4. EL CONCEPTO DE DERIVADA

> "Todos quienes conozcan el tema, estarán de acuerdo en que las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza, son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del Cálculo Diferencial e Integral ..."
>
> Félix Klein

El cálculo diferencial es la matemática del cambio, de la variación, de la transformación. No existe fenómeno en la naturaleza o en la sociedad que escape al fenómeno del cambio. Podemos encontrar numerosos ejemplos a nuestro alrededor: la población de un país cambia a través del tiempo, la temperatura ambiental cambia durante el año, el área de un cuadrado con la longitud del lado, etc. El estudio de la variación lleva a construir uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada.
El estudio de la derivada como tasa de variación o como razón de cambio tiene numerosas aplicaciones. Una de las más conocidas y simples, es la velocidad, razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. Otras pueden ser, la tasa de crecimiento de una población de bacterias (ciencias naturales), la tasa de variación de una reacción química, velocidad de reacción (ciencias naturales). En economía se habla de ingreso marginal, costo marginal, utilidad marginal, todos ejemplos de tasas de variación. Otras razones de cambio son del trabajo con respecto al tiempo, potencia (física), la razón con la que aumenta la velocidad con la que fluye la sangre según la distancia a la pared de un vaso sanguíneo, la razón con la que se esparce un rumor.
Todos estos ejemplos son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.
Luego del análisis cuidadoso de estos contenidos, se espera que calcule razones de cambio promedio y razones de cambio instantáneas, que halle la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de una función en un punto, que determine la derivada de una función en un punto cualquiera y que interprete física y geométricamente la derivada. También, que halle la función derivada, analice la derivabilidad de funciones y aplique el concepto de derivada a la resolución de problemas.

4.1 Razones de cambio

El concepto de razón de cambio está presente en la vida diaria, muchas veces utilizado sin darle un nombre específico o sin reflexionar sobre las acciones realizadas. Vivimos en un mundo físico, social, político, económico, biológico y resulta importante poder describir y medir estos cambios a través de modelos matemáticos. Por ejemplo, una planta crece a medida que el tiempo transcurre, puede detener su crecimiento en algún instante, para luego volver a crecer, o permanecer estacionaria. También la población de un país varía con el correr del tiempo y la variación depende básicamente de la cantidad de nacimientos y de muertes.
En los ejemplos vemos que existen variaciones de las cantidades que se relacionan: al pasar el tiempo, cambia el tamaño de una planta, o al pasar el tiempo cambia la cantidad de pobladores de una localidad.
Es importante medir estas variaciones y expresarlas en números pues de ellos podemos extraer conclusiones. Esto nos permite saber, por ejemplo, en el caso de consumo de energía eléctrica como función del tiempo, cuándo se produce un aumento repentino, lo que indica la necesidad de aumentar la capacidad eléctrica; si estamos analizando la evolución de una enfermedad a través del

tiempo podremos saber cuándo se está propagando con mayor rapidez y así reforzar las medidas sanitarias necesarias.
Analizaremos a través de ejemplos, cómo medir los cambios.

Aprendizaje por descubrimiento

Actividad 1. Los datos de la siguiente tabla muestran los valores de la temperatura T de cierto volumen de agua tomadas en los minutos t indicados:

Tiempo t en minutos	0	5	10	15	20	25
Temperatura T en ^oC	15	25,5	55,7	95	85	62

Complete las siguientes tablas:

t	0	5	10	15	20	25
	cambio $5-0=5$	cambio	cambio	cambio	cambio	

T	15	25,5	55,7	95	85	62
	cambio $25{,}5-15=$ $=10{,}5$	cambio	cambio	cambio	cambio	

Intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$	Cambio de la temperatura $\Delta T = T_f - T_i$	Cambio de la temperatura con respecto al cambio del tiempo $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_f - T_i}{t_f - t_i}$
De $t=0$ a $t=5$	10,5	$\frac{T(5)-T(0)}{5-0} = \frac{25{,}5-15}{5-0} = \frac{10{,}5}{5} = 2{,}1\frac{^oC}{min}$
De $t=5$ a $t=10$		
De $t=10$ a $t=15$		
De $t=15$ a $t=20$		
De $t=20$ a $t=25$		

¿Qué significado tienen las mediciones hechas en cada columna de la tabla? ¿Qué expresa la razón del cambio de la temperatura con respecto al tiempo? ¿Es posible que algunos valores de la tercera columna sean positivos y otros negativos? ¿Qué interpretación le da a esta situación?

El cambio se da cuando se pasa de un estado a otro, de un estado inicial a un estado final. Por lo tanto, para medir el cambio de una variable basta restar su valor en el estado final menos su valor en el estado inicial. Para la variable t el cambio se mide por la diferencia $t_f - t_i = \Delta t$ (Δ: delta), donde Δt representa el cambio en el tiempo. Para la variable T el cambio se mide con $T_f - T_i = \Delta T$, donde ΔT es el cambio, aumento o disminución, de la temperatura.
Generalmente, cuando se habla de cambios, necesariamente se los relaciona con otros cambios. En nuestro ejemplo interesa el cambio de la temperatura en

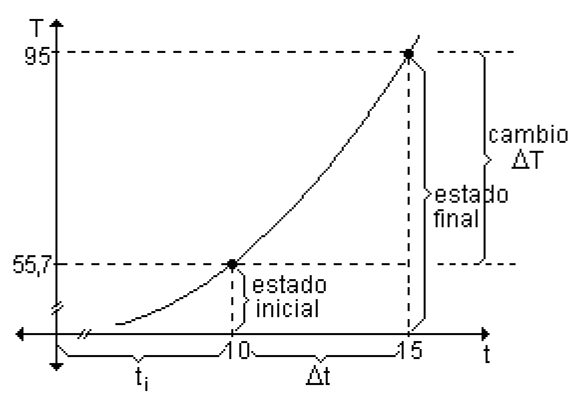
cierto intervalo de tiempo, es decir, un cambio de temperatura respecto al cambio del tiempo. Nos podemos preguntar: ¿con qué velocidad cambia la temperatura?
Para poder contestar esta pregunta debemos relacionar el cambio de temperatura respecto al cambio del tiempo, expresando la comparación mediante un cociente. Observamos la tabla completa.

Intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$	Cambio de la temperatura $\Delta T = T_f - T_i$	Cambio de la temperatura con respecto al cambio del tiempo $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_f - T_i}{t_f - t_i}$
De $t = 0$ a $t = 5$	10,5	$\frac{10,5}{5} = 2,1 \frac{°C}{min}$
De $t = 5$ a $t = 10$	30,2	$\frac{30,2}{5} = 6,04 \frac{°C}{min}$
De $t = 10$ a $t = 15$	39,3	$\frac{39,3}{5} = 7,86 \frac{°C}{min}$
De $t = 15$ a $t = 20$	-10	$\frac{-10}{5} = -2 \frac{°C}{min}$
De $t = 20$ a $t = 25$	-23	$\frac{-23}{5} = -4,6 \frac{°C}{min}$

La razón entre el cambio de la temperatura con respecto al cambio del tiempo da como resultado la velocidad promedio con la que cambia la temperatura con respecto al tiempo. Por ejemplo, observando el primero de los cocientes, decir que la temperatura cambió con una velocidad promedio de $2,1 \frac{°C}{min}$ en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$, significa que por cada minuto transcurrido en dicho intervalo, la temperatura cambió 2,1º.

Estas razones se denominan *razones de cambio promedio.*

En la figura se puede observar la interpretación geométrica de los cálculos realizados para uno de los intervalos.



En el cuadro se muestra el significado de cada uno de los cálculos realizados.

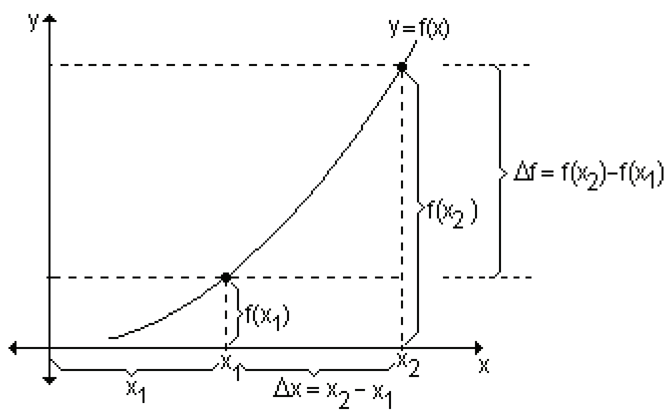
Cantidad	$t_2 - t_1$	$T(t_2) - T(t_1)$	$\dfrac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$
Significado	Cambio en el tiempo	Cambio correspondiente de la temperatura cuando el tiempo cambia de $t = t_1$ a $t = t_2$.	Razón de cambio promedio de la temperatura T con respecto a t cuando cambia de t_1 a t_2.

Definición. Dada una función $y = f(x)$, se llama *razón de cambio promedio (o media)* de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ al cociente entre el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, y la amplitud del intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$, en el cual ocurrió el cambio.

La razón de cambio promedio de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo dado $[x_1, x_2]$ es: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Cantidad	$x_2 - x_1 = \Delta x$	$f(x_2) - f(x_1) = \Delta f$	$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
Significado	Cambio en la variable de $x = x_1$ a $x = x_2$.	Cambio correspondiente de la función cuando la variable cambia de $x = x_1$ a $x = x_2$.	Razón de cambio promedio de f(x) con respecto a x cuando x cambia de x_1 a x_2.

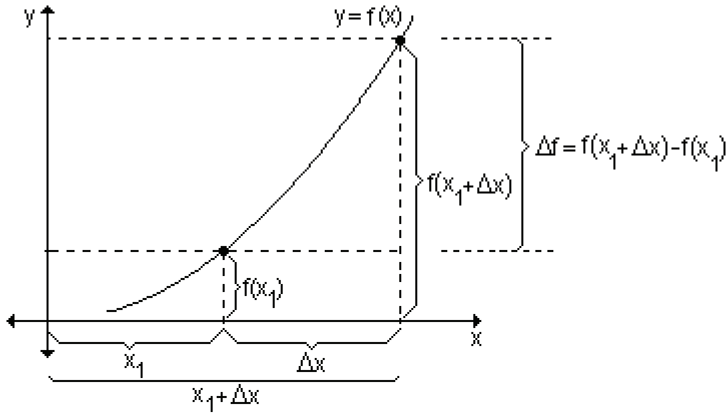
En la figura se observan cómo cambian las variables relacionadas por medio de la ley f(x):



Dado que $\Delta x = x_2 - x_1$, podemos despejar $x_2 = x_1 + \Delta x$, y, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

La definición de razón de cambio media resulta: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Geométricamente:



En la tabla puede observarse que la razón de cambio promedio de la temperatura con respecto al tiempo es positiva en los tres primeros intervalos y negativa en los últimos dos. Si la razón de cambio promedio es positiva, por ejemplo $6{,}04\,\frac{^{o}C}{min}$ en el intervalo de $t = 5$ a $t = 10$, esto significa que la temperatura creció durante ese intervalo de tiempo a razón de 6,04^{o} por minuto. Si la razón de cambio promedio es negativa, por ejemplo $-4{,}6\,\frac{^{o}C}{min}$ en el intervalo de $t = 20$ a $t = 25$, esto significa que la temperatura en dicho intervalo decreció a razón de 4,6^{o} por minuto.
El valor absoluto de la razón de cambio promedio indica la rapidez del cambio. El signo indica si se produjo un aumento o una disminución.

Definición. Se llama *rapidez de cambio media* al valor absoluto de la razón de cambio promedio, o sea: $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}\right|$ o bien $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\right|$.

Actividad 2. La cantidad de calor h (en joules) que se necesita para convertir un gramo de agua en vapor es función de la temperatura t (en ^{o}C) de la atmósfera según la ley $h(t) = \frac{-8t + 7520}{3}$. Complete la siguiente tabla, calculando los cambios de la cantidad de calor y las razones de cambio promedio de la cantidad de calor h con respecto a la temperatura t de la atmósfera, para $0 \le t \le 60$, en intervalos de 15 grados de amplitud.

Intervalos de temperatura (en ^{o}C)	Δh Cambio de la cantidad de calor (en joules)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$ Cambio de la cantidad de calor con respecto a los cambios de la temperatura.
$0 \le t \le 15$		
$15 \le t \le 30$		
$30 \le t \le 45$		
$45 \le t \le 60$		

¿Cómo se interpretan estos resultados?

Actividad 3. Un globo esférico se infla con un gas.
a) Encuentre la razón de cambio media del volumen con respecto al radio cuando éste cambia de 2 m a 2,5 m y cuando cambia de 2,5 m a 3 m.
b) ¿Es posible calcular la variación del volumen cuándo el radio es exactamente 2,5m?

Se sugiere la confección de las siguientes tablas para responder al ítem b).

