)$$

- (iv) L'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ ,  $t \mapsto \exp(tX)$  est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = X a(t)$$

avec la condition initiale  $a(0) = \text{Id}_n$ .

On peut reformuler (iii) en disant que  $t \mapsto \exp tX$  est un morphisme de groupes (continu) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ . On appelle un tel morphisme un **sous-groupe à un paramètre** de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ .

2. Montrer qu'un morphisme de groupe continu  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En déduire que tout sous-groupe à un paramètre de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  est de la forme  $t \mapsto \exp tX$  pour un certain  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On pourra commencer par remarquer que pour tout  $s, x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_x^{x+s} \phi(u) \, du = \phi(x) \int_0^s \phi(u) \, du.$$

3. On admet que l'application  $\exp$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans lui-même est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Calculer la différentielle de  $\exp$  en 0. En déduire qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\text{Id}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tels que  $\exp$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{V}$ . On note  $\text{Log}$  son inverse.
4. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}'$  de  $\text{Id}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tel que le seul sous-groupe de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  inclus dans  $\mathcal{V}'$  soit le sous-groupe trivial  $\{\text{Id}\}$ .
5. Soient  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \exp \left( \frac{X}{n} \right) \exp \left( \frac{Y}{n} \right) \right]^n = \exp(X + Y),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \exp \left( \frac{X}{n} \right) \exp \left( \frac{Y}{n} \right) \exp \left( -\frac{X}{n} \right) \exp \left( -\frac{Y}{n} \right) \right]^{n^2} = \exp(XY - YX).$$

Soit  $G$  un sous-groupe *fermé* de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ . On pose

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exp tX \in G, (\forall t \in \mathbb{R})\}.$$

6. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  stable par

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

7. Montrer que si  $G$  est discret dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ , alors  $\mathfrak{g} = \{0\}$ .
8. On suppose dans la suite  $G$  non discret, et connexe. Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $h_n \neq \text{Id}$ , une suite d'éléments de  $G$  tendant vers  $\text{Id}$ . Soit  $h$  une valeur d'adhérence de la suite  $\frac{\text{Log}(h_n)}{\|\text{Log}(h_n)\|}$  (cette suite est bien définie pour  $n$  assez grand, et est à valeurs dans la sphère unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ). Montrer que  $h \in \mathfrak{g}$ . On pourra commencer par remarquer que si  $\frac{t}{\|\text{Log}(h_n)\|} \in \mathbb{Z}$ , alors  $\exp \left( t \frac{\text{Log}(h_n)}{\|\text{Log}(h_n)\|} \right) \in G$ .
9. Soit  $E$  un supplémentaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de 0 dans  $E$  tel que  $(\exp \mathcal{W}) \cap G = \{\text{Id}\}$ .

10. Définissons

$$\Phi : \mathfrak{g} \times E, \quad (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y.$$

Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de 0 dans  $\mathfrak{g}$ , un voisinage  $\mathcal{W}_0$  de 0 dans  $E$  et un voisinage  $\mathcal{V}_0$  de Id dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tels que  $\Phi$  réalise un difféomorphisme entre  $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0$  et  $\mathcal{V}_0$ . Montrer que l'on a alors  $\mathcal{V}_0 \cap G = \exp \mathcal{U}_0$ . En déduire que localement, au voisinage de Id,  $G$  est une sous-variété.

11. Montrer que  $G$  est une sous-variété de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\exp \mathfrak{g}$  engendre  $G$ . Montrer que l'espace tangent de  $G$  en Id est  $\mathfrak{g}$ .
12. Expliciter  $\mathfrak{g}$  lorsque  $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{SO}(n)$ .

## Corrigé du devoir à la maison 2013

**Exercice 1.** On note  $p : t \mapsto (\cos t, \sin t)$  la projection standard de  $\mathbb{R}$  sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Soient  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  du cercle dans lui-même,  $\bar{f} = f \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $\bar{f}$ .

1. Montrer que pour presque tout  $y \in \mathbb{S}^1$ , si  $t \in \mathbb{R}$  est tel que  $\bar{f}(t) = y$ , alors  $\tilde{f}'(t) \neq 0$ .

Correction 1.1 : On applique le théorème de Sard à l'application  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour presque tout  $y \in \mathbb{S}^1$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\bar{f}(t) = y$ , la différentielle de  $\bar{f}$  en  $t$  est inversible, c'est-à-dire non nulle. Comme  $p \circ \tilde{f}(t) = \bar{f}(t)$ , on obtient que  $dp(\tilde{f}(t)) \circ d\tilde{f}(t) = d\bar{f}(t) \neq 0$  et donc  $d\tilde{f}(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .  $\square$

2. Fixons  $y \in \mathbb{S}^1$  vérifiant la propriété du 1, et soit

$$A = \{t \in [0; 2\pi[ \mid \bar{f}(t) = y\}.$$

Pour tout  $t \in A$ , posons  $\epsilon(t) = +1$  si  $\tilde{f}'(t) > 0$  et  $\epsilon(t) = -1$  si  $\tilde{f}'(t) < 0$ . Montrer que

$$\deg f = \sum_{t \in A} \epsilon(t).$$

Correction 1.2 : notons  $B = \{t \in \mathbb{R} \mid \bar{f}(t) = y\}$  de telle sorte que  $B \cap [0; 2\pi[ = A$ . Comme  $\tilde{f}' \neq 0$  en tout point de  $B$ , cet ensemble est discret, et  $A$  est donc fini. Enumérons ses points  $A = \{0 \leq x_1 < x_2 \dots < x_n \leq 2\pi\}$ . Observons que  $\bar{f}(x_i) = \bar{f}(x_{i+1})$  pour tout  $i$ , et donc  $\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x_{i+1}) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus, par le théorème des valeurs intermédiaires, nous avons  $\theta_i := \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_i)) \in \{-1, 0, +1\}$ . Plus précisément, lorsque  $\tilde{f}'(x_i) > 0$  et  $\tilde{f}'(x_{i+1}) > 0$  alors  $\theta_i = +1$ ; lorsque  $\tilde{f}'(x_i) < 0$  et  $\tilde{f}'(x_{i+1}) < 0$  alors  $\theta_i = -1$ ; et sinon  $\theta_i = 0$ . En d'autres termes on a

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\epsilon(x_i) + \epsilon(x_{i+1}))$$

La somme de toutes ces contributions donne :

$$\frac{1}{2\pi}(\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x_1)) = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(\epsilon(x_i) + \epsilon(x_{i+1})) = \frac{1}{2}\epsilon(x_0) + \sum_1^n \epsilon(x_i) + \frac{1}{2}\epsilon(x_n).$$

On note maintenant que  $]x_n, x_1 + 2\pi[ \cap B = \emptyset$ , et donc on peut donc estimer maintenant  $\tilde{f}(x_1 + 2\pi) - \tilde{f}(x_n)$  comme précédemment sous la forme  $\frac{1}{2\pi}(\tilde{f}(x_1 + 2\pi) - \tilde{f}(x_n)) = \frac{1}{2}(\epsilon(x_0) + \epsilon(x_n))$ . Finalement on a

$$\deg f = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}(x_1 + 2\pi) - \tilde{f}(x_1)) = \sum_0^n \epsilon(x_i),$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Exercice 2.** Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre sur  $\mathbb{K}$  des matrices carrés  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , munie de la norme  $\|X\| = \text{Tr}({}^t X X)$ . Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

L'exponentielle de  $X$ , notée  $\exp X$ , désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

1. Montrer les propriétés suivantes de l'exponentielle. Quels que soient  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- (i) Si  $X$  et  $Y$  commutent  $\exp X \exp Y = \exp(X + Y)$ .  
(ii) L'exponentielle est à valeurs dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  et

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X).$$

- (iii) Quels que soient  $t, s$  dans  $\mathbb{K}$ ,

$$\exp(sX) \exp(tX) = \exp((s+t)X)$$

- (iv) L'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ ,  $t \mapsto \exp(tX)$  est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = X a(t)$$

avec la condition initiale  $a(0) = I_n$ .

### Correction 2.1 :

Démontrons (i). On a

$$\exp X \exp Y = \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{X^j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Y^k}{k!} \right) = \sum_{j,k=1}^{+\infty} \frac{X^j Y^k}{j! k!}.$$

Par ailleurs si  $X$  et  $Y$  commutent, on peut écrire

$$\exp(X + Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X + Y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j! k!} X^j Y^k = \sum_{j,k=1}^{+\infty} \frac{X^j Y^k}{j! k!}.$$

On en déduit immédiatement (ii) car  $\exp 0 = I_n$ , puis (iii).

Comme la série définissant l'exponentielle converge normalement, on peut la dériver terme à terme. On obtient

$$\frac{d}{dt} (\exp tX) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^{n+1}}{n!} = X \exp(tX) = \exp(tX) X.$$

Comme  $\exp 0 = I_n$ , l'application  $t \mapsto \exp tX$  est bien solution de l'équation différentielle donnée en (iv).

Supposons que  $a(t)$  soit une autre solution. On a

$$\frac{d}{dt} [a(t) \exp(-tX)] = a'(t) (\exp -tX) + a(t)(-X) (\exp -tX) = 0$$

et l'on en déduit que  $a(t) = \exp tX$ . □

**Remarque X.0.2.** On peut reformuler (iii) en disant que  $t \mapsto \exp tX$  est un morphisme de groupes (continu) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ . On appelle un tel morphisme un *sous-groupe à un paramètre* de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ .

