



LÍMITE DE FUNCIONES

NOCIÓN INTUITIVA

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + x$

Completemos:

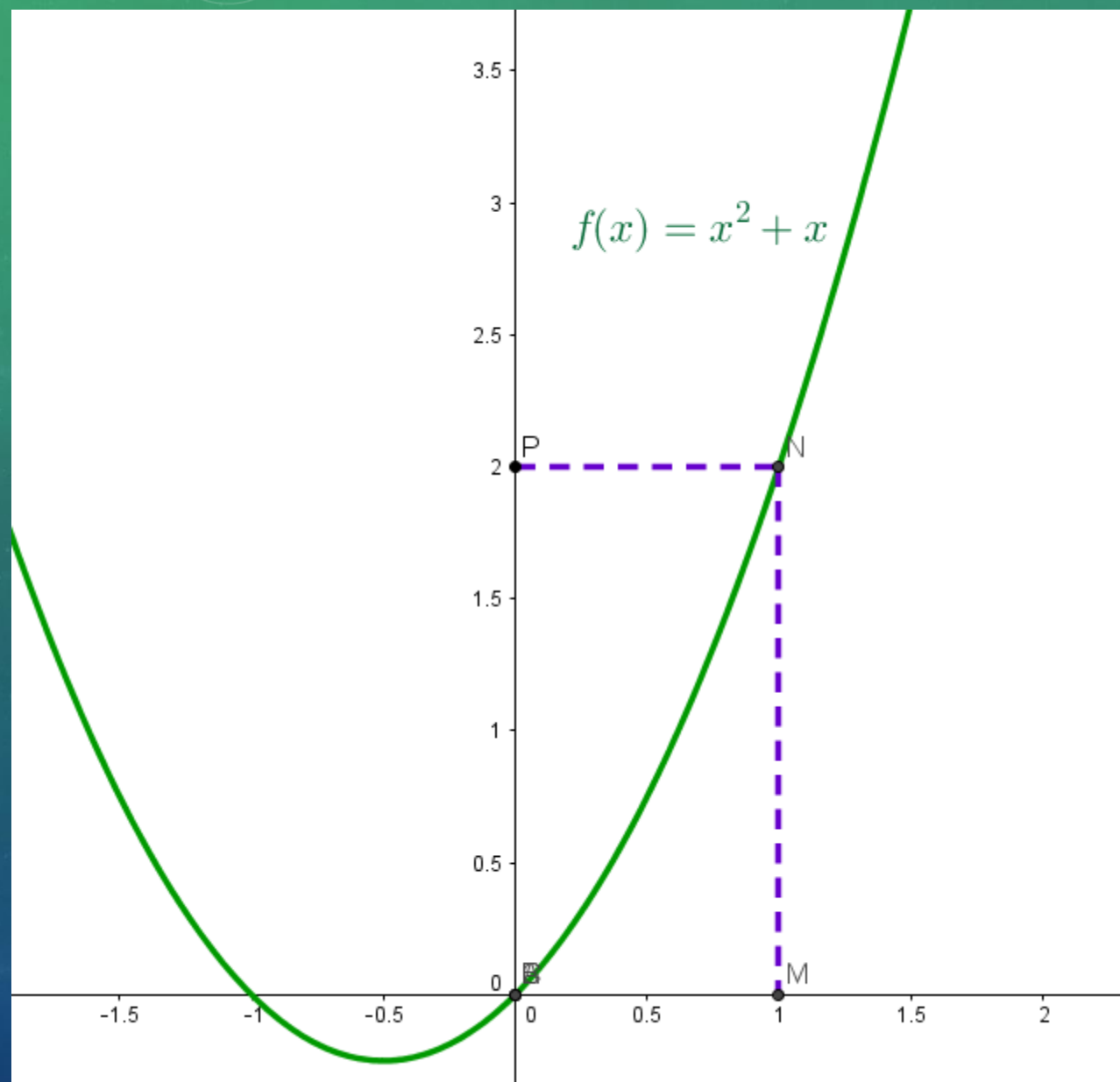
x tiende a 1 por la izquierda

x tiende a 1 por la derecha

x	0	0,5	0,8	0,99	1	1,01	1,2	1,5	1,8	2
f(x)	0	0,75	1,44	1,97		2,03	2,64	3,75	5,04	6

