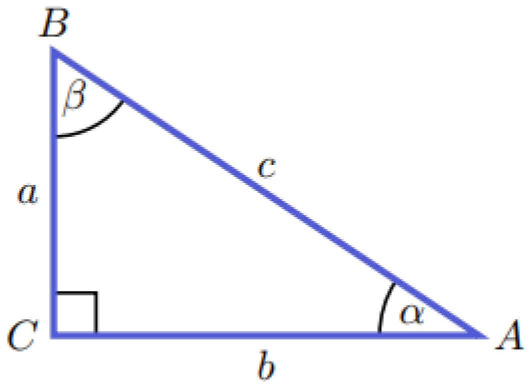
Razones trigonométricas

Resolución de triángulos rectángulos

En ciertos problemas a veces es necesario tomar medidas en lugares complicados o incluso inaccesibles, por lo que resulta necesario determinarlas de otra forma. Es entonces donde aparece la *trigonometría*, que es una rama de la matemática que se ocupa de estudiar las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

En este libro nos ocuparemos solamente de problemas que involucren **triángulos rectángulos**, es decir, un triángulo con un ángulo recto (el cual es uno que mide 90°), como se muestra en la siguiente figura:



Puesto que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo debe ser igual a 180°, en este caso tenemos que $\alpha + \beta = 90°$. Es decir, α y β son **ángulos complementarios**. Esto implica que son ambos **agudos**, pues cada uno debe medir menos de 90°.

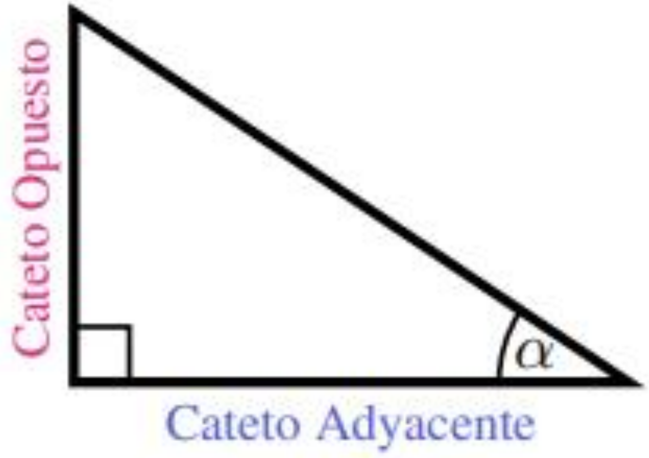
Se denomina **hipotenusa** al lado mayor del triángulo, que es el lado opuesto al ángulo recto (indicado con la letra c en el dibujo de arriba). Se llaman **catetos** a los dos lados restantes (indicados con las letras a y b en el dibujo).

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, según la notación de la figura anterior,

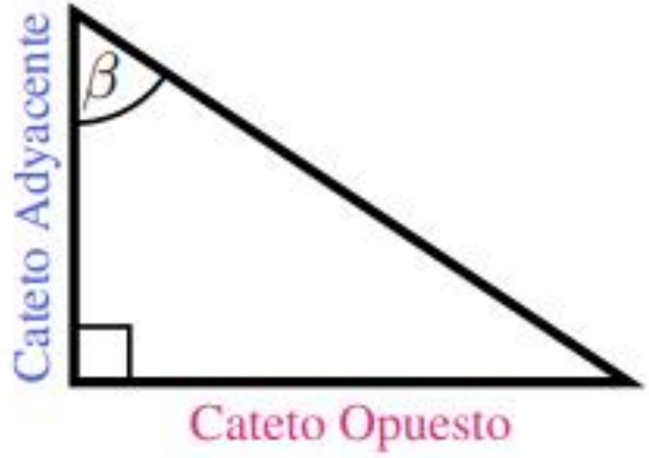
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

Este teorema nos permite determinar un lado desconocido de un triángulo rectángulo, conociendo la medida de los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$



Catetos respecto de α



Catetos respecto de β

Con esta terminología podemos definir las **razones trigonométricas** correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo. Esto es simplemente ponerle un nombre a cada una de las razones entre los lados, como se indica a continuación:

- El **seno** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y de la hipotenusa, lo cual, por simplicidad, escribimos como:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}.}$$

- El **coseno** de α es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y de la hipotenusa:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}.}$$

- La **tangente** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y del adyacente:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}.}$$

La razones recíprocas a las anteriores se denominan **cosecante**, **secante** y **cotangente**, respectivamente:

$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}},$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}},$$

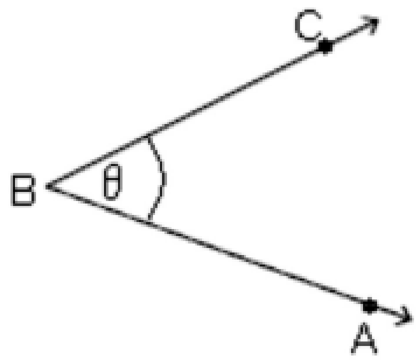
$$\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}.$$

Ángulos

En la geometría plana generalmente se define el ángulo de una manera estática, como el conjunto de puntos determinados por dos semirrectas que tienen el mismo origen.

Este origen común se llama vértice del ángulo y las dos semirrectas se llaman lados del ángulo.

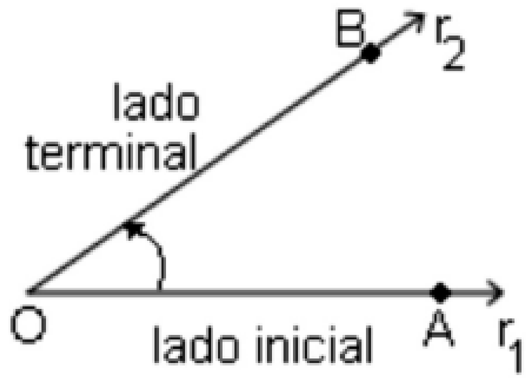
El ángulo θ de la figura tiene vértice B y lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. El ángulo suele llamarse también $A\hat{B}C$ o $C\hat{B}A$.



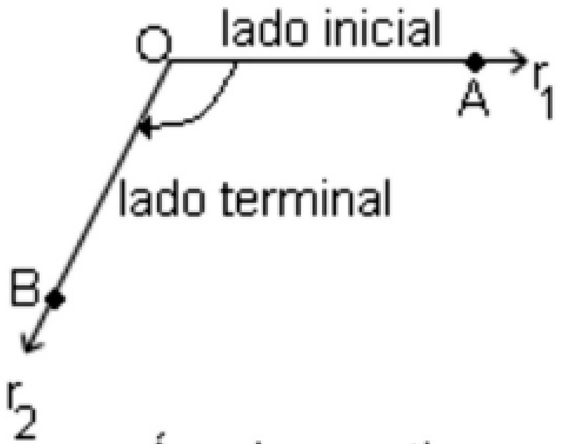
Otra forma de definir un ángulo, la dinámica, es usada en trigonometría. En ésta, se interpreta a los ángulos como rotaciones de semirrectas.

Un ángulo θ es generado por un lado, llamado lado inicial, en posición fija, y un segundo lado, el terminal, parte de la misma posición del lado inicial y gira en el plano alrededor del vértice hasta que alcance su posición final.

Si el sentido de rotación es contrario a las agujas del reloj, el ángulo se considera positivo, y si la rotación es en el sentido de las agujas se lo considera negativo.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Medida de un ángulo

Intuitivamente, cuando hablamos de la medida de un ángulo nos referimos a la "abertura" del ángulo.

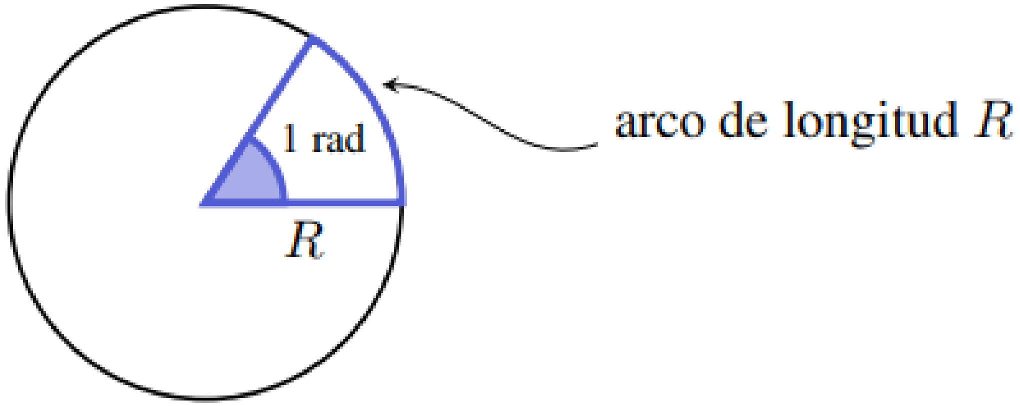
Decimos que la medida de un ángulo es cuánto debe girar la semirrecta r_1 para coincidir con r_2.