Intervalos	$\frac{\Delta V}{\Delta r}$ Cambio del volumen con respecto al cambio del radio
$2{,}5 \le t \le 2{,}6$	$\frac{V(2{,}6)-V(2{,}5)}{2{,}6-2{,}5} = \frac{8{,}17232969}{0{,}1} = 81{,}7232969\,\frac{m^3}{m}$
$2{,}5 \le t \le 2{,}51$	
$2{,}5 \le t \le 2{,}501$	
$2{,}5 \le t \le 2{,}5001$	
$2{,}5 \le t \le 2{,}50001$	

Intervalos	$\frac{\Delta V}{\Delta r}$ Cambio del volumen con respecto al cambio del radio
$2{,}4 \le t \le 2{,}5$	
$2{,}49 \le t \le 2{,}5$	
$2{,}499 \le t \le 2{,}5$	
$2{,}4999 \le t \le 2{,}5$	
$2{,}49999 \le t \le 2{,}5$	

¿Qué diferencia fundamental puede observar en las dos últimas actividades? ¿Por qué en el último problema se hace necesario calcular la razón de cambio en un instante particular?

Si completamos la tabla de la *actividad 2*, podemos observar que la variación de la cantidad de calor es igual a –40 joules en todos los intervalos, por eso la razón de cambio promedio se mantiene constante para intervalos de 15^{o} de amplitud e igual a $-\frac{40}{15} = -\frac{8}{3} = -2{,}67\,\frac{\text{joules}}{{}^{o}C}$.

Calculando la razón de cambio media en forma analítica a partir de la ley que define la función, se obtiene la misma conclusión. En efecto:

$$\Delta h = h(t_2) - h(t_1) = \frac{-8t_2 + 7520}{3} - \frac{-8t_1 + 7520}{3} = \frac{-8t_2 + 7520 + 8t_1 - 7520}{3}$$

$$\Delta h = \frac{-8t_2 + 8t_1}{3} = -\frac{8}{3}\left(t_2 - t_1\right)$$

Como $\Delta t = t_2 - t_1$, la razón de cambio media es $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{-\frac{8}{3}\left(t_2 - t_1\right)}{\left(t_2 - t_1\right)} = -\dfrac{8}{3}$.

Este resultado indica que la razón de cambio promedio se mantiene constante, independientemente de qué intervalo de temperatura se trate. No importa que tan grande o pequeño sea Δt, la razón entre el cambio de cantidad de calor y el cambio de temperatura siempre es $-\dfrac{8}{3}\dfrac{\text{joules}}{{}^{\circ}\text{C}}$.

Los cambios que ocurren en la naturaleza o en la sociedad tienen distintos comportamientos. Hay cambios que ocurren uniformemente, como en el ejemplo anterior, mientras que existen fenómenos que cambian a cada instante y otros en los que los cambios son muy complejos, como es el caso del movimiento de los electrones o el movimiento de las moléculas. Una de las funciones del cálculo consiste en encontrar las leyes que describen esos cambios para poderlos así medir y predecir.

En la *actividad 3*, teniendo en cuenta que el volumen de la esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, la razón de cambio media del volumen con respecto al radio es $\dfrac{\Delta V}{\Delta r} = \dfrac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1}$.

Si el radio cambia de 2 m a 2,5 m, obtenemos:

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi 2{,}5^3 - \frac{4}{3}\pi 2^3}{2{,}5 - 2} \approx 63{,}88\,\frac{m^3}{m}.$$

La razón promedio de cambio en este intervalo es de $63{,}88\,\dfrac{m^3}{m}$, es decir el volumen cambia 63,88 m^3 por cada metro que varía el radio.

Si el radio cambia de 2,5m a 3m, obtenemos:

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi 3^3 - \frac{4}{3}\pi 2{,}5^3}{3 - 2{,}5} \approx 95{,}29\,\frac{m^3}{m}.$$

La razón promedio de cambio en este intervalo es de $95{,}29\,\dfrac{m^3}{m}$, es decir el volumen cambia 95,29 m^3 por cada metro que varía el radio.

Con la razón de cambio promedio hemos analizado la variación por intervalos relativamente grandes, pero en la realidad los cambios no suceden a saltos. En el ejemplo, el volumen del globo varía a cada instante, en forma continua a medida que se va inflando. En la gran mayoría de los fenómenos físicos y de otros fenómenos estudiados por otras disciplinas, los cambios son continuos. Esto quiere decir que cambian a cada instante. Para estudiar fenómenos de este tipo no alcanza con calcular la razón de cambio promedio.

Si la velocidad de los cambios o la razón de cambio promedio es constante, calcularla para cualquier intervalo nos permite saber lo que sucede en un instante cualquiera.

En el ejemplo dado de la cantidad de calor h (en joules) que se necesita para convertir un gramo de agua en vapor, en función de la temperatura t (en ^{o}C) de la atmósfera, obtuvimos que las razones de cambio promedio se mantienen constantes e iguales a $-\frac{8}{3}\frac{\text{joules}}{{}^{o}\text{C}}$.

Como no depende de Δt, podemos predecir cuál será la razón de cambio de la cantidad de calor en intervalos de temperatura de cualquier amplitud o incluso podemos saber cuál es la variación de la cantidad de calor para una temperatura en particular. Por ejemplo, podemos asegurar que la razón de cambio de la cantidad de calor cuando la temperatura es de 48º será de $-\frac{8}{3}\frac{\text{joules}}{{}^{o}\text{C}}$.

En los casos en que la razón de cambio promedio no es constante, el cálculo en un instante particular no es tan sencillo.
En el ejemplo de variación del volumen del globo, ¿es posible calcular la variación del volumen cuando el radio es exactamente 2,5 m?

Si intentamos calcularlo con la fórmula de razón de cambio media obtenemos:
$\frac{\Delta V}{\Delta r}=\frac{V_2-V_1}{r_2-r_1}=\frac{\frac{4}{3}\pi 2{,}5^3-\frac{4}{3}\pi 2{,}5^3}{2{,}5-2{,}5}$ obtenemos $\frac{0}{0}$. Se llega a esto debido a que el instante inicial coincide con el final. Analizaremos qué sucede cerca de $r = 2{,}5$.
La idea intuitiva es que si se toman intervalos cada vez más pequeños, las razones de cambio promedio se acercan cada vez más a la razón de cambio para un valor de r particular, en este caso, $r = 2{,}5$.
En la primera tabla, manteniendo r_1 fijo, en 2,5, daremos valores a r_2 de manera tal que Δr sea cada vez más pequeño.
En la segunda tabla, nos acercaremos a $r = 2{,}5$ por valores menores que él.
A medida que Δr se hace cada vez más pequeño, las razones de cambio media se acercan, o tienden a $78{,}539816\,\frac{m^3}{m}$, que es el valor exacto para $r = 2{,}5$m.
La razón de cambio del volumen cuando el radio es de 2,5m, es el límite de las razones de cambio promedio cuando Δr es infinitamente pequeño, o sea cuando $\Delta r \to 0$. Este tipo de razón se llama *razón de cambio instantánea*.

Definición. Se llama *razón de cambio instantánea* de una función cuando $x = x_1$ a: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. También se puede escribir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

De aquí en adelante, para referirnos a la razón de cambio instantánea, lo haremos diciendo simplemente razón de cambio.

Nota. Para simplificar la notación, se utiliza la letra h para designar al incremento de la variable x. Es decir, $h = \Delta x = x_2 - x_1$. De esta manera la razón de cambio promedio de una función f en el intervalo $[x_1, x_2]$ está dado por $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ y la razón de cambio instantánea de f en $x = x_1$ está dado por $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$.

Problema

Un cuerpo se mueve sobre una línea recta de modo que la ley $s(t) = 2t + 2$ metros describe su posición después de t segundos. Determine la razón media de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido durante los primeros 5 segundos, en intervalos de un segundo de amplitud. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los dos segundos de iniciado el movimiento?

La razón de cambio media está dada por $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Intervalo	Razón de cambio media
$0 \le t \le 1$	$\dfrac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = 2\ \dfrac{m}{seg}$
$1 \le t \le 2$	$\dfrac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 2\ \dfrac{m}{seg}$
$2 \le t \le 3$	$\dfrac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = 2\ \dfrac{m}{seg}$
$3 \le t \le 4$	$\dfrac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = 2\ \dfrac{m}{seg}$
$4 \le t \le 5$	$\dfrac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = 2\ \dfrac{m}{seg}$

¿Cómo se interpretan estos resultados?
Esto significa que la razón de cambio media del desplazamiento con respecto al tiempo es $2\dfrac{m}{seg}$, es decir que el móvil recorre 2 metros por cada segundo transcurrido. Esta razón de cambio media nos da la velocidad promedio del móvil en cada intervalo.
En este ejemplo particular la velocidad es constante, por lo tanto se trata de un movimiento rectilíneo uniforme.

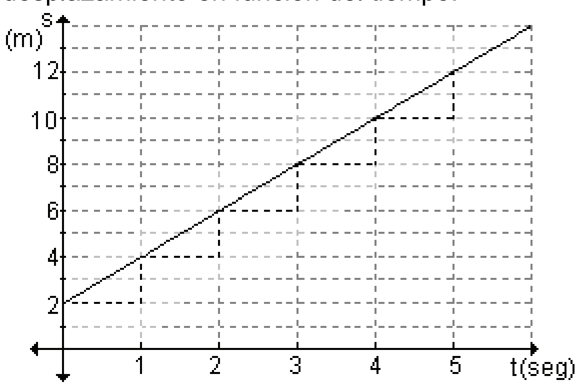
Otra forma de calcular la razón de cambio media, es trabajando con la ley que define el movimiento.

Teniendo en cuenta que $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}$, se obtiene:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2(t_1+h)+2-(2t_1+2)}{h}=\frac{2t_1+2h+2-2t_1-2}{h}=\frac{2h}{h}=2\,.$$

Este resultado que se obtiene al trabajar con la expresión matemática que define el movimiento, permite asegurar que la razón de cambio promedio se mantiene constante y es independiente de la amplitud del intervalo de tiempo que se considere.

También podemos obtener la razón de cambio media observando la gráfica del desplazamiento en función del tiempo:



Como la razón de cambio se mantiene constante, para cualquier valor de t, la razón de cambio a los 2 segundos también es de $2\,\dfrac{m}{seg}$.

Esta razón de cambio es la velocidad instantánea del móvil a los dos segundos.

<u>Problema</u>

Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t)=-2t^2+12t+9$ metros. Determine la razón media de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

La razón de cambio media es $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$, por lo tanto:

Intervalo	Razón de cambio media
$0\le t\le 1$	$\dfrac{s(1)-s(0)}{1-0}=10\ \dfrac{m}{seg}$
$1\le t\le 2$	$\dfrac{s(2)-s(1)}{2-1}=6\ \dfrac{m}{seg}$
$2\le t\le 3$	$\dfrac{s(3)-s(2)}{3-2}=2\ \dfrac{m}{seg}$
$3\le t\le 4$	$\dfrac{s(4)-s(3)}{4-3}=-2\ \dfrac{m}{seg}$
$4\le t\le 5$	$\dfrac{s(5)-s(4)}{5-4}=-6\ \dfrac{m}{seg}$

Si trabajamos en forma analítica, la razón de cambio media es:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}=\frac{-2(t_1+h)^2+12(t_1+h)+9-\left(-2t_1^{\,2}+12t_1+9\right)}{h}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-2t_1^{\,2}-4t_1h-2h^2+12t_1+12h+9+2t_1^{\,2}-12t_1-9}{h}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-4t_1h-2h^2+12h}{h}=\frac{h(-4t_1-2h+12)}{h}=-4t_1-2h+12$$

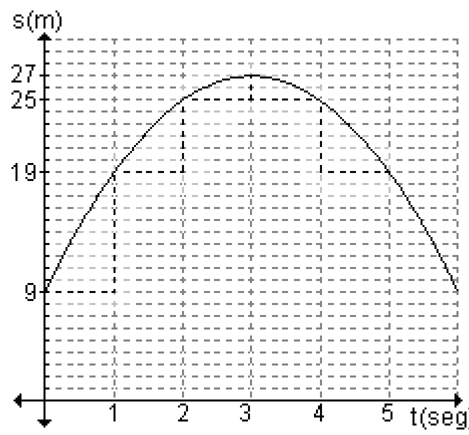
Reemplazando los valores de t_1 y h por los valores correspondientes en cada intervalo, obtenemos:

Intervalo	Razón de cambio media $-4t_1 - 2h + 12$
$0 \le t \le 1$	$-4.0 - 2.1 + 12 = 10\ \frac{m}{seg}$
$1 \le t \le 2$	$-4.1 - 2.1 + 12 = 6\ \frac{m}{seg}$
$2 \le t \le 3$	$-4.2 - 2.1 + 12 = 2\ \frac{m}{seg}$
$3 \le t \le 4$	$-4.3 - 2.1 + 12 = -2\ \frac{m}{seg}$
$4 \le t \le 5$	$-4.4 - 2.1 + 12 = -6\ \frac{m}{seg}$

En este ejemplo observamos que la razón de cambio media, es decir, la velocidad promedio, cambia en cada intervalo. Los datos muestran que al principio el cuerpo llevó una velocidad mayor y a medida que se acerca a su altura máxima, la velocidad disminuye.

¿Es posible que su velocidad se anule?

Después de alcanzar su altura máxima, el cuerpo baja (velocidad promedio negativa), primero con menor y luego con mayor rapidez.



