Teoría de Conjuntos

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
LICENCIATURA EN SISTEMAS

Conceptos primitivos

- **Conjunto:**

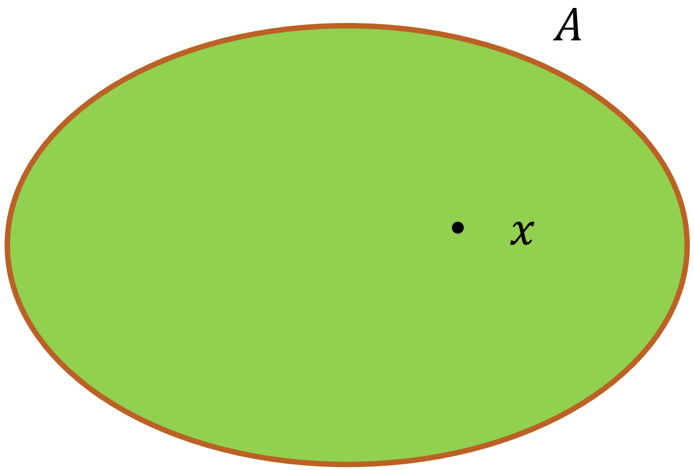
  Agrupación de objetos llamados **elementos**.

  Ejemplos: conjunto de números dígitos, conjunto de alumnos inscriptos en Álgebra y Geometría Analítica, conjunto de provincias de la Mesopotamia argentina.

- **Relación de pertenencia:**

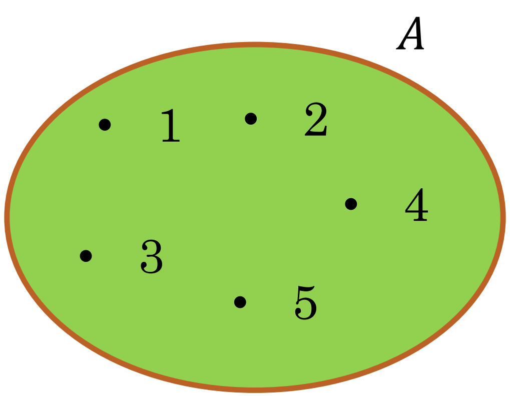
  Si A es un conjunto y x es un elemento de A, la expresión simbólica $\underline{x \in A}$, se lee **"x pertenece a A"** y significa que **"x es un elemento del conjunto A"**

Diagrama de venn



$x \in A$

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4,5\}$



$1 \in A$

$2 \in A$

$3 \in A$

$4 \in A$

$5 \in A$

$6 \notin A$

$8 \notin A$

Conjunto Universal

- Diagrama de Venn

Ejemplo:

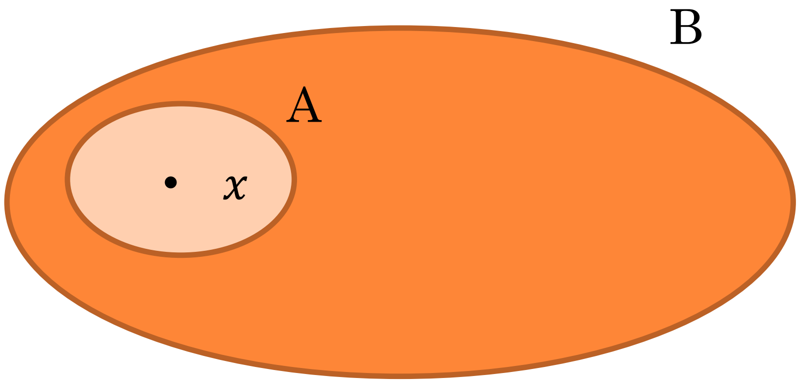
$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{N}$$

Relación de inclusión:

Sean A y B dos conjuntos, A está incluido en B, lo que se denota $\underline{A \subset B}$ si, y sólo si, todo elemento de A es elemento de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



