Derivadas

Calculando derivadas aplicando las reglas

Reglas de derivación

Con los resultados obtenidos, podemos confeccionar la siguiente tabla, que contiene las reglas de derivación estudiadas:

1. Si $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante. Entonces $f^{'}(x) = 0$

2. Si $f(x) = x$. Entonces $f^{'}(x) = 1$

3. Si $f(x) = k.g(x)$ con k constante. Entonces $f^{'}(x) = k.g^{'}(x)$

4. Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f^{'}(x) = n.x^{n-1}$

5. Si f y g dos funciones derivables. Entonces $(f+g)^{'}(x) = f^{'}(x) + g^{'}(x)$.

6. Si f y g dos funciones derivables. Entonces

$$(f.g)^{'}(x) = f^{'}(x)\, g(x) + f(x)\, g^{'}(x)$$

7. Si f y g dos funciones derivables en x, y $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)\,g(x) - f(x)\,g^{'}(x)}{\left(g(x)\right)^{2}}$$

8. Si $f(x) = sen(x)$. Entonces $f^{'}(x) = cos(x)$.

9. Si $f(x) = cos(x)$. Entonces $f^{'}(x) = -sen(x)$.

10. Si $f(x) = ln(x)$. Entonces $f^{'}(x) = \frac{1}{x}$.

11. Si g es derivable en x, y f es derivable en $g(x)$. Entonces

$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}[g(x)]\,g^{'}(x)$$

12. Si $f(x) = a^{x}$. Entonces $f^{'}(x) = a^{x}ln(a)$.

Si $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante. Entonces $f'(x) = 0$

Es decir, $si\ f(x) = 5 \implies f'(x) = 0$

Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f'(x) = n.x^{n-1}$

Es decir,$si\ f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Si $f(x) = k.g(x)$ con k constante. Entonces $f'(x) = k.g'(x)$

Es decir, si $f(x) = 5x^4 \implies f'(x) = 5.4x^{4-1} = 20x^3$

- $Si\ f(x) = \frac{1}{x}, escribimos: f(x) = x^{-1} \Longrightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

- Si $f(x) = \frac{1}{x^2}, escribimos: f(x) = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -x^{-3}$

- $f(x) = \sqrt{x}, escribimos: f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Si f y g dos funciones derivables. Entonces $(f+g)^{'}(x) = f^{'}(x) + g^{'}(x)$.

Es decir:

- si $f(x) = 3\,sen\,x + 2x^2 - 6 + \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = 3\cos x + 4x + \frac{1}{x}$
- si $f(x) = 5x^2 + 3x - \ln(x) + 8 \Longrightarrow f'(x) = 10x + 3 - \frac{1}{x}$

Si f y g dos funciones derivables. Entonces

$$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Ejemplos:

1) $f(x) = 3x^2.senx \Longrightarrow f'(x) = 6x.senx + 3x^2.cosx$

$$f'(x) = -senx.\ln(x) + cosx.\frac{1}{x}$$

2) $f(x) = cosx.\ln(x)$

$$f'(x) = -senx.\ln(x) + cosx.\frac{1}{x}$$

Si f y g dos funciones derivables en x, y $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

1) $f(x) = \dfrac{3x^2}{senx} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{6x.senx - 3x^2.cosx}{sen^2x}$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{6x+1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}.(6x+1) - lnx.6}{(6x+1)^2}$

Derivada de la función exponencial

La regla de derivación para la función exponencial es:

$$\text{Si } f(x) = a^x. \text{ Entonces } f'(x) = a^x ln(a).$$

¿Por qué? ¿Siempre me sirve esta regla?

Repasemos:

Dada la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x, \quad a > 0 \; y \; a \neq 1$$

la función logarítmica, inversa de la exponencial, es

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / f(x) = \log_a x \,, a > 0 \; y \; a \neq 1$$

Recordemos que el logaritmo se define como:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Es decir, $\log_a x$ es el exponente al cual debemos elevar la base a para obtener x.

Es decir:

$\log_2 32 = 5, porque\ 2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2\ , pues\ 3^2 = 9$
$\log_5 5 = 1, pues\ 5^1 = 5$
$\log_2 1 = 0, ya\ que\ 2^0 = 1$
$\log_3 1 = 0, pues\ 3^0 = 1$
$\log_2 \frac{1}{4} = -2, pues\ 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Algunas propiedades de los logaritmos

1) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = n.\log_a b$

Ecuaciones Exponenciales:

la x está como exponente!

$$2^x = 1$$

¿Cómo la calculo?

$$2^{3x+1} = \frac{1}{4}$$

Utilizando logaritmos

$$\log_2 2^{3x+1} = \log_2 \frac{1}{4}$$

Aplicando la propiedad 3, es:

$$(3x+1)\log_2 2 = \log_2 \frac{1}{4}$$

Como: $\log_2 2 = 1$ y $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

Reemplazando: $3x + 1 = -2$

$$3x = -3 \implies x = -1$$

Vimos que la regla de derivación para la función exponencial es:

$$\text{Si } f(x) = a^x. \text{ Entonces } f'(x) = a^x ln(a).$$

¿Por qué? ¿Siempre me sirve esta regla?

