FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función cuadrática

Nos ocuparemos ahora de analizar las funciones polinómicas de grado 2, es decir, las funciones de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

siendo a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una función de este tipo es llamada **función cuadrática**. Por ser una función polinómica, su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Las siguientes son funciones cuadráticas:

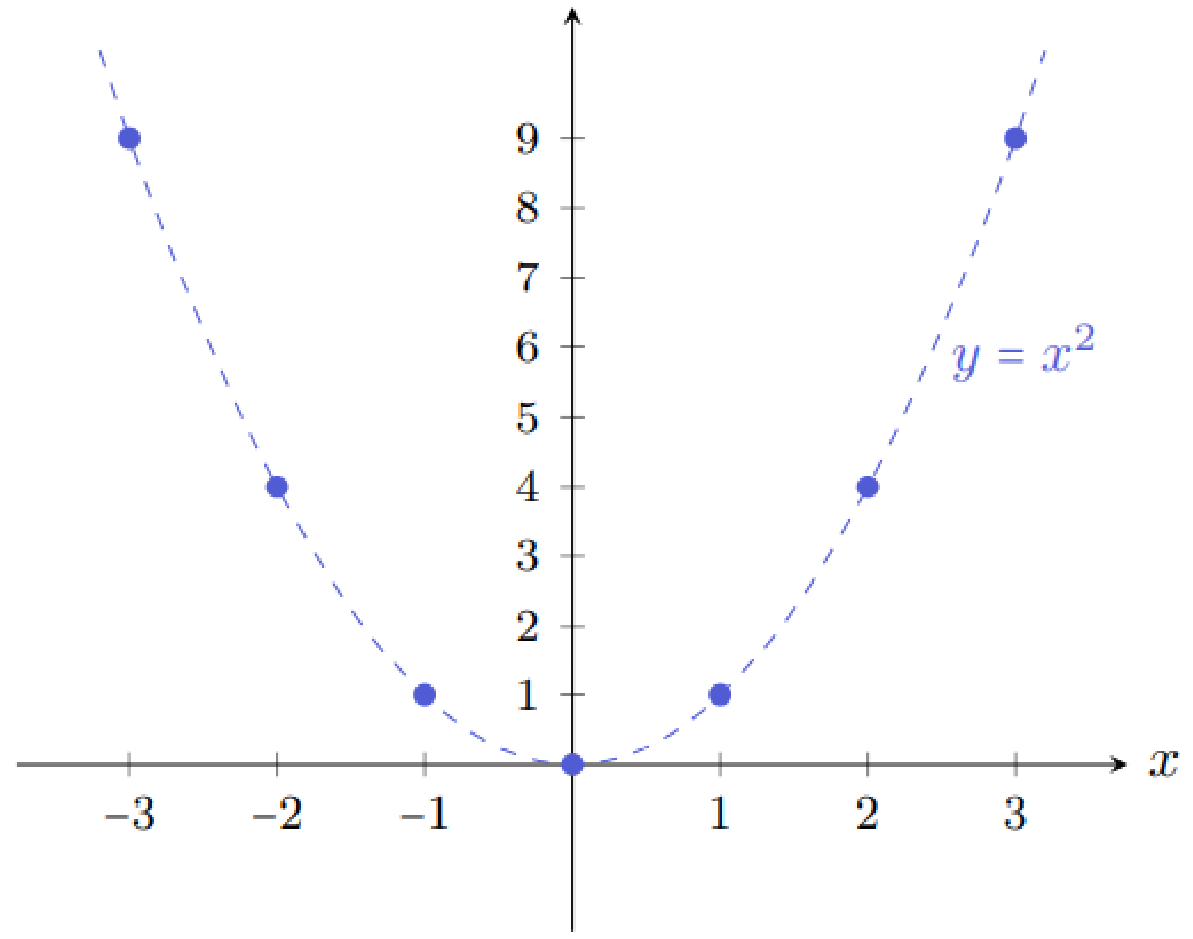
$$y = 3x^2 - 5x + 4, \qquad y = -\frac{1}{4}x^2 + 5x,$$

$$y = x^2 - 6, \qquad y = -4x^2, \qquad y = \pi x + 5 - 4x^2.$$

El primer paso será analizar el aspecto de la gráfica correspondiente a una función cuadrática, para lo cual recurriremos a una tabla de valores. El objetivo será detectar su "forma", y el efecto producido en ella por cada uno de los parámetros a, b y c.

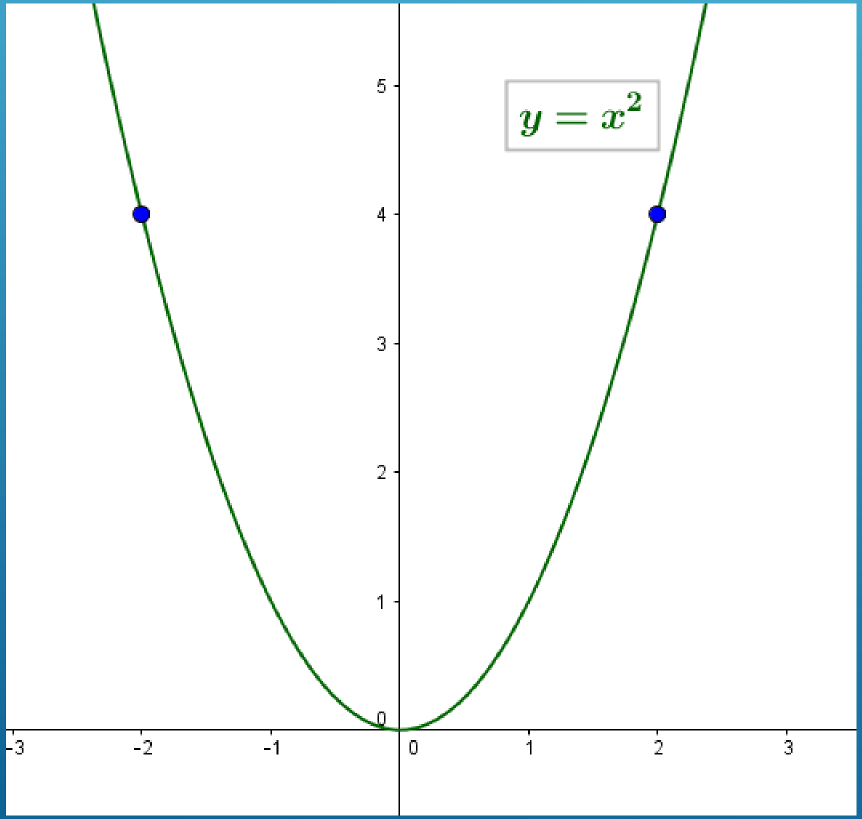
Esbozando el gráfico de $f(x) = x^2$. En este caso $a = 1$ y $b = c = 0$. Representaremos esta función gráficamente, confeccionando primero una tabla de valores con una cantidad apropiada de puntos:

x	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$



El aspecto de cada parábola se verá modificado con respecto a la anterior por los valores de **a**, **b** y **c**. Puesto que los cambios los vamos a comparar con respecto a la grafica de $y = x^2$, denominamos a esta **parábola matriz** .

Notemos que $\boldsymbol{f(-2) = f(2) = 4}$, pues estamos elevando al cuadrado.
Lo mismo pasa con cualquier otro valor, es decir $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ para cualquier numero real x. Esto significa que la función toma el mismo valor para un número que para su opuesto, lo que se traduce en que la gráfica se "refleja" ´ respecto del eje y. Hablando en términos matemáticos formales, esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y,



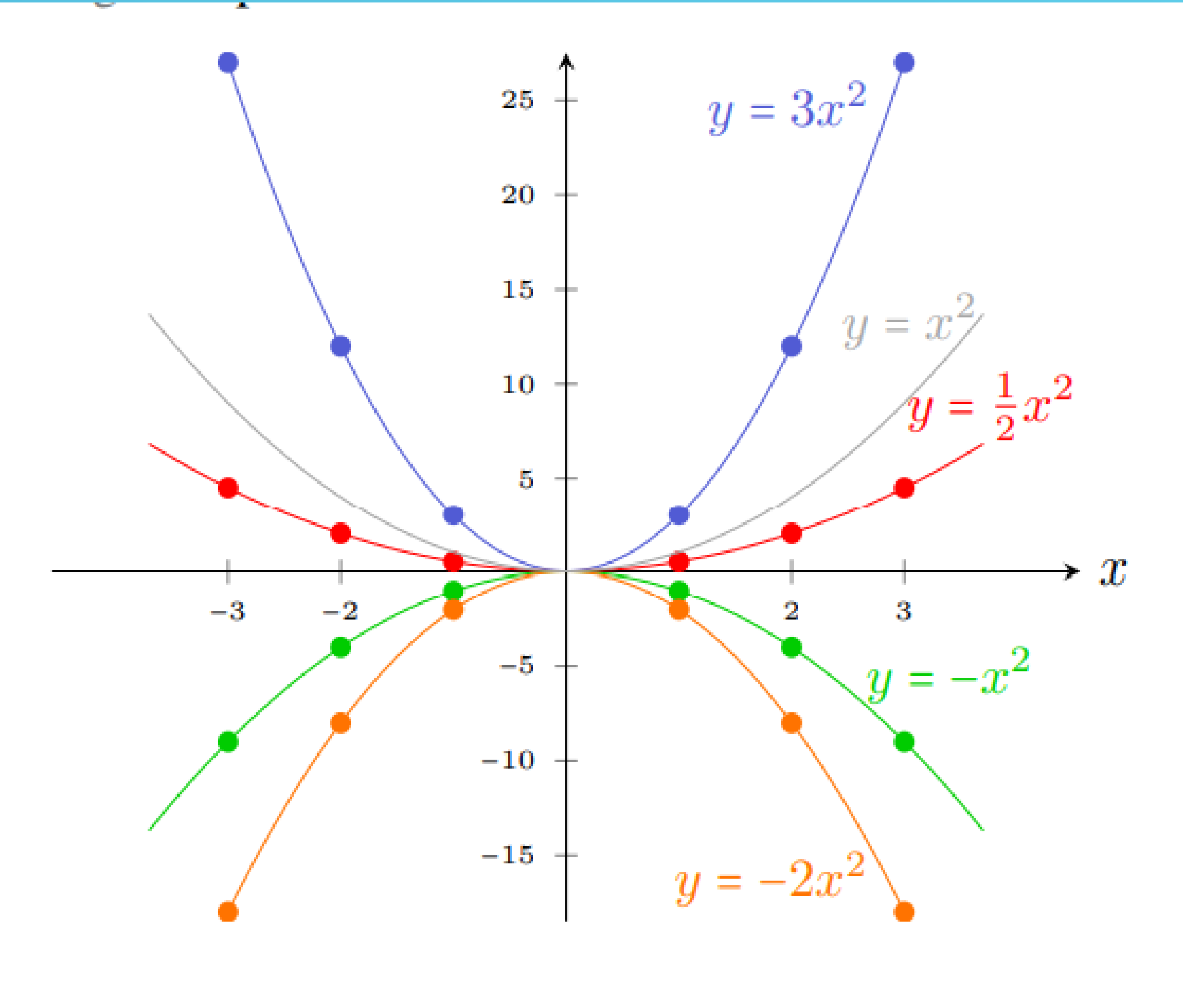
o que y es el eje de simetría de la parábola.

Notar también que la imagen de $f(x) = x^2$ es el conjunto $[0,\infty)$ de los reales no negativos.