Una unidad de medición de ángulos es el grado. Para que un ángulo mida un grado el lado inicial debe girar $\frac{1}{360}$ de un giro completo.

En el sistema DMS (Degrees-Minutes-Seconds, grados-minutos-segundos) de la medida angular, cada grado (simbolizado con º) está subdividido en 60 minutos (simbolizados con ´) y cada minuto está subdividido en 60 segundos (simbolizados con ´´).

Existen distintos sistemas de medición para la amplitud de un ángulo. El más usual es el **sistema sexagesimal**, en el cual la unidad de medida es el **grado sexagesimal** (°), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales. Así, un ángulo recto mide 90°, uno llano 180° y un giro entero corresponde a 360°. Cada grado se divide en 60 minutos ('), y cada minuto se divide en 60 segundos ("). Por este motivo recibe el nombre de sexagesimal.

Otro sistema muy utilizado para medir ángulos es el **sistema circular**, cuya unidad de medida es el **radián**, de símbolo rad. Un radián se define como la amplitud de un ángulo que, teniendo su vértice en el centro de una circunferencia, determina un arco en la circunferencia cuya longitud mide lo mismo que el radio, como se ilustra a continuación:



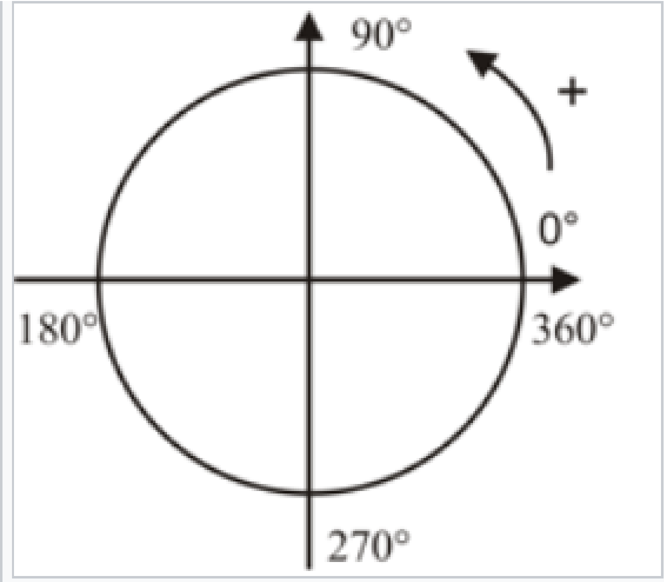
Puede probarse que el radián no depende del tamaño de la circunferencia, y para expresar la medida de un ángulo α en radianes simplemente hacemos $\alpha = \frac{s}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia y s es la longitud del arco que el ángulo define sobre la circunferencia.

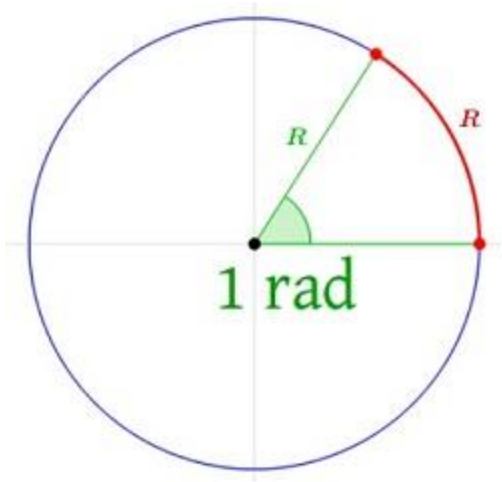
? Sabemos que el ángulo de un giro completo mide $360°$, pero ¿cuánto medirá este ángulo en radianes? Por lo anterior, sabemos que este ángulo se expresa en radianes haciendo

$$\frac{\text{longitud del arco}}{R} = \frac{\text{perímetro de la circunferencia}}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Entonces, el ángulo de un giro completo expresado en sistema circular es igual a 2π radianes, y en sistema sexagesimal es $360°$, lo que implica que

$$\boxed{360° = 2\pi \text{ rad.}}$$


90°
+
0°
180°
360°
270°

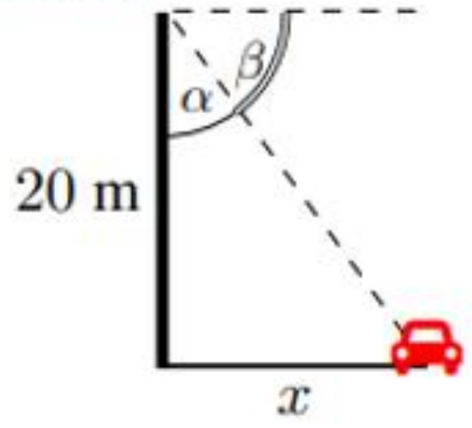

R
R
1 rad

Problema 1. Determinar la altura de un poste sabiendo que cuando una escalera de 10 metros de longitud se apoya en la parte superior de él, forma un ángulo de 65° con el suelo.

¿a qué distancia del pie del poste se encuentra apoyada la base de la escalera?

Problema 2: Desde la parte superior de un edificio de 20 metros de altura, un hombre observa su auto situado en el suelo. Si el ángulo de depresión formado es de 61°39', calcular la distancia del auto al edificio.

Solución:



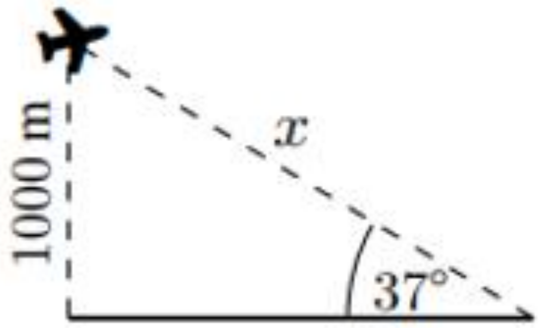
El ángulo dado como dato es $\beta = 61°39'$, y por lo tanto $\alpha = 90° - \beta = 28°21'$. Con respecto a α, la incógnita x es la medida del cateto opuesto. Además, se tiene como dato la longitud del cateto adyacente a α. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es la tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{20}, \quad \text{entonces} \quad x = 20 \cdot \operatorname{tg}(28°\,21') \approx 10.79.$$

Respuesta: El auto está a 10.79 metros del edificio, aproximadamente. «

Problema 3: En un determinado momento, una persona observa un avión que se encuentra volando a 1000 metros de altura, con un ángulo de elevación de $37°$. Hallar la distancia entre el avión y dicha persona.

Solución:

