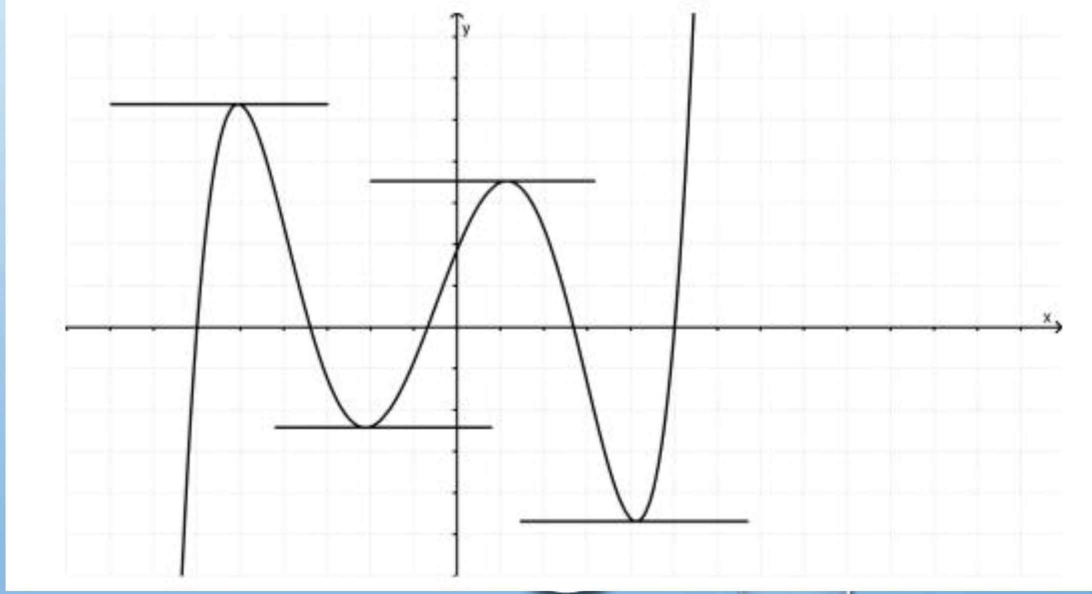
# UNIDAD V

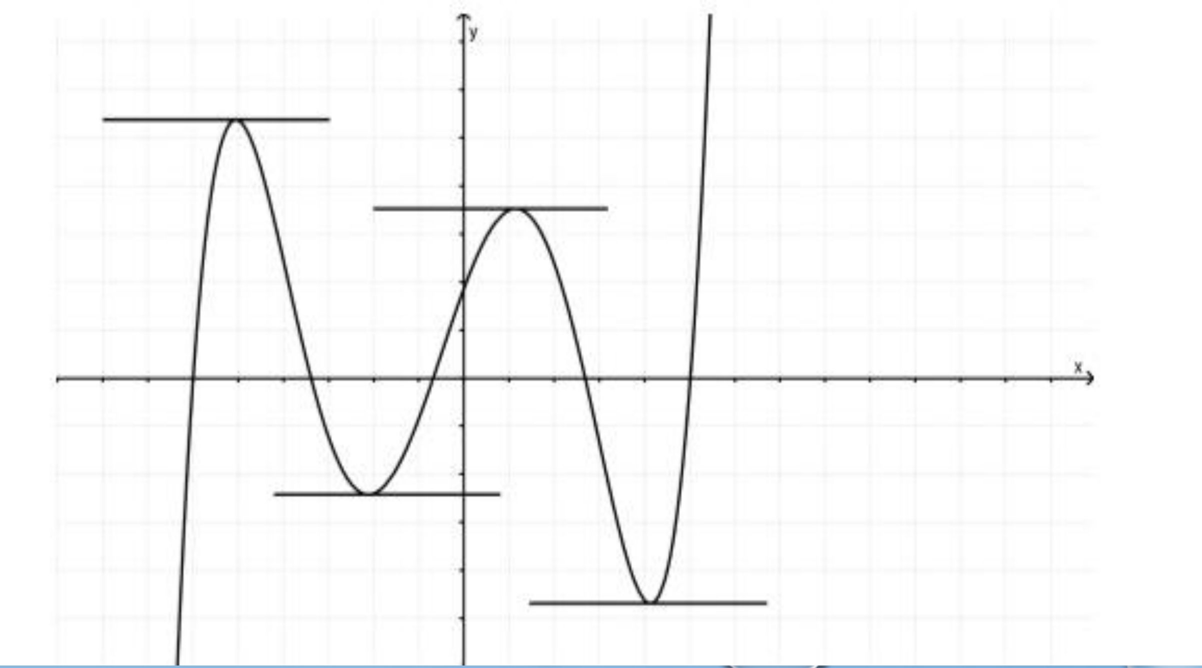
## APLICACIONES DE LA DERIVADA

## 1.1. Teoremas de las funciones derivables

**Definición 1:** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $y = f(x)$.
Sea un punto $x_0 \in A$ se dice *máximo* de $f$ si es $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x$ en el dominio de $f$ y se dice *mínimo* de $f$ si es $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x$ en el dominio de $f$.
Dicho de otra manera, un máximo de $f$ es un punto donde $f$ alcanza su máximo valor posible y un mínimo de $f$ es un punto en donde $f$ alcanza su menor valor posible.



**Definición 2:** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $y = f(x)$.