El punto (0, 0) es llamado vértice de la parábola

Gráfico de $f(x) = ax^2$. En este caso también tenemos $b = 0$ y $c = 0$, pero tomaremos diferentes valores de a para detectar el efecto que produce con respecto a la parábola matriz. En particular, construiremos tablas de valores para las funciones dadas por

$$y = 3x^2, \qquad y = \frac{1}{2}x^2, \qquad y = -x^2, \qquad y = -2x^2.$$



Como en el caso de $y = x^2$, las funciones anteriores satisfacen $f(-x) = f(x)$, por lo que en las tablas incluiremos solamente valores positivos:

x	$y = 3x^2$
0	0
1	3
2	12
3	27

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	$\frac{9}{2}$

x	$y = -x^2$
0	0
1	−1
2	−4
3	−9

x	$y = -2x^2$
0	0
1	−2
2	−8
3	−18

podemos concluir que el signo de **a** determina si las ramas de la parábola abren hacia arriba (a > 0) o hacia abajo (a < 0). Además, si el valor a es menor que uno, las ramas son mas “abiertas” (quedando mas cercanas al eje x) que las de la parábola matriz, mientras que si su valor absoluto es mayor que uno, las ramas comienzan a “cerrarse” mas (quedando ´ mas cercanas al eje y). En todos los casos el eje de simetría es el eje y, y el vértice es (0 ,0)

Gráfica de $y = ax^2$: parábola simétrica con respecto al eje y, vértice en $(0,0)$

$a > 0$

- $a > 1 \longrightarrow$ Ramas hacia arriba, más cerrada que $y = x^2$
- $0 < a < 1 \longrightarrow$ Ramas hacia arriba, más abierta que $y = x^2$

El vértice es un punto de mínimo

$a < 0$

- $a < -1 \longrightarrow$ Ramas hacia abajo, más cerrada que $y = -x^2$
- $-1 < a < 0 \longrightarrow$ Ramas hacia abajo, más abierta que $y = -x^2$

El vértice es un punto de máximo

No toda función posee un mínimo o un máximo en su conjunto imagen (pensar, por ejemplo, en f(x) = x, cuya imagen es R), por lo que estos puntos no siempre existen. Para el caso de una parábola de la forma $y = ax^2$, el vértice (0, 0) es el punto de mínimo cuando a > 0, y el punto de máximo si a < 0.

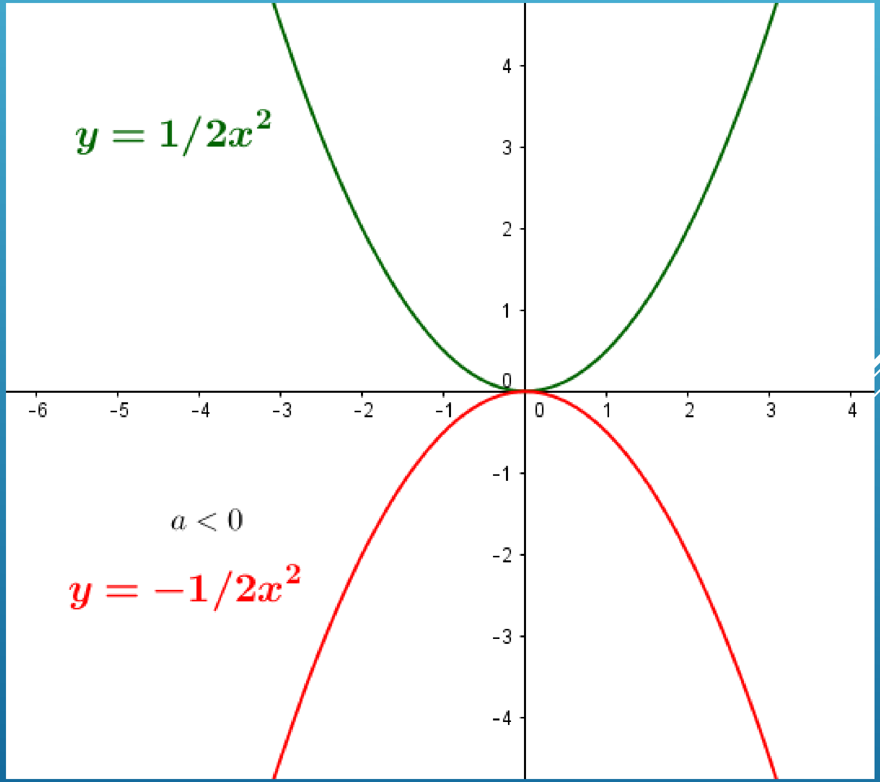


Gráfico de $f(x) = x^2 + c$.

