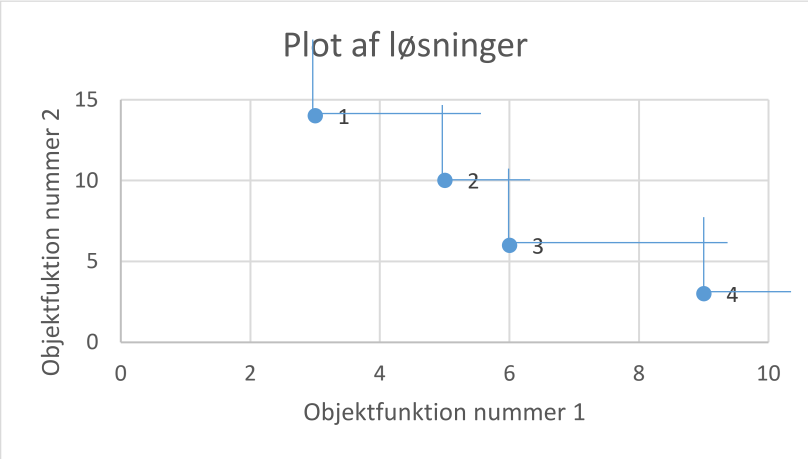
Vejledende besvarelse til reeksamen i ”Modellering inden for præskriptiv analyse”

Del 1: Multiple choice

1. Her er det rigtige svar mulighed b.. Dette kan deduceres ved at indsætte $x_4 = 1$ i uligheden hvorved denne reduceres til
$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
Som netop begrænser mulighederne for de resterende variabler således, at mindst en af disse skal antage værdien 1.
2. Det rigtige svar er her c.. Hvis $x_1 = x_2 = 1$ reduceres systemet til
$$x_4 \leq 1 \text{ og } x_4 \leq 1 \text{ og } 1 + 1 - 1 \leq x_4$$
Eller mere kompakt, $x_4 \leq 1$ og $x_4 \geq 1$ hvilket kun efterlader muligheden $x_4 = 1$. På den anden side, hvis mindst en af variablerne x_1 og x_2 antager værdien 0, så vil en af de to første uligheder sørge for, at $x_4 \leq 0$ mens den sidste ulighed vil blive til enten $0 \leq x_4$ eller $-1 \leq x_4$ hvilket trivielt er sandt. I begge tilfælde sørger den binære begrænsning på x_4 for, at $x_4 = 0$.
3. Det rigtige svar er b.. En nem måde at tjekke dette på er ved først at udregne objektfunktionsværdierne for den givne løsning:
$$z_1 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 7$$
$$z_2 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 7$$
Definitionen på en Pareto optimal løsning er, at der ikke findes nogen *anden* løsning som er bedre i begge objektfunktioner. Ved at betragte løsningen givet ved $x_1 = x_2 = 1$ og $x_3 = x_4 = 0$ fås en brugbar løsning som har objektfunktionsværdierne $z_1 = 6$ og $z_2 = 6$ hvilket er strengt bedre end den angivne løsning i begge objektfunktioner. Dermed dominerer denne nye løsning den angivne, og den angivne er *ikke* Pareto optimal.
4. Det rigtige svar er b.. Løsningen opfylder ikke begrænsningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$ hvorfor den ikke er brugbar og dermed heller ikke Pareto optimal.
5. Det rigtige svar er c.. For at indse dette, kan vi lave følgende resonnementer:
    - Vi kan hurtigt fjerne mulighed a.. Dette kan gøres da løsning 4 i mulighed a. er den løsning som vi i Spørgsmål 3 viste ikke var Pareto optimal.
    - Dernæst kan vi fjerne mulighed b. da løsning 5 her indeholder tre variabler som er sat lig 1. Da vi minimerer kunne vi sætte en hvilken som helst af disse 3 variabler lig med 0 uden at løsningen blev ”infeasible”. Lad os antage, at vi satte $x_1 = 0$. Denne nye løsning vil således dominere løsningen med $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ hvorved denne løsning ikke er Pareto optimal.
    - Vi mangler nu bare undersøge mulighed c. og d.. Vi kan se, at mulighed d. indeholder de samme løsninger som mulighed c. på nær løsningen givet ved $x_1 = x_4 = 0$ og $x_2 = x_3 = 1$. Hvis denne løsning ikke er domineret af nogle af andre 3 løsninger, må svaret være c. hvorimod det må være d. hvis denne løsning er domineret. Man får let svaret ved at plotte løsningerne i et (z_1, z_2)-koordinatsystem:



Det ses altså, at løsning nummer 4 *ikke* er domineret af nogle af de andre tre løsninger. Hermed er mulighed c. det rigtige svar.