2. Montrer qu'un morphisme de groupe continu  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En déduire que tout sous-groupe à un paramètre de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  est de la forme  $t \mapsto \exp tX$  pour un certain  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On pourra commencer par remarquer que pour tout  $s, x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_x^{x+s} \phi(u) \, du = \phi(x) \int_0^s \phi(u) \, du.$$

Correction 2.2 :

Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  un morphisme de groupes continu. On a pour tout  $s, x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_x^{x+s} \phi(u) \, du = \int_0^s \phi(x+u) \, du$$

par le changement de variable  $u \mapsto x+u$ . Or  $\phi(u+x) = \phi(x)\phi(u)$  et donc

$$\int_x^{x+s} \phi(u) \, du = \phi(x) \int_0^s \phi(u) \, du.$$

Montrons que l'on peut choisir  $s > 0$  assez petit, de sorte que  $\int_0^s \phi(u) \, du$  soit inversible. L'idée est que pour un tel  $s$ ,  $\int_0^s \phi(u) \, du$  est proche de  $sI_n$ , donc inversible. Pour tout  $s > 0$ , on écrit

$$\left\| \frac{1}{s} \int_0^s \phi(u) \, du - \frac{1}{s} \int_0^s \phi(0) \, du \right\| \leq \frac{1}{s} \int_0^s \|\phi(u) - \phi(0)\| \, du$$

Fixons  $1 > \epsilon > 0$ . Par continuité de  $\phi$ , il existe  $s > 0$  tel que pour tout  $u \in [0; s]$ , on ait  $\|\phi(u) - \phi(0)\| \leq \epsilon$ . Comme  $\phi(0) = I_n$ , on en déduit que

$$\left\| \frac{1}{s} \int_0^s \phi(u) \, du - I_n \right\| \leq \epsilon.$$

Or, toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\|I_n - A\| < 1$  est inversible. En effet, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$  est normalement convergente, et on vérifie que

$$(I_n - A) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} A^n \right) = I_n.$$

On en déduit que  $\frac{1}{s} \int_0^s \phi(u) \, du$  et donc  $\int_0^s \phi(u) \, du$  est inversible. L'écriture

$$\phi(x) = \int_x^{x+s} \phi(u) \, du \times \left( \int_0^s \phi(u) \, du \right)^{-1}$$

montre alors que  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , puis par une récurrence immédiate, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \phi(t) \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \phi(t)\phi'(0).$$

Le (iii) de la question 2.1 montre que  $\phi(t) = \exp tX$  avec  $X = \phi'(0)$ . □



3. On admet que l'application  $\exp$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans lui-même est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Calculer la différentielle de  $\exp$  en 0. En déduire qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\text{Id}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tels que  $\exp$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{V}$ . On note  $\text{Log}$  son inverse.

Correction 2.3 :

On a

$$\|\exp X - \exp 0 - X\| = \left\| X \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X^p}{p+1!} \right\|.$$

Posons  $\epsilon(X) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X^p}{p+1!}$ . C'est une fonction définie par une série normalement convergente, donc continue, et  $\epsilon(0) = 0$ . Ceci montre que la différentielle de l'exponentielle à l'origine est l'application identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On déduit du théorème d'inversion locale qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  ouvert de 0 dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $I_n$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tels que l'application exponentielle réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{V}$ . Au voisinage de  $I_n$ , l'inverse de l'exponentielle est donnée par la série normalement convergente

$$\text{Log}(I_n - A) = - \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{A^p}{p+1}$$

(convergence normale pour  $\|A\| < 1$ ). Quitte à réduire  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  ci-dessus, on peut supposer que  $\mathcal{V} = \exp \mathcal{U}$  est inclus dans la boule ouverte de centre  $I_n$  et de rayon 1 de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , où le  $\text{Log}$  est donné par la série ci-dessus.  $\square$

4. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}'$  de  $\text{Id}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tel que le seul sous-groupe de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  inclus dans  $\mathcal{V}'$  soit le sous-groupe trivial  $\{\text{Id}\}$ .

Correction 2.4 :

Soit  $\mathcal{U}'$  un ouvert borné de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contenant 0 et contenu dans l'ouvert  $\mathcal{U}$  de la question 3 de telle sorte que  $\exp : \mathcal{U}' \rightarrow \exp(\mathcal{U}')$  soit un difféomorphisme.

Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  inclus dans  $\mathcal{V}' := \exp(\mathcal{U}'/2)$ , et  $g$  un élément de  $G$ . Par hypothèse,  $g = \exp X$  pour un unique  $X \in \mathcal{U}'/2$ . Supposons par l'absurde que  $X$  soit non nul. Soit  $p$  entier maximal tel que  $pX$  appartienne à  $\mathcal{U}'/2$ . Alors  $(p+1)X \in \mathcal{U}' \setminus (\mathcal{U}'/2)$  et donc  $g^{p+1} = \exp((p+1)X) = \exp(Y)$  pour un  $Y \in \mathcal{U}'/2$ . Par injectivité de  $\exp$  sur  $\mathcal{U}'$  on aurait  $(p+1)X = Y$  ce qui est absurde.  $\square$

5. Soient  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{X}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) \right]^p = \exp(X + Y),$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{X}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) \exp\left(-\frac{X}{p}\right) \exp\left(-\frac{Y}{p}\right) \right]^{p^2} = \exp(XY - YX).$$

Correction 2.5 :

On a  $\exp\left(\frac{X}{p}\right) = I_n + \frac{X}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$  et  $\exp\left(\frac{Y}{p}\right) = I_n + \frac{Y}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ , d'où

$$\exp\left(\frac{X}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) = I_n + \frac{X+Y}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left( \exp\left(\frac{X}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) \right)^p &= \left( I_n + \frac{X+Y}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right)^p \\ &= \exp\left( p \operatorname{Log}\left( I_n + \frac{X+Y}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right) \right) = \exp(X+Y+O\left(\frac{1}{p}\right)). \end{aligned}$$

De même, en poussant les développements au second ordre :

$$\exp\left(\frac{X}{p}\right) = I_n + \frac{X}{p} + \frac{X^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \text{ et } \exp\left(\frac{Y}{p}\right) = I_n + \frac{Y}{p} + \frac{Y^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right), \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \left[ \exp\left(\frac{X}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) \exp\left(-\frac{X}{p}\right) \exp\left(-\frac{Y}{p}\right) \right]^{p^2} &= \\ \left( \left( I_n + \frac{X}{p} + \frac{X^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right) \left( I_n + \frac{Y}{p} + \frac{Y^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right) \left( I_n - \frac{X}{p} + \frac{X^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right) \left( I_n - \frac{Y}{p} + \frac{Y^2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right) \right)^{p^2} \\ &= \left( I_n + \frac{(X^2 + Y^2 + XY - X^2 - XY - YX - Y^2 + XY)}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right)^{p^2} \\ &= \left( I_n + \frac{(XY - YX)}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right)^{p^2} \\ &= \exp\left( p^2 \operatorname{Log}\left( I_n + \frac{(XY - YX)}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right) \right) = \exp(XY - YX + O\left(\frac{1}{p}\right)), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ . On pose

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exp tX \in G, (\forall t \in \mathbb{R})\}.$$

6. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  stable par

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

Correction 2.6 :

Supposons  $X$  et  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$ . Il est clair que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X \in \mathfrak{g}$ . Montrons que  $X + Y \in \mathfrak{g}$ . Par la question précédente, on a

$$\exp(t(X + Y)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{tX}{p}\right) \exp\left(\frac{tY}{p}\right) \right]^p$$

ce qui fait apparaître  $\exp(t(X + Y))$  comme une limite d'éléments de  $G$ . Comme  $G$  est fermé par hypothèse, on en déduit que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(t(X + Y)) \in G$ , et donc  $X + Y \in \mathfrak{g}$ . On a montré que  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrons maintenant que  $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$ . L'argument est le même. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'élément

$$\exp(t[X, Y]) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{tX}{p}\right) \exp\left(\frac{Y}{p}\right) \exp\left(-\frac{tX}{p}\right) \exp\left(-\frac{Y}{p}\right) \right]^{p^2}$$

est limite d'une suite d'éléments de  $G$ , donc appartient à  $G$ , et  $[X, Y]$  est dans  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

7. Montrer que si  $G$  est discret dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ , alors  $\mathfrak{g} = \{0\}$ .

*Correction 2.7 :*

Si  $G$  est discret dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}'$  de  $I_n$ , que l'on peut supposer inclus dans le voisinage  $\mathcal{V}$  de la question 3, tel que  $G \cap \mathcal{V}' = \{I_n\}$ . Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Par définition  $\exp(tX) \in G$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , mais pour  $t$  proche de 0,  $\exp(tX) \in \mathcal{V}'$ . On en déduit que  $\exp(tX) = I_n$ , puis  $X = 0$ .  $\square$

8. On suppose dans la suite  $G$  non discret, et connexe (et toujours fermé). Soit  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $h_k \neq \text{Id}$ , une suite d'éléments de  $G$  tendant vers  $\text{Id}$ . Soit  $h$  une valeur d'adhérence de la suite  $\frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}$  (cette suite est bien définie pour  $k$  assez grand, et est à valeurs dans la sphère unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ). Montrer que  $h \in \mathfrak{g}$ . On pourra commencer par remarquer que si  $\frac{t}{\|\text{Log}(h_k)\|} \in \mathbb{Z}$ , alors  $\exp\left(t \frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}\right) \in G$ .