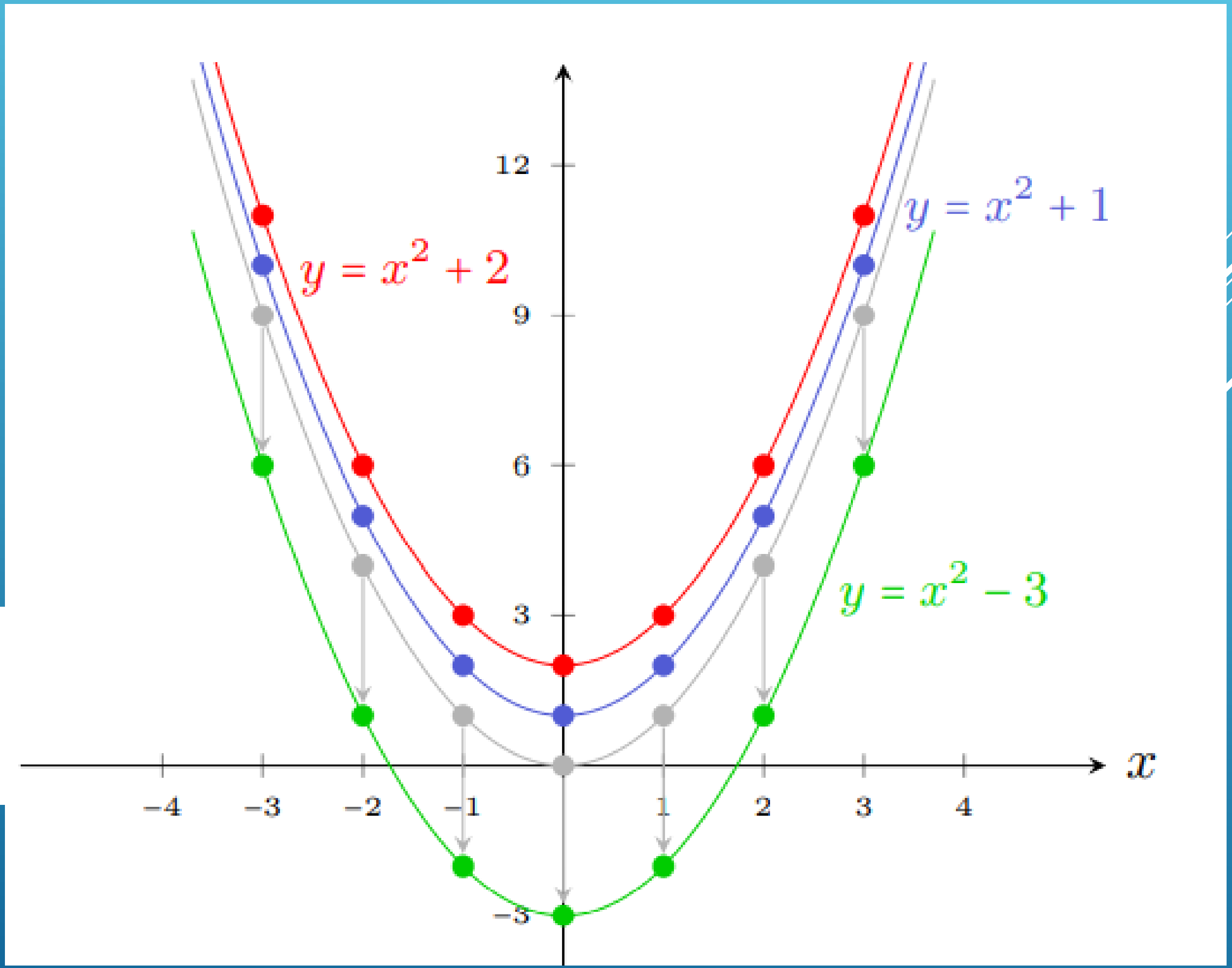
Aquí a = 1 y b = 0, y tomaremos diferentes valores de **c** para detectar el efecto que produce con respecto a la parábola matriz. En particular, construiremos tablas de valores para las funciones dadas por $y = x^2 + 1$ $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$.

x	$y = x^2 + 1$
0	$0^2 + 1 = 1$
1	$1^2 + 1 = 2$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$3^2 + 1 = 10$

x	$y = x^2 + 2$
0	$0^2 + 2 = 2$
1	$1^2 + 2 = 3$
2	$2^2 + 2 = 6$
3	$3^2 + 2 = 11$

x	$y = x^2 - 3$
0	$0^2 - 3 = -3$
1	$1^2 - 3 = -2$
2	$2^2 - 3 = 1$
3	$3^2 - 3 = 6$

El parámetro c traslada verticalmente a la parábola, por lo que ahora las coordenadas de su vértice son $(0, c)$.

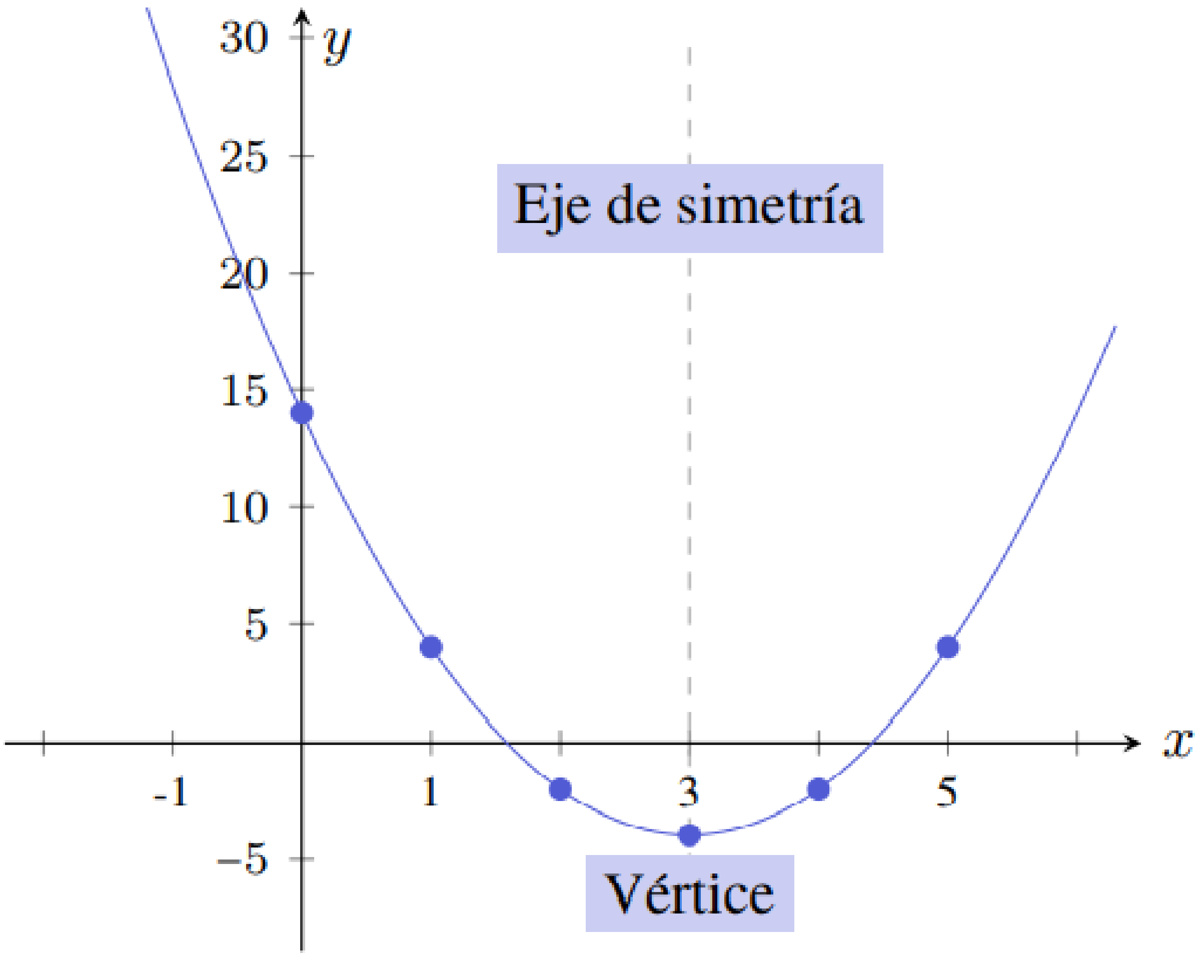


Analizaremos ahora el **efecto que produce b.**
Si bien podemos sospechar que inducirá un desplazamiento de la parábola hacia los costados (izquierda o derecha), no es tan directo determinar dicho desplazamiento como en el caso de c. Para esto estudiaremos varios ejemplos.
Graficamos la función: $y = 2x^2 - 12x + 14$.