Para calcular la razón de cambio instantánea a los dos segundos, debemos calcular el límite de la razón de cambio media cuando Δt tiende a cero.

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-4t_1-2h+12)=-4t_1+12$. Reemplazando t_1 por 2, obtenemos que la razón de cambio es 4. Es decir que a los dos segundos, la velocidad instantánea del cuerpo es $4\frac{m}{seg}$.

Si la función s(t) describe la posición de un objeto con respecto al tiempo transcurrido t, dicha función recibe el nombre de función posición del objeto.
Como la velocidad promedio es el cociente entre el desplazamiento y el tiempo empleado, la razón de cambio promedio en el intervalo desde t_1 hasta $t_1 + \Delta t$ indica la velocidad promedio en ese intervalo.

Es decir, velocidad promedio: $v_p = \dfrac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \dfrac{s(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$

La velocidad promedio no siempre es útil para resolver ciertos problemas físicos. Si observamos el velocímetro de un auto, la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo, es decir, la velocidad del auto va cambiando. El vehículo tiene una velocidad definida en cada momento. Esta velocidad se llama velocidad instantánea y es el límite de la velocidad promedio cuando $\Delta t \to 0$.

Por lo tanto, velocidad instantánea: $v_{i(t_1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$.

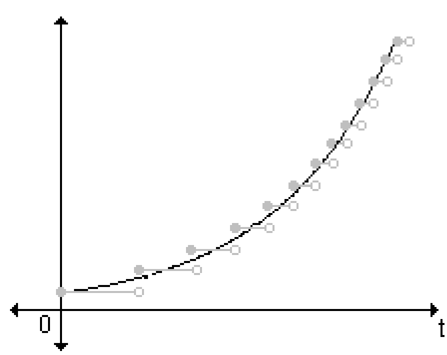
Ejemplo. Sea f(t) el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos t_1 y t_2 es $\Delta f = f(t_1) - f(t_2)$ de modo que la razón de cambio promedio, denominada tasa promedio de crecimiento, durante el período $t_1 \le t \le t_2$ es,

$$\text{tasa promedio de crecimiento: } \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La razón de cambio instantánea, tasa instantánea de crecimiento, se obtiene haciendo que $\Delta t \to 0$ a partir de la tasa promedio,

$$\text{tasa instantánea de crecimiento: } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

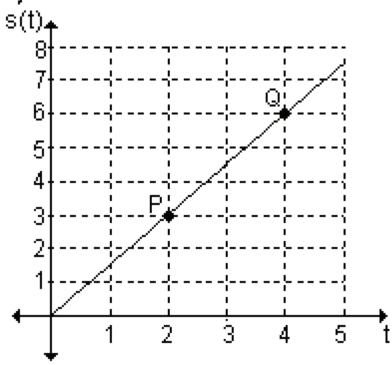
No existe seguridad de que el límite exista ya que la función f(t) es una función escalonada y, por lo tanto discontinua, siempre que ocurre un nacimiento o una muerte. Sin embargo, podemos reemplazar la gráfica por una curva suave de aproximación.



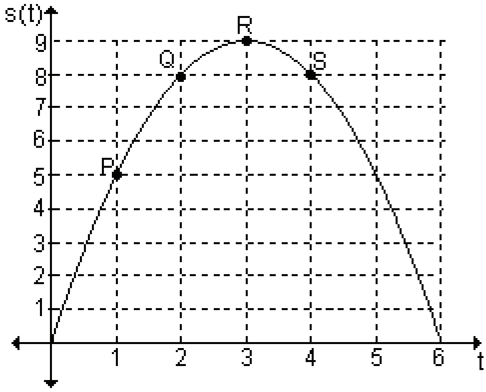
EJERCICIOS

1) Las gráficas muestran la posición de dos partículas que se mueven sobre una línea recta de manera diferente, sabiendo que el espacio recorrido se mide en metros y el tiempo en segundos.

i)



ii)



a) ¿Cuál es la velocidad media de la partícula de la gráfica **i)** cuándo se mueve de la posición P a la posición Q?

b) Encuentre la expresión que permite calcular la razón media de cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo para la gráfica **i)**.

c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula de la gráfica **i)** en cualquier punto?

d) Obtenga la velocidad media de la partícula de la gráfica **ii)** cuando se mueve de la posición P a la posición Q, de Q a R y de R a S.

2) Dada la gráfica de la función y = f(x), encuentre:

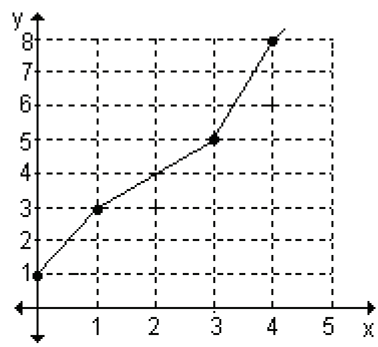
a) f(0) **b)** f(1) **c)** f(3) **d)** f(3) – f(1)

e) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 0 a 1.

f) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 1 a 3.

g) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 3 a 4.

h) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 0 a 4.



3) Una enfermera controla la temperatura de un paciente y registra los resultados:

Horas	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Temperatura	37	37	37,5	38	38,4	39	39,5	39	38

a) ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 16 y las 17 horas, las 19 y las 21, las 21 y las 23 horas?

b) Trace la curva de fiebre del paciente.

c) Calcule las razones de cambio entre las 15 y las 23 horas en intervalos de una hora.

d) Complete la tabla:

Temperatura	Gráfica	Razón de cambio
Sube	Creciente	Positiva
Queda igual		
Baja		

4) La velocidad en t = 1 segundos de una partícula que se mueve sobre una línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 1{,}2t^2$, s en metros y t en segundos, se expresa como $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2{,}4 \frac{m}{seg}$. Esta expresión significa:

a) En la cercanía de t = 1 la velocidad de la partícula es de $2{,}4 \frac{m}{seg}$.

b) La velocidad de la partícula en t = 1 es exactamente $2{,}4 \frac{m}{seg}$.

c) La sucesión de velocidades medias muy cerca de t = 1, tanto por derecha como por izquierda, se aproximan mucho a 2,4, y no lo exceden.

5) La posición de una partícula (en metros) sobre una recta horizontal está determinada por la función $f(t) = -3t^2 + 2t$, t en segundos. Determine:

a) la velocidad promedio de la partícula durante el tercer segundo (es decir, entre t = 2 y t = 3). Durante ese intervalo de tiempo, ¿la partícula avanza o retrocede?

b) una fórmula que permita obtener la velocidad promedio de la partícula entre t y $t + \Delta t$.

c) la velocidad instantánea de la partícula en t = 3.

6) Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad suburbana será $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ miles de personas.

a) ¿Cuánto cambiará la población durante el segundo año? (de t = 1 a t = 2). ¿La población sufrirá un aumento o una disminución?

b) ¿A qué razón cambiará la población durante el segundo año?

c) Obtenga una fórmula que permita obtener la razón de cambio promedio de la población con respecto al tiempo.

d) Obtenga una fórmula que permita obtener la razón a la cual cambiará la población, con respecto al tiempo, dentro de t años.

e) ¿A qué razón crecerá la población dentro de un año?

f) ¿A qué razón crecerá la población dentro de nueve años?

g) ¿Qué sucederá con la razón de crecimiento de la población a largo plazo?

7) Caída libre: Si dejamos caer una piedra hacia la tierra desde una altura de 35 metros, los experimentos de la física han llevado a obtener como modelo del espacio recorrido por la piedra en t segundos la fórmula: $y(t) = 35 - \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 9{,}8 \frac{m}{seg^2}$ es la aceleración de la gravedad.

a) Encuentre la posición de la piedra luego de 1 segundo de ser lanzada, luego de 2 segundos y 2,5 segundos.

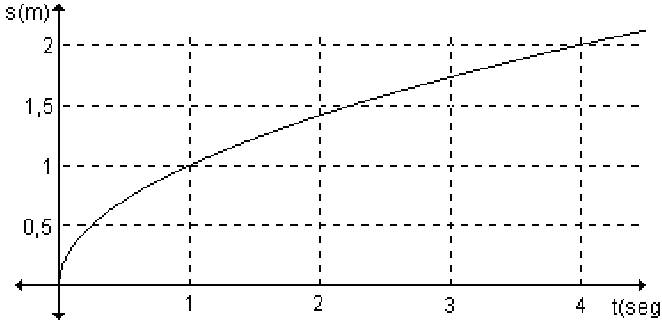
b) Calcule la velocidad media de la piedra para los intervalos de tiempo [0, 1] y [1, 2].

c) Grafique y(t). Marque Δy y Δt para los intervalos de tiempo [0, 1] y [1, 2]. ¿La piedra tiene siempre la misma velocidad? Explique.

d) ¿En qué instante llega la piedra al suelo?

e) Calcule la velocidad instantánea de la piedra en $t = 1$ y en $t = 2,5$. ¿Qué podemos decir de la velocidad instantánea de la piedra a medida que se acerca al suelo? ¿Coincide esta conclusión con la intuición?

8) La gráfica muestra la variación de la distancia s (en metros) que recorre un proyectil respecto del tiempo t (en segundos).



Analizando la gráfica, estime:

a) la velocidad media del proyectil entre el primer y cuarto segundo.

b) la velocidad media del proyectil entre el primer y tercer segundo.

c) la velocidad media del proyectil entre $t = 1$ y $t = 2$.

d) la velocidad del proyectil exactamente en $t = 1$.

9) En experimentos de laboratorio, se marcó la raíz de una plántula de maíz y se tomó una fotografía continua (con el obturador de la cámara siempre abierto, la película avanzando y la luz débil y constante) que registró el crecimiento de la raíz, obteniendo la información que se registra en la siguiente tabla (los datos son aproximados):

t (horas)	0	0,5	1	1,5	2
Tamaño (en cm)	3	3,5	4	4,5	5

a) Encuentre la ley que relaciona el crecimiento de la raíz con el tiempo transcurrido. Grafique. ¿Qué tipo de relación existe entre las dos variables?

b) Investigue si hay algún intervalo de tiempo en el cual el crecimiento se dé más rápidamente.

c) Calcule la velocidad media de crecimiento en los intervalos [1; 1,5] y [1,5; 2].

d) Determine la velocidad instantánea de crecimiento de la raíz en cualquier instante.

e) ¿Qué relación existe entre la variación instantánea de crecimiento en cualquier instante t y la velocidad media en cualquier intervalo?

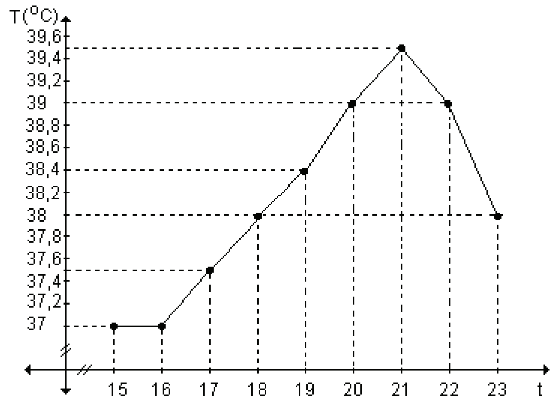
RESPUESTAS

1)a) $1,5\,\frac{m}{seg}$; **b)** A partir de la gráfica se obtiene $s(t) = \frac{3}{2}t$, de ahí resulta:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{3}{2}t_2 - \frac{3}{2}t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{3}{2}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{3}{2}$$; **c)** $1,5\,\frac{m}{seg}$;

d) La velocidad media de la partícula de la gráfica **ii)** cuando se mueve de la posición P a la posición Q es $3\,\frac{m}{seg}$, de Q a R es $1\,\frac{m}{seg}$ y de R a S es $-1\,\frac{m}{seg}$.

2)a) $f(0) = 1$; **b)** $f(1) = 3$; **c)** $f(3) = 5$; **d)** $f(3) - f(1) = 2$;
e) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 0 a 1 es 2.
f) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 1 a 3 es 1.
g) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 3 a 4 es 3.
h) la razón de cambio medio de f(x) cuando x cambia de 0 a 4 es 1,75.
3)a) El cambio de temperatura entre las 16 y las 17 horas fue $0{,}5^{o}$, entre las 19 y las 21 horas fue $1{,}1^{o}$, y entre las 21 y las 23 horas fue de $-1{,}5^{o}$.
b) La curva de fiebre del paciente es:



c)

Intervalo	15 a 16	16 a 17	17 a 18	18 a 19	19 a 20	20 a 21	21 a 22	22 a 23
$T_m = \frac{\Delta T}{\Delta t}$	0	0,5	0,5	0,4	0,6	0,5	–0,5	–1

d)

Temperatura	Gráfica	Razón de cambio
Sube	Creciente	Positiva
Queda igual	Constante	Cero
Baja	Decreciente	Negativa

4) La expresión significa que la velocidad de la partícula en $t = 1$ es exactamente $2{,}4\,\frac{m}{seg}$.