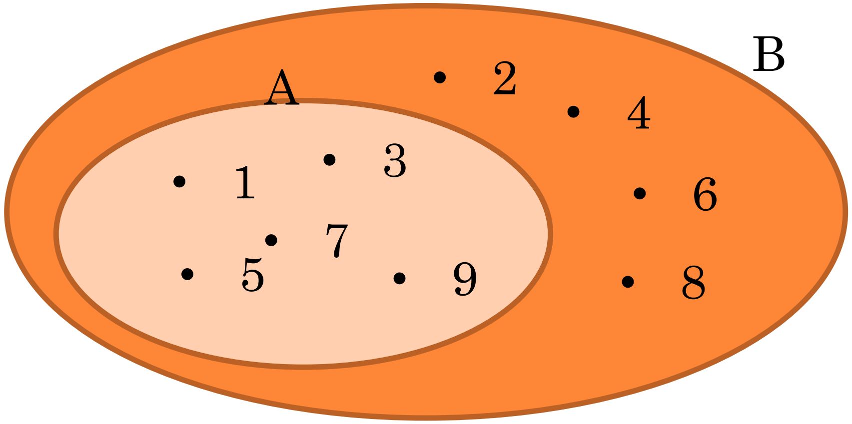
Ejemplo

$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1,3,5,7,9\}$

$A \subset B$

Gráficamente:



Propiedades de la relación de inclusión

(a) $A \subset A; \quad \forall A$ (Propiedad reflexiva)

(b) $\forall A, B$: si $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A=B$
(Propiedad antisimétrica)

(c) $\forall A, B, C$: si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
(Propiedad transitiva)

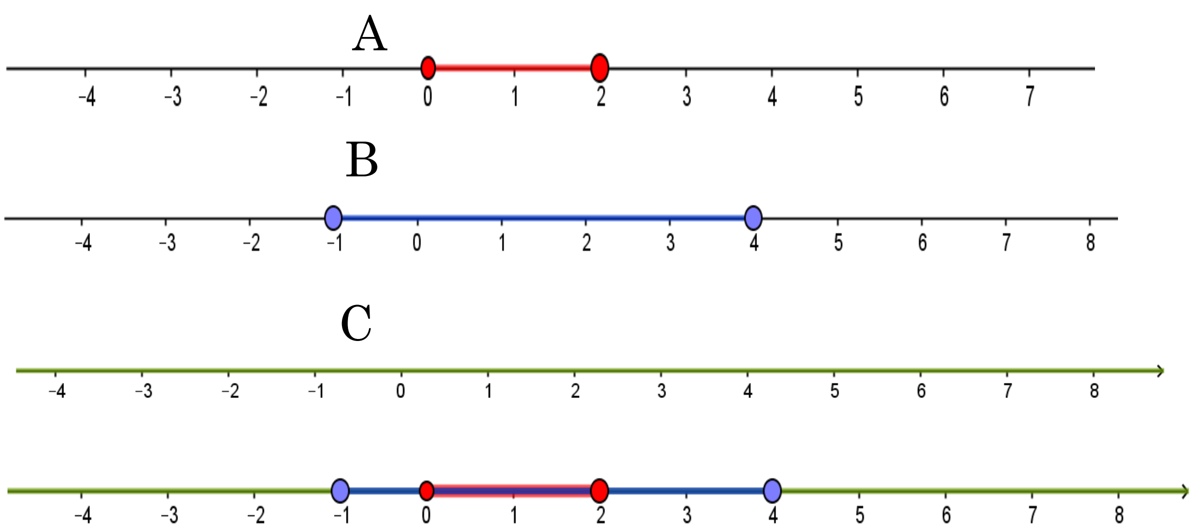
Propiedad Transitiva

- Lo vemos en un ejemplo

$$B = [-1;4] \;\; ; \;\; A = [0;2]$$

$$C = (-\infty;\infty) = \mathbb{R}$$

$$A \subset B \;\wedge\; B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset C$$



Axiomas de la teoría de conjuntos

- **Axioma 1. (Axioma de Sustitución)**

  "Sea P(x) una función proposicional respecto de la variable x. Si P(x) es verdadera y si $u = x$, entonces P(u) es también verdadera".

- **Axioma 2. (Axioma de Extensión)**
  "Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos".

  Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$

Ejemplo

- Sean las funciones proposicionales:

$$P(x): x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 4 = 0$$

$$Q(x): x \in \mathbb{R} \wedge (x-2) \cdot (x+2) = 0$$

- Conjuntos de verdad:

$$P = \{-2; 2\}$$
$$Q = \{-2; 2\}$$

$$P = Q$$

Propiedades de la relación de igualdad

(a) $A = A;\ \forall A$ (Propiedad reflexiva)

(b) $\forall A, B$: si $A = B \Rightarrow B = A$ (Propiedad simétrica)

(c) $\forall A, B, C$: si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$
(Propiedad transitiva)

Por cumplir estas tres propiedades se trata de una relación de equivalencia

Axiomas de la teoría de conjuntos

- **Axioma 3. (Axioma de Especificación)**

  "Dado un conjunto $\boldsymbol{U}$ y una función proposicional $\boldsymbol{P(x)}$ con $\boldsymbol{x \in U}$, existe un único subconjunto $\boldsymbol{A\ de\ U}$, cuyos elementos son todos los elementos $\boldsymbol{x \in U}$ tales que $\boldsymbol{P(x)}$ es verdadera".

$$A = \{x \in U \,/\, P(x)\}$$

- **Conjunto vacío:** $\varnothing = \{x \,/\, f(x)\}$

  Ejemplo: $\varnothing = \{x \in R \,/\, x \neq x\}$

- **Propiedades del conjunto vacío**
  - $\boldsymbol{a})\forall \boldsymbol{a}: \boldsymbol{a} \notin \emptyset$
  - **b)**$\forall \boldsymbol{A}: \emptyset \subset \boldsymbol{A}$
  - **c) El conjunto vacío es único**

Demostraciones de las propiedades del conjunto vacío

- $\forall a: a \notin \phi$

  Esta afirmación es verdadera por definición de conjunto vacío.

- $\forall A: \emptyset \subset A$

  Por relación de inclusión:

  $$\emptyset \subset A: \forall x: x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

  Es una implicación con antecedente falso, por lo tanto es verdadera.

- El conjunto vacío es único.

  Suponemos que existen dos conjuntos vacíos $\emptyset$ y $\emptyset´$.
  Entonces, en virtud de la propiedad anterior:

  $$\emptyset \subset \emptyset´$$

  $$\emptyset´ \subset \emptyset$$

  Por propiedad antisimétrica: $\emptyset = \emptyset´$

Observaciones y ejemplos:

- El axioma de especificación nos permite definir conjuntos

Ejemplos:

- ✓ $A = \{x \in \mathbb{Z} /|x| \leq 1\}$
- ✓ $A = \{-1; 0; 1\}$
- ✓ $B = \{x \in \mathbb{N}/x = \dot{2} \wedge x < 4\}$
- ✓ $B = \{2\}$
- ✓ $C = \{x \in \mathcal{U}/x = \dot{3} \vee x = \dot{5}\}; \mathcal{U} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- ✓ $C = \{0; 3; 5; 6; 9\}$
- ✓ $D = \{x \in \mathbb{R}/|x| \leq 1\}$
- ✓ $D = [-1; 1]$
- ✓ $E = \{x \in \mathbb{Q}/|x| \leq 1\}$
- ✓ $E = \{x \in \mathbb{Q}/-1 \leq x \leq 1\}$
- ✓ $\mathrm{F} = \{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 1\}$
- ✓ $\mathrm{F} = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$

AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

- **Axioma 4. (Axioma del conjunto potencia)**
  "Dado un conjunto *A*, existe un conjunto y solamente uno cuyos elementos son todos los subconjuntos de *A*".

$$P\,(A) = \{X \,/\, X \subset A\}$$

- **Observación:**
  a) Como para todo conjunto A, $\phi \subset A$ y $A \subset A$, entonces
  $$\phi \in P\,(A) \quad \text{y} \quad A \in P\,(A)$$
  b) Se demuestra que, si A es un conjunto que tiene n elementos, entonces $P\,(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejemplos

Dado $A = \{1; 2\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$$

$$\#P(A) = 4, \#P(A) = 2^{\#A}$$

Sea $B = \{a, b, c\}$

$$P(B) = \{\emptyset. \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, B\}$$

$$\#P(B) = 8, \#\mathrm{P(B)} = 2^{\#B}$$

Dado el conjunto vacío:

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\#P(\emptyset) = 1, \#P(\emptyset) = 2^{\#\emptyset}$$