Sea un punto $x_0 \in A$ se dice *máximo relativo* de $f$ si existe un entorno de centro $x_0$ y radio $\delta$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x$ en dicho entorno y se dice *mínimo relativo* de $f$ si existe un entorno de centro $x_0$ y radio $\delta$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x$ en dicho entorno.
Al observar la siguiente figura, se puede ver que en los máximos o mínimos de la función, la recta tangente a la gráfica de la misma es horizontal.

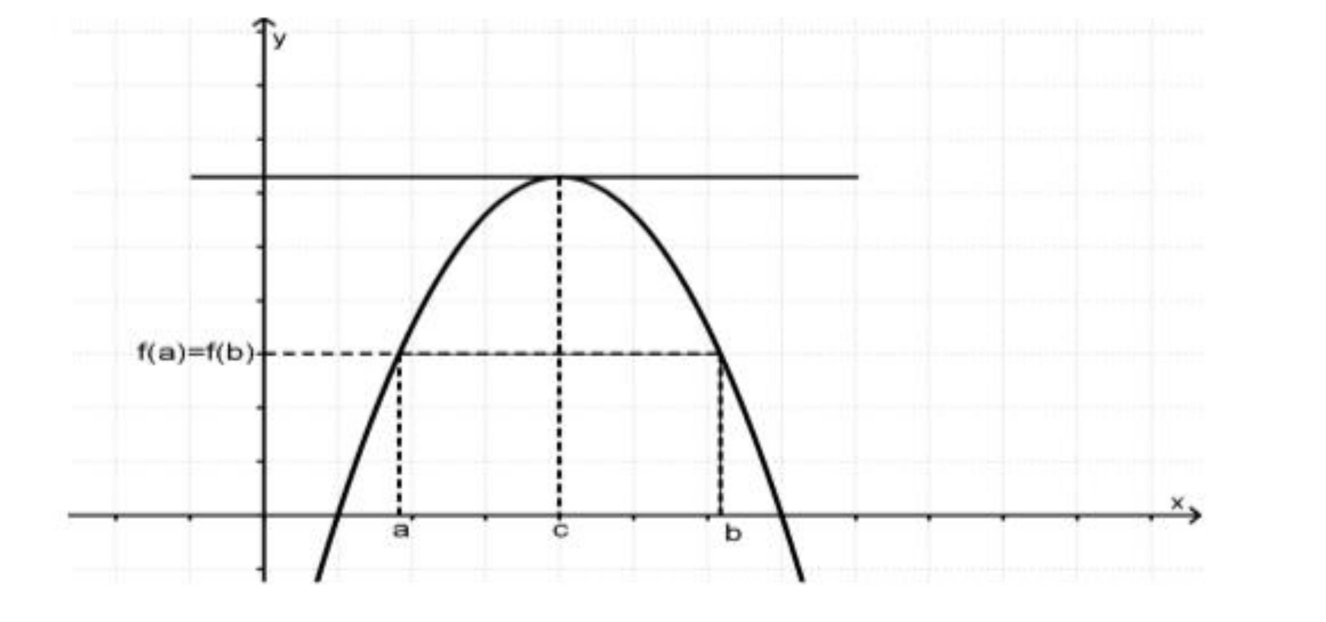


Recordemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función

en un punto está dada por la derivada de la función en dicho punto.
Esta observación y la del parrafo anterior motivan enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 1.1** *(Teorema de Fermat)*
*Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$, si $x_0 \in (a, b)$ y es un máximo o un mínimo de $f$ y si $f$ es derivable en $x_0$ entonces, $f'(x_0) = 0$.*

