

Aflevering 2: Lokalisering

Sune Lauth Gadegaard

Efterår 2022

I 2012 startede man med at bygge såkaldte supersygehuse i Danmark. Disse supersygehuse skulle centralisere driften og ikke mindst specialiseringerne inden for specifikke kerneområder. Supersygehusenes placering var under vedtagelsen et særligt ømtåleligt politisk emne, idet stor prestige og mange arbejdspladser følger med sådan et sygehuse. Derfor kan det diskuteres, om sygehusene blev placeret optimalt ud fra en objektiv målestok. Det skal undersøges i denne opgave!

Den vedlagte Excel-fil indeholder fire ark som alle er beskrevet i [Tabel 1](#). Der er, som nævnt, i Excel-filen vedlagt data for indbyggertal for hver kommune fra forskellige årstal samt prædiktioner for fremtiden (tal fra Danmarks Statistik). Modellerne i resten af opgaven skal sørge for, at de etablerede supersygehuse har kapacitet til at håndtere de tildelte kommuners indbyggertal både nu (2022-tal) og i år 2030. Det er ikke nødvendigt, at modellen kan håndtere indbyggertallene helt frem til 2045, da det formodes, at udvidelser kan planlægges inden da.

Givet de mange modeller, som langt hen ad vejen er identiske, har jeg valgt ikke at forplumre den vejledende besvarelse med alt for meget kode. Koden kan derfor findes på Brightspace i stedet, hvor der vil være en Python fil til hver opgave.

Opgave 1: Opstil en model (det vil sige, formuler en model *matematisk*), som kan finde placeringen af 6 supersygehuse i Danmark. Modellen skal udpege 6 (forskellige) kommuner, hvor der skal etableres supersygehuse og det skal samtidig afgøres hvilke andre kommuner, der skal leverer patienter til de pågældende supersygehuse (location-allocation). Det antages, at en kommunes indbyggere tildeles helt til et supersygehus (single sourcing). Målet for modellen er at minimere de samlede omkostninger ved at etablere supersyge + omkostningen ved at etablere ekstra kapacitet ved de sygehuse hvor det er nyttigt. Implementer og løs modellen i Pyomo + Python. Visualiser og kommenter på løsningen.

Tabel 1: Oversigt over arkene i Excel filen med data

Sheet navn	Forklaring
Indbyggertal i kommuner	Indeholder data omkring indbyggertal i kommunerne i forskellige år.
Etableringsomkostninger + kap	Indeholder tre elementer: etableringsomkostninger for et "basis" supersygehus i hver kommune angivet i milliarder kroner. Kapaciteten i "basis" supersygehus målt i antal borgere et basissygehus i kommunen kan håndtere. Slutteligt angives også prisen for at udvide kapaciteten i et basissygehus med yderligere 1000 potentielle patienter. Denne pris er per 1000 ekstra patienter. Det antages, at sygehusene maksimalt kan udvides med op 50.000 ekstra potentielle patienter.
Afstande mellem kommuner (km)	Indeholder en afstandsmatrix, som angiver afstanden i kilometer mellem hvert par af kommuner (en central placering er brugt i hver kommune).
Køretid mellem kommuner (sek)	Indeholder en køretidsmatrix, som angiver hvor mange sekunder det tager, at køre fra en kommune til en anden.

Svar til Opgave 1:

Vi vil bruge følgende data i modellen

Parameter	Beskrivelse
I	Mængde af kommuner
d_j^{2022}	Antal indbyggere i kommune $j \in I$ i år 2022
d_j^{2030}	Antal indbyggere forventet i kommune $j \in I$ i år 2030
f_i	Faste etableringsomkostninger ved etablering af basis supersygehus i kommune $i \in I$ målt i milliarder kroner
s_i	Kapacitet i basis sygehus i kommune $i \in I$ hvis etableret
Φ_i	Omkostningen ved at udvide kapaciteten med 1000 på et supersygehus i kommune $i \in I$ målt i kroner
d_{ij}	Afstanden mellem kommune $i \in I$ og kommune $j \in J$ målt i kilometer
t_{ij}	Afstanden mellem kommune $i \in I$ og kommune $j \in J$ målt i minutter

Lad følgende mængder af variabler være givet:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{hvis et sygehus etableres i kommune } i \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis kommune } j \text{ er opland til sygehus i kommune } i \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

z_i = antal 1000 ekstra patienter basis sygehus i kommune i udvides med

Da kan problemet opskrives som følger:

$$\begin{aligned} \min & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \\ \text{s.t.: } & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\ & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\ & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\ & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\ & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\ & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\ & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\ & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I \end{aligned}$$

Læg særligt mærke til, at jeg har tilføjet begrænsningerne $x_{ii} = y_i$ til modellen, da der ellers kunne være kommuner der ikke blev tildelt til det sygehus der ligger i kommunen selv. Dette skyldes, at der ikke er nogen "omkostninger" forbundet med at tildele kommuner til sygehuse, hvorfor det eneste modellen tager højde for er, at kapaciteterne i de enkelte sygehuse skal udnyttes så godt som over hovedet muligt. Det er naturligvis helt OK hvis disse begrænsninger ikke er med, da det ikke står som et krav i opgaven!