Solución: Como siempre, haremos una tabla de valores. Pero esta vez la variable x no aparece solamente elevada al cuadrado, por lo que la función no tomará el mismo valor para x que para −x (por ejemplo, en la tabla siguiente puede verse que f(−2) ≠ f(2)). Así que incluiremos valores negativos y positivos en la tabla

x	$y = 2x^2 - 12x + 14$
-2	$2\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) + 14 = 46$
-1	$2\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) + 14 = 28$
0	$2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 + 14 = 14$
1	$2\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 14 = 4$
2	$2\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 14 = -2$
3	$2\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 14 = -4$
4	$2\cdot 4^2 - 12\cdot 4 + 14 = -2$
5	$2\cdot 5^2 - 12\cdot 5 + 14 = 4$

Ubicaremos ahora estos puntos en un sistema de ejes coordenados, y los uniremos con línea punteada:



Como podemos observar, el vértice de la parábola es el punto $(3, -4)$, y el eje de simetría es la recta de ecuación $x = 3$.

Se dice que una función cuadrática está expresada en su **forma canónica** o **normal** cuando se la escribe como

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

En tal caso, tenemos que:

- Su gráfica es una parábola con vértice $V = (h, k)$, y eje de simetría en la recta $x = h$.
- Si $a > 0$ las ramas abren hacia arriba, por lo que el vértice es el punto de mínimo: la función alcanza un **mínimo** en $x = h$, y ese mínimo es k.
- Si $a < 0$ las ramas abren hacia abajo, por lo que el vértice es el punto de máximo: la función alcanza un **máximo** en $x = h$, y ese máximo es k.

Para una función cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, las coordenadas del vértice $v = (h, k)$ están dadas por $h = -\frac{b}{2a}$, $k = c - \frac{b^2}{4a}$. Esto nos permite establecer la siguiente conclusión:

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática dada como $f(x) = ax^2 + bx + c$ se alcanza en

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{5.5.1}$$

Si $a > 0$, el valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$ es el **mínimo** alcanzado por f (pues las ramas de la parábola abren hacia arriba), y cuando $a < 0$ este valor corresponde al **máximo** alcanzado (pues las ramas abren hacia abajo).

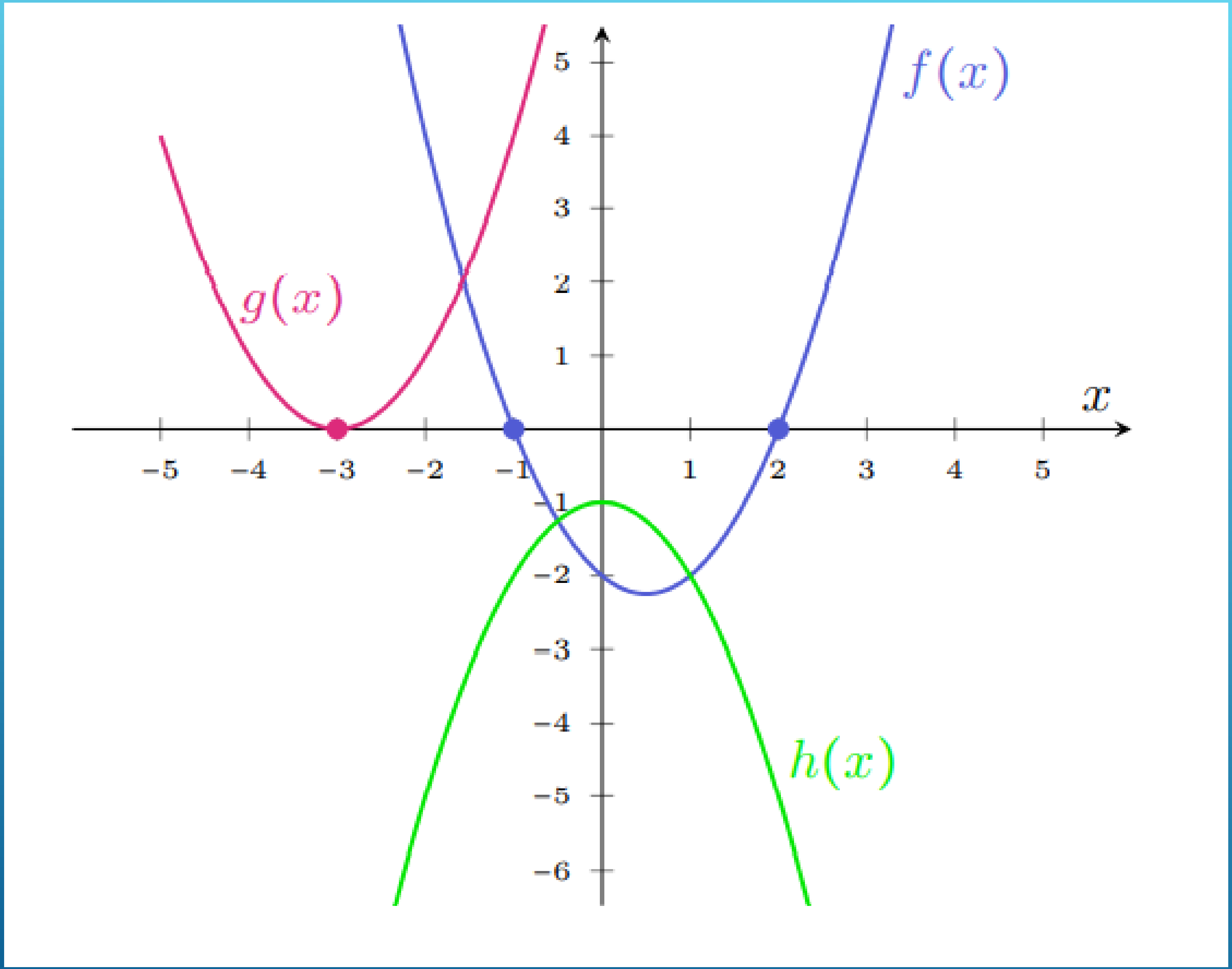
Raíces de una función cuadrática:

Hallar las raíces de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ equivale a resolver la ecuación$ax^2 + bx + c = 0$.
Como sabemos, las soluciones de esta ecuación pueden hallarse mediante la formula resolvente.
También sabemos que podría ocurrir que existan dos soluciones reales, una o ninguna.

- **Dos soluciones:** la parábola interseca en dos puntos al eje x, que están ambos a igual distancia del eje de simetría.

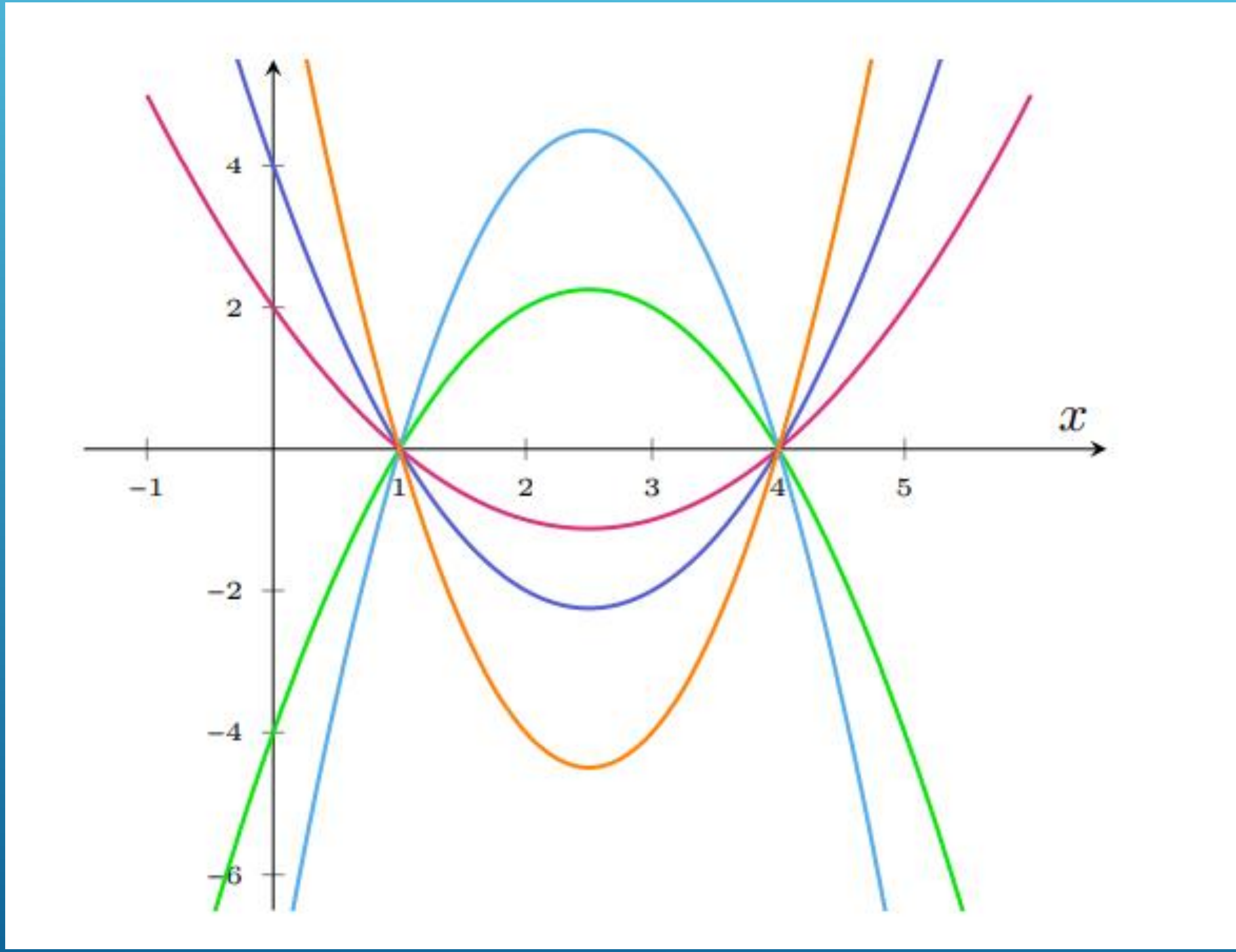
- **Una solución:** el vértice de la parábola es de la forma $(h, 0)$, es decir, está sobre el eje x.

- **Ninguna solución:** La parábola se encuentra completamente por arriba o completamente por debajo del eje x. Esto ocurre cuando el vértice está por encima del eje x y las ramas abren hacia arriba ($a > 0$ y $V = (h, k)$ con $k > 0$), o cuando el vértice está debajo del eje x y las ramas abren hacia abajo ($a < 0$ y $V = (h, k)$ con $k < 0$).



f(x)
g(x)
h(x)
x
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−6

Conocer las raíces de una función cuadrática no es suficiente para determinar por completo su ecuación, pues existen infinitas parábolas que tienen las mismas raíces.



Sin embargo, sabemos que si un polinomio cuadrático $\boldsymbol{p(x) = ax^2 + bx + c}$ tiene raíces reales x_1 y x_2, entonces puede factorizarse como

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Luego, conociendo las raíces de una función cuadrática, solamente falta encontrar $\boldsymbol{a}$ para determinar por completo su ecuación.