**Teorema 1.2** *(Teorema de Rolle)*
*Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ y $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*



Discutir si es aplicable el T de Rolle en el intervalo indicado. Si lo es, hallar todos los $c$ del intervalo tales que $f'(c) = 0$.

Interpretar geométricamente.

$a) f(x) = x^2 - 3x + 2 \;\; en\; [1; 2]$

$b) f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x \;\; en\; [-2; 0]$

$c) f(x) = x^{\frac{2}{3}} \;\; en\; [-1; 1]$

## 1.2. Regla de L'Hospital

- **Caso** $\frac{0}{0}$

Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas y derivables en un intervalo $(a, b)$. Para $x_0 \in (a, b)$, supongamos $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b), x \neq x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. En esas condiciones, si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Ejemplo 1:** Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1}$.

El numerador y el denominador valen 0 cuando $x = 1$, y además $(x-1)' = 1 \neq 0$, luego estamos en condiciones de aplicar la regla enunciada:

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

- **Caso** $\frac{\infty}{\infty}$

  Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas y derivables en un intervalo $(a, b)$, salvo en $x_0 \in (a, b)$, y supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ y que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)\,, x \neq x_0$ . En esas condiciones, si existe

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

  entonces existe $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Ejemplo 2:** Calcular $\lim_{x\to 0} x.ln(x)$.

Este límite no es del tipo enunciado, ya que es de la forma $0.\infty$, pero lo podemos llevar a la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{ln(x)}{1/x} = 0$$

Resolver:

$$a)\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

$$b)\lim_{x \to 0} \frac{2\mathrm{x}^2}{e^x-1}$$

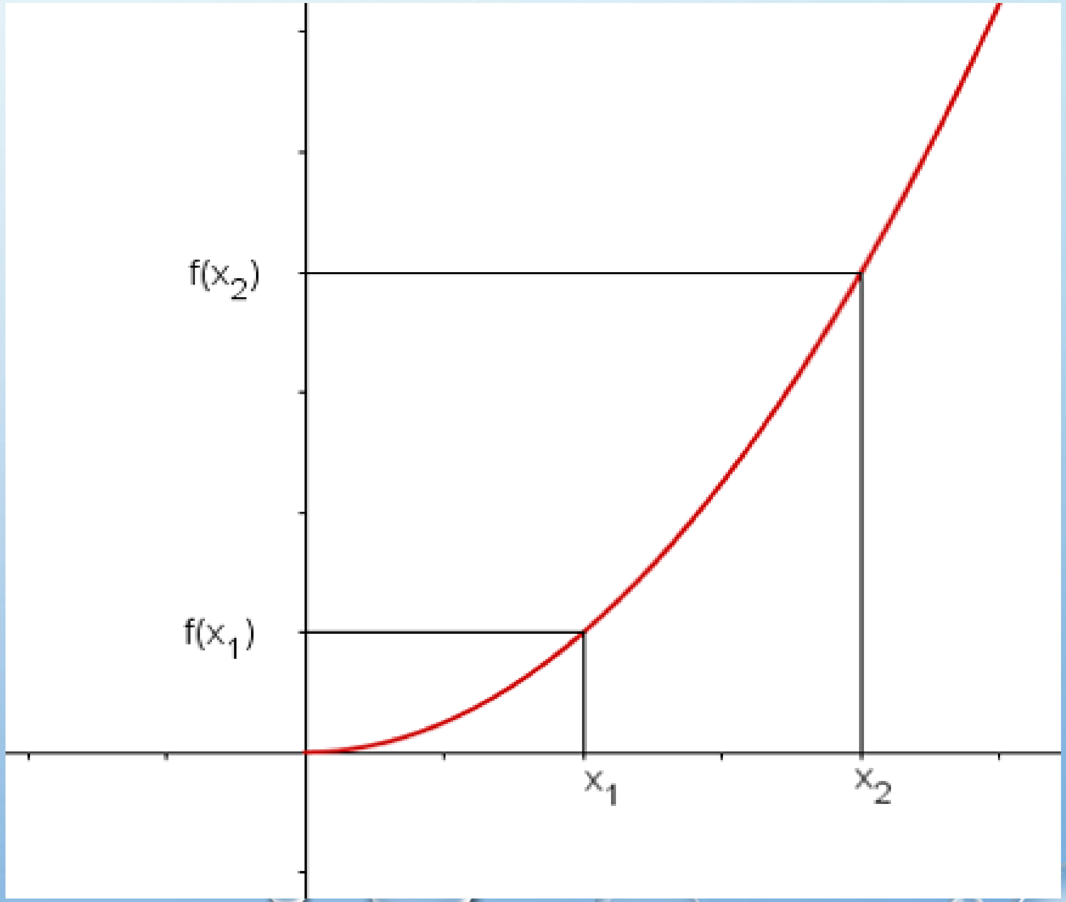
$$c)\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen(x)-x}}{2x^3}$$