Den optimale løsningsværdi, for det data jeg har valgt at bruge for 2013, er 28.427.501.000 kroner. Den totale gennemsnitlige afstand er cirka 175km og den gennemsnitlige rejsetid er 128 minutter.

Der skal (i min løsning, der kan være flere optimale) oprettes sygehuse som angivet i den følgende tabel:

Kommune	Udvidet kapacitet
Frederiksberg kommune	50.000
Silkeborg kommune	50.000
Roskilde kommune	49.000
Greve kommune	50.000
Lolland kommune	50.000
Odsherred kommune	50.000

Opgave 2: Det er åbenlyst ikke den smarteste måde at placere sygehuse på! Der er slet ikke taget stilling til, at flest muligt skal kunne komme hurtigt til et supersyge; vi har blot fundet en løsning, som har lavest mulige omkostninger. I stedet bør modellen ændres, så omkostningerne ved at etablere supersygehus + ekstra kapacitet ikke overstiger omkostningen fra **Opgave 1** + 5% (denne begrænsning antages for **Opgave 2, 3, 4, 5** og **6**). Samtidig skal den samlede rejse-afstand fra kommunerne til supersygehusene minimeres. Implementer og løs modellen i Pyomo + Python. Visualiser og kommenter på løsningen.

OBS: frygt ej, hvis det tager laaaang tid at løse denne model. Den skal nok klare det! Det kan være en god idé at lave sig et lille "legetøjs" datasæt, som består af fx halvdelen af kommunerne, til at teste formuleringer på, inden man fyrer hele kanonen af på det fulde datasæt

Svar Opgave 2:

Lad $Z_1^* = 28.427.501.000$ være den optimale løsningsværdi fra **Opgave 1**. Da skal modellen ændres til

Da kan problemet opskrives som følger:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.:} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\
 & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\
 & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \leq Z_1^* (1 + 0.05) \\
 & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\
 & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I
 \end{aligned}$$

Den optimale totale rejseafstand er 4904.5 kilometer, mens den total rejsetid er 4370.5 minutter. Omkostningerne som denne løsning løber op i er cirka 29.828.449.999 hvilket efterlade cirka 20.426.050 af budgettet. Det svarer til, at vi har brugt $(29.828.449.999 / 28.427.501.000 - 1) = 4.9\%$ mere end i **Opgave 1**.

Der skal (i min løsning, der kan være flere optimale) oprettes sygehuse som angivet i den følgende tabel:

Kommune	Udvidet kapacitet
Odense kommune	50.000
Herning kommune	50.000
Roskilde kommune	50.000
Egedal kommune	50.000
Vejen kommune	50.000
Rebild kommune	50.000

Opgave 3: Givet, at man sjældent dør af at køre langt til et sygehus i Danmark, men oftere ved at køre *længe*, ændre da objektfunktionen til at minimere den samlede køretid. Løs den opdaterede model vha. Pyomo + Python og visualiser og kommenter på løsningen.



Svar:

For at løse denne opgave skal vi blot ændre objektfunktionen til at tage højde for rejsetid i stedet for afstand hvilket gøres som følger:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} t_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.:} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\
 & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\
 & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \leq Z_1^* (1 + 0.05) \\
 & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\
 & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I
 \end{aligned}$$

Den optimale totale rejseafstand er cirka 5024.5, mens den total rejsetid er 4117.2. Det vil sige, at rejseløbetiden er faldet med cirka $(4904.5 - 4370.5)/4904.5 = 10.9\%$ mens afstanden er steget med $(5024.5 - 4904.5)/4904.5 = 2.5\%$

Der skal (i min løsning, der kan være flere optimale) oprettes sygehuse som angivet i den følgende tabel:

Kommune	Udvidet kapacitet
Herning kommune	50.000
Rudersdal kommune	50.000
Greve kommune	50.000
Middelfart kommune	50.000
Ringsted kommune	50.000
Rebild kommune	50.000

Opgave 4: I **Opgave 2** og **Opgave 3** blev den samlede kørselsafstand/kørselstid minimeret uden at tage højde for, at nogle kommuner har mange indbyggere og andre få. Ændre objektfunktionen fra **Opgave 3** således, at der tages højde for

antallet af indbyggere i kommunerne i 2030. Det vil sige, at kommuner med mange indbyggere skal *vægtes* højere i objektfunktionen end kommuner med få indbyggere.