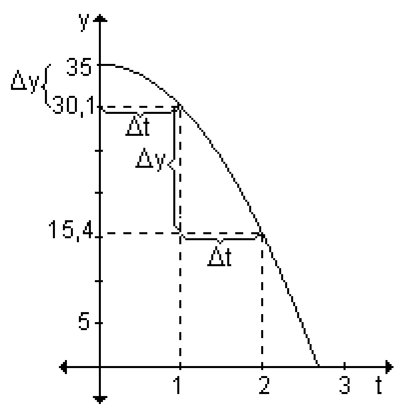
5)a) La velocidad promedio de la partícula durante el tercer segundo es $-13\,\frac{m}{seg}$. La partícula retrocede. **b)** La fórmula que permite obtener la velocidad promedio de la partícula entre t y $t + \Delta t$ es $v_p = -6t - 3\Delta t + 2$. **c)** La velocidad instantánea de la partícula en $t = 3$ es $-16\,\frac{m}{seg}$.

6) a) Durante el segundo año la población crecerá 1000 individuos. **b)** La población crecerá a razón de 1000 individuos por año. **c)** La razón de cambio promedio de la población con respecto al tiempo, cuando el tiempo cambia de t a t + Δt, está dada por la expresión $\dfrac{6}{(t+\Delta t+1).(t+1)}$ miles de personas por año.

d) La razón a la cual cambiará la población, con respecto al tiempo, dentro de t años es $\dfrac{6}{(t+1)^2}$ miles de personas por año. **e)** Dentro de un año la población estará creciendo a razón de 1500 personas por año. **f)** Dentro de nueve años la población estará creciendo a razón de 60 personas por año. **g)** La razón de crecimiento a largo plazo tiende a cero. Es decir que con el tiempo, la población tiende a estabilizarse.

7) a) $y(1) = 30{,}1m$; $y(2) = 15{,}4m$; $y(2{,}5) = 4{,}375m$

b) La velocidad media de la piedra para el intervalo [0, 1] es $v = -4{,}9\dfrac{m}{seg}$ y la velocidad media para el intervalo [1, 2] es $v = -14{,}7\dfrac{m}{seg}$.



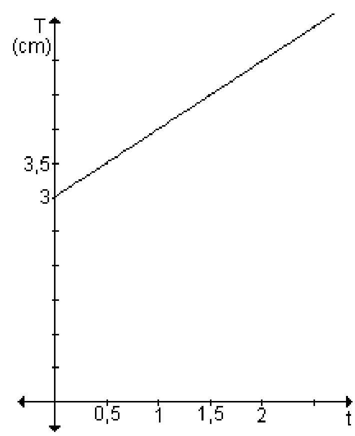
c) La velocidad de la piedra cambia a medida que transcurre el tiempo. Lo podemos ver ya que recorre distancias distintas en intervalos de igual amplitud.

d) La piedra llega al suelo aproximadamente a los 2,67 segundos.

e) La velocidad instantánea de la piedra en t = 1 es $v_i(1) = -9{,}8\dfrac{m}{seg}$ y en t = 2,5 es $v_i(2{,}5) = -24{,}5\dfrac{m}{seg}$.

A medida que la piedra se acerca al suelo su rapidez aumenta, se observa en los valores calculados y coincide con lo que pensamos en forma intuitiva.

8)a) $\dfrac{1}{3}\dfrac{m}{seg}$; **b)** $0{,}375\dfrac{m}{seg}$; **c)** $0{,}4\dfrac{m}{seg}$; **d)** $0{,}5\dfrac{m}{seg}$



9)a) T(t) = 3 + t, es una función de primer grado.

b) En todos los intervalos de tiempo la raíz tiene el mismo crecimiento. O sea que es constante.

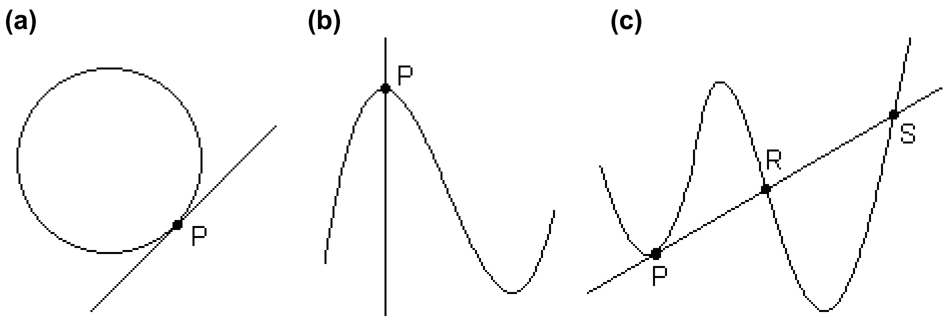
c) La velocidad media en ambos intervalos es $1\dfrac{cm}{h}$.

d) La velocidad de crecimiento es la misma en cualquier instante, $1\dfrac{cm}{h}$.

e) La velocidad de crecimiento en cualquier instante y la velocidad media en cualquier intervalo son iguales.

4.2 El problema de la recta tangente a una curva

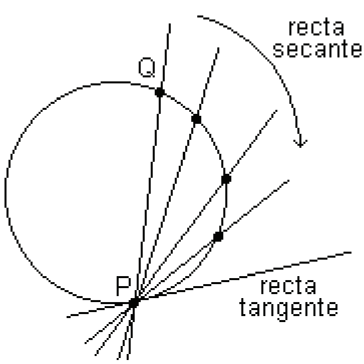
En la geometría plana una recta es tangente a una circunferencia si la toca o corta en un solo punto. Esta definición, sin embargo, no es buena para otro tipo de curvas.



En la gráfica **(a)** se observa la tangente a una circunferencia en el punto P. En **(b)** la recta interseca a la curva en un solo punto y sin embargo no es tangente y en **(c)** la recta es tangente a la curva en el punto P aún cuando también la interseca en los puntos R y S.

Es importante definir matemáticamente el concepto de *recta tangente* a una curva en un punto para que sirva a cualquier curva, más allá de la circunferencia. Mostraremos una concepción intuitiva de la tangente para discutir más adelante cómo determinar la pendiente de la recta tangente.

Consideremos un punto P y otro punto Q pertenecientes a la circunferencia y tracemos la recta que pasa por P y por Q. Esta recta se llama *recta secante*.

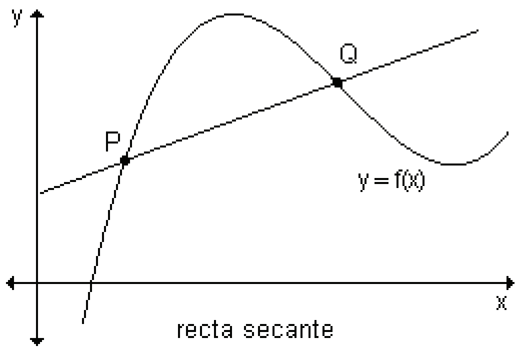


Para pensar en una definición diferente de tangente consideremos la tangente a una circunferencia en el punto P y la secante que une el punto P con el punto Q.

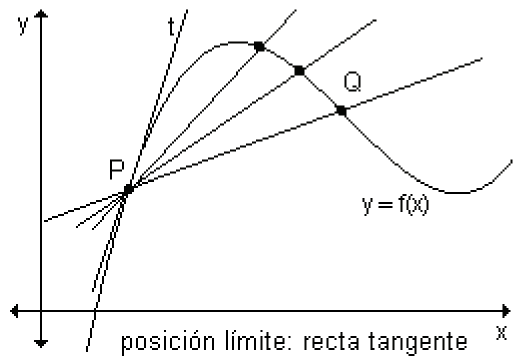
Si se mueve el punto Q sobre la circunferencia hacia P, la recta secante se mueve acercándose cada vez más a la posición de la tangente en P. Podemos decir que las rectas secantes se aproximan a la tangente en tanto Q se aproxima a P sobre la circunferencia.

Teniendo en cuenta esta idea estamos ahora en condiciones de definir la noción de tangente para aplicarla a curvas que no sean circunferencias.

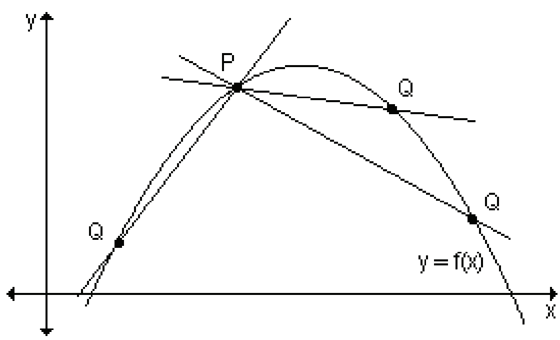
Si consideramos una curva en el plano xy y un punto P de la misma sólo nos resta conocer el valor de la pendiente m de la recta tangente en P ya que con la pendiente y un punto estamos en condiciones de dar la ecuación de una recta. Si Q es cualquier punto sobre la curva distinto de P, la recta que los une es una recta secante.



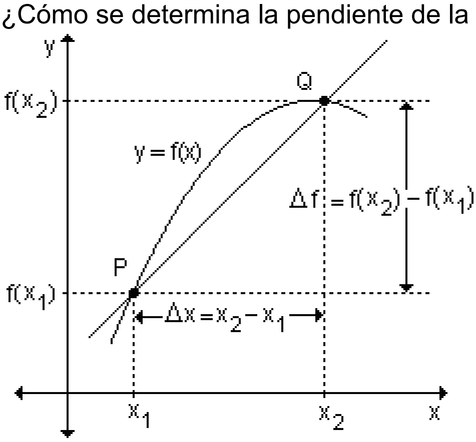
Según vimos, si el punto Q se mueve sobre la gráfica hacia P, la recta se moverá hacia una posición límite. La recta que ocupa esa posición límite es la que se define como recta tangente a la gráfica en P.



Debemos tener en cuenta que Q es un punto cualquiera de la curva y que puede estar a uno u otro lado de P.



¿Cómo se determina la pendiente de la recta tangente buscada?



Sea f(x) una función continua en el punto P de abscisa x_1.

Definiremos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P de coordenadas $(x_1, f(x_1))$.

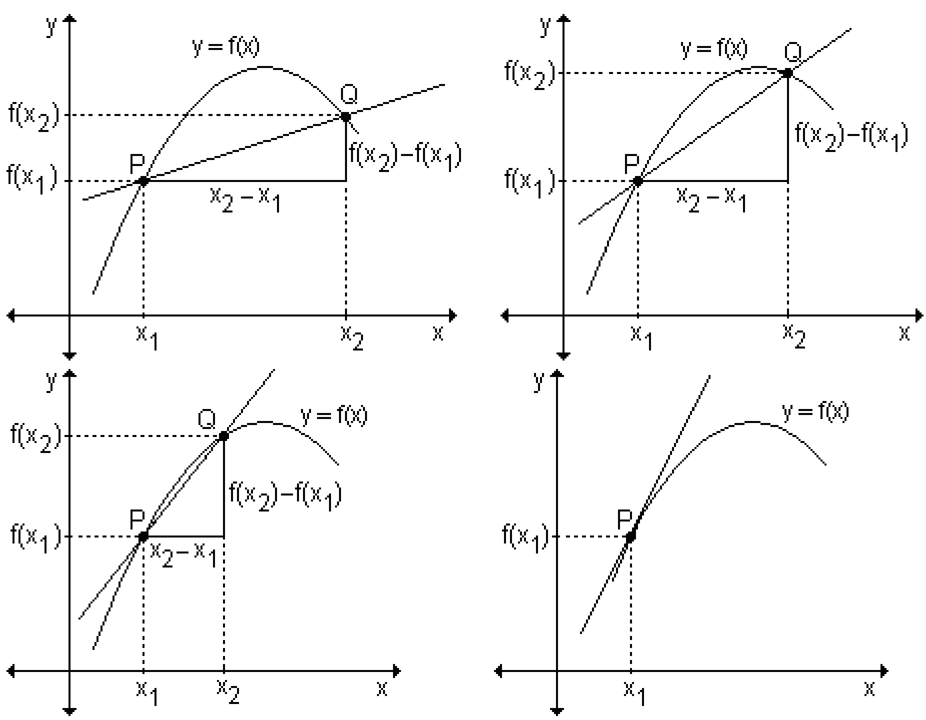
Sea $Q(x_2, f(x_2))$ otro punto cualquiera de la gráfica. Si unimos P y Q obtenemos una recta secante cuya pendiente es $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

También puede expresarse que la pendiente de la recta secante a la gráfica de $f(x)$ es $m = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

¿Qué indica también este cociente?
Es la expresión de la razón de cambio promedio de $f(x)$ con respecto a x, cuando x cambia de x_1 a x_2.
Consideremos que P se mantiene fijo y Q se mueve a lo largo de la curva, acercándose a P. Esto equivale a decir que $\Delta x \to 0$, ya que x_2 estaría cada vez más próximo a x_1.
La recta secante gira teniendo a P fijo y si tiene una posición límite, ésta es la recta tangente a $f(x)$ en P. Luego la recta tangente tendrá una pendiente dada por $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m$.