# ESTUDIO DE FUNCIONES

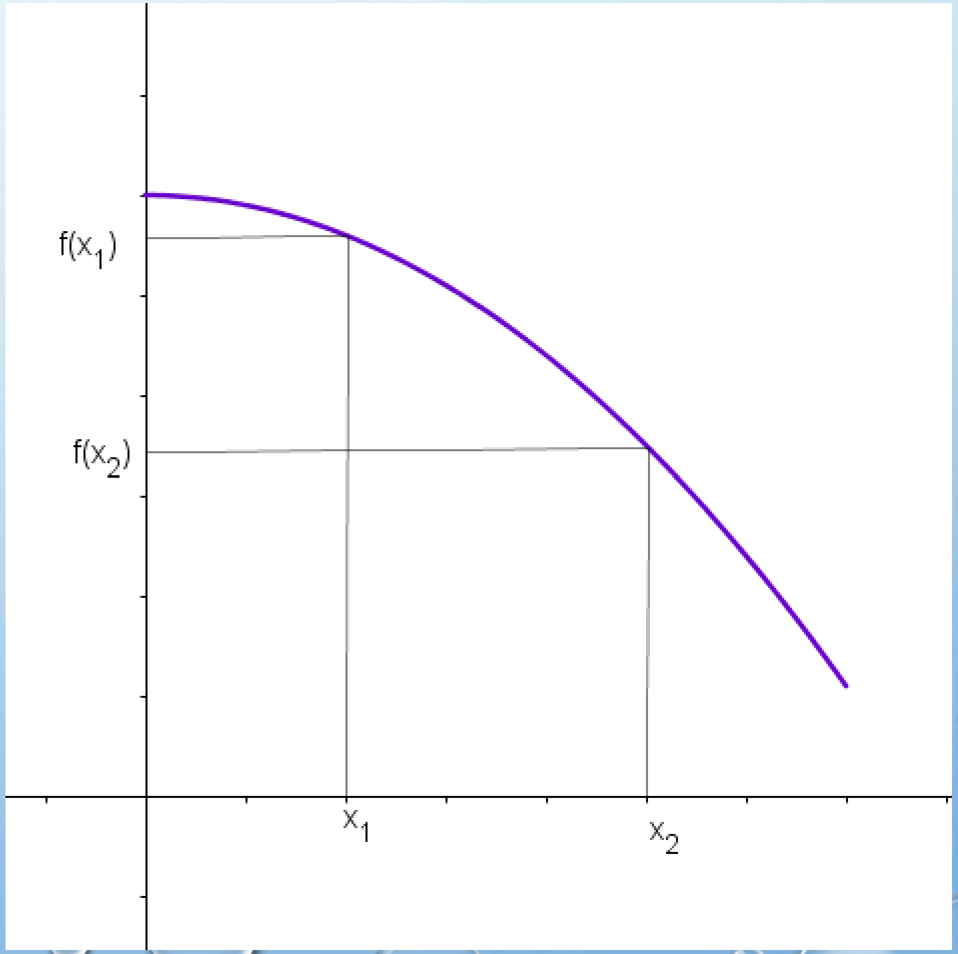
Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es creciente sobre un intervalo I si para cualquier para cualquier par de números $x_1 \ y \ x_2$, en dicho intervalo, tales que si

$x_1 < x_2$ es $f(x_1) < f(x_2)$.