f(x) tiende a

f(x) tiende a



$a = 0.07$

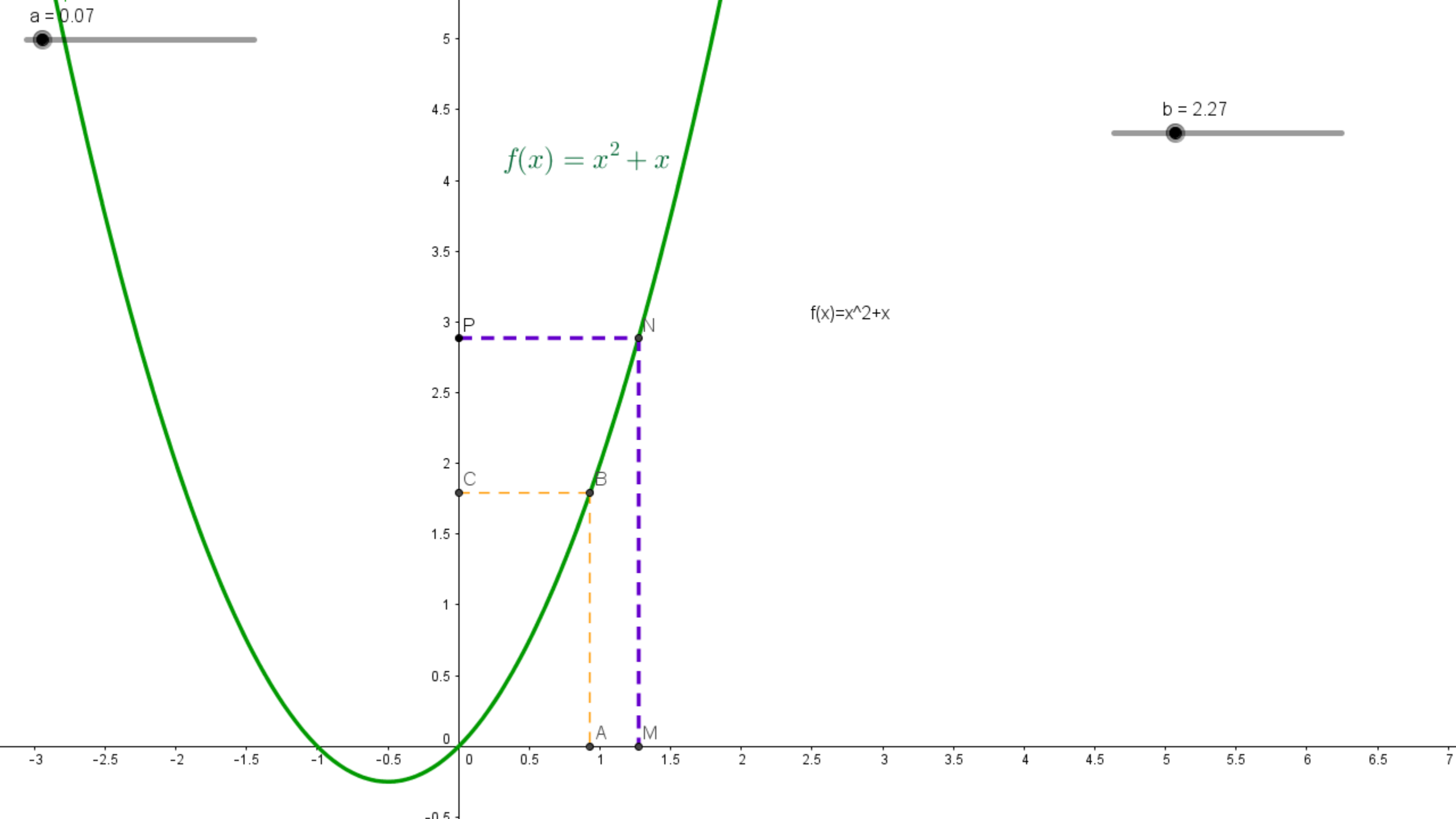


$b = 2.27$



$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(x) = x^2 + x$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2$$

X tiende a 2 por la izquierda

X tiende a 2 por la derecha



$$x \rightarrow 2^{-}$$

$$x < 2$$

$$x \rightarrow 2^{+}$$

$$x > 2$$

Sea la función $f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$ cuyo dominio es:

$$D = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1\}$$

¿A qué valores se acerca $f(x)$ cuando x se aproxima a 1?