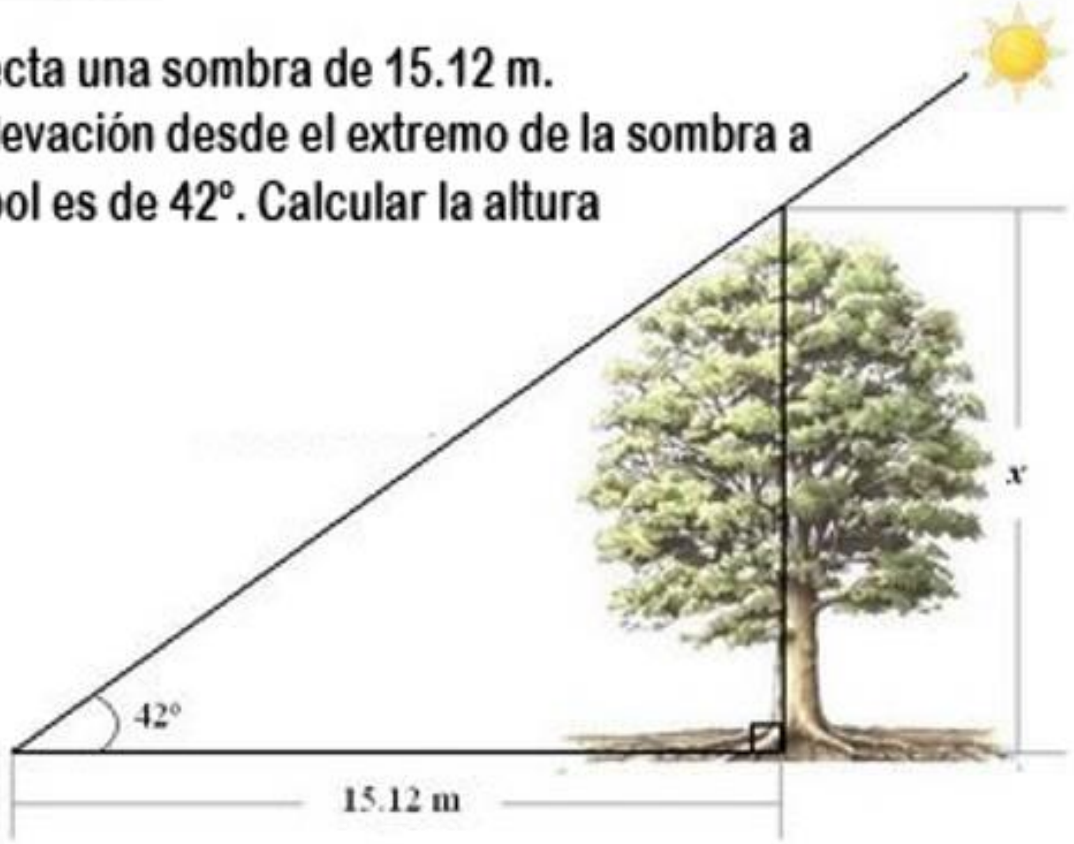


Con respecto al ángulo dado como dato, se conoce la longitud del cateto opuesto, y la incógnita x es la medida de la hipotenusa. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

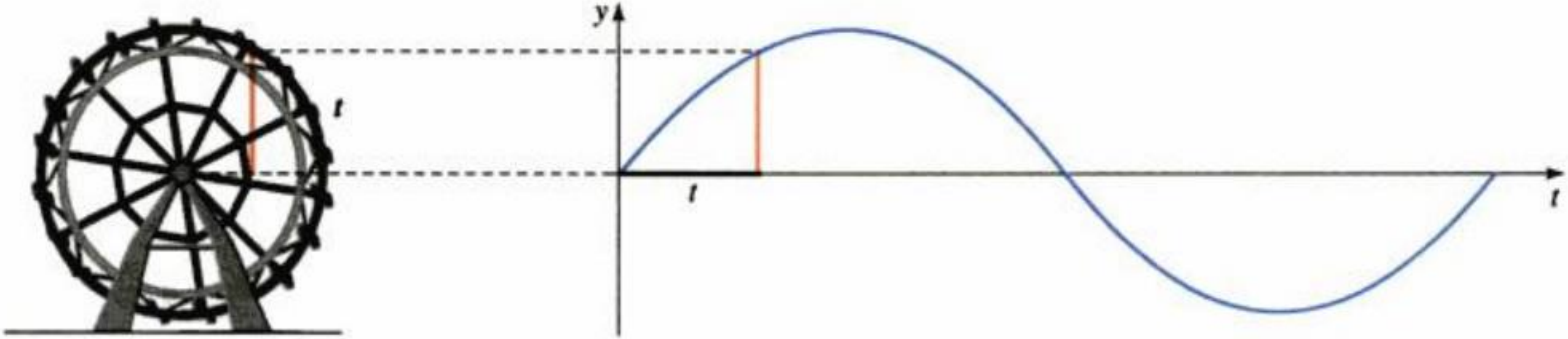
$$\operatorname{sen}(37°) = \frac{CO}{H} = \frac{1000}{x}, \quad \text{entonces} \quad x = \frac{1000}{\operatorname{sen}(37°)} \approx 1662.$$

Respuesta: El avión se encuentra aproximadamente a 1662 metros de la persona que lo observa. «

Un árbol proyecta una sombra de 15.12 m.
El ángulo de elevación desde el extremo de la sombra a la copa del árbol es de 42°. Calcular la altura

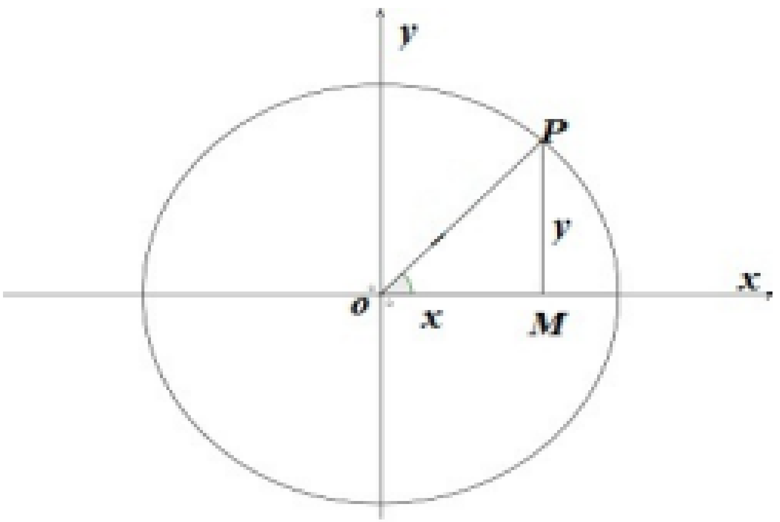


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



y
t
t
t

Funciones trigonométricas



La circunferencia trigonométrica

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y la circunferencia con centro en el origen y radio r.

Si consideramos un ángulo α menor que un recto, entonces en el triángulo rectángulo OMP, como el radio OP es igual a r, resulta:

$$sen(\alpha) = \frac{PM}{OP} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{y}{r}$$

$$cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$

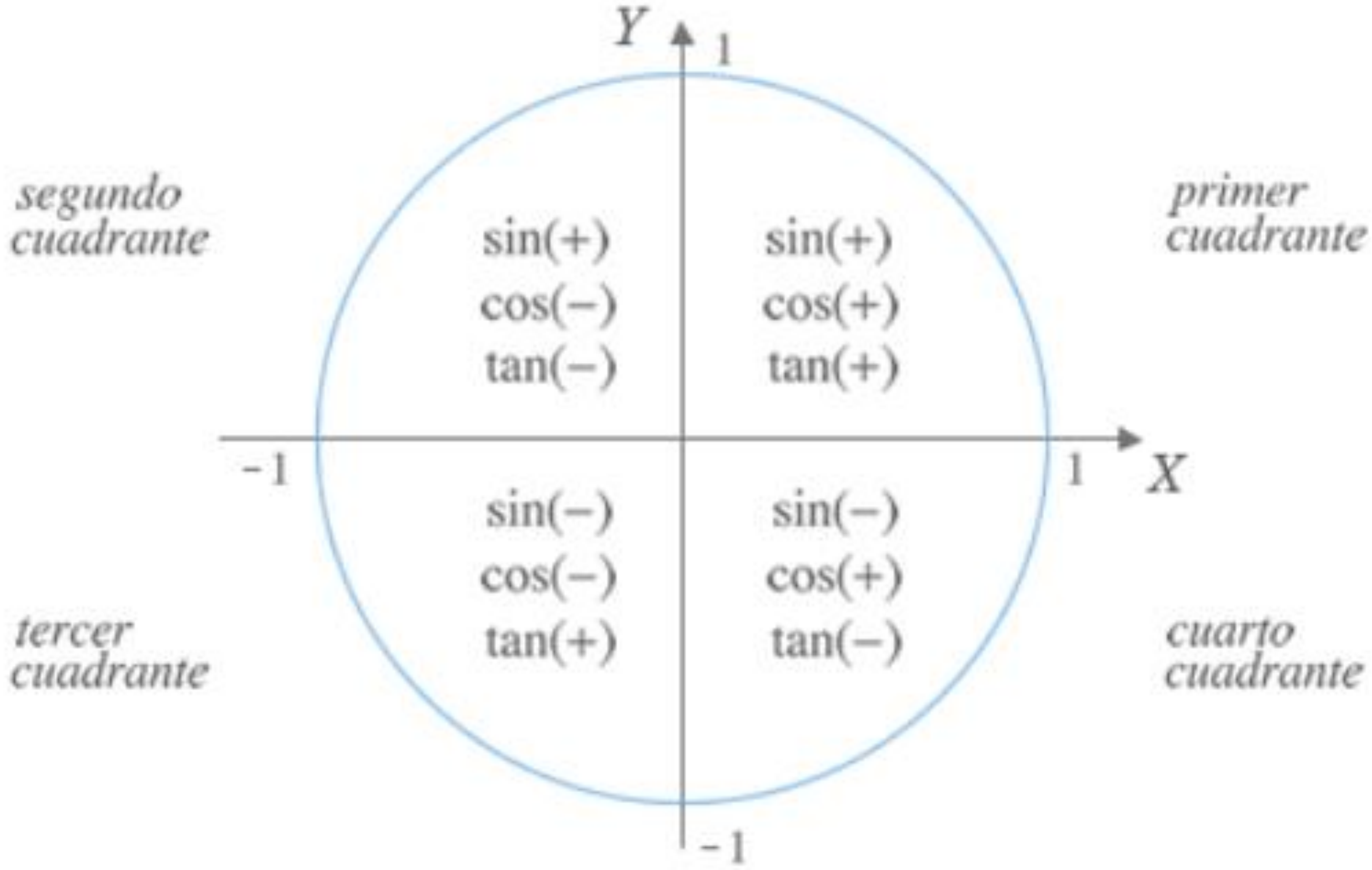
$$tan(\alpha) = \frac{PM}{OM} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

Observación:

La abscisa del punto resultante al girar un ángulo α es la que le da el signo al coseno de dicho ángulo y la ordenada es la que le da el signo al seno.