Una función f es decreciente sobre un intervalo I si para cualquier para cualquier par de números $x_1$ $y$ $x_2$ en dicho intervalo, tales que $x_1 < x_2$ es $f(x_1) > f(x_2)$.



## 2.2. Criterio para las funciones crecientes y decrecientes

Sea una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, entonces

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es creciente en $[a, b]$ .
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es decreciente en $[a, b]$ .

**Punto Crítico**

Definición:

Diremos que $x_0$ es un punto crítico de $f$, si $f'(x_0) = 0$, o bien, $f'$ no está definida en $x_0$.

## 2.3. Criterio de la derivada primera

Sea $x_0$ un punto crítico de $f$ que es continua en un intervalo abierto $I$ que contiene a $x_0$. Si $f$ es derivable en dicho intervalo, execpto posiblemente en $x_0$, entonces:

- Si $f'(x)$ cambia de **negativa** a **positiva** en $x_0$, entonces $f$ tiene un *mínimo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f'(x)$ cambia de **positiva** a **negativa** en $x_0$, entonces $f$ tiene un *máximo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f'(x)$ **no cambia de signo** en $x_0$, entonces $f$ no tiene ni un máximo ni un mínimo relativo en $(x_0, f(x_0))$.

**Ejemplo:** Encontrar extremos relativos de: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$
En primer lugar observemos que $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$. La derivada de $f$ viene dada por:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2-4\right)^{-1/3}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\left(x^2-4\right)^{1/3}}$$

Observemos que $f'(x) = 0$ si $x = 0$, y que $f'$ no está definida en $x = -2$ y en $x = 2$. Luego, los puntos críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La siguiente tabla resume los valores de prueba de cuatro intervalos determinados por esto puntos. críticos:

| Intervalo | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $f'$ | $f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$ | $f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$ |
| Conclusión | Decreciente | Creciente | Decreciente | Creciente |

Aplicando el criterio de la derivada primera se puede concluir que $f$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$, un máximo relativo en $(0, \sqrt[3]{16})$ y mínimo relativo en $(2, 0)$.

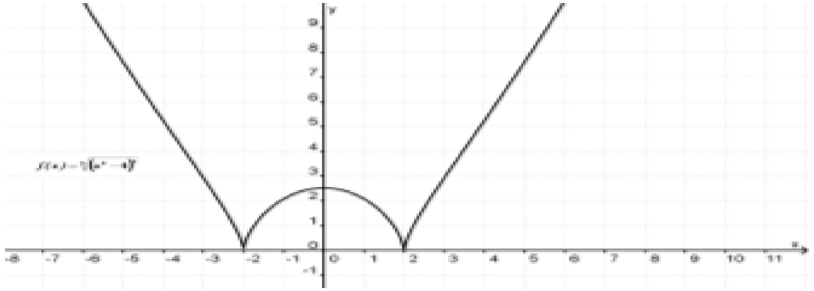


Figura 1: Gráfico de una función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

Funciones convexas y cóncavas

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Sean a y b dos puntos de A. Dados los puntos (a; f(a)) y (b; f(b)) en el plano, consideramos la recta secante a la gráfica de f por esos puntos.

Sea $I \subseteq A$ un intervalo. La función $f: I \to \mathbb{R}$ se llama convexa cuando su gráfico está situado debajo de cualquier secante. Una función $f: I \to \mathbb{R}$ se dice cóncava cuando $-f$ es convexa, esto es, cuando el gráfico de f está encima de cualquier secante.