Del 2: Modellering

1. Omkostningerne til vedligehold over de næste 10 år er blot summen af renoveringsomkostningerne som indtræffer ved renovering som er givet i Excel filens celler B24 til H25 plus omkostningerne ved at renovere de to nuværende boringer. Dette beløber sig til 6.308.000 kr + 2.030.000 kr = 8.338.000 kr.
2. I denne opgave skal vi vælge hvilke af de 3 mulige boringer der skal etableres og hvilke småbyer, der skal serviceres fra hvilke boringer. Kapaciteten i de nye vandboringer skal overholdes og efterspørgslen hos småbyerne skal mødes. Desuden skal hver småby serviceres fra en og kun en vandboring. Dette er et så kaldt "single source capacitated facility location problem".

   Lad d_j være efterspørgslen hos by j angivet i m^3 og lad s_i være kapaciteten i den potentiel boring i, ligeledes angives i m^3. Dertil defineres c_{ij} til at være omkostningen ved at etablere vandrør mellem boring i og by j og vi lader f_i være omkostningen ved at etablere en boring ved den potentielle boring i.
   Endvidere, definer følgende to sæt af variabler:

   $$y_i = \begin{cases} 1, hvis\ boring\ i \in \{3,4,5\}\ etableres \\ 0, ellers \end{cases}$$

   $$x_{ij} = \begin{cases} 1, hvis\ boring\ i \in \{3,4,5\}\ servicerer\ by\ j \in \{1,2,\dots,7\} \\ 0, ellers \end{cases}$$

   Vi kan således opstille objektfunktionen:

   $$\min \sum_{i=3}^{5}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=3}^{5} f_i y_i$$

   Denne objektfunktion minimerer de totale omkostninger forbundet med etablering af vandrør og boringer. Vi skal sørge for, at alle byer bliver serviceret fra præcis en boring:

   $$\sum_{i=3}^{5} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,2,\dots,7\}$$

   Derudover skal vi sørge for at boringernes kapacitet overholdes:

$$\sum_{j=1}^{7} d_j x_{ij} \leq s_i y_i, \quad \forall i \in \{3,4,5\}$$

I dette scenarie, hvor det antages at de nuværende boringer lukkes er lukningsomkostningen blot en fast omkostning på $250.000 + 225.000 = 475.000kr$ som altså ikke skal medtages i denne model. Den endelige model bliver således

$$\min \sum_{i=3}^{5} \sum_{j=1}^{7} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=3}^{5} f_i y_i$$

$$\text{s.t.:} \sum_{i=3}^{5} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,2,\dots,7\}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_j x_{ij} \leq s_i y_i, \quad \forall i \in \{3,4,5\}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{3,4,5\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{3,4,5,\}, j \in \{1,2,\dots,7\}$$