De acuerdo con esta observación, el seno es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en el tercer y cuarto cuadrante.

El coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercer cuadrante.


Y
1
segundo cuadrante
sin(+)
cos(−)
tan(−)
sin(+)
cos(+)
tan(+)
primer cuadrante
−1
1
X
sin(−)
cos(−)
tan(+)
sin(−)
cos(+)
tan(−)
tercer cuadrante
cuarto cuadrante
−1

Se vió anteriormente que se puede expresar la medida de un ángulo como un número real. Como las funciones trigonométricas están definidas sobre ángulos, y los ángulos se pueden medir en radianes por ejemplo, entonces se puede pensar definir las funciones trigonometricas como funciones de A en $\mathbb{R}$ donde $A \subseteq \mathbb{R}$.

Función seno

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = sen(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 1 . La curva que representa la gráfica de la función

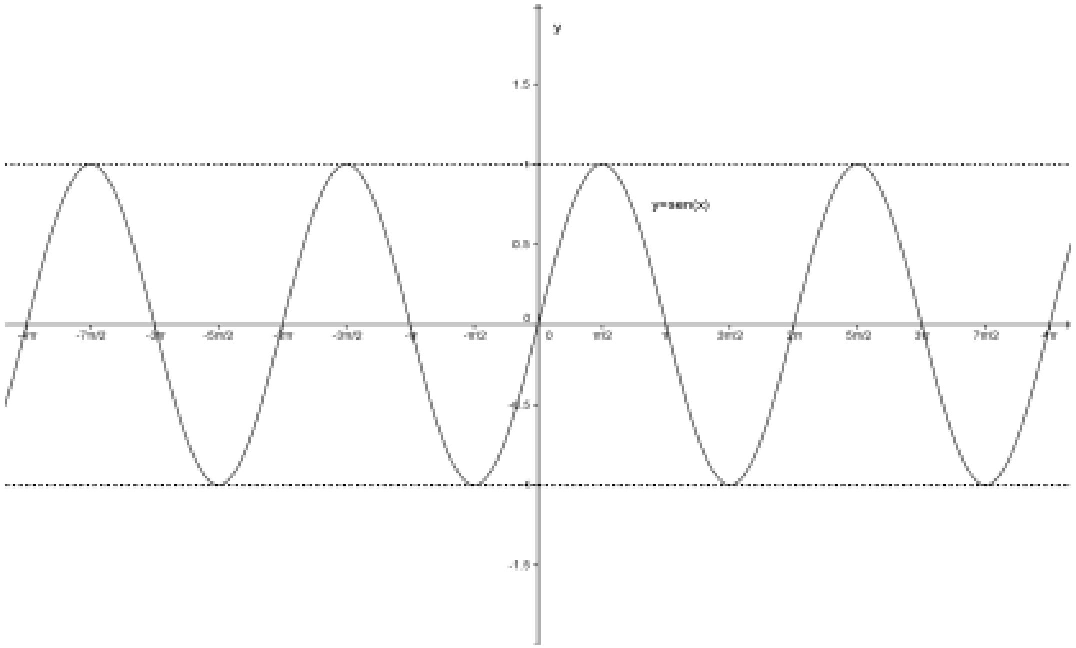
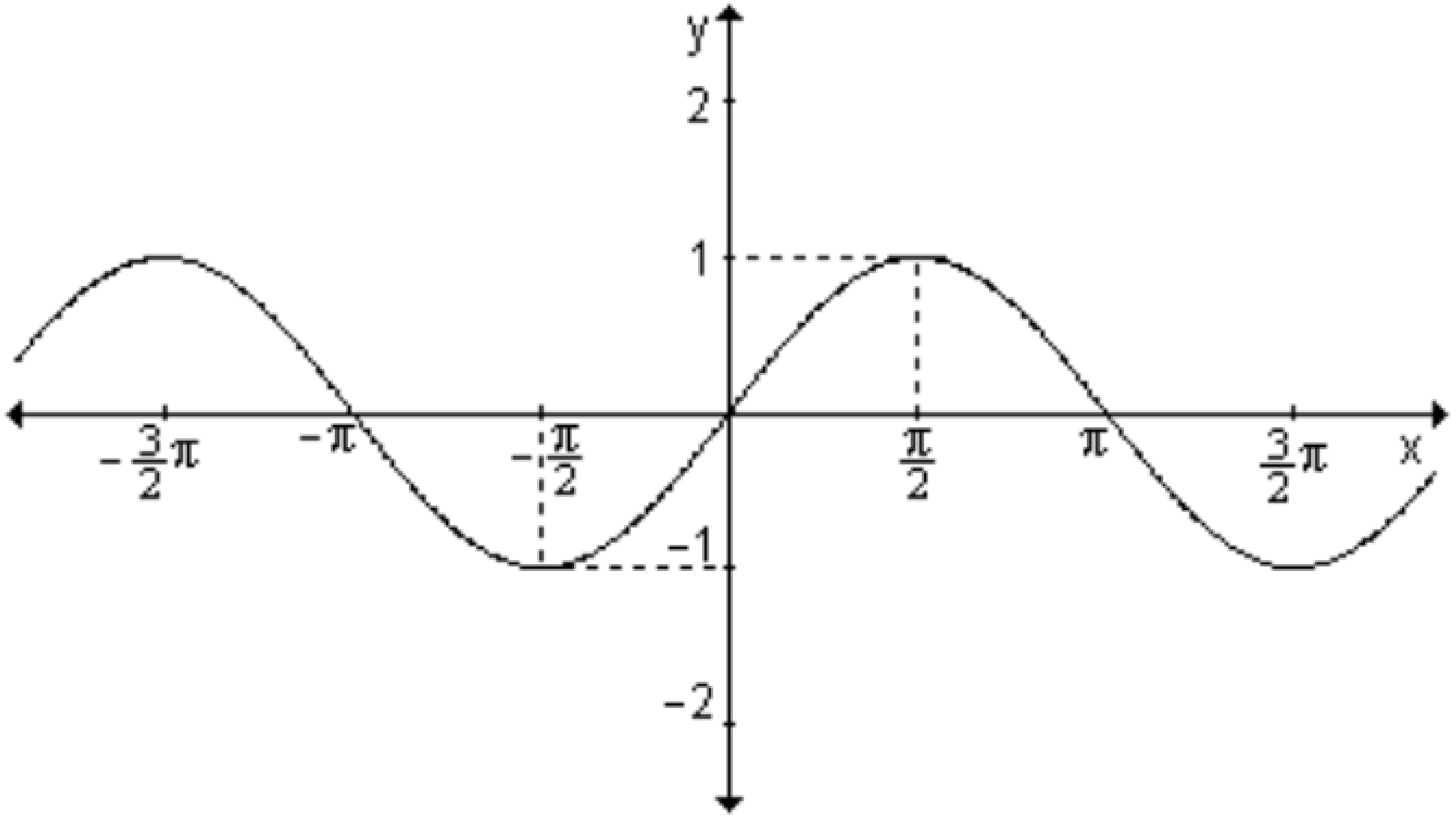


Figura 1 : Gráfico de la función $y = sen(x)$

$y = sen(x)$ se denomina *sinusoide*.
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.

Construcción Sinusoide

Gráfica de la función seno: $f : R \to R \,/\, f(x) = \text{sen}\, x$



$y = sen(x)$ se denomina *sinusoide.*
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.

