Opgave med stokastisk ruteplanlægning

Sune Lauth Gadegaard

E2022

I denne opgave betragtes følgende setup: En virksomhed står i den situation, at deres leasingaftale for deres køretøjer snart udløber, og derfor skal de besluttes hvor mange biler de skal lease i den næste leasingperiode.

Virksomheden har 15 faste kunder, som de besøger dagligt. Ved kunderne indsamles pakker, som køres til virksomhedens depot til videreforsendelse. Mængden af pakker, der skal afhentes ved hver kunde, observeres først i virksomhedens informationssystemer om morgenen inden bilerne sendes afsted. Derfor kan der være dage, hvor der ikke er kapacitet til at afhente alle kundernes pakker – eller hvor det ikke er rentabelt. Politikken er, at hvis det viser sig, at der er en for stor mængde på en given dag, så skal virksomheden afgøre hvilke kunder, der ikke besøges på de almindelige ruter. Chefens søn vil så besøge de andre kunder senere på dagen (han aflønnes "under bordet"og hans per-kunde betaling fremgår af datafilen `TS-SP-CVRP-Data.json`).

De daglige omkostninger forbundet med at lease en bil er blevet estimeret og fremgår ligeledes af datafilen. Virksomheden, har endvidere estimeret omkostningerne ved køre fra adresse i til adresse j. Disse omkostninger er her betegnet som c_{ij} for alle kombinationer af i og j. Disse kan også findes i datafilen.

Virksomheden har efter mange års fast afhentning ved kunder et godt datagrundlag for at estimere antallet af pakker ved kunderne. På baggrund af data, har de genereret 20 repræsentative efterspørgselsscenarier og dertilhørende sandsynligheder for, at hvert scenarie indtræffer.

Opgaven er nu, at opstille et two-stage stokastisk optimeringsproblem, som minimerer de forventede omkostninger ved at lease biler (nu-og-her beslutningen er, hvor mange biler der skal leases) plus omkostningerne ved at servicerer kunderne på hhv. almindelige ruter og af chefens søn (dette er recourse-beslutningen).

1 Modellering af problemstillingen

I modellen der beskriver ovenstående problemstilling, vil vi gøre brug af følgende data

Mængde	Forklaring
N	Mængde af alle kunder: $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
V	Mængde af alle knuder: $V = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.
S	Mængde af alle scenarier: $S = \{1, \ldots, 20\}$.
Parametre	
Q	Bilernes kapacitet målt i antal pakker.
L	Omkostning per dag, per bil.
B	Prisen som skal betales til chefens søn, per kunde han skal tage sig af.
q_j^s	Antal pakker der skal afhentes ved knude $j \in V$ i scenarie $s \in S$. Det antages, at $q_0^s = 0$ i alle scenarier.
c_{ij}	Omkostningen ved at køre direkte fra $i \in V$ til $j \in V$.
p^s	Sandsynligheden for at scenarie $s \in S$ indtræffer.

Problemets variabler er givet ved

$$m = \text{Antal biler der skal leases og som derfor er til rådighed} \tag{1}$$

$$x_{ij}^s = \begin{cases} 1, & \text{Hvis en bil kører direkte fra } i \text{ til } j \text{ i scenarie } s \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{2}$$

$$y_i^s = \begin{cases} 1, & \text{Hvis en af de leasede biler besøger kunder } i \in N \\ 0, & \text{ellers (dvs. hvis chefens søn besøger kunder } i \in N) \end{cases} \tag{3}$$

$$f_{ij}^s = \text{Antal pakker indsamlet når en bil forlader knude } i, \text{ hvis } x_{ij}^s = 1. \text{ Ellers er } f_{ij}^s = 0 \tag{4}$$

Med disse variabler, kan objektfunktionen for problemet beskrives som

$$\min\ Lm + \sum_{s \in S} p^s \left(\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}^s + \sum_{i \in N} B(1 - y_i^s) \right) \tag{5}$$

For hvert scenarie, kræves det, at antallet af biler der kører ud af depotet ikke overstiger antallet af leasede biler, hvorfor følgende mængde af begrænsninger er nødvendige:

[redacted] (6)

Der skal dertil gælde, at antallet af biler, der kører ud af depotet, skal være det samme antal, som kommer hjem, og dette skal gælde for hvert scenarie:

[redacted] (7)

Når in og outflow fra depotet er etableret, skal det også sikres, at hver kunde enten bliver besøgt af en af de leasede biler eller også skal chefens søn besøge kunden ($y_i^s = 0$). Dette gøres ved hjælp af følgende to mængder af begrænsninger,

[redacted] (8) (9)

Læg mærke til, at hvis der ikke kører nogle biler ind/ud af kunde i i scenarie s, så vil $y_i^s = 0$. I objektfunktion indgår summen over $B(1 - y_i^s)$, hvorfor der på denne måde inkluderes en udgift på B kroner til chefens søn, hvis ikke kunde i besøges af en af de leasede biler.

Slutteligt skal subture elimineres og kapacitetsbegrænsningerne overholdes i alle scenarier, hvilket leder til

[redacted] (10) (11) (12)

Læg særligt mærke til sidste mængde af begrænsninger. Her skal venstresiden kun forøges med kunde i's efterspørgsel såfremt en bil kører forbi kunden ($y_i^s = 1$). Derfor multipliceres kunde i's efterspørgsel i scenarie s med y_i^s.

2 Opgaver

Opgave 2.1: Formuler de manglende elementer i modellen oven for matematisk. Du kan bruge cheat-sheetet hvis du går i stå. Men kun hvis du går i stå!

Opgave 2.2: Implementer modellen i Python ved hjælp af Pyomo og løs den for det datasæt, der er stillet til rådighed. OBS: Det er er relativt svært optimeringsproblem at løse, hvorfor en løsning, der er garanteret at være inden for 5% af en optimal løsning er acceptabelt.

Opgave 2.3: Hvor mange biler skal virksomheden lease for at minimere deres forventede udgifter? Hvor mange kunder skal besøges af chefens søn i hvert scenarie? Hvor mange af de leasede biler bruges i hvert scenarie.

Opgave 2.4: Hvis virksomheden ønsker at servicere alle kunder på de almindelige ruter, hvor mange biler skal de så bruge? Hvor meget stiger de samlede omkostninger? Hvor mange af de leasede biler bruges i hvert af de 20 scenarier? Hvad er den forventede udnyttelsesgrad af flåden over de 20 scenarier?

Hint: Det er ikke nødvendigt at ændre i modellen. Overvej hvorledes man kan ændre data, så alle kunder i alle scenarier vil blive besøgt af de leasede i biler i en optimal løsning.