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

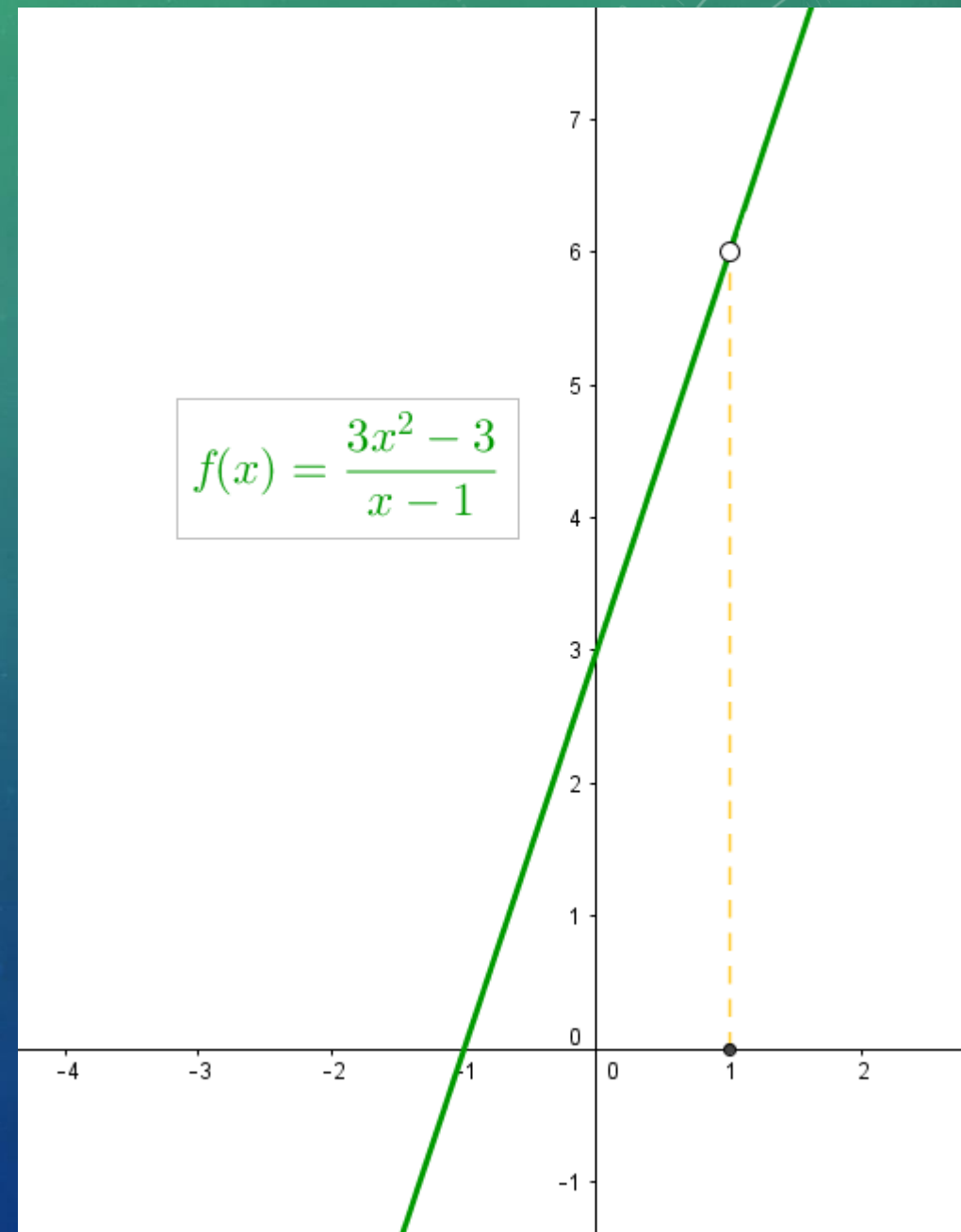
$x < 1$

x	f(x)
0,9	5,7
0,95	5,85
0,99	5,97
0,995	5,985
0,999	5,997

$x > 1$

x	f(x)
1,1	6,3
1,05	6,15
1,01	6,03
1,005	6,015
1,001	6,003