Esto se logra conociendo , además, otro punto que pertenece a la gráfica de la función (el vértice o cualquier otro), como se ilustra en el siguiente ejemplo

Determinando la función a partir de las raíces y un punto.

Supongamos que sabemos que las raíces de una función cuadrática f son $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$

Determinar f sabiendo que su gráfica es una parábola que interseca al eje y en -4

Solución: Sabemos que:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 1)(x - 4)$ y solamente resta determinar a. Para ello, usaremos que el punto (0,−4) que satisface la ecuación $f(0) = -4$

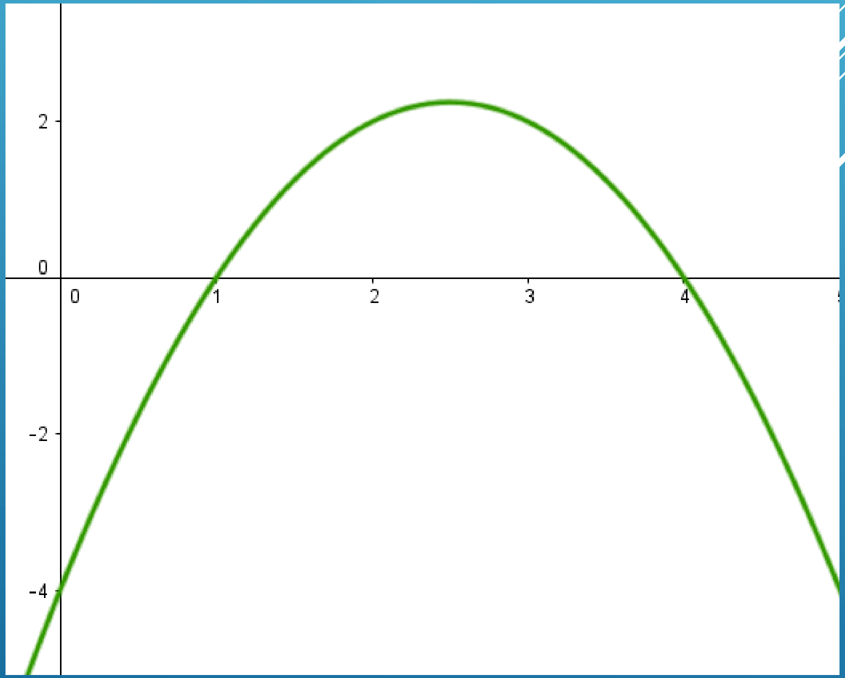
Es decir : $-4 = a(0 - 1)(0 - 4)$

$$-4 = a.4 \Longrightarrow a = -1$$

Luego, la función f es

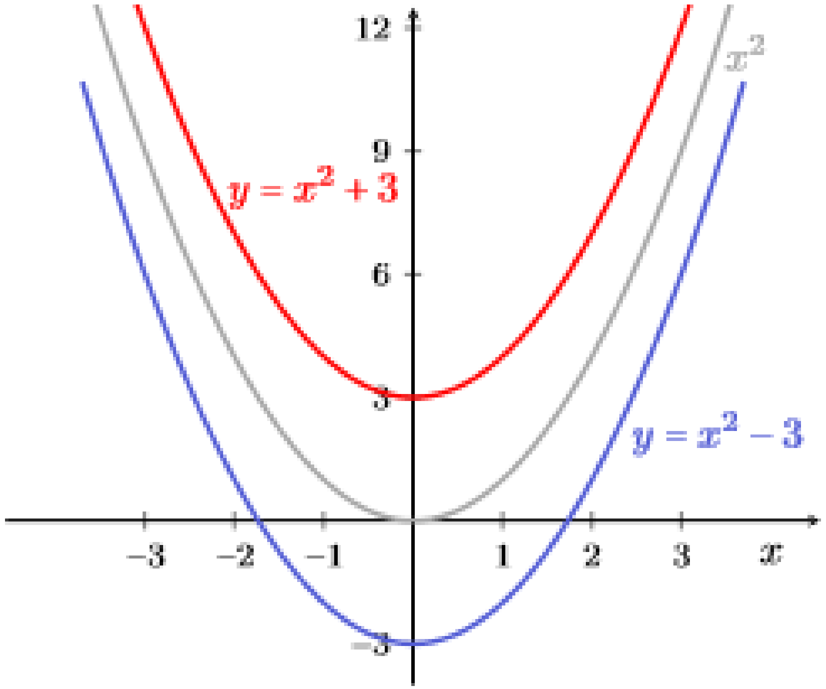
$f(x) = (-1)(x - 1)(x - 4)$

$f(x) = -(x^2 - 4x - x + 4) = -x^2 + 5x - 4$

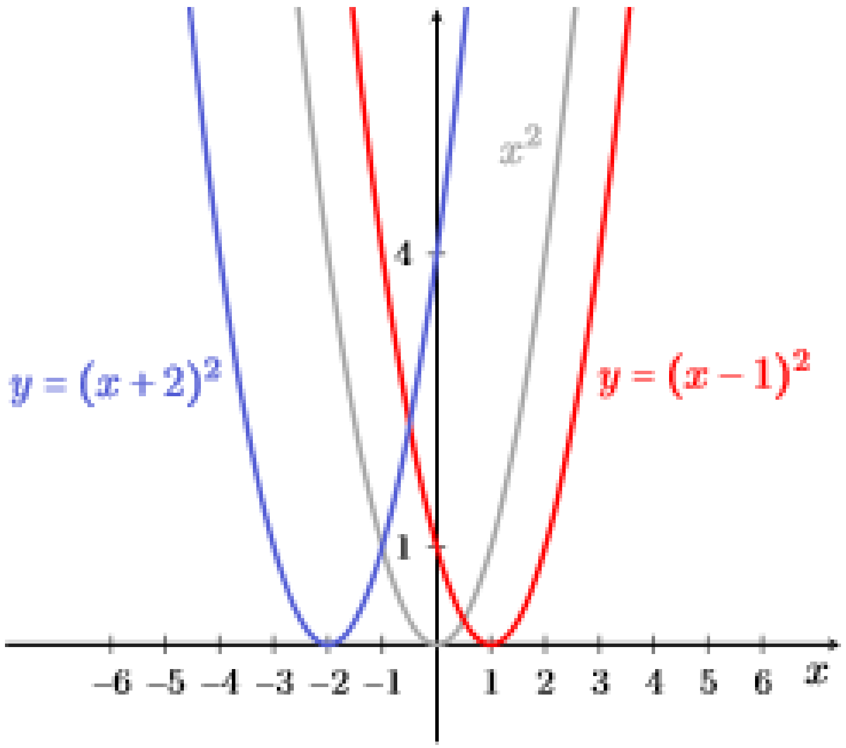


Transformaciones de una función cuadrática.

