Producto escalar

Frecuentemente, se toma el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. (Siempre los vectores deben tener el mismo número de componentes)

Vector renglón 1xn

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Vector columna nx1

Producto escalar: propiedades

Sean a, b y c tres n-vectores y sea α un escalar.

Entonces:

$$1)\, a \cdot \theta = 0$$

$$2)\, a \cdot b = b \cdot a$$

$$3)\, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$4)\, (\alpha \cdot a) \cdot b = \alpha \cdot (a \cdot b)$$

$$1)\ a\cdot\theta = 0$$

$$2)\ a\cdot b = b\cdot a$$

$$3)\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

$$4)\ (\alpha\cdot a)\cdot b = \alpha\cdot(a\cdot b)$$

$$\alpha\,(a\cdot b) = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\alpha\cdot(a\cdot b) = 4\cdot\left(1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 3(-1)\right)$$

$$\alpha\,(a\cdot b) = 4\cdot(-5)$$

$$\alpha\,(a\cdot b) = -20 \checkmark$$

4) $\alpha = 4$ $\quad a = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$(\alpha\cdot a)\cdot b = \left[4\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\cdot a)\cdot b = 4\cdot 0 + (-4)\cdot 2 + 12(-1) = -20 \checkmark$$

$$1)\, a\cdot\theta=0$$

$$2)\, a\cdot b=b\cdot a$$

$$3)\, a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$4)\, (\alpha\cdot a)\cdot b=\alpha\cdot(a\cdot b)$$

$$a=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix};\mathrm{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};c=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix};\alpha=-2;\beta=3$$

a -

Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es nulo.

Ejemplo:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a . b = 1 . 2 + (-2) . 1 + 3 . 0$

$a . b = 0$

$a \perp b$

Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ik})$ una matriz $m \times p$, y sea $B = (b_{kj})$, una matriz $\mathrm{p} \times n$. Entonces el producto de $A \times B$ es una matriz $m \times n, C = (c_{ij})$, en donde:

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$\underset{3\times 2}{A} \times \underset{2\times 1}{B} = C_{3\times 1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 + 2\cdot(-1) \\ 3.1 + 4.(-1) \\ 5.1 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad C_{3\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Ejemplos

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$\underset{2\times 4}{C} \cdot \underset{2\times 2}{B}$ No es posible

Propiedades

Ley asociativa para la multiplicación de matrices:

$$A\cdot\left(B\cdot C\right)=(A\cdot B)\cdot C$$

Leyes distributivas para la multiplicación de matrices:

$$A\cdot\left(B+C\right)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$\left(A+B\right)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$