Vamos con un ejemplo!

Si $f_{(x)} = 5^x \Rightarrow$ por Regla es: $f'_{(x)} = 5^x \cdot \ln 5$

Si $f_{(x)} = 3^x \rightarrow f'_{(x)} = 3^x \cdot \ln 3$ ... etc....

Pero si $f_{(x)} = x^{\operatorname{sen} x}$ o $g_{(x)} = x^{\ln x}$; $f_{(x)} = (\operatorname{sen} x)^x$ ...

¡La base no es un número!

$\downarrow$

¡ojo! No puedo aplicar la regla ¡¡!!

¿Cómo llegamos a la regla?

Si $y = a^x$ aplicando logaritmo a ambos miembros:

$\ln y = \ln a^x$ aplico la prop. 3 al 2^{do} miembro:

$\ln y = \underbrace{x \cdot \ln a}_{\text{constante}}$ derivando ambos miembros (y por derivada a la función implícita en el primero)

implícita

$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln a$

$y' = y \cdot \ln a \Rightarrow \boxed{y' = a^x \cdot \ln a}$

Por lo tanto, si tengo que derivar una función exponencial cuya base es un número, puedo → aplicar la regla o

↘ hacer todo el procedimiento anterior

Pero, si la base NO es una constante ⇒ debo hacer, sí o sí, todo el procedimiento!

Ejemplos:

1) Si $y = x^{\operatorname{sen} x}$ Aplico logaritmo a ambos miembros (para bajar el exponente)

$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x}$ Aplico prop. 3 al 2º m.

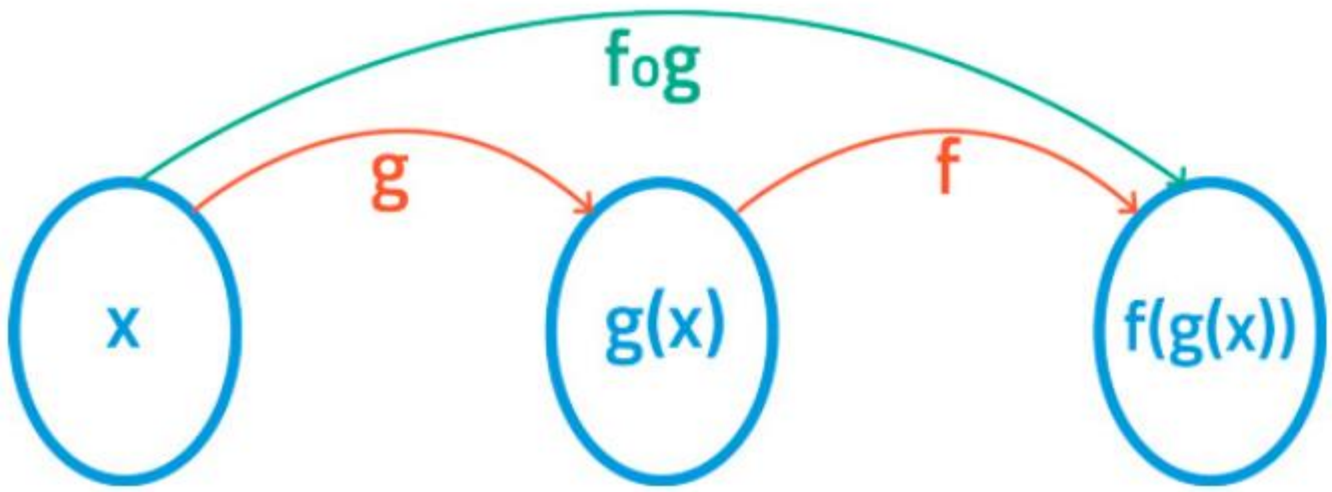
$\ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln(x)$ Derivo ambos m., cuidado, el 2º m. es un prod

$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x) + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x}$ derivo como producto!