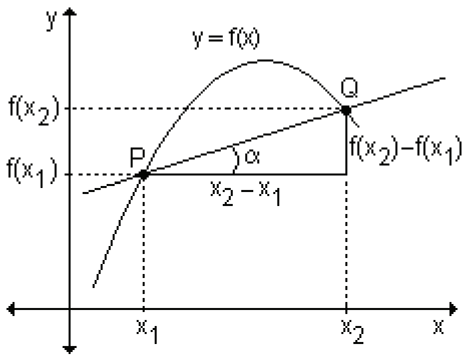
Si este límite no existe, el ángulo de inclinación de la recta tenderá a $\dfrac{\pi}{2}$ cuando $\Delta x \to 0$ y la recta tangente será la recta vertical $x = x_1$.

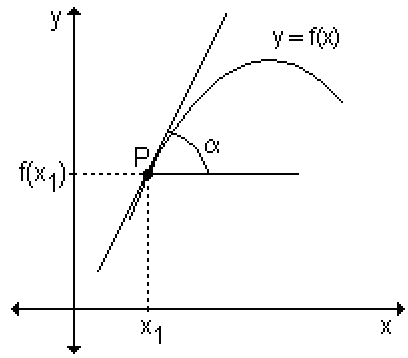
Los siguientes gráficos ilustran el significado del proceso "$\Delta x \to 0$".



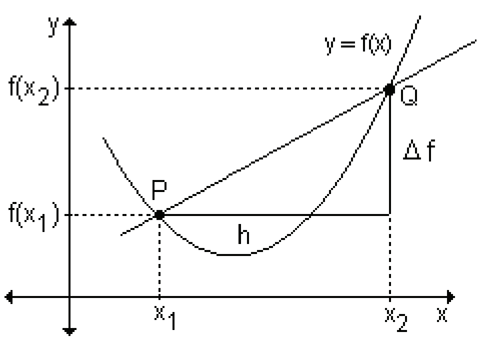
Se visualiza claramente que a medida que el punto Q se aproxima al punto P sobre la curva, la distancia entre sus abscisas $(x_2 - x_1)$ se hace cada vez menor.

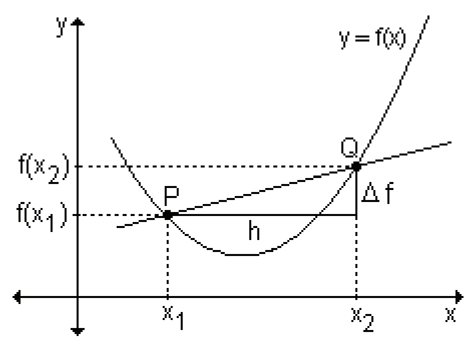
A medida que Q se acerca a P cambia la pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de la recta secante que ellos determinan. El proceso de aproximación continúa hasta que prácticamente la recta secante llega a la posición de tangente en el punto P. Tanto la recta secante como la recta tangente tienen como pendiente la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación α.

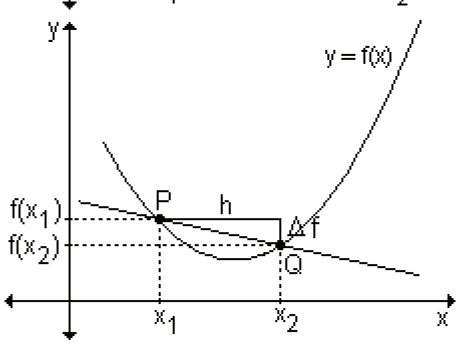


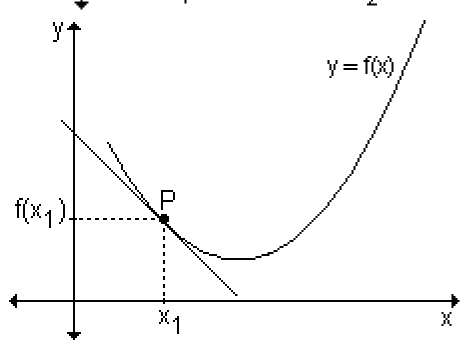


Podemos razonar de manera análoga si consideramos las siguientes gráficas en las que se ha utilizado la siguiente notación: $h = x_2 - x_1$ y $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$.

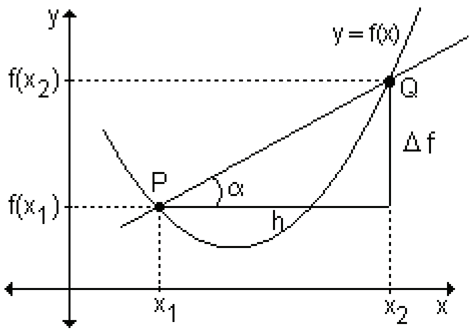


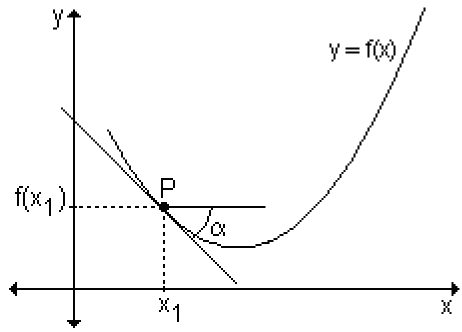






Indicando el ángulo de inclinación:





Definición. Sea f(x) una función continua en el punto de abscisa x_1, definida en algún intervalo abierto I que contenga a x_1. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1,f(x_1))$ es:

a) la recta que pasa por P de pendiente $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$, si este límite existe.

b) la recta vertical $x = x_1$ si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ no existe.

¿Qué indica también el resultado de este límite?
Es la definición de razón de cambio instantánea de una función cuando $x = x_1$.
A la razón de cambio instantánea de la función en $x = x_1$ también se la llama *derivada* de f(x) en $x = x_1$ y se la indica $f'(x_1)$.

4.3 Relación entre razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, recta secante y recta tangente.

Aprendizaje por descubrimiento

Actividad 1. Un científico encontró que si calienta cierta sustancia, la temperatura en grados centígrados luego de t minutos, está dada por $g(t) = 2t^2 + 4t + 10$, donde $0 \leq t \leq 5$. Encuentre:
a) la razón media de cambio de la temperatura durante el intervalo [1, 3]. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta que une los puntos de abscisa 1 y 3 respectivamente.
b) la razón de cambio en t = 1,5. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese valor.

Actividad 2. El espacio recorrido (en metros) de una partícula se expresa con la ley $s(t) = t^2 - 6t + 10$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre las velocidades promedio durante los siguientes intervalos:
i) [2; 3] **ii)** [2,5; 3] **iii)** [3; 4] **iv)** [3; 3,5]

b) Encuentre la velocidad instantánea en $t = 3$ segundos.
c) Grafique s(t) y trace las rectas cuyas pendientes sean las velocidades promedio del inciso **a)** y la recta que pasa por $t = 3$ y cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso **b)**.

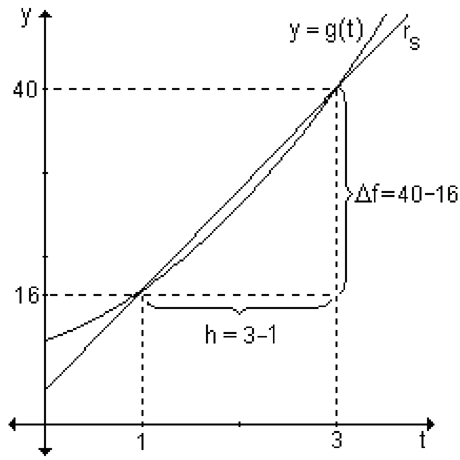
¿Qué relación existe entre razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, recta secante y recta tangente?

Compartimos nuestras respuestas.

Actividad 1. La razón de cambio promedio se obtiene calculando:

$$\frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{40-16}{2} = 12\frac{^{o}C}{min}.$$

Esto significa que al pasar desde $t = 1$ a $t = 3$, la temperatura aumenta a razón de 12°C por minuto.
En la gráfica se observa que la pendiente de la recta secante que une los puntos de abscisa 1 y 3 es 12.



La razón de cambio es:

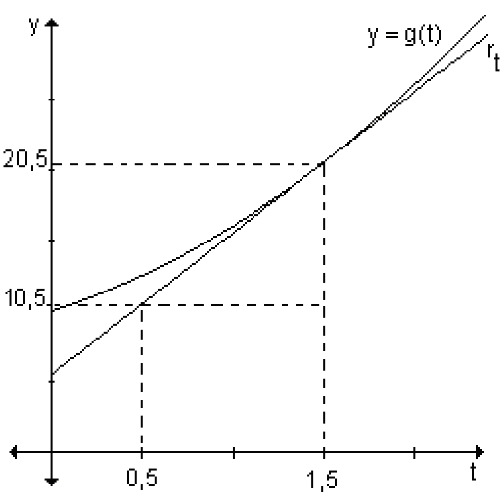
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(1{,}5+h)-g(1{,}5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(1{,}5+h)^2+4(1{,}5+h)+10-2.1{,}5^2-4.1{,}5-10}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2.1{,}5^2+4.1{,}5.h+2h^2+6+4h+10-2.1{,}5^2-4.1{,}5-10}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6h+2h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{10h+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(10+2h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+10) = 10$$

Esto significa que la razón de cambio de la temperatura al minuto y medio es de 10° por minuto.

Si graficamos la función y la recta tangente en $x = 1{,}5$ se observa que su pendiente es 10.



Actividad 2. Las velocidades promedio pedidas son:

i) $v_p = \dfrac{s(3)-s(2)}{3-2} = \dfrac{1-2}{1} = -1\dfrac{m}{seg}$ **ii)** $v_p = \dfrac{s(3)-s(2,5)}{3-2,5} = \dfrac{1-1,25}{0,5} = -0,5\dfrac{m}{seg}$

iii) $v_p = \dfrac{s(4)-s(3)}{4-3} = \dfrac{2-1}{1} = 1\dfrac{m}{seg}$ **iv)** $v_p = \dfrac{s(3,5)-s(3)}{3,5-3} = \dfrac{1,25-1}{0,5} = 0,5\dfrac{m}{seg}$

La velocidad instantánea en t = 3 resulta:

$$v_i(3) = \lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-6(3+h)+10-(3^2-6.3+10)}{h}$$

$$v_i(3) = \lim_{h\to 0}\frac{3^2+2.3.h+h^2-18-6h+10-3^2+6.3-10}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2-6h}{h}$$

$$v_i(3) = \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h-6)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h-6 = \lim_{h\to 0} h = 0$$

La velocidad instantánea a los tres segundos es 0 $\dfrac{m}{seg}$. En ese instante el móvil está en reposo.

c) Para representar gráficamente s(t), completamos cuadrados obteniendo $s(t) = (t-3)^2 + 1$.

Debemos representar además cuatro rectas tales que sus pendientes sean las velocidades promedio obtenidas en el punto **a)**.

Cada una de las rectas debe pasar por los puntos cuyas abscisas son los extremos de cada intervalo. Por ejemplo en el primer caso, la recta pasa por los puntos de abscisa 2 y 3. Reemplazando en s(t) para encontrar sus ordenadas obtenemos que si t = 2, y = 2, y si t = 3, y = 1.

Por lo tanto los puntos (2, 2) y (3, 1) pertenecen a la recta secante buscada.

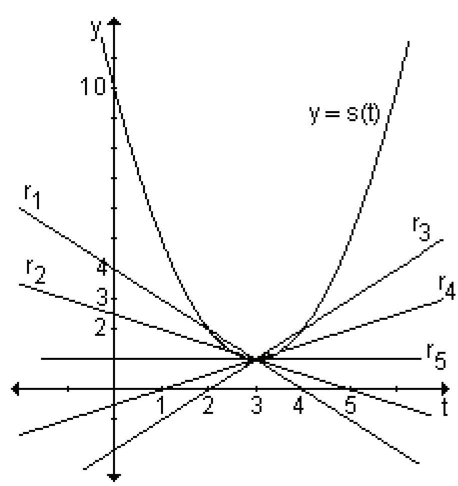
Encontramos la ecuación de la recta: $r_1: \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{t-3}{1} \Rightarrow y = -t + 4$.

Observemos que la pendiente es –1, el mismo resultado que obtuvimos en **i)**.

De la misma forma podemos obtener las ecuaciones de las otras rectas secantes. $r_2: y = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{5}{2}$;

$r_3: y = t - 2$; $r_4: y = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2}$.

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de abscisa 3 y cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso **b)** es $r_5: y = 1$.



Al resolver las dos actividades observamos que las pendientes de las rectas secantes y tangente son, respectivamente, las interpretaciones geométricas de las razones de cambio media e instantánea analizadas anteriormente.

Como resumen de estos conceptos analizados, se presenta la siguiente tabla.

Cantidad	Interpretación algebraica	Interpretación geométrica
$\dfrac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}$	Razón de cambio promedio de f de $x = x_1$ a $x = x_1 + h$	Pendiente de la recta secante por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1+ h, f(x_1 + h))$.
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}$	Razón de cambio instantánea de f en $x = x_1$	Pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_1, f(x_1))$.