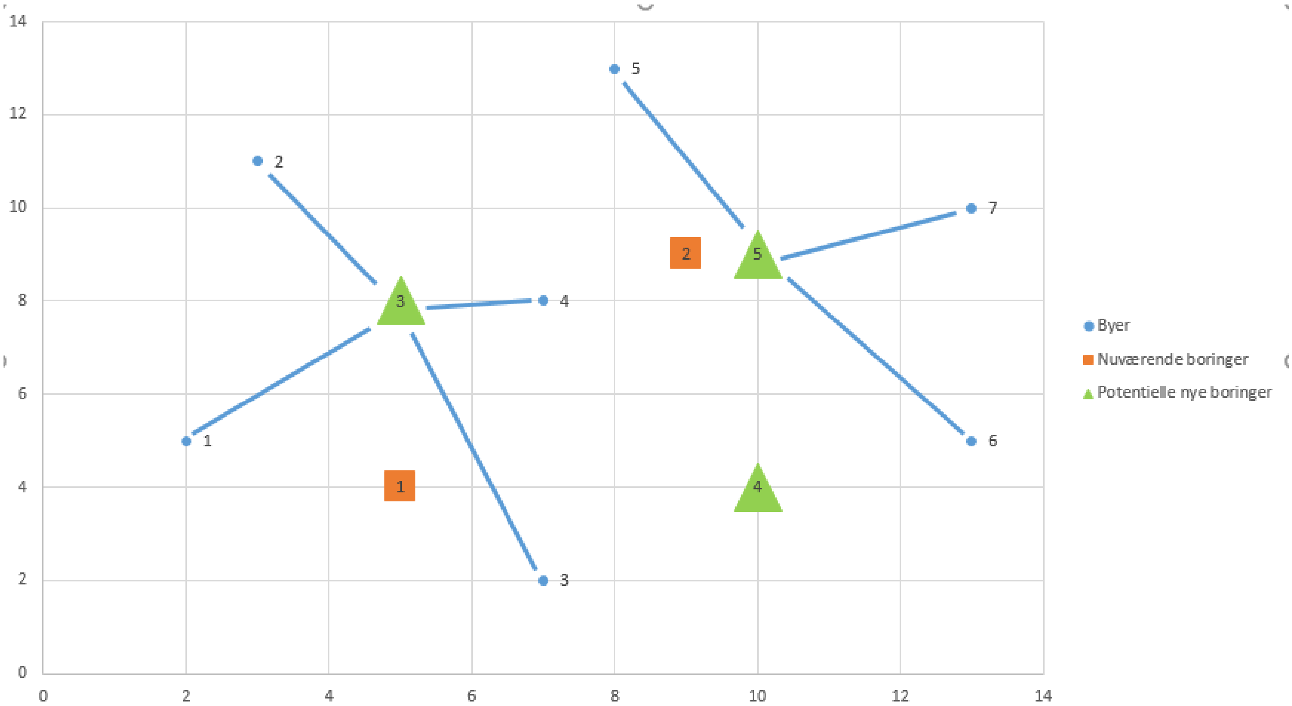
3. Implementeringen i OPL kan se ud som følger:

```
antalBoringer=5;
antalByer=7;
renoverBoringOmk =[ 980000 1050000 0 0 0];
lukBoringOmk = [250000 225000 0 0 0];
kapacitet = [60000 75000 92000 79000 70000];
eftersp = [22000 19000 25000 21000 24000 13000 11000 ];
etablerBoringOmk =[0 0  2500000 1950000 1750000];
renoveringRoer =[   [636000 0    624000   0    0    1600000 0],
                    [0   1344000 0    424000   848000   0    832000],
                    [0 0 0 0 0 0 0],
                    [0 0 0 0 0 0 0],
                    [0 0 0 0 0 0 0]];
etableringRoer = [  [636000 0    624000   0    0    1600000 0],
                    [0   1344000 0    424000   848000   0    832000],
                    [504000 592000  744000   272000   768000   1332000 1200000],
                    [1040000    1440000 568000  650000  1332000 444000  1050000],
                    [1350000    1022000 1056000 372000  536000  730000  426000]];
```

```
int antalBoringer = ...;
int antalByer = ...;

range boringer = 1..antalBoringer;
range gamleBoringer = 1..2;
range nyeBoringer= 3..5;
range byer = 1..antalByer;

int renoverBoringOmk[boringer] = ...;
int lukBoringOmk[boringer] = ...;
int kapacitet[boringer] = ...;
int eftersp[byer ] = ...;
int etablerBoringOmk[boringer] = ...;
int renoveringRoer[boringer][byer] = ...;
int etableringRoer[boringer][byer] = ...;

dvar boolean y[boringer];
dvar boolean x[boringer][byer];

minimize sum ( i in nyeBoringer, j in byer ) etableringRoer[i][j] * x[i][j]
       + sum ( i in nyeBoringer ) etablerBoringOmk[i] * y[i];

subject to
{
    forall ( j in byer )
    {
        sum ( i in nyeBoringer ) x[i][j] == 1;
    }
    forall ( i in nyeBoringer )
    {
      sum ( j in byer ) eftersp[j] * x[i][j] <= kapacitet[i] * y[i];
    }
}
```

Hvor navne på data elementer skulle være selv-forklarende.