*Correction 2.8 :*

Si  $\frac{t}{\|\text{Log}(h_k)\|} = p \in \mathbb{Z}$ , alors

$$\exp\left(t \frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}\right) = \exp(p \text{Log}(h_k)) = h_k^p \in G.$$

En général, on écrit  $\frac{t}{\|\text{Log}(h_k)\|} = p_k + r_k$ , avec  $p_k \in \mathbb{Z}$  et  $r_k \in [0; 1[$ . On a alors

$$\exp\left(t \frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}\right) = \exp((p_k + r_k)\text{Log}(h_k)) = h_k^{p_k} \exp(r_k \text{Log}(h_k)).$$

Comme  $h_k$  tend vers  $I_n$ , on a

$$\begin{aligned} \exp(r_k \text{Log}(h_k)) &= \exp(r_k \text{Log}(I_n + (h_k - I_n))) = \\ &= \exp(r_k(-I_n + h_k) + o(I_n - h_k)) = \\ &= I_n + r_k(-I_n + h_k) + o(I_n - h_k) \end{aligned}$$

dont la limite est  $I_n$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

En remplaçant  $h_k$  par une sous-suite extraite, de sorte que  $\frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}$  tende vers  $h \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de norme 1, et en passant à la limite, on obtient

$$\exp(th) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{p_k}.$$

Comme  $h_k^{p_k} \in G$  pour tout  $k$  et que  $G$  est fermé, on en déduit que  $\exp th \in G$ , ceci pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et donc  $h \in \mathfrak{g}$ .  $\square$

9. Soit  $E$  un supplémentaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de 0 dans  $E$  tel que  $(\exp \mathcal{W}) \cap G = \{\text{Id}\}$ .

*Correction 2.9 :*

Supposons que tel ne soit pas le cas. On trouve alors une suite  $X_k$  d'éléments de  $E$  tendant vers 0 et tel que  $\exp X_k \in G$ . Alors la suite  $h_k = \exp X_k$  vérifie les hypothèses de la question précédente. Quitte à remplacer  $h_k$  par une sous-suite extraite, on suppose que  $\frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}$  tend vers  $h \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de norme 1. La question précédente montre que  $h \in \mathfrak{g}$ . Mais d'autre part, on a

$$\frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|} = \frac{\text{Log}(\exp X_k)}{\|\text{Log}(\exp X_k)\|} = \frac{X_k}{\|X_k\|} \in E,$$

pour tout  $k$  assez grand. On a donc aussi  $h \in E$ , ce qui implique  $h = 0$ . On obtient donc une contradiction car  $h$  est de norme 1.  $\square$

10. Définissons

$$\Phi : \mathfrak{g} \times E, \quad (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y.$$

Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de 0 dans  $\mathfrak{g}$ , un voisinage  $\mathcal{W}_0$  de 0 dans  $E$  et un voisinage  $\mathcal{V}_0$  de  $\text{Id}$  dans  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tels que  $\Phi$  réalise un difféomorphisme entre  $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0$  et  $\mathcal{V}_0$ . Montrer que l'on a alors  $\mathcal{V}_0 \cap G = \exp \mathcal{U}_0$ . En déduire que localement, au voisinage de  $\text{Id}$ ,  $G$  est une sous-variété.

Correction 2.10 :

D'après la question 3., l'application  $\Phi$  est différentiable en  $(0, 0)$  et  $d\Phi_{(0,0)} = \text{Id}_{\mathfrak{g} \times E}$ . Le théorème d'inversion locale donne l'existence des ouverts  $\mathcal{U}_0$ ,  $\mathcal{W}_0$  et  $\mathcal{V}_0$  vérifiant les propriétés voulues. Quitte à restreindre  $\mathcal{W}_0$ , on peut supposer qu'il vérifie  $(\exp \mathcal{W}_0) \cap G = \{\text{Id}\}$ , grâce à la question 9. On a alors

$$\mathcal{V}_0 \cap G = (\exp \mathcal{U}_0 \exp \mathcal{W}_0) \cap G.$$

Soit  $\exp X \exp Y$  un élément de  $\exp \mathcal{U}_0 \exp \mathcal{W}_0 \cap G$ , avec  $X \in \mathcal{U}_0$ ,  $Y \in \mathcal{W}_0$ . Comme  $\exp X \in G$  par définition de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\exp Y \in G$ , et donc  $\exp Y = I_n$ , d'où  $Y = 0$ . Ainsi

$$\mathcal{V}_0 \cap G = (\exp \mathcal{U}_0 \exp \mathcal{W}_0) \cap G = \exp \mathcal{U}_0.$$

Ceci montre que  $\mathcal{V}_0 \cap G$  est une sous-variété (cours).  $\square$

11. Montrer que  $G$  est une sous-variété de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\exp \mathfrak{g}$  engendre  $G$ . Montrer que l'espace tangent de  $G$  en  $\text{Id}$  est  $\mathfrak{g}$ .

Correction 2.11 :

Soit  $g \in G$ . L'application  $L_g : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $X \mapsto gX$  est un difféomorphisme. En effet  $L_g$  est polynomiale, donc  $\mathcal{C}^\infty$ , et son inverse  $L_{g^{-1}}$  est elle aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus  $L_g(I_n) = g$  et  $L_g(G) = G$ . On pose  $\mathcal{U}_g = L_g(\mathcal{U}_0)$ ,  $\mathcal{W}_g = L_g(\mathcal{W}_0)$ ,  $\mathcal{V}_g = L_g(\mathcal{V}_0)$  et  $\Phi_g = L_g \circ \Phi \circ L_{g^{-1}}$ . Par construction,  $\Phi_g$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{U}_g \times \mathcal{W}_g$  sur  $\mathcal{V}_g$  qui donne un paramétrage local de  $G$  en  $g$ .

Soit  $G_0$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\exp \mathfrak{g}$  : ses éléments sont de la forme  $g_1 \dots g_k$  avec  $g_1, g_2, \dots, g_k \in \exp \mathfrak{g}$ . Soit  $g \in G_0$ . Alors  $g \cdot \exp \mathcal{U}_0$  est un ouvert de  $G$  contenu dans  $G_0$ , ce qui montre que  $G_0$  est ouvert dans  $G$ . Soit  $g_k$  une suite d'éléments de  $G_0$  qui tend vers un élément  $g \in G$ . Il existe un  $k$  tel que  $g_k \in g \exp(-\mathcal{U}_0)$  car  $g \exp(-\mathcal{U}_0)$  est un voisinage de  $g$  dans  $G$ . Donc  $g \in g_k \exp \mathcal{U}_0 \subset G_0$ , ce qui montre que  $G_0$  est fermé dans  $G$ . Comme  $G$  est connexe, on en déduit que  $G_0 = G$ .

Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Alors  $\alpha : t \mapsto \exp(tX)$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la trace est dans  $G$ . Comme  $\alpha(0) = I_n$  et  $\alpha'(0) = X$ , on voit que  $X$  est dans l'espace tangent à  $G$  en  $I_n$ . Réciproquement, si  $\alpha : t \mapsto \alpha(t)$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la trace est dans  $G$  avec  $\alpha(0) = I_n$ , on peut écrire pour  $t$  assez petit  $\alpha(t) = \exp \beta(t)$  où  $\beta$  est une courbe dans  $\mathcal{U}_0$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\beta(0) = 0$ . On a  $\alpha'(0) = d\exp_0(\beta'(0)) = \beta'(0)$  et donc  $\alpha'(0) \in \mathfrak{g}$ . Ceci montre que réciproquement l'espace tangent à  $G$  en  $I_n$  est inclus dans  $\mathfrak{g}$ , et donne l'identité voulue.  $\square$

12. Expliciter  $\mathfrak{g}$  lorsque  $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}), \mathbf{SO}(n)$ .

Correction 2.12 :

Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\exp(tX) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a donc

$$\det(\exp(tX)) = \exp(\operatorname{Tr}(tX)) = \exp(t\operatorname{Tr}(X)) = 1, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

En dérivant, on obtient  $\operatorname{Tr}(X) = 0$ . Réciproquement, soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de trace nulle. On a alors

$$\det(\exp(tX)) = \exp(\operatorname{Tr}(tX)) = \exp(0) = 1, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

et donc  $X \in \mathfrak{g}$ . Ceci montre que l'algèbre de Lie de  $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices de trace nulle.

De même, soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a donc

$${}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = I_n, \quad (t \in \mathbb{R})$$

où  ${}^tA$  désigne la transposée de la matrice  $A$ . En dérivant et en évaluant en  $t = 0$ , on trouve  ${}^tX + X = 0$ . Réciproquement, soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. On a alors

$${}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = \exp(t{}^tX) \exp(tX) = \exp(-tX) \exp(tX) = I_n, \quad (t \in \mathbb{R}),$$

et donc  $X \in \mathfrak{g}$ . Ceci montre que l'algèbre de Lie de  $G = \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices antisymétriques.