La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período 2π. Esto es: $sen\,(x + 2\pi) = sen\,(x)$ En general $sen\,(x + 2k\pi) = sen\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Si se define ahora:$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]\,/\,f(x) = sen(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del seno es el arcoseno y se define:
$f : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\,/\,f(x) = sen^{-1}(x)$

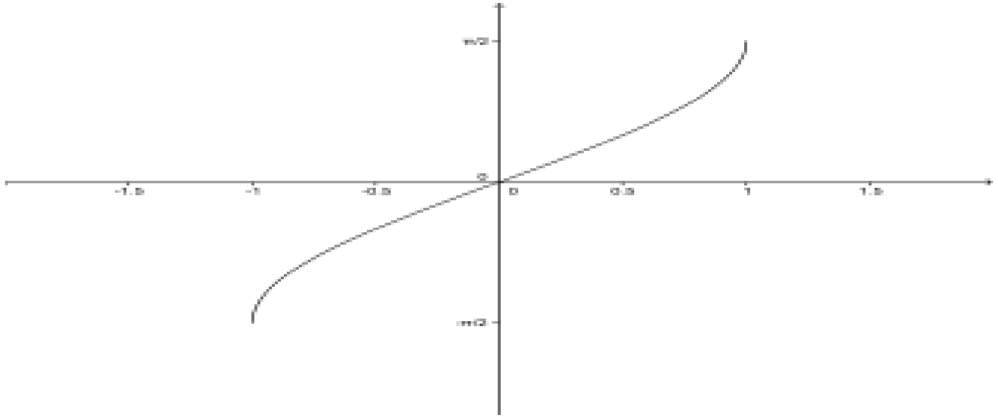


Figura 2 . Gráfico de la función $y = sen^{-1}(x)$

cosinusoide

Función coseno

Se define como: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = cos(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 21. La curva que representa la gráfica de la función

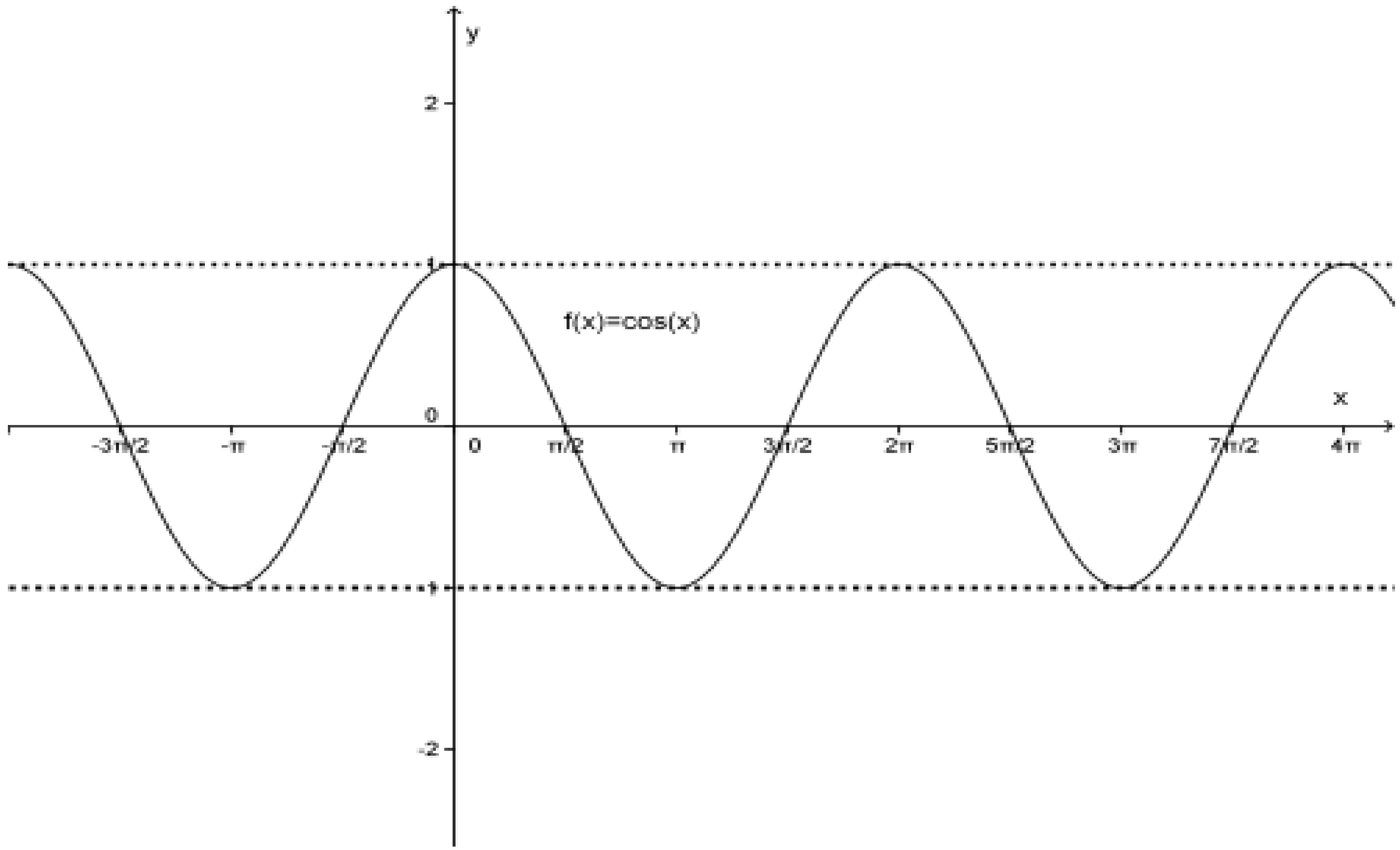


Gráfico de la función $y = cos(x)$

$y = cos(x)$ se denomina *cosinusoide*.
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.

La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período 2π. Esto es: $cos\,(x + 2\pi) = cos\,(x)$ En general $cos\,(x + 2k\pi) = cos\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Si se define ahora: $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \,/\, f(x) = cos(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del coseno es el arcococoseno y se define:
$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \,/\, f(x) = cos^{-1}(x)$

Función tangente

Se define como: $f : A \to \mathbb{R} / f(x) = tan(x)$, donde
$A = \left\{ x/x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\,\dfrac{\pi}{2} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.
La representación gráfica esta dada en la figura   La curva que representa

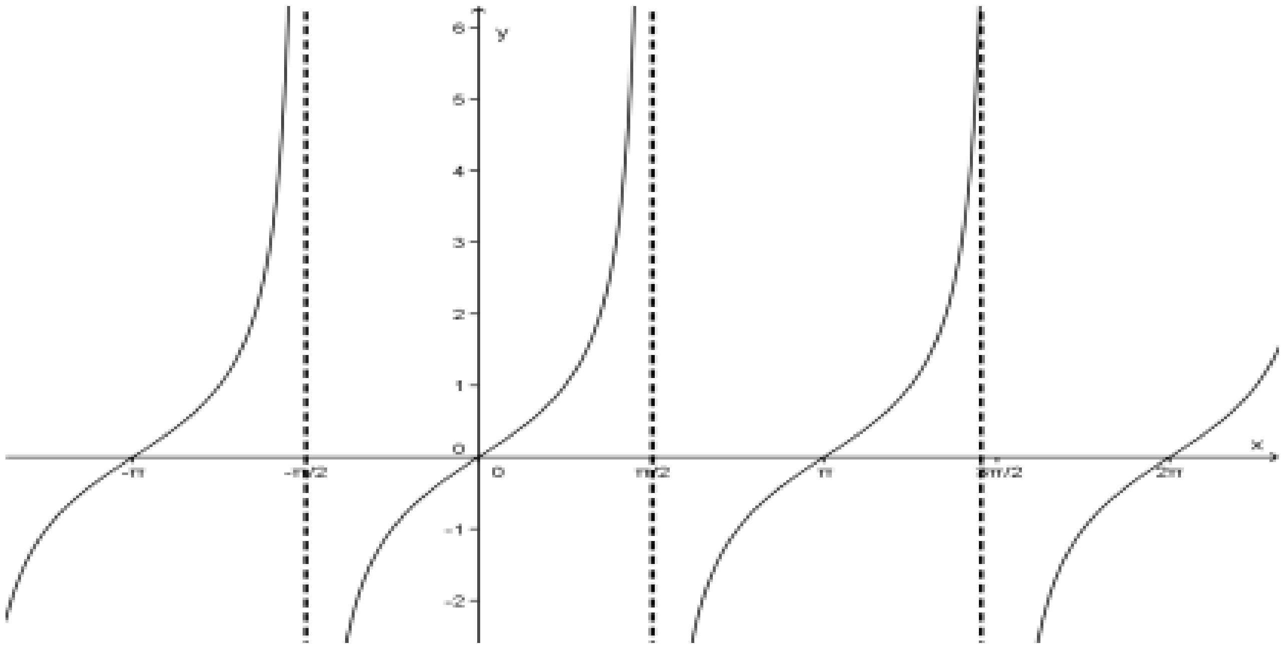


Gráfico de la función $y = tan(x)$

la gráfica de la función $y = tan(x)$ se denomina *tangentoide*.
El $Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\,\dfrac{\pi}{2} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$ y su $If = \mathbb{R}$.