En optimal løsning består i at åbne boring 3 og 5. Boring 3 skal servicere byerne 1, 2, 3 og 4 og boring 5 skal servicere byerne 5, 6 og 7. Omkostningen ved at etablere nye boringer er 8.054.000 kroner hvor til de 475.000kroner skal lægges til at lukke de nuværende. Dette scenarie leder altså til en total omkostning på 8.799.000kroner, hvilket overstiger omkostningen til at renovere den nuværende løsning. Løsningen kan illustreres som følger



4. Vi laver her en lille ændring i definitionen af x og y-variablerne:

$$y_i = \begin{cases} 1, hvis\ boring\ i \in \{1,2,3,4,5\}\ benyttes \\ 0, ellers \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, hvis\ boring\ i \in \{1,2,3,4,5\}\ servicerer\ by\ j \in \{1,2,\dots,7\} \\ 0, ellers \end{cases}$$

Ligeledes udvider vi dataet således, at de faste borings-specifikke omkostninger er givet ved

$$f = (980.000\ 1.050.000\ \ 2.500.000\ 1.950.000\ 1.750.000)$$

Det vil sige, at vi blot tildeler en omkostning på renoveringsomkostningen hvis en af de gamle boringer bruges, og ellers er f som før defineret. Omkostningen c_{ij} som i opgave 2 blot var omkostningen til at etablere nye rør udvides nu med to rækker som angiver omkostningen ved at renovere rør fra de eksisterende boringer:

$$c = \begin{pmatrix} 636.000 & 10.000.000 & 624.000 & 10.000.000 & 10.000.000 & 1.600.000 & 10.000.000 \\ 10.000.000 & 1.244.000 & 10.000.000 & 424.000 & 848.000 & 10.000.000 & 832.000 \\ 504.000 & 592.000 & 744.000 & 272.000 & 768.000 & 1.332.000 & 1.200.000 \\ 1.040.000 & 1.440.000 & 568.000 & 650.000 & 1.332.000 & 444.000 & 1.050.000 \\ 1.350.000 & 1.022.000 & 1.056.000 & 372.000 & 536.000 & 730.000 & 426.000 \end{pmatrix}$$

Læg mærke til, at omkostningen ved at servicere en by fra en eksisterende boring er sat til 10.000.000 hvis ikke der i forvejen er rørledninger mellem byen og boringen. Dette sørger for, at solveren ikke benytter disse ”links” da det er enormt dyrt.

Vi kan nu opskrive den nye model:

$$\min \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{7} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{5} f_i y_i + 250.000(1 - y_1) + 225.000(1 - y_2)$$

$$\text{s.t.:} \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,2,\dots,7\}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_j x_{ij} \leq s_i y_i, \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5,\}, j \in \{1,2,\ldots,7\}$$

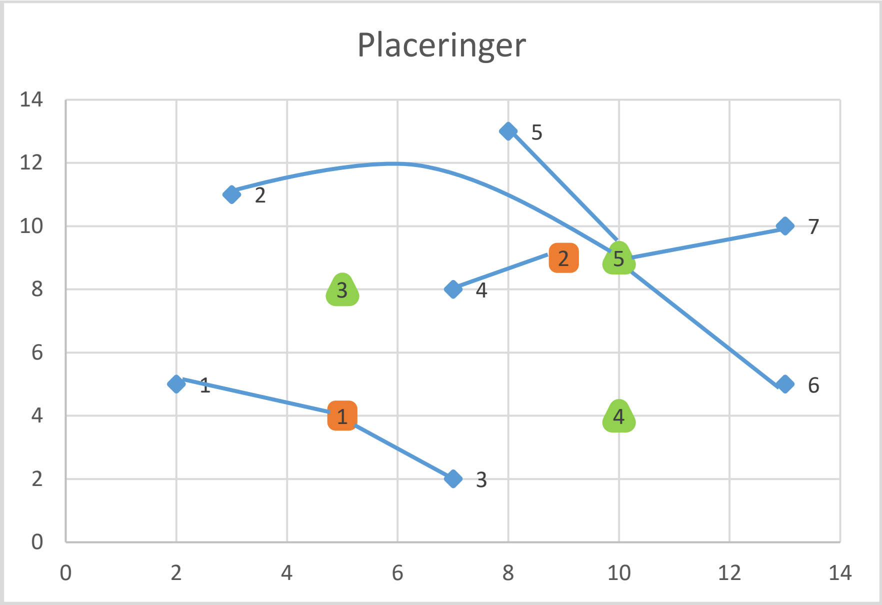
Objektfunktionen er udvidet med to led, som indfanger lukningsomkostningen af de gamle boringer, såfremt en eller begge disse lukkes.