## Contrôle classant du 4 juillet 2013

## Problème 1

L'objet de ce problème est d'étudier les surfaces de révolution. Les différentes parties sont largement indépendantes. Les questions marquées (\*) sont (légèrement) plus difficiles.

On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $D$  la droite vectorielle de vecteur directeur  $e_3$ .

**A.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $D \cap \mathcal{S} = \emptyset$  et  $r(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  pour toute rotation  $r$  de l'espace d'axe  $D$ . On note  $r_t$  la rotation de l'espace d'axe  $D$  et d'angle  $t$ , dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**A1.** Montrer que l'intersection de  $\mathcal{S}$  avec un plan vectoriel  $P$  contenant  $D$  est non vide. (On admettra que si  $P'$  est un autre plan vectoriel contenant  $D$ , il existe une rotation de l'espace  $r$  d'axe  $D$  telle que  $r(P') = P$ ).

**A2.** Pour  $p \in \mathcal{S} \cap P$ , notons  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto R_t(p)$ . Montrer que  $\alpha$  est un arc paramétré dont la trace est dans  $\mathcal{S}$  et que  $\alpha'(0) = p \wedge e_3$ . En déduire que l'intersection de  $P$  et  $\mathcal{S}$  est transverse en  $p$ .

**A3.** Soit  $P_0$  le plan vectoriel engendré par  $e_1$  et  $e_3$ . Montrer que  $\mathcal{C} = P_0 \cap \mathcal{S}$  est une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^3$ .

**A4.** Soit  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un paramétrage local de  $\mathcal{C}$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Posons  $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$  pour tout  $t \in I$ . Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{x} : I \times ]\theta; \theta + 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (\beta_1(u) \cos v, -\beta_1(u) \sin v, \beta_3(u))$$

est un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ .

**B.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée globalement par

$$\mathbf{x} : I \times ]\theta; \theta + 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (\beta_1(u) \cos v, -\beta_1(u) \sin v, \beta_3(u))$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ , et  $\beta : I \rightarrow P_0$ ,  $\beta(t) = (\beta_1(t), 0, \beta_3(t))$  est un paramétrage local par la longueur de l'arc d'une sous-variété  $\mathcal{C}$  de dimension 1 de  $\mathbb{R}^3$  contenue dans le demi-plan

$$P_0^+ = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$$

(donc  $\beta_1(t) > 0$  pour tout  $t \in I$ ).

**B1.** Calculer les coefficients  $E, F, G$  de la première forme fondamentale de  $\mathcal{S}$  dans le paramétrage  $\mathbf{x}$ .

**B2.** Même question pour les coefficients  $e, f, g$  de la seconde forme fondamentale.

**B3.** En déduire la courbure de Gauss, la courbure moyenne, et les courbures principales.

**B4** (\*). Caractériser les surfaces ci-dessus dont la courbure de Gauss est constante égale à  $K = 0$ . Même question pour  $K = +1$  puis  $K = -1$ .

**C.** On reprend les hypothèses du **B**. Montrer que l'aire de la surface  $\mathcal{S}$  est égale à  $2\pi \int_I \beta_1(u) du$ .

**D.** On reprend les hypothèses du **B**.

**D1.** Montrer que pour  $v \in ]\theta; \theta + 2\pi[$  fixé, la courbe

$$\gamma : u \mapsto (\beta_1(u) \cos v, -\beta_1(u) \sin v, \beta_3(u))$$

est une géodésique de  $\mathcal{S}$ . (Une telle courbe s'appelle un méridien de  $\mathcal{S}$ ).

**D2.** Montrer que pour  $u \in I$  fixé, la courbe

$$\gamma : v \mapsto (\beta_1(u) \cos v, -\beta_1(u) \sin v, \beta_3(u))$$

(une telle courbe s'appelle un parallèle de  $\mathcal{S}$ ) est une géodésique de  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $p = \mathbf{x}(u, v)$  est un point critique de la fonction

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \mapsto f(p) = d(p, D)^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

**D3.** Soit  $t \mapsto \gamma(t)$  une géodésique paramétrée par la longueur de l'arc de  $\mathcal{S}$ . Notons  $f(t) = d(\gamma(t), D) = \|e_3 \wedge \gamma(t)\|$  la distance de  $\gamma(t)$  à l'axe  $D$  et

$$p(t) = \frac{\langle e_3 \wedge \gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{\|e_3 \wedge \gamma(t)\| \|\gamma'(t)\|}$$

l'angle que fait  $\gamma'(t)$  avec le parallèle passant par  $\gamma(t)$ .

Montrer que  $t \mapsto f(t)p(t)$  est constante. On pourra montrer que la normale à  $\mathcal{S}$  en  $\gamma(t)$  est dans le plan engendré par  $e_3$  et  $\gamma(t)$ .

## Problème 2

Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $\mathbb{S}^{2n-1}$  la sphère unité de cet espace.

**E1.** Montrer que le champ de vecteurs  $X$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  défini par

$$X(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^n -x_{2i} e_{2i-1} + x_{2i-1} e_{2i}$$

est tangent à la sphère (et donc se restreint en un champ de vecteurs tangents sur la sphère).

**E2.** Lorsque  $n = 2$ , définir deux autres champs de vecteurs  $Y$  et  $Z$ , tangents à la sphère, tels que  $X, Y$  et  $Z$  soient linéairements indépendants en chaque point de  $\mathbb{S}^3$ .

Indication. 
$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} = -1$$

**E3.** En déduire que l'espace tangent

$$T\mathbb{S}^3 = \{(p, v) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^4 | v \in T_p\mathbb{S}^3\}$$

est difféomorphe à  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

**E4.** (\*) Montrer que

$$T\mathbb{S}^1 = \{(p, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 | v \in T_p\mathbb{S}^1\}$$

est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  mais que

$$T\mathbb{S}^2 = \{(p, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 | v \in T_p\mathbb{S}^2\}$$

n'est pas difféomorphe à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

### Problème 3

On note  $p : t \mapsto (\cos t, \sin t)$  la projection standard de  $\mathbb{R}$  sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et  $J$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  du plan euclidien orienté  $\mathbb{R}^2$ .

**F1.** Montrer que pour tout  $p$ ,  $J(p)$  est un vecteur unitaire tangent au cercle  $\mathbb{S}^1$  en  $p$ .

Soient  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du cercle dans lui-même et  $\bar{f} = f \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On définit, pour tout  $p \in \mathbb{S}^1$ ,

$$\text{Jac}(f)(p) = \langle J(f(p)), df_p(J(p)) \rangle.$$

**F2.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{S}^1$ ,

$$df_p(J(p)) = \text{Jac}(f)(p) \times J(f(p)),$$

puis que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\bar{f}'(t) = \text{Jac}(f)(p(t)) \times J(\bar{f}(t)).$$

On pose pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{k}(t) = \int_0^t \text{Jac}(f)(p(s)) \, ds + c,$$

où  $c \in \mathbb{R}$  est tel que  $p(c) = \bar{f}(0)$ , et  $\bar{k}(t) = p(\tilde{k}(t))$ .

**F 3.** On pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h(t) = \|\bar{f}(t) - \bar{k}(t)\|^2$ . Montrer que

$$h'(t) = -2(\langle \bar{f}(t), \bar{k}'(t) \rangle + \langle \bar{k}(t), \bar{f}'(t) \rangle) = 0.$$

En déduire  $\tilde{k}$  est un relèvement de  $\bar{f}$ , puis que

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Jac}(f)(p(s)) \, ds.$$



### Corrigé du contrôle classant 2013

A1. Comme  $\mathcal{S}$  est non vide, elle contient un point  $p$ . Soit  $P'$  un plan vectoriel contenant  $D$  et  $p$ . Il existe une rotation de  $r$  de l'espace d'axe  $D$  telle que  $r(P') = P$ . On a donc  $r(p') \in r(P' \cap \mathcal{S}) = r(P') \cap r(\mathcal{S}) = P \cap \mathcal{S}$ , ce qui montre que  $\mathcal{S} \cap P$  est non vide.

A2. Si  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , on a  $\alpha(t) = (\cos tp_1 + \sin tp_2, -\sin tp_1 + \cos tp_2, p_3)$  ce qui montre que  $\alpha$  est un arc paramétré. Sa trace est dans  $\mathcal{S}$  puisque  $\mathcal{S}$  est invariante par  $r_t$ . On a  $\alpha'(t) = (-\sin tp_1 + \cos tp_2, -\cos tp_1 - \sin tp_2, 0)$ , d'où  $\alpha'(0) = (p_2, -p_1, 0) = p \wedge e_3$ .

Comme  $p, e_3 \in P$   $p \wedge e_3 = \alpha'(0) \notin P$  et comme  $\alpha'(0) \in T_p \mathcal{S}$ ,  $T_p \mathcal{S}$  n'est pas  $P$ . On a alors  $T_p P + T_p \mathcal{S} = P + T_p \mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ , ce qui montre que l'intersection est transverse.

A3. L'application  $\mathbf{x}$  est injective car si

$$(\beta_1(u) \cos v, -\beta_1(u) \sin v, \beta_3(u)) = (\beta_1(u') \cos v', -\beta_1(u') \sin v', \beta_3(u'))$$

alors  $\beta_1(u)^2 = \beta_1(u')^2$  et  $\beta_3(u) = \beta_3(u')$ . Or  $\beta_1$  ne s'annule pas ( $\mathcal{S} \cap D = \emptyset$ ) donc garde un signe constant), et l'on obtient  $\beta(u) = \beta(u')$  d'où  $u = u'$  car  $\beta$  est un paramétrage de  $\mathcal{C}$ . De là, on tire facilement  $v = v'$ .