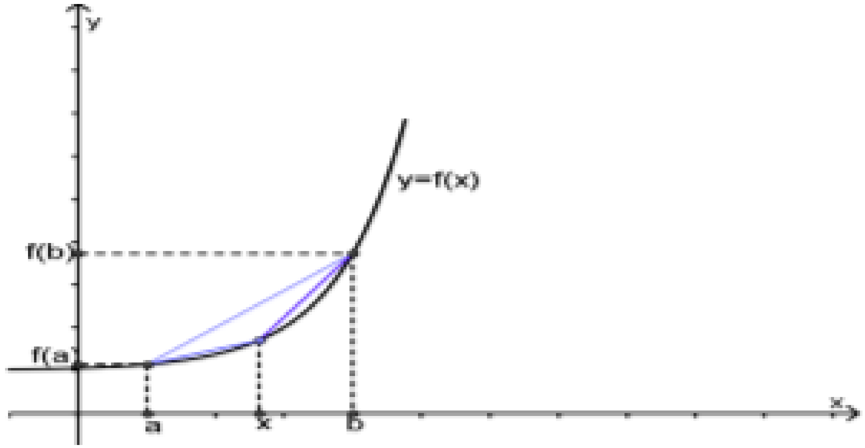



Figura 3: Gráfico de una función convexa

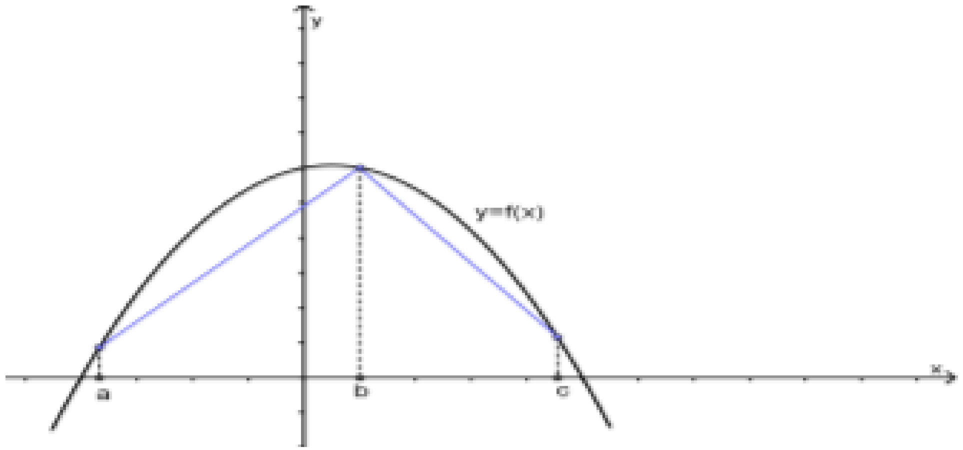



Figura 4: Gráfico de una función cóncava

Si la función es derivable hay una manera muy sencilla de caracterizar la concavidad y la convexidad. En los intervalos de convexidad a medida que $x$ aumenta, crece la pendiente de la tangente, es decir $f'(x)$ crece. Y en los intervalos de concavidad, a medida que aumenta $x$, decrece $f'(x)$.
Luego podemos enunicar el siguiente resultado:

- Si $f''(x) > 0$ en $(a, b)$, entonces la función $f$ es convexa en $(a, b)$.

- Si $f''(x) < 0$ en $(a, b)$, entonces la función $f$ es cóncava en $(a, b)$.

Un punto donde la curva cambia de convexa a cóncava o viceversa, se denomina *punto de inflexión*.
De lo enunciado anteriormente se puede deducir que si $x_0$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

# Encontrar los extremos relativos a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

En primer lugar observemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$. La derivada de f viene dada por:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Observemos que $f'(x) = 0$ en x = 0 y en x = 2. Luego, los puntos críticos son x = 0 y x = 2.

