Quadrature pour les fonctions de Bessel

Martin

April 20, 2016

1 Introduction

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On souhaite donner une approximation de $J_0(|x|)$ sous la forme

$$J_0(|x|) \approx \sum_{k=0}^{N_\xi} w_k \exp(i\xi_k \cdot x)$$

Une telle expression se prête au calcul rapide d'une somme de la forme

$$\sum_{l=0}^{N} J_0(|x-y|)f(y)$$

à l'aide de transformées de Fourier rapides non-uniformes (les variables x et y sont séparées dans la forme approchée). Or une telle expression existe sous une forme continue car on a pour tout x

$$J_0(|x|) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle unité. Le but de ce petit document est de majorer la différence entre cette intégrale et son approximation par une somme de Riemann.

Proposition 1.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\frac{|X|}{N} < 1$. On a alors la majoration suivante :*

$$\left| J_0(|x|) - \frac{1}{N}\sum_j e^{ix\sin\left(\frac{2j\pi}{N}\right)} \right| \leq C_N \left(e\frac{|X|}{N} \right)^N \tag{1}$$

Où $C_N \leq 3$ et $C_N \underset{N\to+\infty}{\to} 2$

2 Quadrature pour les fonctions périodiques

Proposition 2.1. *Soit f une fonction de classe C^2 2π périodique. On a alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(2\frac{j\pi}{N}\right) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_{kN}(f)$$

où $c_k(f)$ représentent les coefficients de Fourier de f

Preuve. Comme f est C^2, elle est égale à sa série de Fourier (qui converge normalement).En injectant l'expression

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$$

dans le membre de gauche, et en remarquant que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{ik\frac{2j\pi}{N}} = \int_0^{2\pi} e^{ikx} + \delta(k \in N\mathbb{Z}^*)$$

□

Le résultat suivant montre que la méthode des rectangles pour une fonction périodique est précise à n'importe quel ordre.

Proposition 2.2. *Dans le cas où f est de classe C^m, on a la majoration*

$$\left| \int_0^{2\pi} f - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(2\frac{j\pi}{N}\right) \right| \leq \frac{1}{N^m} \zeta(m) \left\| f^{(p)} \right\|_\infty$$

Où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Preuve. On effectue une majoration par inégalité triangulaire dans la proposition précédente et on applique l'identité

$$c_k\left(f^{(p)}\right) = (ik)^p c_k(f)$$

□

Sur des cas particuliers, il peut être difficile d'estimer le terme $\left\| f^{(p)} \right\|_\infty$. Et même si celle-ci est estimée précisément, il se peut que l'inégalité donnée par la proposition précédente soit sous-optimale. Nous utilisons uniquement la forme exacte donnée par la proposition 2.1 dans la suite.

3 Résultats sur les fonctions de Bessel

On note J_n la fonction de Bessel d'ordre n. On a la définition suivante, qui permet d'identifier les coefficients de Fourier de $u \mapsto e^{iz \sin u}$

Définition 3.1. Par définition, la fonction de Bessel d'ordre n est donnée par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin(u)} e^{-inu} du$$

J'ai ensuite trouvé ce résultat, dont la preuve que je n'ai pas encore bien décortiquée, utilise la théorie des séries de Laurent.

Proposition 3.1. *Pour tout $R > 1$, pour tout $t \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a la majoration suivante :*

$$|J_n(t)| \leq R^{-|n|} e^{R|t|}$$

4 Majoration de l'erreur

On peut maintenant prouver la majoration annoncée, que je rappelle ici :

Proposition 4.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\frac{|X|}{N} \leq\!< 1$. On a alors la majoration suivante :*

$$\left| J_0(|x|) - \frac{1}{N} \sum_j e^{ix \sin\left(\frac{2j\pi}{N}\right)} \right| \leq C_N \left(e\frac{|X|}{N}\right)^N$$

Où $C_N \leq 3$ et $C_N \underset{N \to +\infty}{\to} 2$

Preuve. D'après le résultat sur les quadratures périodiques, et l'identification des coefficients de Fourier de la fonction dont on approche l'intégrale, en notant $\varepsilon(X, N)$ le terme d'erreur à l'intérieur de la valeur absolue, on a

$$\varepsilon(X, N) = -\sum_{k \in N\mathbb{Z}^*} J_k(X)$$

On utilise alors la majoration des fonctions J_k : pour toute famille $R_k > 1$ on a

$$|\varepsilon(X, N)| \leq 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} R_k^{-Nk} e^{R_k |X|}$$

On peut alors optimiser chaque terme en R_k, soit $R_k = \frac{Nk}{|X|} > 1$ et on trouve

$$|\varepsilon(X,N)| \leq 2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{e|X|}{N}\right)^{kN} \times \frac{1}{k^{kN}}$$

On applique l'inégalité de Hölder pour trouver :

$$|\varepsilon(X,N)| \leq 2 \left(\frac{e|X|}{N}\right)^{N} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{kN}}$$

On pose $\gamma_N = \frac{1}{k^{kN}}$. On a alors

$$0 \leq \gamma_N - 1 = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^{kN}} \leq \sum_{k\geq 2} \frac{1}{2^{kN}}$$

Donc

$$0 \leq \gamma_N - 1 \leq \frac{1}{2^{2N} - 2^N}$$

. On en déduit que $C_N = 2\gamma_N \leq 3$ et C_N tend vers 2 quand N tend vers l'infini.

□

5 Développement asymptotique en fonction de ε et de $|X|$

5.1 En fonction de ε

Dans cette section, on suppose que ε tend vers 0 et $|X|$ est fixé. On cherche à donner un équivalent de N tel que

$$C_N \left(e\frac{|X|}{N}\right)^{N} = \varepsilon \tag{2}$$

Pour commencer, il est clair que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N(\varepsilon) = +\infty$. En prenant le logarithme, on a

$$N \log N - N \log(e|X|) = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \log(C_N)$$

On a donc l'équivalent suivant : $N\log(N) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. On en déduit également en passant au logarithme que $\log(N) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \log\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$. Il s'ensuit que

$$N(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)}$$

.

5.2 En fonction de $|X|$

On suppose à présent que ε est fixé et $|X|$ tend vers l'infini. On cherche un équivalent des N positifs vérifiant (2). On suppose que $\varepsilon < 1$. En passant (2) au logarithme, on peut écrire

$$\log(N) - \log(e|X|) = \frac{1}{N}\log\left(\frac{C_N}{\varepsilon}\right)$$

. On en déduit d'abord que $N > e|X|$, donc $N \underset{|X|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci entraîne, en le réinjectant dans l'équation précédente, que $N \underset{|X|\to+\infty}{\sim} e|X|$. En écrivant ensuite

$$\log(N) - \log(e|X|) = \log\left(1 + \frac{N - e|X|}{e|X|}\right) \underset{|X|\to+\infty}{\sim} \frac{N - e|X|}{e|X|}$$

, on a finalement le développement asymptotique suivant pour N

$$N = e|X| + \log\left(\frac{C_N}{\varepsilon}\right) + o(1)$$