Definición. Se llama *recta normal* a la gráfica de una función en un punto a la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

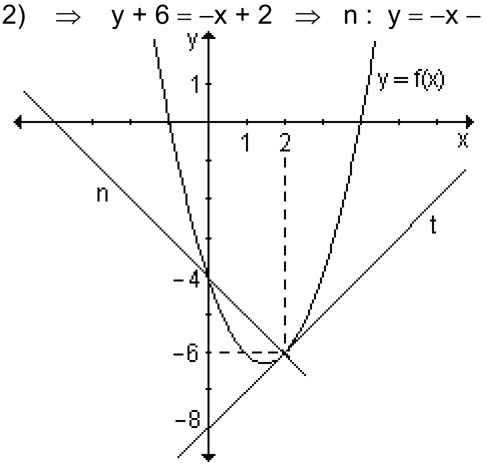
Ejemplo. Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la curva definida por $f(x) = x^2 - 3x - 4$ en el punto de abscisa 2.

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 2 se calcula resolviendo el siguiente límite:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(2+h)^2 - 3(2+h) - 4\right] - \left[2^2 - 3.2 - 4\right]}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 6 - 3h - 4 - 4 + 6 + 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h-3)}{h} = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

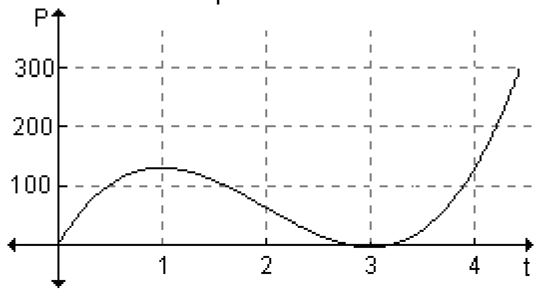
La recta tangente tiene pendiente 1 y pasa por el punto $(2, f(2)) = (2, -6)$. Su ecuación es: $t : y - (-6) = 1.(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y + 6 = x - 2 \quad \Rightarrow \quad t : \; y = x - 8$.
La recta normal es perpendicular a la recta tangente en el mismo punto. En consecuencia su pendiente es -1 y su ecuación resulta:
$n : y - (-6) = -1.(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y + 6 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad n : \; y = -x - 4$



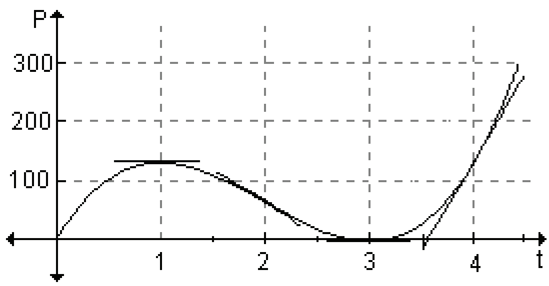
Ejemplo: La función definida gráficamente representa la cantidad de personas infectadas con una enfermedad en cierta ciudad después de t semanas.

a) Trace la recta tangente a la curva en los puntos de abscisas $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.

b) Estime las razones de cambio instantáneas, o sea las tasas de variación de cantidad de personas infectadas, luego de 1, 2, 3 y 4 semanas.



a) En los puntos pedidos se trazan las rectas tangentes:

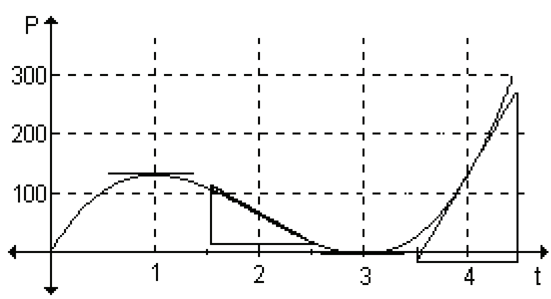


b) Gráficamente las razones de cambio instantáneas después de 1, 2, 3 y 4 semanas representan la pendiente de la recta tangente a la curva en $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.

En $t = 1$ y $t = 3$ la tangente es horizontal por lo que la pendiente es cero y la razón de cambio es nula en dichos instantes.

En $t = 2$ y $t = 4$ es posible estimar el valor de la pendiente analizando la variación horizontal y vertical.

En $t = 2$ la pendiente es aproximadamente -100 y en $t = 4$ es 300.

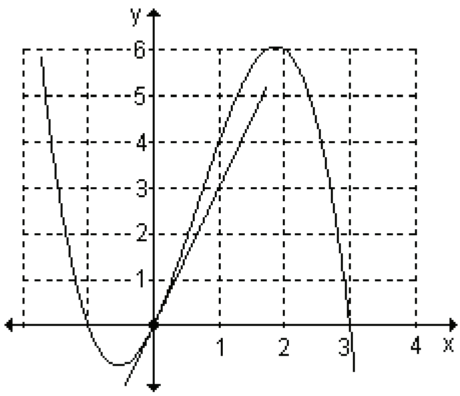


Podemos afirmar que la razón de cambio en $t = 2$ es de -100 personas infectadas por semana y en $t = 4$ es de 300 personas por semana.

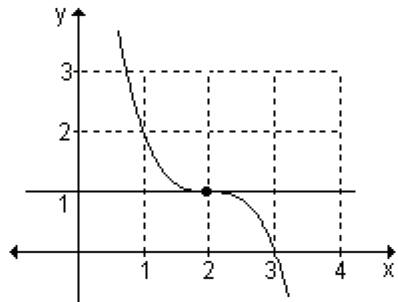
EJERCICIOS

1) Obtenga, a partir de la gráfica, la pendiente y la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto indicado:

a)



b)



2) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Represente la función y la recta obtenida.

3) Determine la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $y = \frac{2}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

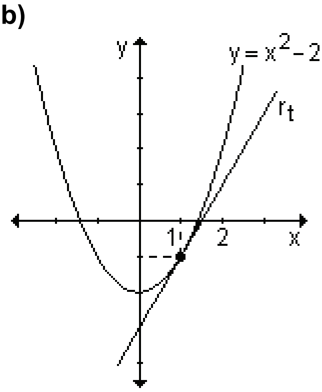
RESPUESTAS

1)a) La pendiente es $m = 3$ y la recta tangente $y = 3x$.

b) La pendiente es $m = 0$ y la recta tangente $y = 1$.

2)a) $r_t : y = 2x - 3$

b)



3) $r_t : y = -\frac{1}{2}x + 2$; $r_n : y = 2x - 3$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 RAZONES DE CAMBIO. 4.2 EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA. 4.3 RELACIÓN ENTRE RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO, RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA, RECTA SECANTE Y RECTA TANGENTE

1) Sea la función $f(x) = -x^2 + 3$.

a) Halle la razón de cambio promedio cuando x cambia de $x_0 = 1$ a $x_1 = 2$. Determine la ecuación de la recta secante que une los puntos de abscisas $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. ¿Qué puede observar?

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x_0 = 1$.

c) Grafique la función, la recta secante y la recta tangente.

2) Sea la función $g(x) = x^3$

a) Encuentre la razón de cambio promedio de la función cuando x cambia desde $x_0 = -3$ a $x_1 = -2$. Determine que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta secante que une los puntos de abscisa $x_0 = -3$ y $x_1 = -2$. Halle la ecuación de la recta secante.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x_0 = -2$.

c) Grafique la función, la recta secante y la recta tangente.

3) Halle la razón de cambio media de la función dada en el intervalo indicado. Calcule la razón instantánea de cambio en los extremos del intervalo $[x_0, x_1]$.

	Función	Intervalo $[x_0, x_1]$
a)	$f(x) = -2x + 3$	$[-2, -1]$
b)	$f(x) = x^2 - 1$	$[0, 1]$

4) Determine la ecuación de la recta secante a cada una de las funciones del ejercicio anterior que une los extremos del intervalo considerado y la recta tangente en cada uno de los extremos del intervalo.

4.4 Concepto de derivada

En las secciones anteriores se definió la razón de cambio instantánea como un límite de la forma $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$. La razón de cambio instantánea tiene numerosas aplicaciones en las ciencias naturales, sociales y en las ingenierías. En economía, el costo marginal, ingreso marginal o beneficio marginal, en física, velocidad (si la función original representa el espacio recorrido). En química, la razón de cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo, llamada velocidad de reacción. En biología, la razón de cambio de una colonia de bacterias con respecto al tiempo.

También se analizó que ese límite da la pendiente de la recta tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto de abscisa $x = x_1$.

Dada la frecuencia con que aparecen estos límites, se les asigna un nombre y una notación especiales, surgiendo el concepto de derivada.

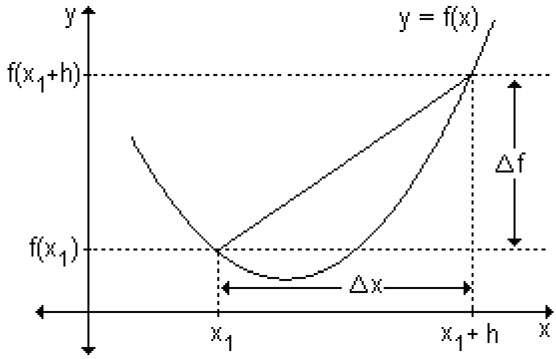
El concepto de derivada se origina a mediados del siglo XVII cuando el matemático francés Pierre de Fermat (1601–1665) intentó obtener máximos y mínimos de ciertas funciones.

Definición. Se llama *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_1$ y se indica con $f'(x_1)$ a $f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$, siempre que este límite exista.

El numerador $f(x_1 + h) - f(x_1)$ representa el incremento de la función al pasar la variable independiente de x_1 a $x_1 + h$ y se indica $\Delta f = f(x_1 + h) - f(x_1)$.

Análogamente $h = (x_1 + h) - x_1 = \Delta x$ representa el incremento de la variable independiente.

Teniendo en cuenta esto, la derivada se puede indicar $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ donde $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ recibe el nombre de cociente incremental.



Por lo tanto, la derivada puede interpretarse de varias maneras, dos de las cuales son:

a) La derivada da la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x.

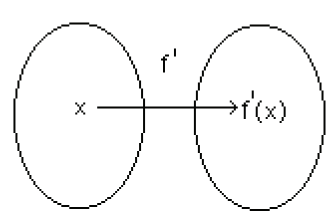
b) La derivada da la pendiente de la gráfica de f(x) en cualquier punto.

Si la derivada se evalúa en $x = x_1$, entonces $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(x_1, f(x_1))$.

4.5 Función derivada

Dada una función $y = f(x)$, si se calcula la derivada en cada punto x de su dominio, el conjunto de valores obtenido, define una función de x que se llama función derivada.

Dada la función $y = f(x)$ se llama *función derivada* de f y se simboliza $y' = f'(x)$ a la función que a cada valor de x le hace corresponder su derivada.



Si cambiamos en la ecuación anterior x_1 por la variable x se obtiene:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ siempre que este límite exista.

El dominio de f' es el conjunto de números reales del dominio de f para los cuales existe el límite del cociente incremental.

Si $f'(x)$ existe, decimos que f tiene derivada o que es derivable en x.

El proceso para obtener la función f' a partir de la función f se llama derivación.

Notaciones. Usando la notación tradicional de una función $y = f(x)$ donde x es la variable independiente e y es la variable dependiente, algunas notaciones comunes para la derivada son: $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} = D_x f(x)$

El símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ que fue introducido por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) no debe considerarse, por ahora, como una razón. Recibe el nombre de notación de Leibniz y tiene la ventaja de ofrecer un modo sencillo de recordar fórmulas importantes del cálculo.
La definición de derivada usando la notación de Leibniz resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

Si deseamos calcular el valor de la derivada en un punto de abscisa $x = x_1$, usamos la notación:

$$y'\Big|_{x_1} = f'(x_1) \text{ o } \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_1}$$

Ejemplo. Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones y determine el dominio de ambas funciones.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{2x}$ **c)** $m(x) = 3\sqrt{x}$

a) Teniendo en cuenta la definición $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, la derivada de la función dada resulta:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(x+h)^2 + 1\right] - \left[3x^2 + 1\right]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 1 - 3x^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = 6x\ .$$

Por lo tanto, $f'(x) = 6x$.
El dominio de la función f y el de su derivada es el conjunto de los números reales.

$$\textbf{b)}\ g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{2(x+h)} - \dfrac{1}{2x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x - (x+h)}{2(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{2(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to} \frac{-1}{2(x+h)x}$$

$g'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$. El dominio de la función y el de su derivada es el conjunto de los números reales excepto el 0.

c) $m'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{3\sqrt{x+h} - 3\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3\sqrt{x+h} - 3\sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{3\sqrt{x+h} + 3\sqrt{x}}{3\sqrt{x+h} + 3\sqrt{x}}$

$$m'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(3\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(3\sqrt{x}\right)^2}{h.\left(3\sqrt{x+h} + 3\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{9h}{h.\left(3\sqrt{x+h} + 3\sqrt{x}\right)} = \frac{9}{6\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

El dominio de la función m es el conjunto R_0^+. El dominio de la función derivada es el conjunto R^+.

Problema

Encuentre la velocidad con que varía el área de un círculo con respecto al radio, para cualquier valor del radio y específicamente cuando el radio mide 2 cm.