L'application  $\mathbf{x}$  est une immersion, car en  $q = (u, v)$ , la matrice de  $d\mathbf{x}_q$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  est

$$\begin{pmatrix} \beta'_1(u) \cos v & -\beta_1(u) \sin v \\ -\beta'_1(u) \sin v & -\beta_1(u) \cos v \\ \beta'_3(u) & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de toujours de rang 2, car  $\beta_1$  ne s'annule pas et  $\beta'_1, \beta'_3$  ne s'annulent pas simultanément.

B. Le calcul ci-dessus donne

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\beta'_1(u) \cos v, -\beta'_1(u) \sin v, \beta'_3(u)), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-\beta_1(u) \sin v, -\beta_1(u) \cos v, 0).$$

D'où

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle = \beta'_1(u)^2 + \beta'_3(u)^2 = 1,$$

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 0,$$

$$G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = \beta_1(u)^2.$$

Comme  $\langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 0$ ,

$$\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| = \|\mathbf{x}_u(u, v)\| \times \|\mathbf{x}_v(u, v)\| = \beta_1(u).$$

On a aussi

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (\beta''_1(u) \cos v, -\beta''_1(u) \sin v, \beta''_3(u)),$$

$$\mathbf{x}_{uv}(u, v) = (-\beta'_1(u) \sin v, -\beta'_1(u) \cos v, 0),$$

$$\mathbf{x}_{vv}(u, v) = (-\beta_1(u) \cos v, \beta_1(u) \sin v, 0).$$

On calcule donc

$$e(u, v) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\|} \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_{uu}) = \beta''_1(u) \beta'_3(u) - \beta'_1(u) \beta''_3(u),$$

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \frac{1}{\| \mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v) \|} \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_{uv}) = 0, \\
g(u, v) &= \frac{1}{\| \mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v) \|} \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_{vv}) = -\beta_1(u)\beta_3'(u). \\
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\beta_1(u)\beta_3'(u)(\beta_1''(u)\beta_3(u) - \beta_1'(u)\beta_3''(u))}{\beta_1(u)^2} \\
&= \frac{-\beta_3'(u)(\beta_1''(u)\beta_3'(u) - \beta_1'(u)\beta_3''(u))}{\beta_1(u)}
\end{aligned}$$

Comme  $\beta$  est un paramétrage par la longueur de l'arc, on a

$$\beta_1'(u)^2 + \beta_3'(u)^2 = 1,$$

d'où,

$$\beta_1'(u)\beta_1''(u) + \beta_3'(u)\beta_3''(u) = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{-\beta_3'(u)^2\beta_1''(u) - \beta_1'(u)^2\beta_3''(u)}{\beta_1(u)} = \frac{-\beta_1''(u)}{\beta_1(u)}. \\
H(u, v) &= \frac{1}{2} \frac{eG + Eg - 2Ff^2}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \beta_1''(u)\beta_3'(u) - \beta_1'(u)\beta_3''(u) - \frac{\beta_3'(u)}{\beta_1(u)} \right).
\end{aligned}$$

Comme les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont solutions de

$$X^2 - 2HX + K = 0$$

avec  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right)$  et  $K = \frac{eg}{EG}$ , on voit immédiatement que

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{e}{E} = \beta_1''(u)\beta_3'(u) - \beta_1'(u)\beta_3''(u) \\
k_2 &= \frac{g}{G} = -\frac{\beta_3'(u)}{\beta_1(u)}.
\end{aligned}$$

C. On a

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{I \times J} \| \mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v) \| \, dudv = \int_{I \times J} \beta_1(u) \, dudv = 2\pi \int_I \beta_1(u) \, du.$$

D. On a  $\gamma''(u) = (\beta_1''(u) \cos v, -\beta_1''(u) \sin v, \beta_3''(u))$ . comme  $\beta$  est un paramétrage par la longueur de l'arc, on a

$$\beta_1'(u)^2 + \beta_3'(u)^2 = 1,$$

d'où,

$$\beta_1'(u)\beta_1''(u) + \beta_3'(u)\beta_3''(u) = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle \gamma''(u), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle &= \beta_1''(u) \cos v \beta_1'(u) \cos v + \beta_1''(u) \sin v \beta_1'(u) \sin v + \beta_3''(u) \beta_3'(u) \\
&= \beta_1''(u) \beta_1'(u) + \beta_3''(u) \beta_3'(u) = 0.
\end{aligned}$$

De même

$$\langle \gamma''(u), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = -\beta_1''(u) \cos v \beta_1(u) \sin v + \beta_1''(u) \sin v - \beta_1(u) \cos v = 0.$$

Ceci montre, comme  $(\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v))$  est une base du plan tangent en  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{x}(u, v)$ , que la composante tangentielle de  $\gamma''(u)$  est nulle, et donc  $\gamma$  est une géodésique.

D2. Le point  $p = (p_1, p_2, p_3)$  est un point critique de la fonction  $f$  si et seulement si  $df_p$  est nulle. Donc  $\mathbf{x}_v(u, v)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $d(f \circ \mathbf{x}_{(u,v)})$  est nulle. Comme  $(f \circ \mathbf{x})(u, v) = \beta_1(u)^2 \cos^2 v + \beta_1(u)^2 \sin^2 v = \beta_1(u)^2$ , on a

$$((f \circ \mathbf{x})_u(u, v), (f \circ \mathbf{x})_v(u, v)) = (2\beta_1(u)\beta_1'(u), 0),$$

ce qui montre que  $\mathbf{x}_v(u, v)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $\beta_1'(u) = 0$ .

D'autre part

$$\gamma''(v) = (-\beta_1(u) \cos v, \beta_1(u) \sin v, 0)$$

et donc

$$\langle \gamma''(v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle = -\beta_1(u) \cos v \beta_1'(u) \cos v - \beta_1(u) \sin v \beta_1'(u) \sin v = -\beta_1(u) \beta_1'(u)$$

$$\langle \gamma''(v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = \beta_1(u) \cos v \beta_1'(u) \sin v - \beta_1(u) \sin v \beta_1(u) \cos v = 0$$

et donc  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si  $\beta_1'(u) = 0$ .

E1. Si  $p = (p_1, p_2, \dots, p_{2n}) \in \mathbb{S}^{2n-1}$ , on a

$$\langle X(p), p \rangle = -\sum_{i=1}^n -p_{2i} p_{2i-1} + p_{2i-1} p_{2i} = 0,$$

ce qui montre que  $X(p) \in T_p \mathbb{S}^{2n-1} = p^\perp$ .

E2. Pour tout  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ , posons

$$X(p) = (-p_2, p_1, -p_4, p_3), \quad Y(p) = (-p_3, p_4, p_1, -p_2), \quad Z(p) = (p_4, p_3, -p_2, -p_1).$$

Comme ci-dessus, on vérifie facilement que  $Y(p), Z(p) \in T_p \mathbb{S}^{2n-1}$ . L'indication nous dit que  $\det(p, X(p), Y(p), Z(p)) = -1$ , et donc  $(X(p), Y(p), Z(p))$  est une famille libre, en tout point  $p$ . C'est donc une base de l'espace tangent  $T_p \mathbb{S}^{2n-1}$ .

E3. Considérons l'application

$$\Phi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (p, (a, b, c)) \mapsto (p, aX(p) + bY(p) + cZ(p)).$$

D'après ce qui précède, elle est à valeur dans  $T\mathbb{S}^3$ . Elle est clairement différentiable. Son injectivité, et sa surjectivité (sur  $T\mathbb{S}^{2n-1}$ ) sont immédiates par le fait que  $(X(p), Y(p), Z(p))$  est une base de l'espace tangent  $T_p \mathbb{S}^3$  en tout point  $p$ . D'autre part, c'est une immersion, car pour tout  $(w, (h_1, h_2, h_3)) \in T_p T\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{R}^3$ ,

$$d\Phi_{(p, (a, b, c))}(w, (h_1, h_2, h_3)) = (w, (a dX_p(w) + h_1 X(p), b dY_p(w) + h_2 Y(p), c dZ_p(w) + h_3 Z(p))),$$

et donc si  $d\Phi_{(p, (a, b, c))}(w, (h_1, h_2, h_3)) = 0$ , alors  $w = 0$ , puis  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ . On conclut que  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$  sur  $T\mathbb{S}^3$ .

F1. Un vecteur normal unitaire à  $\mathcal{S}^1$  au point  $p$  est donné par le vecteur  $p$  lui-même. L'espace tangent à  $\mathcal{S}^1$  en  $p$  est l'orthogonal de  $p$ , c'est-à-dire le sous espace engendré par  $J(p)$ . D'autre part  $J(p)$  est de norme 1, donc  $\{J(p)\}$  est une base orthonormale de  $T_p\mathbb{S}^1$ .