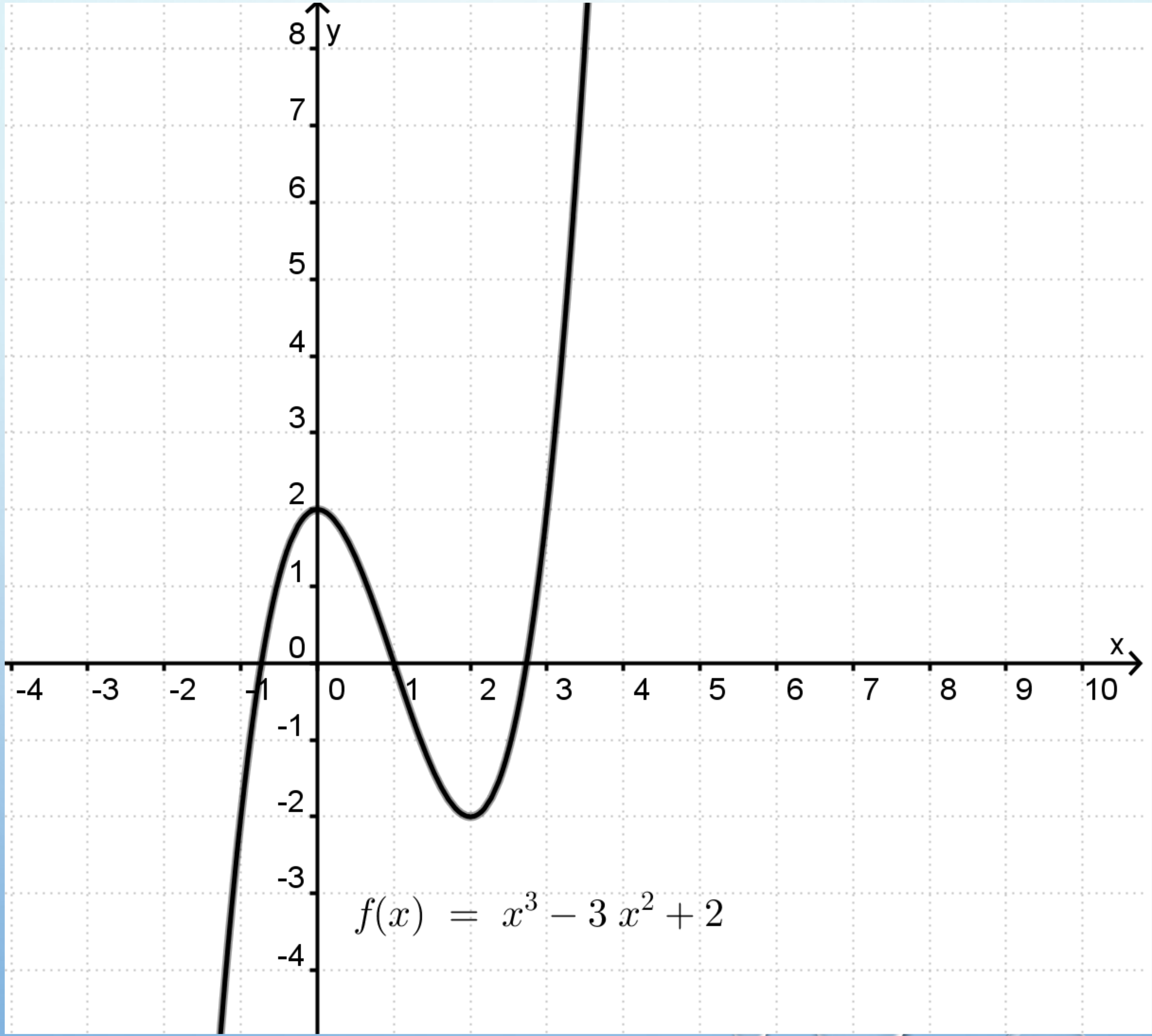
| **Intervalo** | $(-\infty; 0)$ | $(0; 2)$ | $(2; +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| **Signo de $f'(x)$** | $f'(x) > 0$ | $f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$ |
| **Conclusión** | Creciente | Decreciente | Creciente |

Aplicando el criterio de la derivada primera se puede concluir que $f$ tiene un máximo relativo en $(0; 2)$ y un mínimo relativo en $(2; -2)$.

La derivada segunda de f es: $f''(x) = 6x - 6$ y $f''(x) = 0$ en $x = 1$

| **Intervalo** | $(-\infty; 1)$ | $(1; \infty)$ |
|---|---|---|
| **Signo de $f''(x)$** | $f''(x) > 0$ | $f''(x) < 0$ |
| **Conclusión** | convexa | cóncava |

Por lo tanto en $x = 1$ $existe\ un\ punto\ de\ inflexi\acute{o}n$


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$