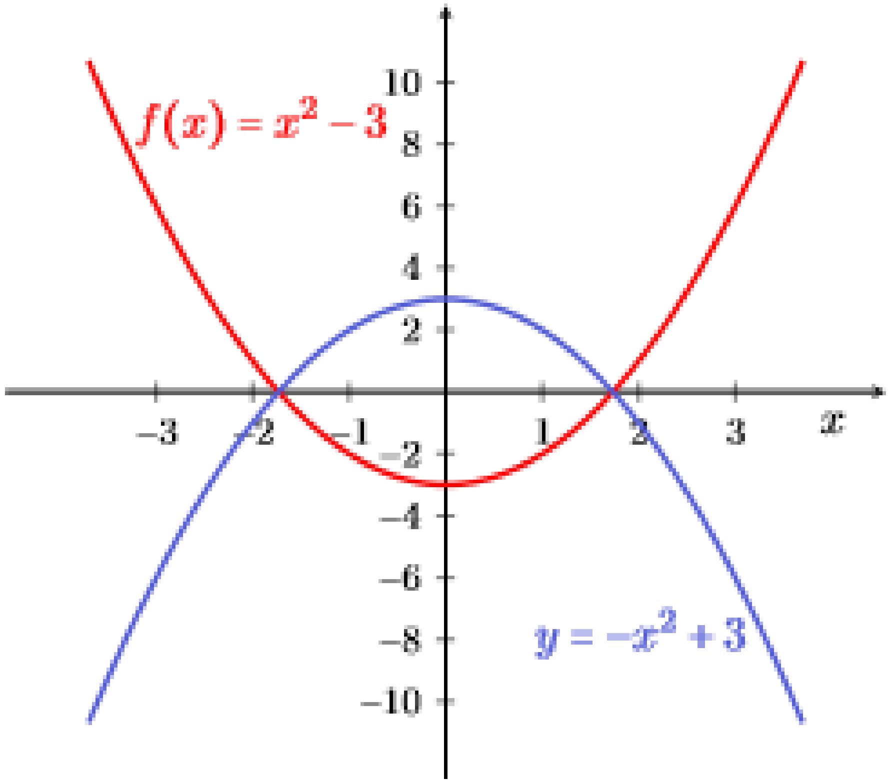
Desplazamiento vertical. Para graficar $y = f(x) + k$ se desplaza la gráfica de f verticalmente k unidades hacia arriba si $k > 0$, o hacia abajo si $k < 0$.



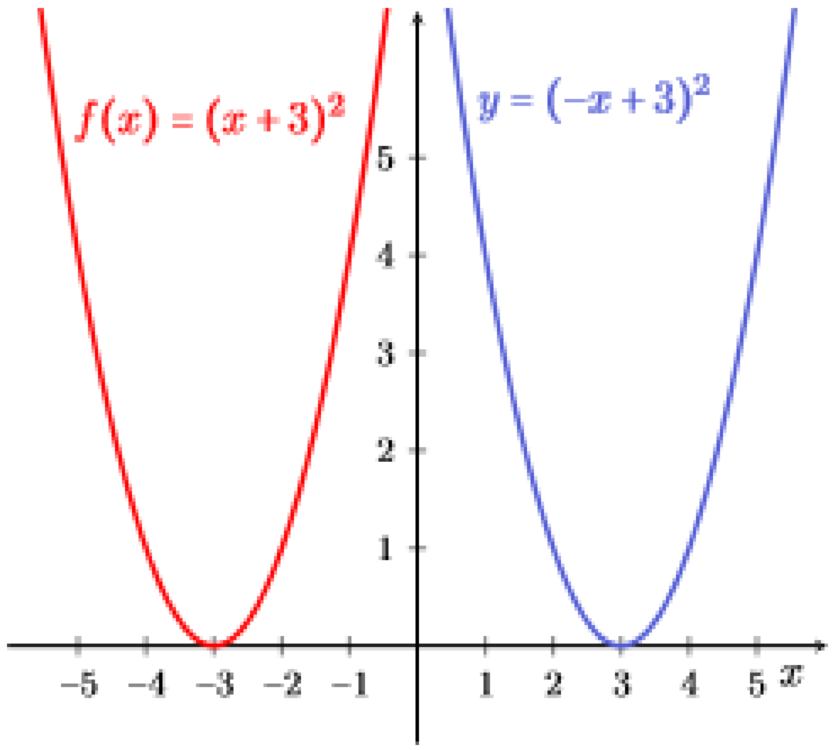
Desplazamiento horizontal. Para graficar $y = f(x - h)$ se desplaza la gráfica de f horizontalmente h unidades a la derecha si $h > 0$, o hacia la izquierda si $h < 0$ (notar, como antes, que hay un signo menos antes de h que es parte de la fórmula).



Reflexión respecto del eje x. Para graficar $\boxed{y = -f(x)}$ se refleja la gráfica de f respecto del eje x.



Reflexión respecto del eje y. Para graficar $\boxed{y = f(-x)}$ se refleja la gráfica de f respecto del eje y.



Expansión y contracción vertical. Para graficar $y = cf(x)$ se expande verticalmente con factor c la gráfica de f si $c > 1$, o se contrae si $0 < c < 1$.