Svar:

Jeg lader her vægten for kommune j være givet ved det gennemsnitlige indbyggertal i kommunen med hensyn til 2022 og 2030:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} t_{ij} \left(\frac{d_j^{2022} + d_j^{2030}}{2} \right) x_{ij} \\
 \text{s.t.:} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\
 & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\
 & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \leq Z_1^* (1 + 0.05) \\
 & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\
 & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I
 \end{aligned}$$

Dermed har modellen et incitament til at tildele kommuner med mange indbyggere til sygehuse tæt på, da der ellers er mange mennesker, der skal flytte sig langt, hvorimod incitamentet for at tildele kommuner med få indbyggere til sygehuse tæt på bliver mindre.

Man kunne også snildt bare have benyttet sig af indbyggertallet i enten 2022 eller 2030.

Den optimal objektfunktions-værdi med det data jeg har brugt er 12.224.558.057,5 men dette tal kan dog ikke rigtigt fortolkes.

Der skal (i min løsning, der kan være flere optimale) oprettes sygehuse som angivet i den følgende tabel:

Kommune	Udvidet kapacitet
Aalborg kommune	49.000
Frederiksberg kommune	50.000
Silkeborg kommune	50.000
Rødovre kommune	50.000
Middelfart kommune	50.000
Ringsted kommune	50.000

Opgave 5: Indtil nu har fokus været på "effektive" løsninger, idet *summen* af kørselsafstandene er blevet minimeret. Men netop med hensyn til sygehuse kunne man argumentere for, at "retfærdighed" også er væsentligt. Ændre nu modellen til at minimere den maksimale afstand fra en kommune til den kommune hvortil den er allokeret (p -center objektfunktion).

OBS: Det kan være nødvendigt som i tilfældet med clustering af sørge for, at hvis en kommune får et sygehus, så skal kommunens egne borgere også serviceres der.

Svar:

Modellen skal nu udvides med en variable ρ^{\max} , som i en optimal løsning antager værdien af den længste afstand en oplandskommune har til sit sygehus.

Dermed bliver modellen

$$\begin{aligned}
 & \min \rho^{\max} \\
 & \text{s.t.: } \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\
 & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\
 & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \leq Z_1^* (1 + 0.05) \\
 & \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \leq \rho^{\max}, & \forall j \in I \\
 & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\
 & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I
 \end{aligned}$$

Den optimale værdi af ρ^{\max} er cirka 178.8, den total rejsetid er cirka 6678 minutter mens den totale rejseafstand er cirka 8623 kilometer. Der er mange forskellige alternative optimale løsninger til denne model!

Opgave 6: Antag nu, at objektfunktionens fokus igen flyttes til den aggregerede afstand, men antag samtidig, at det er i orden at lade nogle kommuner være tilknyttet to eller flere supersygehuse (multi-sourcing). Hvorledes skal modellen ændres for at tage højde for dette? Hvilke kommuner ender med at være delt mellem to eller flere supersygehuse?

Svar:

Vi skal her arbejde med den samme model som i **Opgave 2** og blot *relakserer* x -variablerne til at være kontinuerte i intervallet $[0, 1]$ i stedet for at være binære. Disse assignment variabler skal derfor nu fortolkes som følger:

x_{ij} = Andelen af kommune j 's indbyggere, der serviceres fra kommune i

Dermed bliver problemet det skal løses nu

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.:} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, & \forall j \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2022} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in I} d_j^{2030} x_{ij} \leq s_i y_i + 1000 z_i, & \forall i \in I \\
 & z_i \leq 50 y_i, & \forall i \in I \\
 & x_{ii} = y_i, & \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in I} y_i = 6, \\
 & 1.000.000.000 \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \Phi_i z_i \leq Z_1^* (1 + 0.05) \\
 & y_i \in \{0, 1\}, & \forall i, j \in I \\
 & z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}, & \forall i \in I \\
 & x_{ij} \geq 0, & \forall i, j \in I
 \end{aligned}$$

Som en opgave i opgaven, kan man nu sætter sig til at spekulere over, hvorfor vi ikke behøver, at sætte en øvre grænse på 1 på x_{ij} -variablerne?

Den optimale løsningsværdi er nu cirka 4698 hvilket er en reduktion på cirka $(4905 - 4698)/4905 = 4.2\%$. Altså kan vi spare en del kilometer kørt (samlet set) hvis vi må udnytte kapaciteten i sygehusene bedre ved at servicere nogle kommuner fra mere en et sygehus.