F2. D'après la première question,  $J(p)$  est dans l'espace tangent à  $\mathbb{S}^1$  en  $p$ , et  $df_p$  envoie cet espace tangent sur l'espace tangent à  $\mathbb{S}^1$  en  $f(p)$ . Comme  $\{J(f(p))\}$  est une base orthonormale de cet espace tangent, on a

$$df_p(J(p)) = \langle J(p), df_o(J(p)) \rangle J(f(p)).$$

Comme  $\bar{f}'(t) = (f \circ p)'(t) = df_{p(t)}(p'(t))$  et que  $p'(t) = (-\sin t, \cos t) = J(p(t))$ , on a

$$\bar{f}'(t) = df_{p(t)}(J(p(t))) = \langle J(p(t)), df_{p(t)}(J(p(t))) \rangle J(f(p(t))) = \text{Jac}(f)(p(t))J(\bar{f}(t)).$$

F3. On a

$$h'(t) = 2\langle \bar{f}(t) - \bar{k}(t), \bar{f}'(t) - \bar{k}'(t) \rangle.$$

Comme  $\langle \bar{f}(t), \bar{f}(t) \rangle = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a en dérivant  $\langle \bar{f}(t), \bar{f}'(t) \rangle = 0$ . De même  $\langle \bar{k}(t), \bar{k}'(t) \rangle = 0$ . On en déduit

$$h'(t) = -2(\langle \bar{f}(t), \bar{k}'(t) \rangle + \langle \bar{f}'(t), \bar{k}(t) \rangle)$$

On a aussi

$$\bar{k}'(t) = (p \circ \tilde{k})'(t) = p'(\tilde{k}(t))\tilde{k}'(t) = J(\tilde{k}(t))\text{Jac}(f)(p(t)),$$

d'où

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2 \left( \langle \bar{f}(t), J(\tilde{k}(t))\text{Jac}(f)(p(t)) \rangle + \langle \text{Jac}(f)(p(t))J(\bar{f}(t)), \bar{k}(t) \rangle \right) \\ &= -2\text{Jac}(f)(p(t)) \left( \langle \bar{f}(t), J(\tilde{k}(t)) \rangle + \langle J(\bar{f}(t)), \bar{k}(t) \rangle \right) = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient car  $J^2 = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , et quels que soient  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\langle a, J(b) \rangle = \langle J(a), J^2(b) \rangle = -\langle J(a), b \rangle.$$

On a aussi  $\bar{k}(0) = p(\tilde{k}(0)) = p(c) = \bar{f}(0)$ . Ceci montre que  $h$  est constante, égale à 0, donc que  $\bar{f} = \bar{k}$ , c'est-à-dire que  $\tilde{k}$  est un relèvement de  $\bar{f}$ .

On a donc

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{k}(2\pi) - \tilde{k}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Jac}(f)(p(t)) \, dt.$$

## Contrôle classant du 2 juillet 2014

Les résultats du cours ou des exercices vus en travaux dirigés peuvent être utilisés en donnant des références précises.

Toutes les sous-variétés considérées, ainsi que les applications entre celles-ci, sont supposées de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### Problème I

Soient  $Y$  et  $Z$  deux sous-variétés, avec  $Z \subset Y$ . On note  $m_Y$  et  $m_Z$  leur dimension respective. On admet l'énoncé suivant, qui généralise un résultat du cours :

(E) Pour tout  $z_0 \in Z$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{z_0}$  de  $z$  dans  $Y$  et une application

$$\Phi : \mathcal{V}_{z_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_Y - m_Z}$$

telle que 0 soit valeur régulière de  $\Phi$  (c'est-à-dire que pour tout  $z \in \mathcal{V}_{z_0}$  tel que  $\Phi(z) = 0$ ,  $d\Phi_z : T_z Y \longrightarrow \mathbb{R}^{m_Y - m_Z}$  est surjective), et

$$\Phi^{-1}(\{0\}) = Z \cap \mathcal{V}_{z_0}.$$

1. Soit  $z \in Z$  et soient  $\mathcal{V}_z$ ,  $\Phi$  comme dans (E). Montrer que

$$T_z Z = \ker d\Phi_z.$$

2. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre une sous-variété  $X$  et la sous-variété  $Y$  considérée précédemment. Soit  $z \in Z$  et soient  $\mathcal{V}_z$ ,  $\Phi$  comme dans (E). Montrer que  $\Psi := \Phi \circ f$  est une submersion en un point  $x \in X$  tel que  $f(x) = z$  si et seulement si

$$T_z Y = T_z Z + \operatorname{Im} df_x.$$

3. Supposons que pour tout  $x \in X$  tel que  $z = f(x) \in Z$  la condition

$$(T) \quad T_z Y = T_z Z + \operatorname{Im} df_x$$

soit vérifiée. Montrer que  $W := f^{-1}(Z)$  est une sous-variété.

4. Si  $x \in W$ , et  $z = f(x)$ , montrer que

$$T_x W = df_x^{-1}(T_z Z).$$

5. Quelle est la dimension de  $W$  en fonction de la dimension  $m_X$  de  $X$ ,  $m_Y$  et  $m_Z$  ?

6. Soit  $V$  une sous-variété et  $g : V \rightarrow V$  une application différentiable. On suppose que pour tout  $x \in V$  tel que  $g(x) = x$ , l'endomorphisme  $dg_x : T_x V \rightarrow T_x V$  n'admet pas la valeur propre 1.

En considérant  $Y = V \times V$ , la sous-variété  $Z = \Delta(V) = \{(x, x) \in Y, x \in V\}$  et une application bien choisie  $f : Z \rightarrow Y$ , montrer que l'ensemble des points  $x \in V$  tels que  $g(x) = x$  est une sous-variété de dimension 0. En déduire que si  $V$  est compact, cet ensemble est fini. (On utilisera sans les redémontrer les identifications  $T_{(x, x')} Y = T_x V \times T_{x'} V$  et le difféomorphisme  $V \simeq Z$ ).

### Problème II

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré par la longueur de l'arc tel que  $\alpha$  réalise un homéomorphisme entre l'intervalle  $I$  et son image  $\mathcal{C} := \alpha(I)$ , de sorte que  $\mathcal{C}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . On plonge  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  par  $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ . On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On note respectivement

$$\pi_{12} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, 0), \quad \pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$$

les projections orthogonales de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R} \cdot e_3$  respectivement. On définit

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \alpha(u) + ve_3.$$

1. Montrer que  $\mathcal{S} := \mathbf{x}(I \times \mathbb{R})$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . (On pourra commencer par montrer que  $\mathbf{x}$  est injective et donner une expression de son inverse à l'aide de l'inverse de  $\alpha : I \rightarrow \alpha(I) = \mathcal{C}$  et de  $\pi_{12}$  et  $\pi_3$ ).

2. Calculer les coefficients des première et seconde formes fondamentales de  $\mathcal{S}$  dans le paramétrage  $\mathbf{x}$ . En déduire que la courbure de Gauss  $K$  est identiquement nulle et que la courbure moyenne vaut  $H(\mathbf{x}(u, v)) = -\frac{1}{2}\kappa(u)$ , où  $\kappa(u)$  est la courbure algébrique de l'arc  $\alpha$  dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ .

3. Dans cette question  $\mathcal{S}$  est une surface quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  et supposons qu'un segment de droite passant par  $p$  soit contenu dans  $\mathcal{S}$ . Paramétrisons celui-ci par  $\gamma : t \mapsto p + ta$  pour un certain vecteur  $a$  de  $\mathbb{R}^3$  de norme 1, sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0. Montrer que  $\gamma$  est une géodésique de  $\mathcal{S}$ .

4. Revenons à la surface  $\mathcal{S}$  de notre problème. D'après la question précédente, pour tout  $u \in I$ , la droite  $t \mapsto \alpha(u) + te_3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est une géodésique de  $\mathcal{S}$ . Notre but est maintenant de déterminer les géodésiques de  $\mathcal{S}$  qui ne sont pas de cette forme.

a. Soit  $\gamma : J \rightarrow \mathcal{S}$  une géodésique qui n'est pas une droite verticale. Montrer que pour tout  $s \in J$ ,  $\gamma'(s)$  n'est jamais colinéaire à  $e_3$ .

b. En déduire que  $\pi_{12} \circ \gamma : J \rightarrow \mathcal{C}$  est localement injective, c'est-à-dire que pour tout  $s \in J$ , il existe un intervalle  $J_s$  contenant  $s$  où  $\pi_{12} \circ \gamma$  est injective.

c. On suppose que  $\pi_{12} \circ \gamma$  est injective. Montrer qu'il existe un difféomorphisme  $\theta : J \rightarrow I$  et une fonction  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\gamma(s) = \pi_{12}(\gamma(s)) + \pi_3(\gamma(s)) = \alpha(\theta(s)) + F(s)e_3.$$

d. En utilisant le fait que la composante tangentielle de  $\gamma''$  est nulle, montrer que  $\theta$  et  $F$  sont des fonctions affines.

e. Conclure sur la forme des géodésiques maximales de  $\mathcal{S}$ .

### Problème III

Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte connexe de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que l'application de Gauss  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est injective.

Montrer que la courbure de Gauss ne peut pas prendre de valeurs strictement négatives puis que  $\int_{\mathcal{S}} K(p) \, dp = 4\pi$ .

### Question subsidiaire (hors barème)

Démontrer l'énoncé (E) du problème I.