El área de un círculo es $A = f(r) = \pi r^2$. A medida que el radio aumenta, el valor del área también aumenta.
La derivada de la función $A = f(r) = \pi r^2$ es

$$f'(r) = \lim_{h\to 0} \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi\left(r^2 + 2rh + h^2\right) - \pi r^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2 - \pi r^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2\pi r + \pi h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2\pi r + \pi h = 2\pi r.$$

Por lo tanto, $f'(r) = 2\pi r$.
Esta derivada indica la velocidad con que varía el área del círculo con respecto al radio, para cualquier valor del radio.
Cuando el radio es de 2 cm, $f'(2) = 2\pi .2 = 4\pi$.
Esto significa que cuando el radio es de 2 cm, la tasa instantánea de variación del área del círculo es 4π cm^2 por cada cm de variación del radio.

EJERCICIOS

1) Calcule la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5$ **b)** $f(x) = 4x$ **c)** $f(x) = 1 - x^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2) Halle la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.

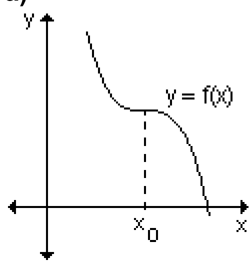
a) $f(x) = 2x - 1$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^2 + x$ en $x_0 = -2$

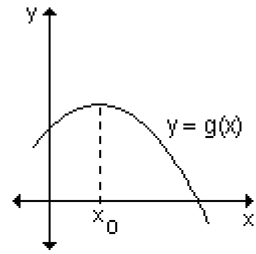
c) $f(x) = \sqrt{x-3}$ en $x_0 = 12$

3) Analice para qué funciones se verifica que su derivada en $x = x_0$ es nula.

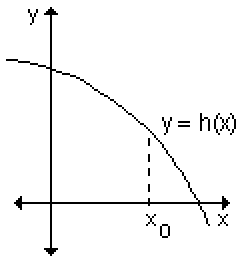
a)



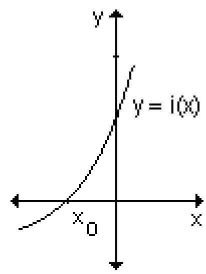
b)



c)

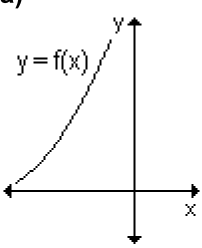


d)

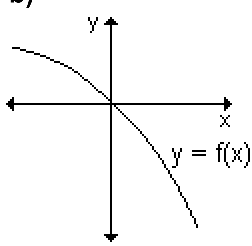


4) ¿En qué gráficas se cumple que $f'(x) < 0$?

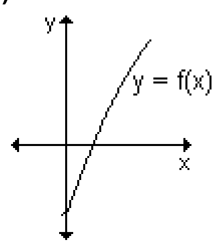
a)



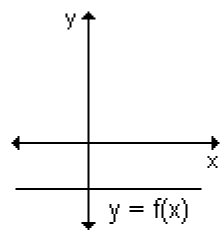
b)



c)



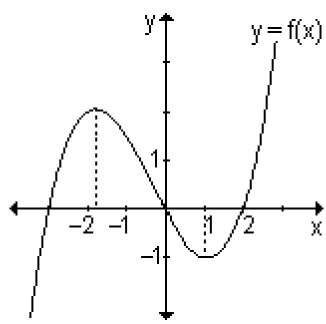
d)



5) Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, ordene los siguientes números en forma creciente.

$g'(-2)$, $g'(-1{,}5)$, $g'(-0{,}5)$, $g'(1)$, $g'(3)$

Explique su razonamiento.



RESPUESTAS

1)a) $f'(x) = 0$ **b)** $f'(x) = 4$ **c)** $f'(x) = -2x$ **d)** $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

2)a) 2 **b)** -7 **c)** $\dfrac{1}{6}$

3) La derivada de la función en $x = x_0$ es nula en **a)** y **b)**.

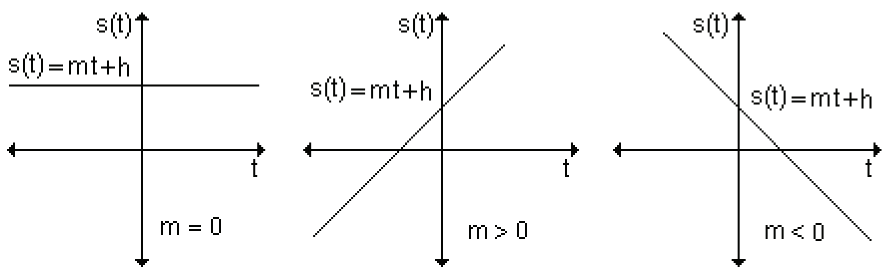
4) $f'(x) < 0$ en **b)**.

5) $g'(-0{,}5)$; $g'(-1{,}5)$; $g'(1)$; $g'(-2)$; $g'(3)$. Trazando aproximadamente la recta tangente a la función en los puntos pedidos se puede observar sus pendientes y estimar sus valores.

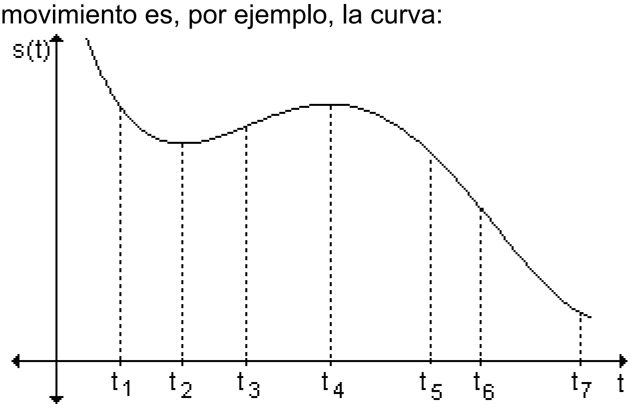
Actividades de reflexión. Sea s(t) la función que describe la posición de un móvil en cualquier instante t.

1) Si la gráfica es una recta, (s(t) = mt + h) el movimiento es rectilíneo y uniforme. Su velocidad es constante y vale m.

- Si la recta es horizontal la posición del móvil no varía. El móvil está quieto, su velocidad es nula (la pendiente vale cero).
- Una recta de pendiente positiva indica que el móvil avanza (velocidad positiva).
- Si la pendiente es negativa, el móvil retrocede (velocidad negativa), con respecto al sentido adoptado para el camino.



2) Supongamos que estamos en presencia de un movimiento rectilíneo variado o no uniforme (la velocidad no es constante). La gráfica de la función que describe ese movimiento es, por ejemplo, la curva:



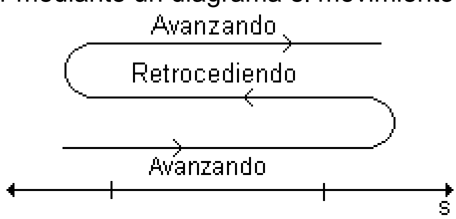
La pendiente de la recta tangente en cada punto es la velocidad instantánea en el instante indicado por la abscisa del punto. Si observamos la figura, la velocidad instantánea es 0 en los instantes t_2 y t_4; es negativa en cualquier instante anterior a t_2 (por ejemplo t_1) o posterior a t_4 (t_6) y es positiva en cualquier instante comprendido entre t_2 y t_4 (por ejemplo t_3). El móvil estaba retrocediendo antes de t_2, allí se detuvo para comenzar a avanzar hasta t_4, instante en el que se detuvo otra vez para comenzar a retroceder.

Cuando se estudia el movimiento rectilíneo puede considerarse que el objeto se desplaza a lo largo de un eje de coordenadas. La posición del objeto desde el origen en los ejes es una función del tiempo t y generalmente se representa como s(t). La razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo es la velocidad v(t) del objeto.

Expresada como derivada, la velocidad es $v(t) = \frac{ds}{dt}$, cuando esta derivada existe.

- Si $v(t) > 0$, se dice que el objeto está avanzando y si $v(t) < 0$, está retrocediendo.
- Si $v(t) = 0$ el objeto no avanza ni retrocede.

Podemos representar mediante un diagrama el movimiento rectilíneo.



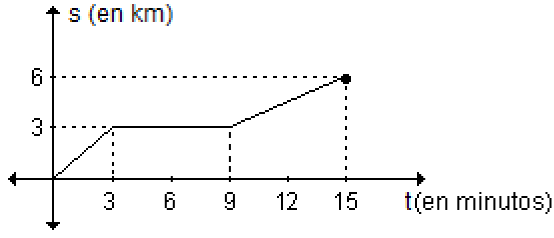
En el caso en que $v(t) \geq 0$ en un intervalo $[t_1, t_2]$, el objeto se mueve en dirección positiva, de modo que el desplazamiento $s(t_2) - s(t_1)$ coincide con la distancia recorrida por el objeto.

Si $v(t) \leq 0$ en un intervalo $[t_1, t_2]$, el objeto se mueve en dirección negativa y el desplazamiento $s(t_2) - s(t_1)$ es el negativo de la distancia recorrida por el objeto.

Si v(t) asume valores tanto positivos como negativos durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, el móvil se mueve hacia adelante y hacia atrás y para determinar la distancia total recorrida deben sumarse las distancias recorridas en cada sentido.

Problema

La siguiente gráfica muestra la posición de un móvil durante un recorrido de 15 minutos.



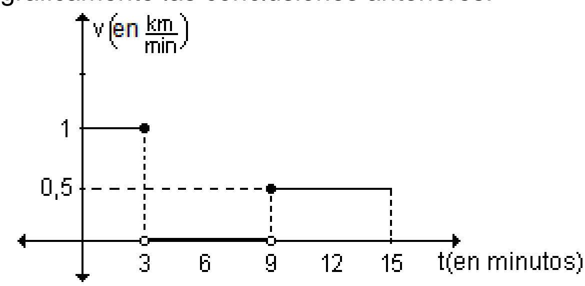
Esboce la gráfica de su correspondiente función velocidad (en $\frac{km}{min}$).

Desde cero hasta los tres minutos, la gráfica corresponde a un segmento de recta y = mx + h. El movimiento es rectilíneo uniforme, significa que el móvil tiene velocidad constante y como la pendiente es positiva, el móvil avanza, por lo que la velocidad es positiva. Como recorrió 3 km en 3 minutos podemos decir que la velocidad es 1 $\frac{km}{min}$.

Desde los tres hasta los nueve minutos el móvil está quieto, ya que el espacio recorrido no varía. La velocidad es nula.

Desde el minuto nueve hasta el quince, el móvil avanza nuevamente con un movimiento rectilíneo y uniforme. El móvil recorre 3 km en 6 minutos y la velocidad es 0,5 $\frac{km}{min}$.

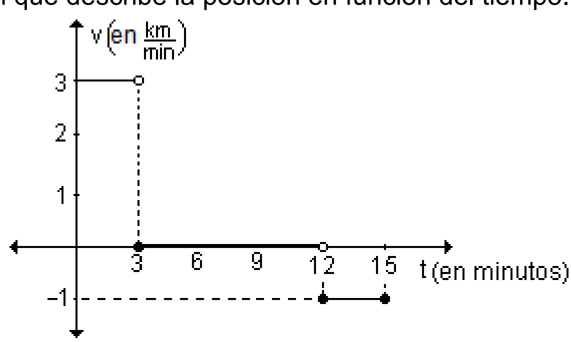
Si representamos gráficamente las conclusiones anteriores:



No hay información sobre lo que ocurre en los extremos de los intervalos. La gráfica es solo una de las posibles respuestas, la que corresponde a considerar que el móvil se mueve hasta los 3 minutos, incluido el mismo, y desde los 9 minutos, también incluido ese instante.

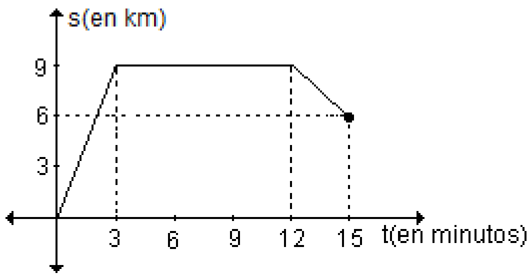
Problema

La función representada gráficamente describe la velocidad en $\frac{km}{min}$ de un móvil durante un trayecto de 15 minutos. Esboce la gráfica de la función que describe la posición en función del tiempo.



Desde cero hasta el minuto tres, el móvil se mueve con velocidad constante de $3\,\dfrac{\text{km}}{\text{min}}$, por lo tanto avanza con un movimiento rectilíneo y uniforme. A los tres minutos habrá recorrido 9 km. Desde los tres hasta los doce minutos, la velocidad es nula, eso significa que el móvil está quieto. En los últimos tres minutos la velocidad es negativa, por lo tanto el móvil retrocede, también con movimiento rectilíneo y uniforme. Como el valor absoluto de la velocidad es 1 $\dfrac{\text{km}}{\text{min}}$, en los tres minutos el móvil retrocede 3 km.