Los ceros de esta función son de la forma: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Es una

Si se define ahora:$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} / f(x) = tan(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa de la tangente es el arcotangente y se define:
$f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / f(x) = tan^{-1}(x)$

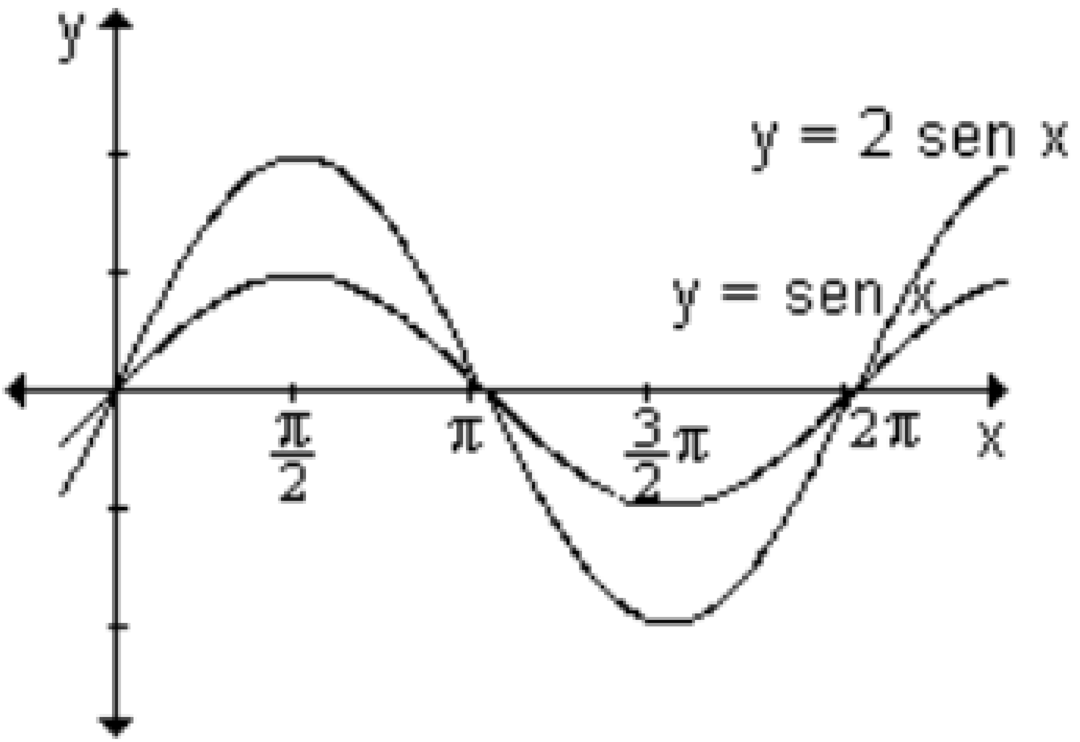
Transformaciones de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas y sus respectivas gráficas presentan algunas modificaciones si la variable independiente o la función se multiplican por algún número real, o a la variable independiente o a la función se le suma algún número real. Por ejemplo podemos pensar en la función $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$. Analizaremos algunos aspectos relacionados con dichas modificaciones.

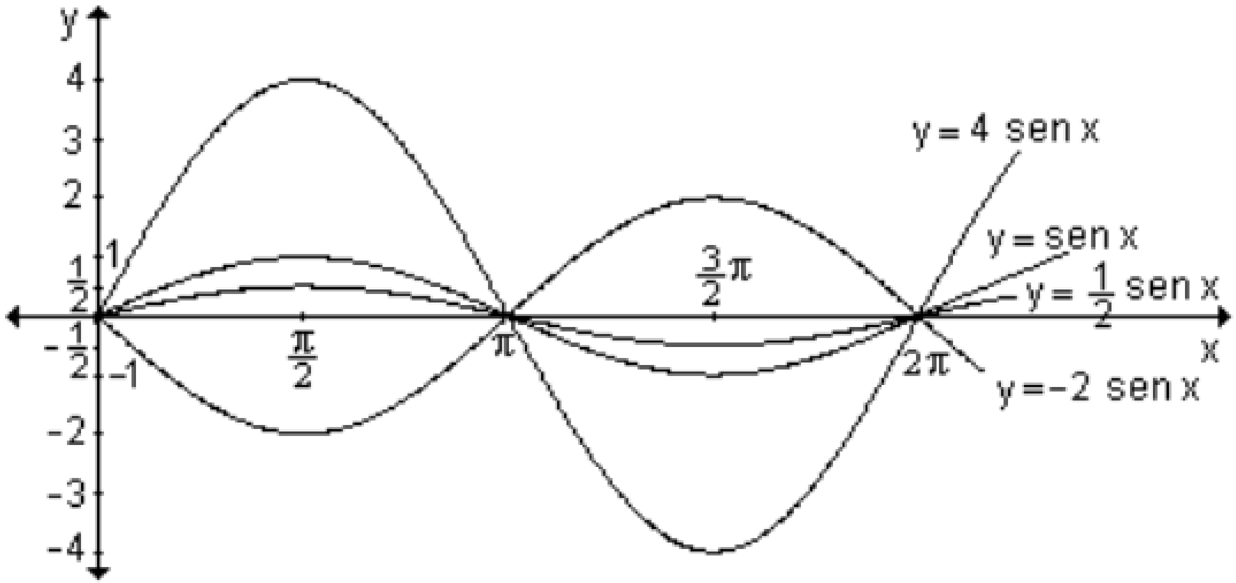
a) Amplitud

Consideremos la función f definida por $f : R \to R \,/\, f(x) = 2\text{sen } x$ y comparémosla con la función $f(x) = \text{sen } x$

Observamos que la nueva función considerada $f(x) = 2.\text{sen } x$ tiene la misma forma sinusoidal, y el mismo período 2π que la función $f(x) = \text{sen } x$; lo único que cambia es la longitud de las ordenadas, es decir, el valor de la función $f(x) = 2 \text{ sen } x$ se duplica con respecto a $f(x) = \text{sen } x$.



Si consideramos las funciones $f(x) = 4\text{sen } x$, $f(x) = \frac{1}{2}\text{ sen } x$ y $f(x) = -2\text{ sen } x$, los valores de la función $f(x) = \text{sen } x$ se multiplican por 4 en el primer caso; se reducen a la mitad en el segundo caso, y la curva se invierte multiplicada por dos en el tercero.