### Corrigé du contrôle classant du 2 juillet 2014

I. L'énoncé (E) est une généralisation de la proposition I.4.6. Sa « réciproque » est la proposition I.8.29.

I.1. Soit  $v \in T_p Z$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow Z$  un arc paramétré tracé dans  $\mathcal{V}_z \cap Z$  avec  $\alpha(0) = z$  et  $\alpha'(0) = v \in T_p Z$ . On a pour tout  $t \in I$ ,  $\Phi(\alpha(t)) = 0$ , et en différentiant

$$d\Phi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0.$$

En  $t = 0$ , ceci donne  $d\Phi_z(v) = 0$ . Ainsi  $T_z Z \subset \ker d\Phi_z$ . Pour montrer l'égalité, on compare les dimensions : par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Im} d\Phi_z) = \dim T_z Y - \dim(\ker d\Phi_z)$$

Comme 0 est valeur régulière,  $d\Phi_z$  est surjective et le membre de gauche est  $m_Y - m_Z$ . Le membre de droite est  $m_Y - \dim(\ker d\Phi_z)$ , d'où  $\dim T_z Z = m_Z = \dim(\ker d\Phi_z)$ .

I.2.  $d\Psi_x = d(\Phi \circ f)_x = d\phi_z \circ df_x : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^{m_Y - m_Z}$ . Supposons  $d\Psi_x$  surjective. Soit  $v \in T_z Y$ . Posons  $w = d\Phi_z(v)$ . Par hypothèse, il existe  $u \in T_x X$  tel que  $d\Psi_x(u) = d\Phi_z(df_x(u)) = w$ . Ainsi  $df_x(u) - v \in \ker d\Phi_z = T_z Z$ . Ceci montre que  $v \in T_z Z + \operatorname{Im} df_x$ .

Réciproquement, si  $T_z Y = T_z Z + \operatorname{Im} df_x$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{m_Y - m_Z} &= d\Phi_z(T_z Y) = d\Phi_z(T_z Z + \operatorname{Im} df_x) = d\Phi_z(\ker d\Phi_z + \operatorname{Im} df_x) \\ &= d\Phi_z(\operatorname{Im} df_x) = \operatorname{Im} d\Phi_z \circ df_x = \operatorname{Im} d\Psi_x. \end{aligned}$$

I.3. La condition pour être une sous-variété est locale. Prenons donc  $a \in f^{-1}(Z)$ , posons  $b = f(a) \in Z$  et soient  $\mathcal{V}_b$ ,  $\Phi$  comme dans (E). Sur l'ouvert  $\mathcal{U}_a := f^{-1}(\mathcal{V}_b)$  définissons  $\Psi = \Phi \circ f : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathbb{R}^{m_Y - m_Z}$ . On a donc  $\mathcal{U}_a \cap W = \Psi^{-1}(\{0\})$ . D'autre part, pour tout  $x \in \mathcal{U}_a \cap W$ , en posant  $z = f(x) \in Z$ , on a, par hypothèse et d'après la question précédente,

$$(1) \quad d\Psi_x(T_x X) = d\Phi_z(\operatorname{Im} df_x) = d\Phi_z(\operatorname{Im} df_x + \ker d\Phi_z) = d\Phi_z(T_z Y) = \mathbb{R}^{m_Y - m_Z}.$$

Ceci montre que  $d\Psi_x$  est surjective. Comme ceci est vrai pour tout  $x \in W \cap \mathcal{U}_a$ , on voit que 0 est une valeur régulière de  $\Psi$ . Ceci montre que  $W$  est une sous-variété.

I.4. Soit  $x \in W$ . Posons  $z = f(x) \in Z$ . Ce qui précède, avec les mêmes notations montre que  $T_x W = \ker d\Psi_x = \ker(d\Phi_z \circ df_x)$ . Autrement dit  $T_x W = df_x^{-1}(\ker d\Phi_z) = df_x^{-1}(T_z Z)$ .

I.5. L'équation (1) montre que

$$m_Y - m_X = \dim \operatorname{Im} d\Psi_x = m_X - \dim \ker \Psi_x,$$

et d'autre part  $\dim \ker \Psi_x = \dim T_x X = \dim W$ . On trouve donc  $\dim W = m_X - m_Y + m_Z$ .

I.6 On prend  $f(x, x) = (g(x), x)$ . On a alors  $W = f^{-1}(Z) = \{(x, x) \in Y, g(x) = x\}$ . Cet ensemble correspond à l'ensemble des points fixes de  $g$  via le difféomorphisme entre  $V$  et  $Z$ . On a quels que soient  $v, w \in T_x V$ ,

$$df_{(x,x)}(v, v) = (dg_x(v), v).$$

L'espace tangent à  $Z$  en  $(x, x)$  est  $\{(u, u) \in T_x V \times T_x V = T_{(x,x)} Y\}$ . On voit alors que la condition (T) est vérifiée dans ce cadre si tout vecteur  $(s, t) \in T_x V \times T_x V = T_{(x,x)} Y$  peut s'écrire sous la forme

$$(s, t) = (dg_x(v), v) + (u, u)$$

pour certains  $u, v \in T_x V$ . C'est un système linéaire qui est de Cramer si et seulement si  $\text{Id}_{T_x V} - dg_x$  est inversible, ce qui est la condition de l'énoncé. D'après ce qui précède,  $W$  est une sous variété de dimension  $m_Z - m_Y + m_Z = 0$ . Si  $V$  est compacte,  $Z$  aussi, et  $W$  est un ensemble discret dans un compact, donc fini.

II.1 On vérifie facilement que  $\mathbf{x}$  est injective : si  $\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_1, v_2)$ , on a  $\alpha(u_1) + v_1 e_3 = \alpha(u_2) + v_2 e_3$ . Par indépendance linéaire, on en déduit que  $\alpha(u_1) = \alpha(u_2)$  et  $v_1 = v_2$ . Comme  $\alpha$  est injective, on a  $u_1 = u_2$ .

Soit  $(x, y, z)$  un point de  $\mathcal{S}$ . On cherche une formule pour  $(u, v)$  tel que  $\mathbf{x}(u, v) = (x, y, z)$ . On a nécessairement  $v = z$  et  $(x, y) \in \mathcal{C} = \alpha(u)$ . Donc si l'on note  $\alpha^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow I$  l'inverse de  $\alpha$ , on a  $u = \alpha^{-1}((x, y))$ . Donc  $(x, y, z) \mapsto (\alpha^{-1}((x, y)), z)$  est l'inverse de  $\mathbf{x}$ , et l'on voit que cet inverse est continu, donc  $\mathbf{x}$  est un homéomorphisme sur son image.

Montrons enfin que  $\mathbf{x}$  est une immersion. Quels que soient  $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$  et  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$d\mathbf{x}_{(u,v)}(h_1, h_2) = (h_1 \alpha'(u), h_2).$$

Ceci est nul si et seulement si  $h_2 = 0$  et  $h_1 \alpha'(u) = 0$ . Comme  $\alpha'$  ne s'annule pas,  $h_1 = 0$ .

Ainsi  $\mathbf{x}$  est une immersion injective qui réalise un homéomorphisme sur son image. Celle-ci est donc une sous-variété.

II.2 On calcule :  $\mathbf{x}_u(u, v) = \alpha'(u)$ ,  $\mathbf{x}_v(u, v) = e_3$  et donc

$$E = \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = 1, \quad G = 1, \quad F = 0.$$

On a aussi  $\mathbf{x}_{uu}(u, v) = \alpha''(u)$ ,  $\mathbf{x}_{uv}(u, v) = 0$ ,  $\mathbf{x}_{vv}(u, v) = 0$  et  $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = 1$ , d'où

$$e = \det(\alpha'(u), e_3, \alpha''(u)), \quad f = 0, \quad g = 0.$$

On en déduit  $K = 0$  et  $H = \frac{1}{2} \det(\alpha'(u), e_3, \alpha''(u))$ . Or

$$\det(\alpha'(u), e_3, \alpha''(u)) = -\det(\alpha'(u), \alpha''(u), e_3) = -\langle \alpha'(u) \wedge \alpha''(u), e_3 \rangle$$

et  $\alpha''(u) = \kappa(u) \vec{n}(u)$ , où  $\vec{n}(u)$  est le vecteur normal unitaire à l'arc  $\alpha$  en  $u$  et  $\kappa$  la courbure algébrique de  $\alpha$  dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ . En particulier  $\alpha'(u) \wedge \vec{n} = e_3$ . On obtient donc

$$H = -\frac{1}{2} \kappa(u).$$

II.3.  $\gamma''(t) = 0$ , en particulier  $[\gamma''(t)]^T = 0$ .

II.4.a Si  $\gamma'(s_0)$  est colinéaire à  $e_3$ , alors d'après le théorème d'existence et d'unicité des géodésiques,  $\gamma = \gamma_{p,v}$  (notation du cours) avec  $p = \gamma(s_0)$  et  $v = \gamma'(s_0)$ , et  $\gamma$  est alors une droite verticale : contradiction.



II.4.b. Comme  $\gamma$  est une géodésique,  $\gamma'$  ne s'annule pas. D'autre part

$$\gamma(s) = \pi_{12}(\gamma(s)) + \pi_3(\gamma(s))$$

et donc

$$\gamma'(s) = \pi_{12}(\gamma'(s)) + \pi_3(\gamma'(s))$$

D'après 4.a,  $\pi_{12}(\gamma'(s))$  ne s'annule pas. D'après le théorème d'inversion locale, pour tout  $s \in J$ , il existe un intervalle ouvert  $J_s$  contenant  $s$  tel que  $s \mapsto \pi_{12}(\gamma'(s))$  réalise un difféomorphisme avec son image (un voisinage de  $\pi(\gamma(s))$  dans  $\mathcal{C}$ ).