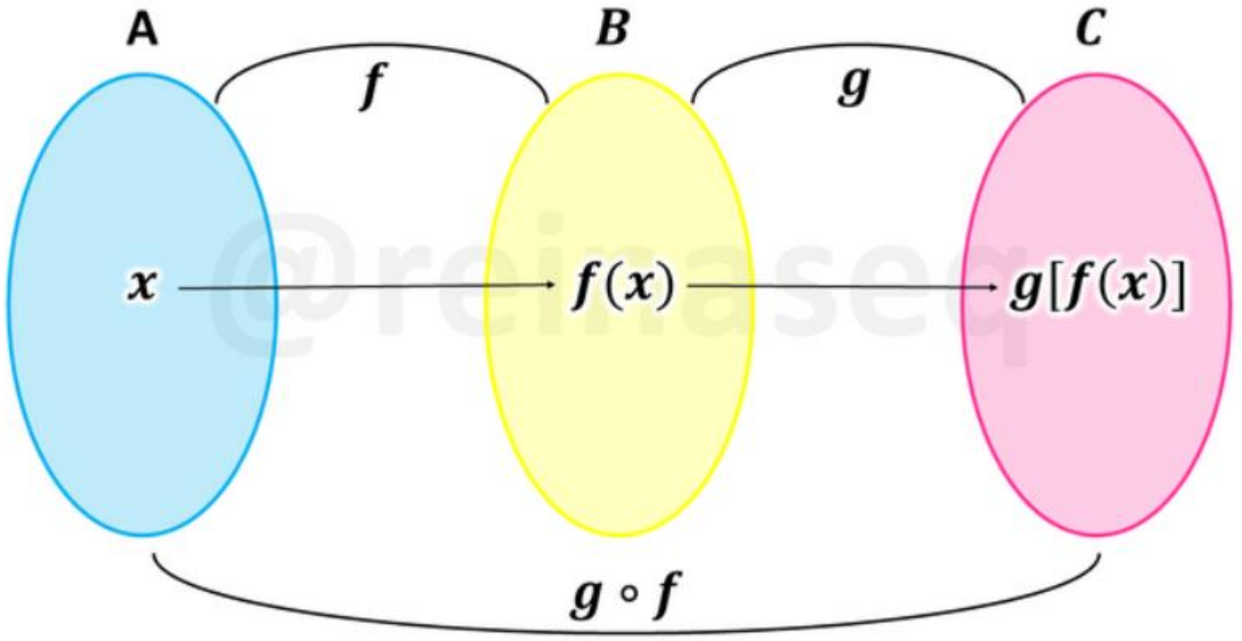
$y' = y \left(\cos x \cdot \ln(x) + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} \right)$

$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left[\cos x \cdot \ln(x) + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} \right]$

Derivada de la función compuesta



$$f \circ g = f[g(x)]$$



$$g \circ f = g[f(x)]$$

Ejemplos de funciones compuestas:

$$f(x) = \ln(senx),$$

f(x)=Sen(5x)

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

Si g es derivable en x, y f es derivable en $g(x)$. Entonces

$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}[g(x)]\, g^{'}(x)$$

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}$$

Si:

- $y = f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

- $f(x) = \operatorname{sen}(5x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(5x) \cdot 5$

• Si $f(x) = \sqrt{3x+2} \Rightarrow f(x) = (3x+2)^{1/2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(3x+2)^{-1/2}$$

• Si $f(x) = (5x^2+2x)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (5x^2+2x)^2 \cdot (10x+2)$$

• Si $y = \ln(3x^2-8) \Rightarrow y' = \frac{1}{3x^2-8} \cdot (6x)$

- Si $\quad f(x) = \sqrt{\ln x} \Rightarrow f(x) = (\ln x)^{1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \cdot \frac{1}{x}$

- $y = \ln(\operatorname{sen} 5x)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{sen}(5x)} \cdot \cos(5x) \cdot 5$

$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{3x} \longrightarrow$ función exponencial

$y = (\operatorname{sen} x)^{3x}$ aplico log. a ambos miembros

$\ln y = \ln (\operatorname{sen} x)^{3x}$ aplico prop 3 en el 2^{do}. m.

$\ln y = 3x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)$ derivo ambos miembros

$\frac{1}{y} \cdot y' = 3 \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + 3x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

$y' = y \cdot \left[3 \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + 3x \, \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right]$

$y' = (\operatorname{sen} x)^{3x} \cdot \left[3 \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + 3x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right]$

Calcule las siguientes derivadas:

a) $y = x^2 - 5x^3 + tg\frac{\pi}{4}$
b) $y = \frac{1}{2}x^4 - 2\,lnx + \sqrt{x}$
c) $y = e^x - ln2 + 3\sqrt{x} - 2tgx$
d) $y = \ln(\sqrt{1+x^2})$
e) $y = \sqrt{3}e^{-4x} + sen^2x$
f) $y = \frac{1+e^{2x}}{e^x}$
g) $y = \ln(5x)$
h) $y = \ln(3x^2 + 7x)$
i) $y = x^{5x}$
j) $y = \sqrt{lnx}$

Respuestas:

a) $y' = 2x - 15x^2$
b) $y' = 2x^3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
c) $y' = e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\sec^2 x$
d) $y' = \frac{x}{(1+x^2)}$
e) $y' = -4\sqrt{3}\,e^{-4x} + 2\,senx.cosx$
f) $y' = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$
g) $y' = \frac{1}{x}$
h) $y' = \frac{6x+7}{3x^2+7x}$
i) $y' = x^{5x}(5lnx + 5)$
j) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$