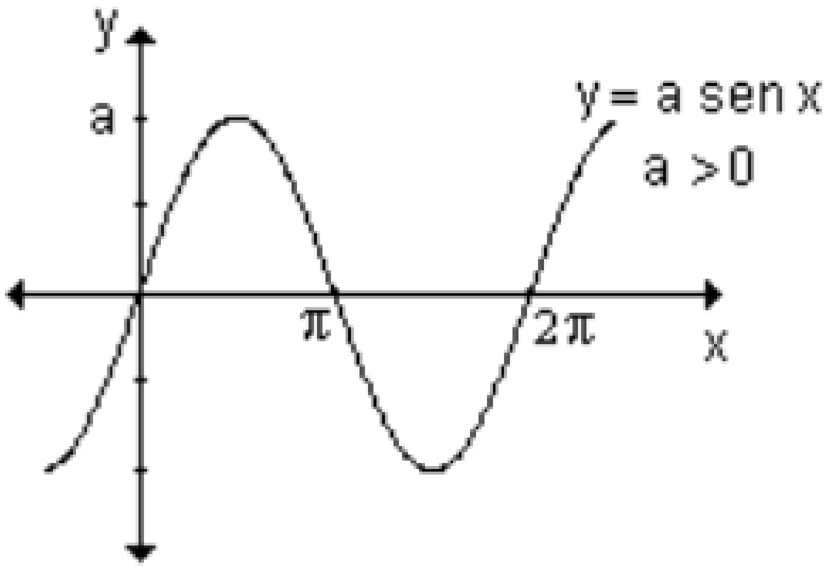


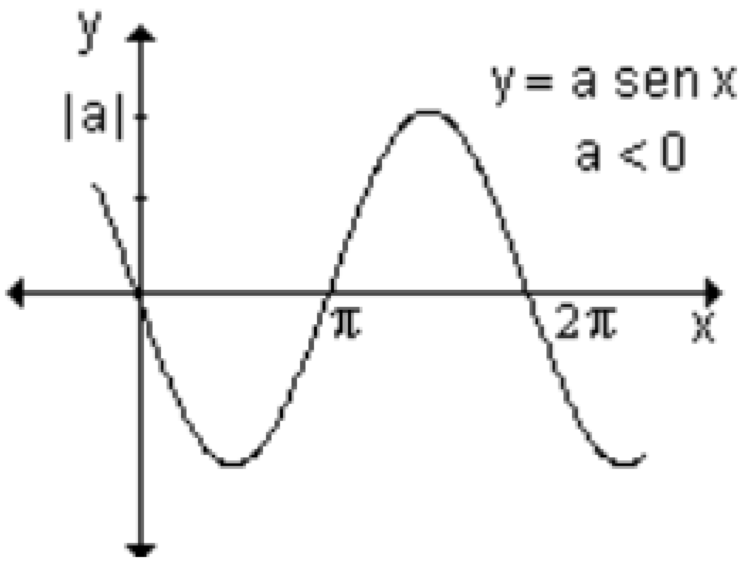
En general, si consideramos la función: $f(x) = a \text{ sen } x$, con $a \in R$, podemos concluir que:

- Si $a > 1$ las ordenadas se amplían.
- Si $0 < a < 1$ las ordenadas se reducen.
- Si $a < 0$ la curva se invierte.

Amplitud de una función trigonométrica, es el valor absoluto del coeficiente de la función. $|a| = \text{amplitud}$

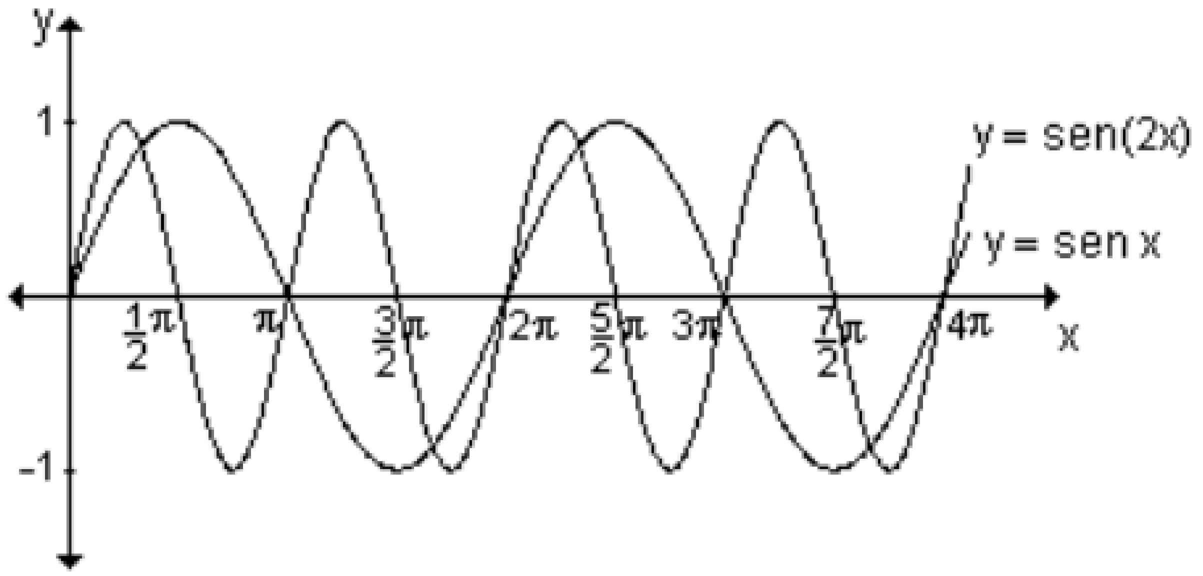
Gráficamente:





b) Período

Sea f una función definida $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = \text{sen}\,(2x)$



Observamos que la función considerada $f(x) = \text{sen}\,(2x)$, tiene forma sinusoidal y la misma *amplitud* que la función $f(x) = \text{sen}\, x$; pero el período se ha reducido a π. En efecto, mientras x, en la función $f(x) = \text{sen}\,(2x)$, toma valores comprendidos entre 0 y π, la variable (2x) toma todos los valores entre 0 y 2π; por lo tanto, la función $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ repite sus valores cada π unidades; es decir, su período es π.

En general, si consideramos la función $f(x) = \text{sen}(bx)$, con $b \in R$ podemos concluir que el *período* P de la función f está dado por $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$.

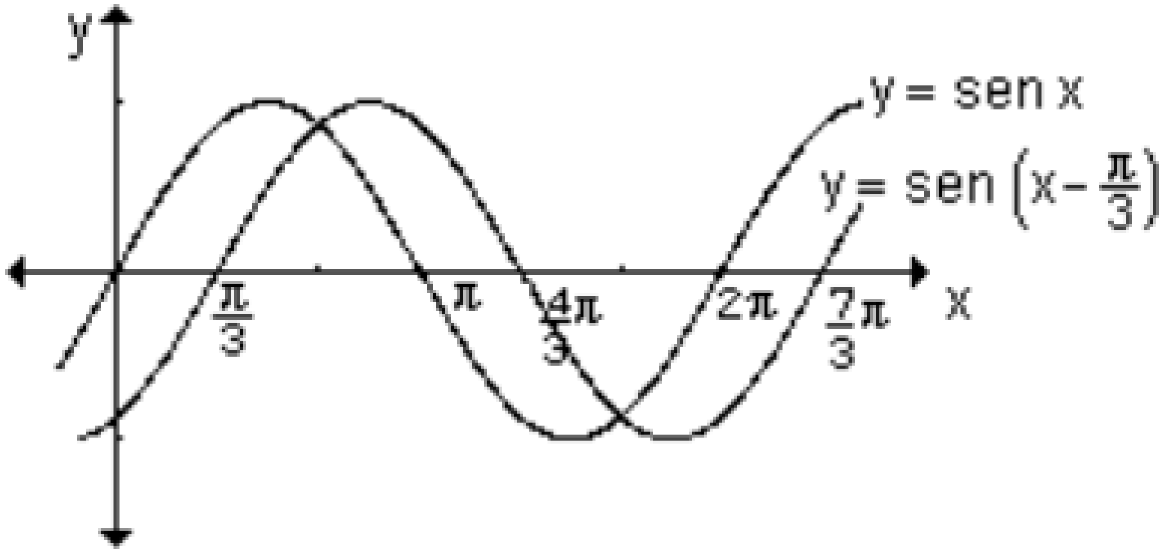
- Si $f(x) = \text{sen}\,(bx)$ y b es un número positivo mayor que uno, el período $\dfrac{2\pi}{b}$ es pequeño y las senoides (u ondas del seno) están cercanas. Se puede observar que hay b ondas de seno en el intervalo $[0, 2\pi]$.
- Si b es un número positivo pero menor que uno, el período $\dfrac{2\pi}{b}$ es grande y las ondas están alejadas unas de otras. En el intervalo $[0,2\pi]$ entran b ondas de seno.
- Si $b < 0$ podemos usar el hecho de que $\text{sen}\,(-x) = -\,\text{sen}\,x$.