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = 6$$



Ejemplo 1

Sea la función: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



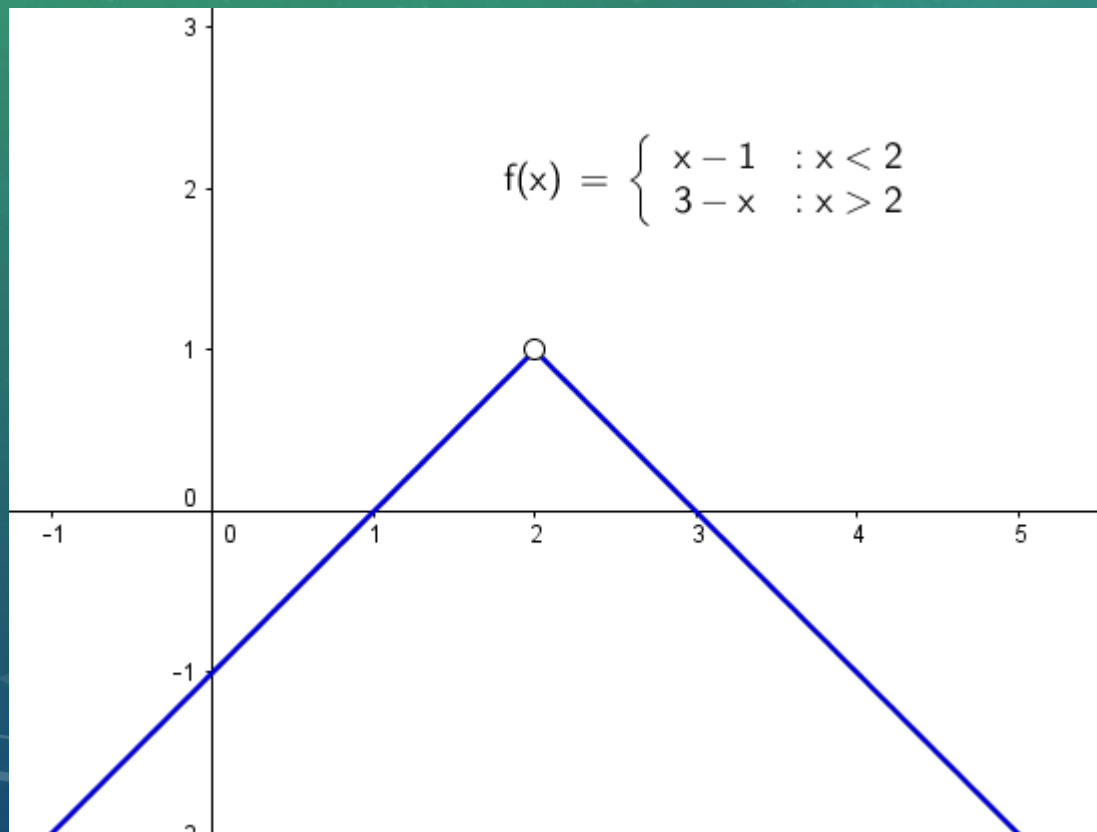
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{No existe}$$

Ejemplo 2:

Sea la función : $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$



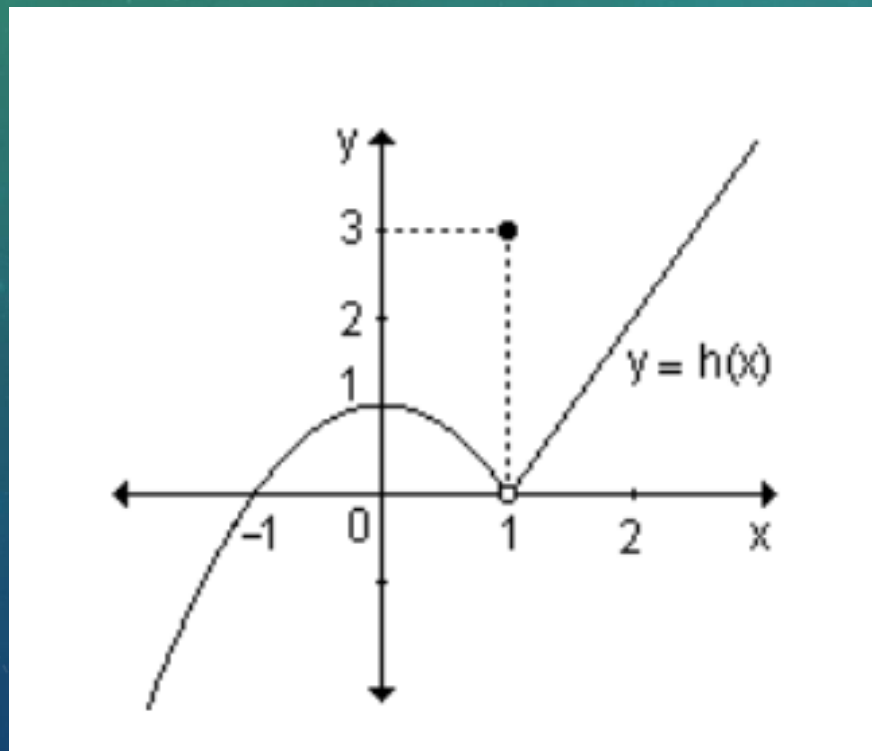
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$$

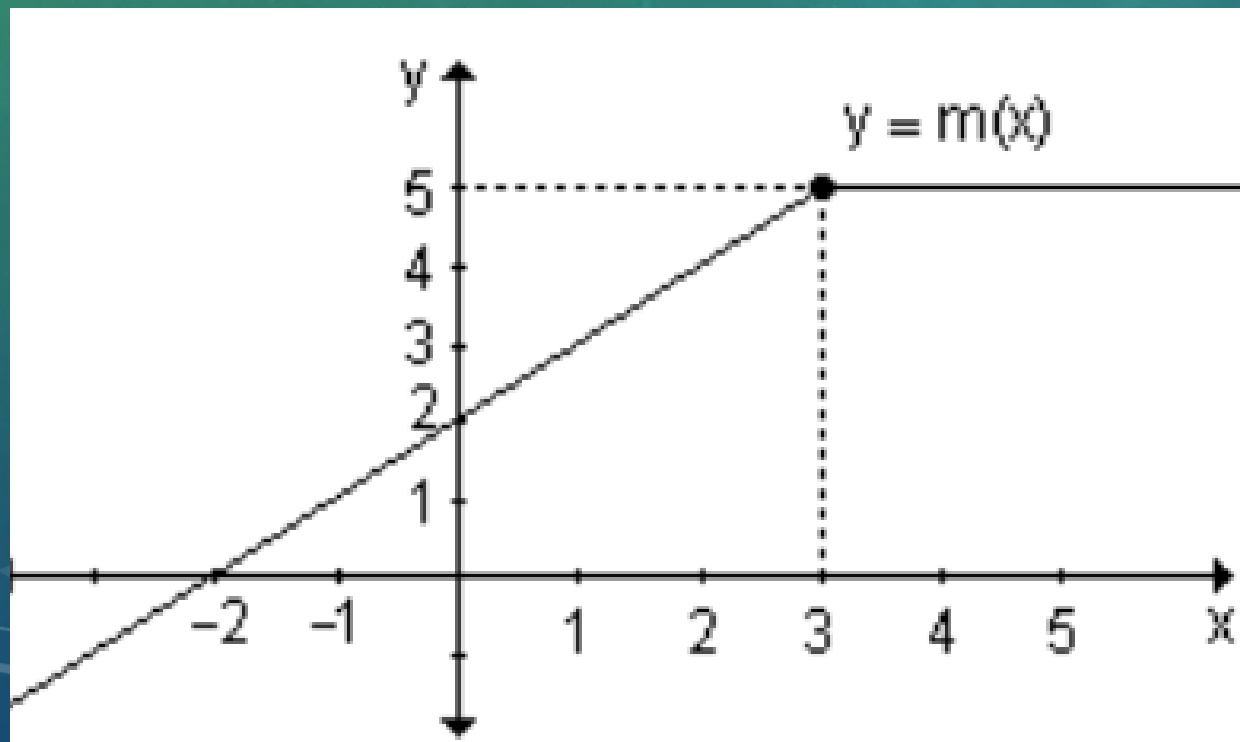
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Ejemplo. Sea la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Grafique la