5. Implementeringen i OPL kan se ud som følger:

```
antalBoringer=5;
antalByer=7;
lukBoringOmk = [250000 225000 0 0 0];
kapacitet = [60000 75000 92000 79000 70000];
eftersp = [22000 19000 25000 21000 24000 13000 11000 ];
etablerBoringOmk =[980000 1050000  2500000 1950000 1750000];

etableringRoer = [  [636000 10000000    624000  10000000    10000000    1600000 10000000],
                    [10000000   1344000 10000000    424000  848000  10000000    832000],
                    [504000 592000  744000  272000  768000  1332000 1200000],
                    [1040000    1440000 568000  650000  1332000 444000  1050000],
                    [ 1350000 1022000 1056000 372000 536000 730000   426000]];
```

```
int antalBoringer = ...;
int antalByer = ...;

range boringer = 1..antalBoringer;
range byer = 1..antalByer;

int lukBoringOmk[boringer] = ...;
int kapacitet[boringer] = ...;
int eftersp[byer ] = ...;
int etablerBoringOmk[boringer] = ...;
int etableringRoer[boringer][byer] = ...;

dvar boolean y[boringer];
dvar boolean x[boringer][byer];

minimize sum ( i in boringer, j in byer ) etableringRoer[i][j] * x[i][j]
       + sum ( i in boringer ) etablerBoringOmk[i] * y[i]
       + lukBoringOmk[1]*(1-y[1])
       + lukBoringOmk[2]*(1-y[2]);

subject to
{
    forall ( j in byer )
    {
        sum ( i in boringer ) x[i][j] == 1;
    }
    forall ( i in boringer )
    {
      sum ( j in byer ) eftersp[j] * x[i][j] <= kapacitet[i] * y[i];
    }

}
```

Løsningen til ovenstående program består i at bevare de to eksisterende boringer og at åbne boring 5. Boring 1 skal nu kun håndtere byerne 1 og 3 men boring 2 kun skal servicere by nummer 4. Den nye boring, boring 5, skal håndtere byerne 2, 5, 6 og 7. Omkostningen til denne løsning beløber sig til 8.178.000 kroner over de næste 10 år. Løsningen kan illustreres som følger:



Rørene fra boring 2 til byerne 2, 5, og 7 og fra boring 1 til by nummer 6 frakobles og efterlades i jorden. Samtidig etableres en boring ved potentiel placering 5 og nye rør lægges fra boring 5 til byerne 2, 5, 6 og 7.

6. For at bestemme hvilken løsning der ska anbefales sammenfattes de tre løsninger i følgende tabel

Løsning	Omkostning i kroner	# gamle boringer	# gamle rør	# nye boringer
Opgave 1	8.338.000	2	7	0
Opgave 3	8.799.000	0	0	2
Opgave 5	8.178.000	2	3	1

Ud fra en rent monetær betragtning vil alternativet fra opgave 5 klart være at foretrække da denne løsning er 1.92% billigere end løsningen fra opgave 1 og 7.06% billigere end løsningen fra opgave 3. Set ud fra et synspunkt hvor fremtidssikring er mere vigtigt, kan man argumentere for, at løsningerne fra opgave 3 og opgave 5 er mere attraktive da der her etableres nye boringen hvortil nye rør kan tilkobles. Dette var ikke en mulighed for de gamle boring som blev benyttet i opgave 1. Dermed giver løsningerne fra opgave 3 og 5 mulighed for at gendesigne netværksstrukturen senere hen.
Det kommer derfor an på, hvad beslutningstagerne i vandværket vægter højest.
Vi kan dog, ud fra en betragtning af Pareto optimalitet udelukke løsningen fra opgave 1, da denne er *domineret af løsningen fra opgave 5.* De to løsninger fra opgave 3 og 5 dominerer dog ikke hinanden og det er derfor et spørgsmål om præferencer fra beslutningstagerne.