Der skal (i min løsning, der kan være flere optimale) oprettes sygehuse som angivet i den følgende tabel:

Kommune	Udvidet kapacitet
Odense kommune	49.000
Silkeborg kommune	50.000
Aabenraa kommune	50.000
Rødovre kommune	50.000
Jammerbugt kommune	50.000
Ringsted kommune	50.000

Københavns kommune og Aarhus Kommune er begge splittet op mellem flere sygehuse som følger:

Opdelt kommune	Serviceret fra	Andel
København kommune	Odense kommune	86.7%
København kommune	Rødovre kommune	1.9%
København kommune	Ringsted kommune	11.4%
Aarhus kommune	Odense kommune	10.5%
Aarhus kommune	Silkeborg kommune	13.3%
Aarhus kommune	Aabenraa kommune	42.8%
Aarhus kommune	Jammerbugt kommune	33.4%

Vi skifter nu fokus fra location-allocation modeller og flytter blikket mod covering modeller. Derfor kan man nu lægge modellerne udviklet indtil nu til side.

Opgave 7: Hvis der må placeres seks supersygehuse, uden at tage stilling til prisen og kapacitetsbegrænsninger, hvor skal disse så placeres, hvis flest mulige kommuner skal kunne nå et supersygehus inden for 45 minutter? Og hvor mange kommuner kan nå et supersygehus inden for 45 minutter?

*Hint: man kan her notere sig, at vi har alt hvad der skal til for at udregne en matrix (a_{ij}) som angiver om kommune j er mindre end 45 minutter fra kommune i . Man kan også notere sig, at sum-funktionen i Python kan klare det meste af arbejdet da man kan indføre en **conditional** i summen. Dermed bliver følgende to linjer ækvivalente*

```
model.coveringCsts.add(expr=sum(model.a[i][j]*model.y[i] for i in
    model.facilityRange) >= 1)
model.coveringCsts.add(expr=sum(model.y[i] for i in model.
    facilityRange if model.a[i][j] ==1) >= 1)
```

Det kan bruges til, at forme et covering location problem uden at skulle præ-beregne (a_{ij})-matricen.

Svar:

Her er tale om et **maximum covering location problem**. Derfor lader vi y_i beholde sin definition fra de forrige opgaver og indfører en ny mængde af binære variabler:

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & \text{hvis kommune } j \text{ har mindre end 45 minutter til et supersygehus} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$



Vi fortolker nu "flest muligt" som at vi skal maksimere *antallet* af kommuner der har mindre end 45 minutter til et supersyge hvorved problemet, der skal løses bliver

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in I} \theta_j \\ \text{s.t.:} \quad & \sum_{\substack{i \in I \\ c_{ij} \leq 45}} y_i \geq \theta_j, & \forall j \in I \\ & \sum_{i \in I} y_i \leq 6, \\ & \theta_i, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i \in I \end{aligned}$$

Læg mærke til, at vi helt har droppet kapacitetsbegrænsningerne da opgaven blot beder os finde ud af hvor de seks sygehuse skal placeres, hvis flest mulige kommuner skal have et sygehus inden for en radius af 45 minutter.

Hvis vi i stedet fortolkede "flest muligt" som flest mulige *borgere* så ender vi med et *vægtet maximum covering location problem* givet ved

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in I} d_j^{20xx} \theta_j \\ \text{s.t.:} \quad & \sum_{\substack{i \in I \\ c_{ij} \leq 45}} y_i \geq \theta_j, & \forall j \in I \\ & \sum_{i \in I} y_i \leq 6, \\ & \theta_i, y_i \in \{0, 1\}, & \forall i \in I \end{aligned}$$

Hvor 20xx er det år man ønsker, der skal dækkes flest muligt.

Løses modellen uden indbyggertalsbaserede vægte kan i alt 77 kommuner nå et sygehus inden for 45 minutter. De seks sygehuse skal placeres i Aarhus kommune, Aalborg kommune, Odense kommune, Herning kommune, Haderslev kommune og Solrød kommune. Med denne løsning er det totale antal indbyggere der dækkes inden for 45 minutter er 5.356.162.

Vægtes i stedet med indbyggertallet i kommunerne i 2030 dækkes igen 77 kommuner, og nu er det totale indbyggertal, der dækkes inden for 45 minutter igen 5.356.162 borgere. Kommuner med sygehuse i denne løsning bliver Aarhus kommune, Aalborg kommune, Odense kommune, Herning kommune, Haderslev kommune og Solrød kommune. Dermed var jeg heldig/uheldig, at den samme løsning var optimal for begge objektfunktioner. Jeg ved, at der er mindst tre



optimale løsninger til problemet hvor antallet af kommuner der kan dækkes inden for 45 minutter maksimeres.

Al Python kode brugt i opgaven kan findes på Brightspace