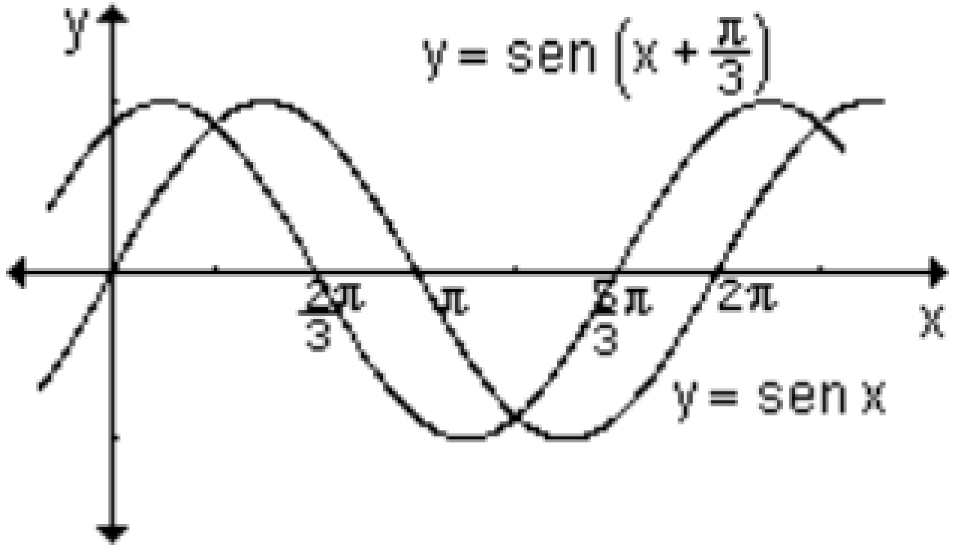
c) Fase

Investigamos ahora la familia de funciones definida de la siguiente forma:

$f: R \to R \,/\, f(x) = \text{sen}\,(x - c)$, donde c es un número real.

Consideremos dos funciones: $f\,(x) = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{3})$ y $f(x) = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{3})$ y tracemos sus gráficas.





La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ está desplazada $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}x$.

La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ está desplazada $\frac{\pi}{3}$ unidades a la izquierda en relación con la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}x$.

En general, la función $f(x) = \operatorname{sen}(x - c)$, tiene una gráfica desplazada c unidades hacia la derecha si $c > 0$, y a la izquierda si $c < 0$.

La *fase* de una función trigonométrica es la constante $|c|$. La curva está desfasada c unidades a la derecha si $c > 0$ y c unidades a la izquierda si $c < 0$.

<u>Problema</u>

En un ecosistema de presa - depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con zorros como depredadores y conejos como presa, la población de conejos c varía según la ley $c = 1000 + 150\ \text{sen}(2t)$, donde t está medido en años después del 1 de enero de 1960.

El número de zorros z satisface la expresión $z = 200 + 50\ \text{sen}\ (2t - 0{,}7)$.

a) Indique cuál es la máxima población de conejos y de zorros.

b) ¿Cuándo alcanzaron por primera vez ambas poblaciones estas cantidades máximas?

c) ¿Cuáles fueron las poblaciones el 1 de enero de 1964 ?

a) Teniendo en cuenta la expresión $c = 1000 + 150\ \text{sen}(2t)$ y dado que $|\text{sen}(2t)|$ se mantiene menor o igual a uno, el valor máximo de sen(2t) es 1. De aquí, 150.sen(2t) alcanzará como máximo el valor 150 y sumadas las 1000 unidades queda establecida como población máxima 1150 conejos.
Siguiendo el mismo razonamiento con la expresión $z = 200 + 50\ \text{sen}(2t - 0,7)$ resulta que la población de zorros alcanzará un máximo de 250.

b) Si la población de conejos asciende a 1150 resulta: $1150 = 1000+150\ \text{sen}(2t)$ y despejando t resulta:

$$\frac{1150-1000}{150} = \text{sen}(2t) \Rightarrow \text{sen}(2t) = 1 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ años} \approx 0,78 \text{ años} \cong$$

287 días.
Para los zorros resulta: $250 = 200 + 50\ \text{sen}\ (2t - 0,7)$ y despejando

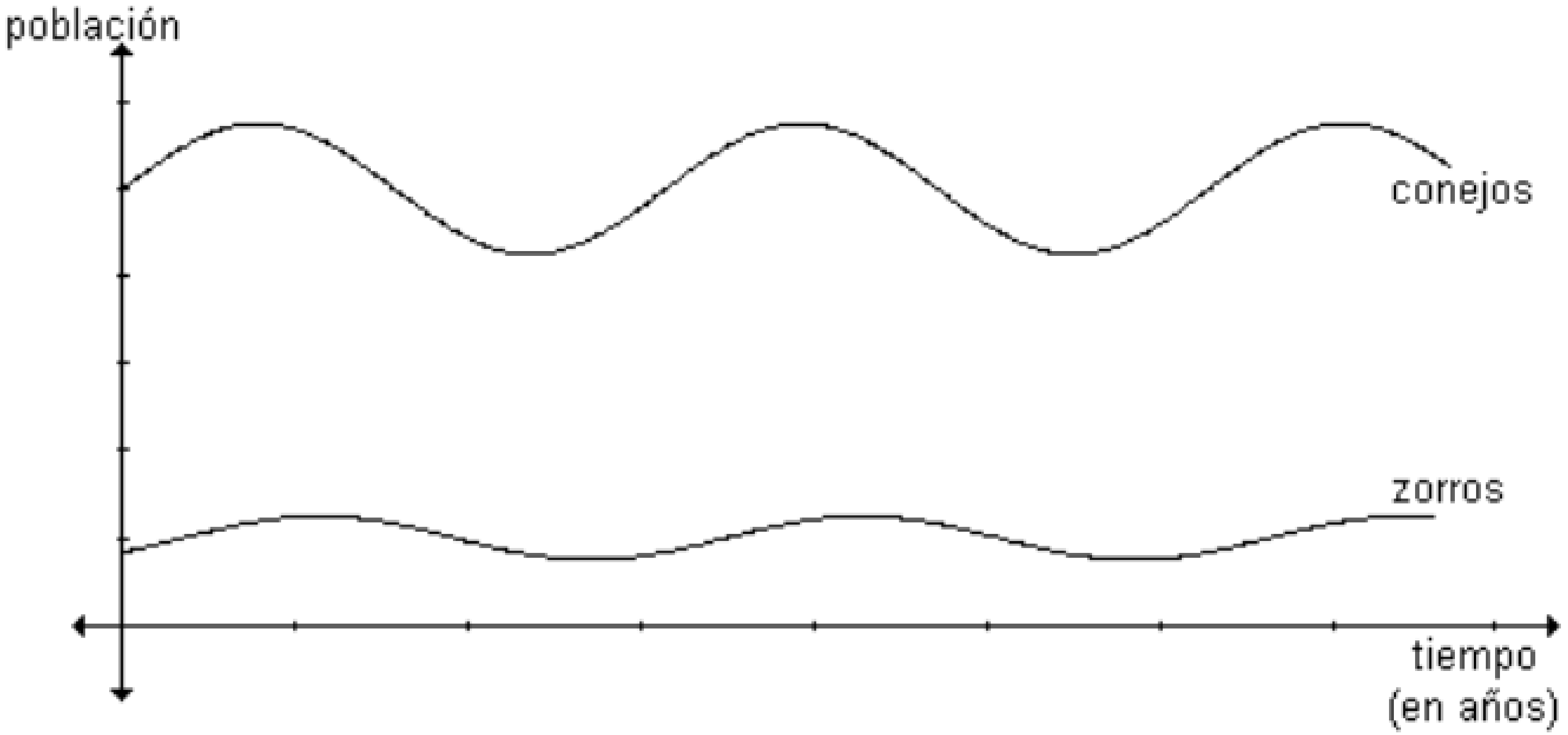
$$\frac{250-200}{50} = \text{sen}\ (2t-0,7) \Rightarrow \text{sen}\ (2t-0,7) = 1 \Rightarrow 2t - 0,7 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2}+0,7}{2} = \frac{\pi}{4} + 0,35 \approx 414 \text{ días.}$$

Por lo tanto, a los 287 días la población de conejos alcanzará su valor máximo mientras que la de zorros lo hará a los 414 días a partir del 1 de enero de 1960.

c) Los valores de las poblaciones al 1 de enero de 1964 se obtienen para $t = 4$
$c = 1000+150.\ \text{sen}\ (2.4) \cong 1148$ $\qquad$ $z = 200 + 50\ \text{sen}\ (2.4 - 0,7) \approx 242$
La población de conejos ascenderá aproximadamente a 1148 individuos y la de zorros a 242.

Si representamos la variación de las poblaciones a lo largo de los años en un mismo sistema cartesiano resulta:



2) La función que da la variación de temperatura diaria en grados centígrados en cierta región está dada por la ley $f(t) = 22 + 5\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}(t-6)$, donde t es el tiempo en horas.

- **a)** ¿Qué tipo de función es?
- **b)** Encuentre la temperatura a las 6, 12 y 18 horas.
- **c)** ¿Cuál es la temperatura máxima diaria que se registra?
- **d)** ¿Cuál es la temperatura mínima diaria que se registra?
- **e)** ¿Cada cuántas horas se repite la onda sinusoidal?