II.4.c Reprenons l'inverse  $\alpha^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow I$  déjà considéré ci-dessus, et posons  $\theta : J \rightarrow I$ ,  $\theta(s) = \alpha^{-1}(\pi_{12}(\gamma(s)))$ . Posons  $\pi_3(\gamma(s)) = F(s)e_3$ . Il est clair que  $\theta$  et  $F$  sont différentiables. On a donc

$$\gamma(s) = \pi_{12}(\gamma(s)) + \pi_3(\gamma(s)) = \alpha(\theta(s)) + F(s)e_3.$$

d'où

$$\gamma'(s) = \theta'(s)\alpha'(\theta(s)) + F'(s)e_3.$$

D'après 4.a,  $\theta'$  ne s'annule pas, et donc  $\theta$  est un difféomorphisme sur son image.

II.4.d On a

$$\gamma''(s) = \theta''(s)\alpha'(\theta(s)) + \theta'(s)^2\alpha''(\theta(s)) + F''(s)e_3.$$

Il est clair que  $\theta'(s)^2\alpha''(\theta(s))$  est une composante normale car une base de  $T_{\gamma(s)}\mathcal{S}$  est  $(\alpha'(s), e_3)$  et  $\alpha''(s)$  est orthogonal à ces deux vecteurs. La composante tangentielle de  $\gamma''(s)$  est donc  $\theta''(s)\alpha'(\theta(s)) + F''(s)e_3$ . Comme  $\gamma$  est une géodésique, cette composante tangentielle est nulle, et comme  $\alpha'(\theta(s))$  et  $e_3$  sont linéairement indépendants, on voit que  $\theta'' = 0$ ,  $F'' = 0$ , ce qui permet de conclure.

II.4.e Quitte à faire un changement de variable affine sur la variable, on peut supposer que  $J \subset I$  et que  $\theta$  est l'identité (ceci ne change pas le fait que  $\gamma$  est une géodésique). Ainsi, sur un intervalle  $J \subset I$  où  $\pi_{12} \circ \gamma$  est injective, on a

$$\gamma(s) = \alpha(s) + (as + b)e_3$$

pour certaines constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ . Par le théorème d'unicité globale des géodésiques, une géodésique maximale qui n'est pas une droite verticale passant par un point de  $\mathcal{C}$  est aussi de cette forme et son intervalle de définition maximal est  $I$  (en particulier, on voit à posteriori que  $\pi_{12} \circ \gamma$  reste injective sur  $I$ ).

III.1 On sait (exercice 2 feuille 5) que la restriction de  $N$  à  $\mathcal{S}_{K \geq 0}$  est surjective. Donc si  $N$  est injective sur  $\mathcal{S}$ , on a donc nécessairement  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{K \geq 0}$ .

III.2 Appliquons la formule de changement de variables à la fonction constante égale à 1 sur  $\mathcal{S}$  pour le changement de variables  $N$ . On a

$$\int_{\mathcal{S}} |\text{Jac}(N)(p)| dp = \int_{\mathbb{S}^2} n(N, 1)(q) dq.$$

On a  $|\text{Jac}(N)(p)| = |K(p)| = K(p)$  car  $K \geq 0$  d'après la question précédente. D'autre part,  $N$  est une bijection, donc  $n(N, 1)(q) = 1$  si  $q$  est une valeur régulière de  $N$  et 0 sinon. Notons  $A$  l'ensemble des valeurs singulières de  $N$  dans  $\mathbb{S}^2$ . C'est un ensemble de mesure nulle. On obtient donc

$$\int_{\mathcal{S}} K(p) dp = \int_{\mathbb{S}^2 \setminus A} 1 dq = \int_{\mathbb{S}^2} 1 dq = 4\pi.$$

# Index

- application
  - de Gauss, 116
  - de Weingarten, 117
- arc
  - birégulier, 61
  - géométrique, 56
  - géométrique orienté, 57
  - géométrique périodique, 69
  - géométrique simple, 57
  - paramétré, 56
- base directe, 94
- boule géodésique, 164
- carte, 6
- champ de vecteurs, 36, 243
  - (tangents à une sous-variété), 39
- changement de paramétrage, 18, 56
- composante connexe, 251
- condition initiale, 43, 243
- connexe, 251
  - par arcs, 251
- connexion, 144
- convergence dominée, 191
- convexe (arc géométrique), 87
- courbe
  - de Jordan, 69
  - intégrale, 243
  - intégrale, 43
  - paramétrée, 54
  - (paramétrée) régulière, 56
  - périodique, 67
  - simple, 57
- courbure
  - géométrique, 62
  - algébrique totale, 79
  - d'une courbe paramétrée, 60
  - de Gauss, 118
  - moyenne, 118
  - principale, 118
  - totale, 88
- crochet de Lie, 41
- degré, 75
- degré, 206
- dénombrable à l'infini ( $\sigma$ -compact), 17
- déplacement, 92
- dérivation (d'une algèbre), 36
- dérivée covariante, 144, 146
- déterminant jacobien, 206
- difféomorphisme, 25
- directions principales, 118
- distingué (voisinage), 73
- divergence (d'un champ de vecteurs), 197
- domaine intérieur, 111
- domaine régulier, 197
- équation
  - de Gauss, 148
  - de Codazzi-Mainardi, 148
- espace tangent, 21
- flot
  - global, 45, 247
  - local, 43, 244
- géodésique, 157
  - radiale, 164
- gradient, 201
- Green-Ostrogradski (formule de), 197
- hessienne, 32
- homéomorphisme, 252
- homotopie, 76
- hypersurface, 6
- immersion, 4, 27
- indice
  - d'entrelacement, 85
- indice (d'un champ de vecteurs en un zéro isolé), 213
- intersection transverse, 102
- isométrie
  - infinitésimale, 139
- isométrie, 139
- Jacobi (identité de), 42

- Leibnitz (identité de), 37
- localement compact, 16
- localement connexe, 252
  - par arcs, 252
- longueur de l'arc, 58
- multiplicateurs de Lagrange, 29
- nombre d'enroulement, 78
- nombre de Lebesgue, 253
- non dégénéré (champ de vecteurs), 213, 215
- ombilicale (surface), 121
- orientable (surface), 96
- orientation
  - d'une surface, 96
  - de  $\mathbb{R}^N$ , 94
- orientée (surface), 96
- paramétrage
  - par les lignes de courbures, 177
  - d'une sous-variété, 6
  - orthogonal, 177
  - par la longueur de l'arc, 59
- partition de l'unité, 16
- plan osculateur, 61
- plongement, 252
- point
  - critique, 5, 29
  - elliptique, 121
  - hyperbolique, 121
  - ombilical, 121
  - parabolique, 121
  - plan, 121
  - régulier, 5, 29
- première forme fondamentale, 117
- produit vectoriel, 95
- repère de Frenet, 65
- seconde forme fondamentale, 117
- section normale, 120
- spirale logarithmique, 60
- submersion, 4, 27
- surface, 6
- surfaces parallèles, 132
- système de coordonnées, 6
- théorème
  - de Meusnier, 119
- théorème
  - de point fixe de Brouwer, 202
  - de Sard, 34
  - d'Ascoli-Arzelà, 253
  - d'inversion globale, 243
  - d'inversion locale, 26, 242
  - de Baire, 226
  - de Banach, 229
  - de Bonnet, 174
  - de Brouwer-Samelson, 111
  - de Chern-Lashoff, 196
  - de Fáy-Milnor, 90
  - de Fenchel, 90
  - de Gauss-Bonnet, 222
  - de Hilbert, 125
  - de Hopf-Rinow, 170
  - de Jellett, 127
  - de Jordan, 86
  - de Jordan-Brouwer, 109
  - de l'application ouverte, 228
  - de la sphère chevelue, 212
  - de Liebmann, 127
  - de point fixe de Banach, 238
  - de Whitney-Grauert, 80
  - des accroissements finis, 235
  - des fonctions implicites, 240
  - du graphe fermé, 230
  - du point fixe de Brouwer, 78
  - fondamental de la théorie des courbes, 63, 66
  - Hopf Umlaufsatz, 82
- torsion, 64
- trace (d'une courbe paramétrée), 54
- transversalité, 102
- trièdre de Frenet, 65
- valeur
  - critique, 5
  - régulière, 29
  - régulière, 5
- valeur
  - critique, 29
- vecteur normal unitaire, 61
- vecteur tangent, 21, 55
  - unitaire, 60
- voisinage
  - normal, 168
  - tubulaire, 129
- zéro isolé, 213



# Bibliographie

- [1] B. Berger, Marcel et Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, second edition, 1992.
- [2] H. Cartan. *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [3] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse. Tome III : Chapitres XVI et XVII*. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970.
- [4] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [5] F. Golse. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2012.
- [6] A. Montiel, Sebastián et Ros. *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Translated and updated from the 1998 Spanish edition by the authors.
- [7] F. Pacard. *Analyse réelle et complexe*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2012.
- [8] C. Viterbo. *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2009.