función y determine la imagen del 1 y los límites cuando $x \rightarrow 1^+$ y $x \rightarrow 1^-$.



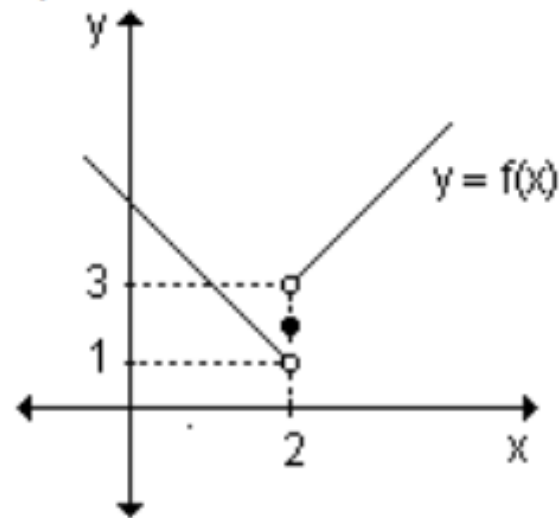
Ejemplo. Sea la función $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / m(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } x \leq 3 \\ 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Grafique la función y halle la imagen del 3 y los límites cuando $x \rightarrow 3^+$ y $x \rightarrow 3^-$.



EJERCICIO

Observe las funciones definidas gráficamente y calcule, si existen, los límites pedidos para cada una:

a)

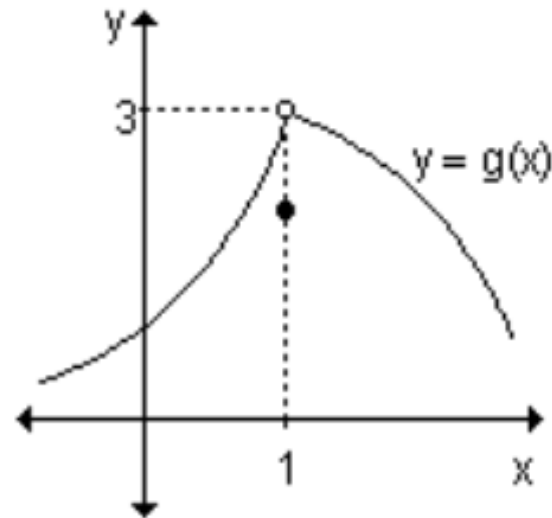


$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

b)

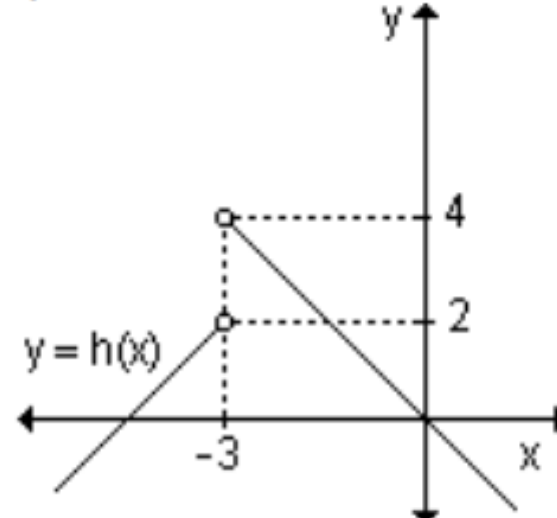


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

c)



$$\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$$

Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x \rightarrow \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Calcule los

siguientes límites y compruebe gráficamente:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ |

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcule, si existe:

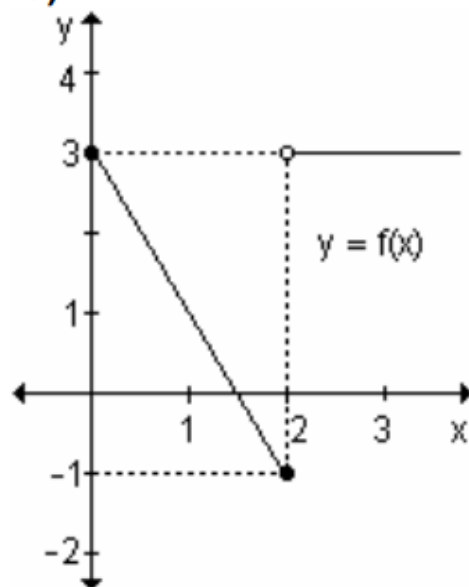
- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
|---|---|---|

Sea $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, encuentre, si existe:

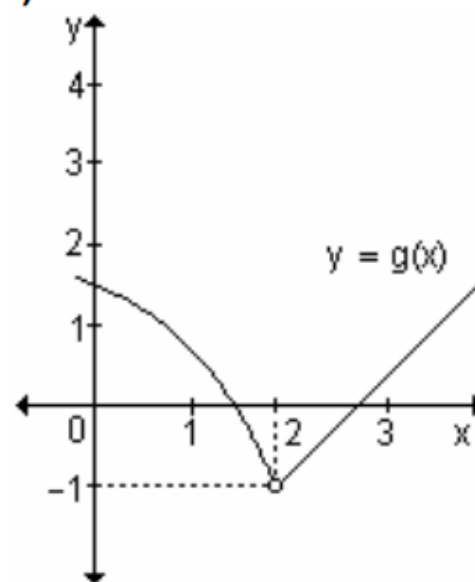
- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ |
|---|---|---|

Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, determine si existe o no el límite para x tendiendo a 2. Justifique la respuesta. En caso de existir, halle el valor.

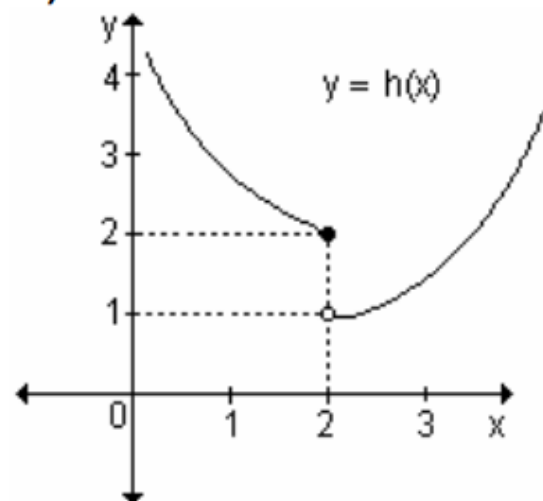
a)



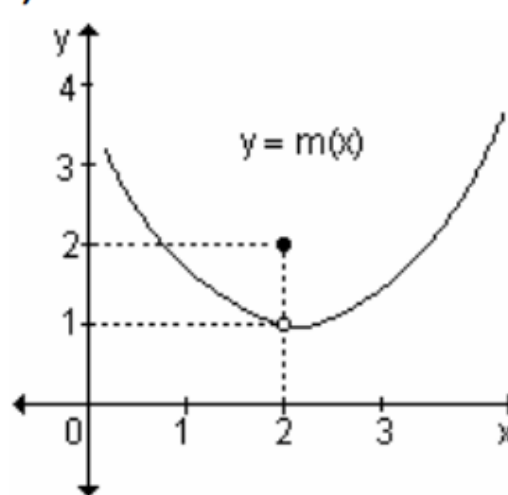
b)



c)



d)



b) Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ grafique y determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$