Teniendo en cuenta esta información es posible bosquejar una gráfica que describe la posición del móvil en función del tiempo. No hay información sobre la posición inicial, así que la respuesta no es única. Considerando, por ejemplo, que la posición inicial del móvil es s = 0, resulta:



Problema

La posición de un objeto en movimiento rectilíneo variado está dada por la función $s(t) = t^3 - 12t + 2$, donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) Determine la velocidad del objeto en cada instante t.

b) Halle en qué instantes se detiene el móvil.

c) Analice su movimiento entre los instantes t = 0 y t = 3.

d) Encuentre la posición de la partícula en t = 0, t = 2 y t = 3 y dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula para $0 \le t \le 3$.

e) Calcule la distancia total recorrida por la partícula en ese intervalo.

a) La velocidad con que se mueve el objeto en cada instante t está dada por la derivada de la función que describe la posición del objeto:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^3 - 12(t+h) + 2 - t^3 + 12t - 2}{h}$$

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 12t - 12h - t^3 + 12t}{h}$$

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{3t^2h + 3th^2 + h^3 - 12h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3t^2 + 3th + h^2 - 12\right) = 3t^2 - 12$$

La velocidad del móvil en cada instante t del movimiento es $v(t) = 3t^2 - 12$.

b) Si el móvil se detiene, su velocidad v(t) = 0.

Entonces: $3t^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3t^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2$

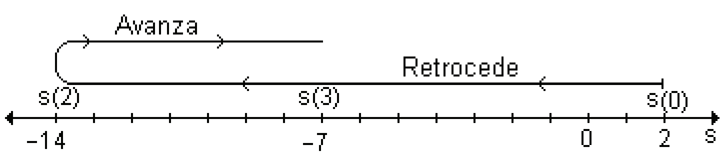
A los dos segundos de iniciado el movimiento, el objeto se detiene.

c) Sabemos que en el instante t = 2 el móvil está detenido. En cualquier otro instante el móvil avanza o retrocede.
Si la velocidad es positiva el móvil avanza, si es negativa, retrocede. Analizamos los signos de v(t) en los intervalos que determina t = 2.

Si se tiene en cuenta que $v(t) = 3t^2 - 12 \Rightarrow v(t) = 3(t-2) . (t + 2)$, resulta:

	$0 < t < 2$	$2 < t < 3$
$3(t - 2)$	–	+
$(t + 2)$	+	+
$V(t) = 3(t - 2) . (t + 2)$	–	+

El móvil retrocede cuando $0 < t < 2$ y avanza cuando $2 < t < 3$.
d) Para encontrar la posición de la partícula en los instantes pedidos, debemos evaluar s(t) para los valores de t dados.
s(0) = 2, en t = 0 la particular se encuentra dos metros a la derecha del punto de referencia s = 0.
s(2) = –14 y s(3) = –7. El resultado negativo significa que la posición de la partícula es a la izquierda del punto de referencia s = 0.



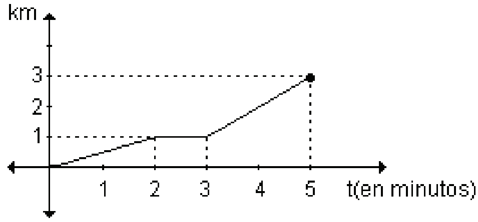
e) Por lo analizado en los incisos c) y d), el objeto se mueve en distintos sentidos, por lo que se deben calcular por separado las distancias recorridas durante los períodos [0, 2] y [2, 3].
El desplazamiento del objeto para $0 \leq t \leq 2$ es $s(2) - s(0) = -14 - 2 = -16$. Este resultado significa que en t = 2 el objeto se encuentra 16 metros más a la izquierda que en t = 0. La distancia recorrida por el objeto en ese intervalo es 16 metros.
La distancia recorrida para $2 \leq t \leq 3$ coincide con el desplazamiento y es:
$s(3) - s(2) = -7 - (-14) = 7$ metros.
La distancia total recorrida en los primeros tres segundos es 16 + 7 = 23 metros.

EJERCICIOS

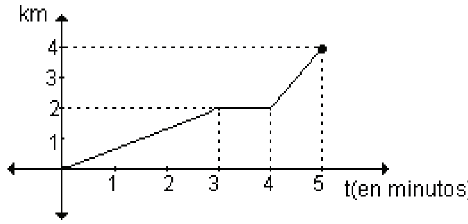
1) Un objeto se desplaza de tal manera que su posición (en metros) desde el inicio del movimiento está dada por $s(t) = t^2 + 5t$ es el tiempo en segundos. Halle la velocidad promedio durante la primera hora y la velocidad a los 10 segundos.
2) Las funciones representadas gráficamente describen la posición de un móvil

en un trayecto de 5 minutos. Esboce las gráficas de sus correspondientes funciones velocidad (en $\frac{km}{h}$).

a)

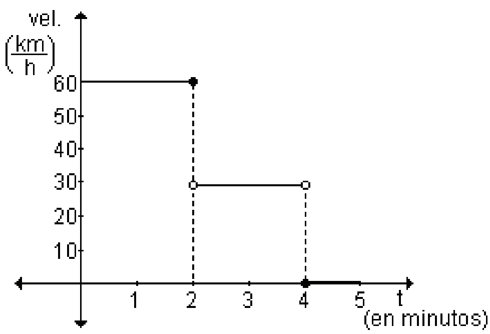


b)

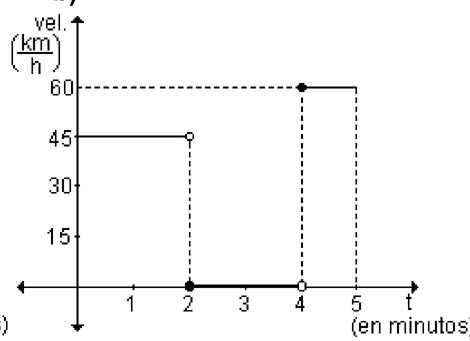


3) Las funciones representadas gráficamente representan la velocidad (en $\frac{km}{h}$) durante un trayecto de cinco minutos. Esboce las gráficas de las funciones posición correspondientes.

a)



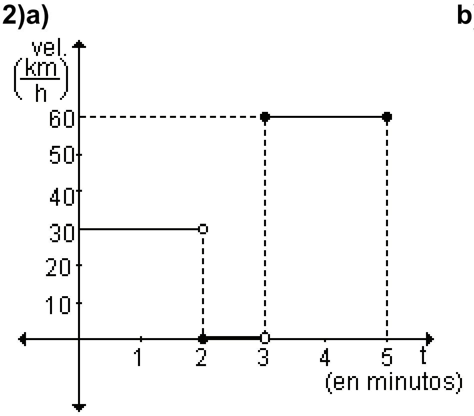
b)



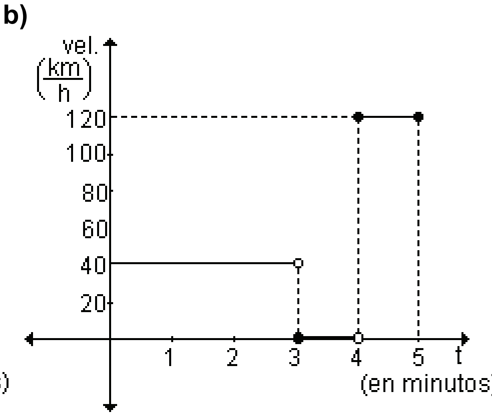
RESPUESTAS

1) La velocidad promedio durante la primer hora es $3605\,\frac{m}{seg}$. La velocidad a los 10 segundos es de $25\,\frac{m}{seg}$.

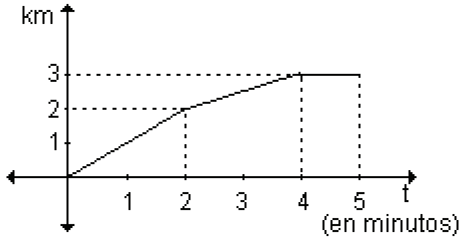
2)a)



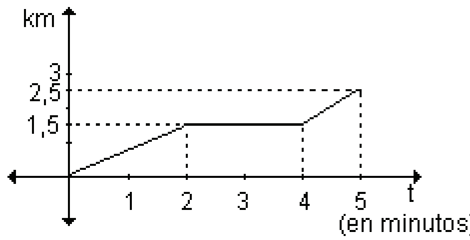
b)



3)a)



b)



4.6 Derivadas laterales

Al definir derivada como el límite del cociente incremental, no se tuvo en cuenta si Δx es positivo o negativo, por lo tanto interpretamos que la definición es válida cualquiera sea el incremento. Sin embargo algunas veces es necesario especificar si x se aproxima a x_1 tomando valores menores o mayores que x_1. Es posible definir dos tipos de derivadas laterales, una por izquierda y otra por derecha.

Definición. Si la función f está definida en x_1, entonces la *derivada lateral por la izquierda* de f en x_1, denotada por $f'\left(x_1^-\right)$, es:

$$f'\left(x_1^-\right) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow f'\left(x_1^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$, si existe el límite.

Definición. Si la función f está definida en x_1, entonces la *derivada lateral por la derecha* de f en x_1, denotada por $f'\left(x_1^+\right)$ es:

$$f'\left(x_1^+\right) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow f'\left(x_1^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$, si existe el límite.

Si las derivadas laterales no son iguales en x_1 la derivada no existe en x_1.

4.7 Derivabilidad y continuidad

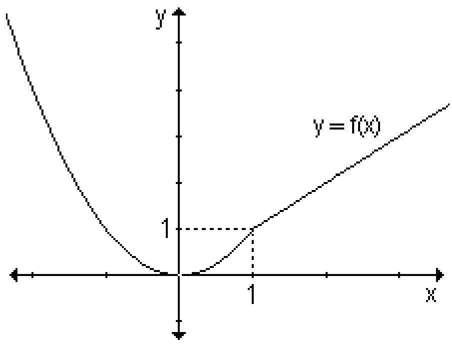
La derivabilidad de una función en un punto y la continuidad de la función en dicho punto están relacionadas. En los siguientes ejemplos se puede observar dicha relación.

Ejemplo. Analice la derivabilidad de la función $f : R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

en $x = 1$.

La función es continua en $x = 1$.

Si construimos la gráfica de la función observamos que en x = 1 las derivadas por izquierda y por derecha son distintas. Las pendientes de las rectas tangentes por derecha y por izquierda no toman el mismo valor. Por lo tanto la función no es derivable en x = 1.



Analíticamente es posible llegar a las mismas conclusiones.
Como la función está definida por tramos y cambia su expresión en x = 1, en ese punto debemos considerar las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{1^2+2.1.h+h^2-1}{h} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{h(2+h)}{h} = 2$$

Por lo tanto $f'(1^-) = 2$.

Este valor es la *derivada lateral por izquierda* e indica que la recta tangente por izquierda de 1 tiene pendiente 2.

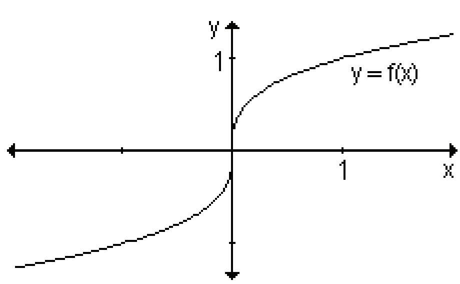
La derivada lateral por derecha en x = 1 se obtiene resolviendo:

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f'(1^+) = 1$$

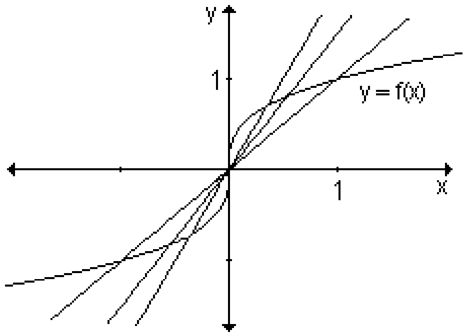
Este valor es la *derivada lateral por derecha* e indica que la recta tangente a la gráfica de la función en x = 1 por derecha tiene pendiente 1.
Al no coincidir las derivadas laterales concluimos que la función no es derivable en x = 1.
La función dada es continua en x = 1 pero no es derivable en dicho punto.

Ejemplo. Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y analice la existencia de la derivada en x = 0.

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua para todo x que pertenece a R. Su gráfica es:



Al intentar trazar la recta tangente en x = 0, vemos que sí existe.



Al ir trazando rectas secantes por derecha y por izquierda de $x = 0$, estas rectas se aproximan a una recta vertical de ecuación $x = 0$, que coincide, en este caso, con el eje de ordenadas.

Por lo tanto la función $y = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $x = 0$.

En los ejemplos anteriores se puede observar que la continuidad no implica la derivabilidad en el punto. Sin embargo, la derivabilidad implica continuidad como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema. Si una función es derivable en x_0 entonces es continua en x_0.
Simbólicamente: f(x) derivable $\Rightarrow$ f(x) continua

Hipótesis: f(x) es derivable en x_0.

Tesis: f(x) es continua en x_0.

Demostración: Si $y = f(x)$ es derivable en x_0, existe $f(x_0)$ ya que esta hipótesis garantiza la existencia de $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Escribimos $f(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0)$

Si $h \neq 0 \Rightarrow f(x_0 + h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.h + f(x_0)$

Si aplicamos límite a ambos miembros resulta:

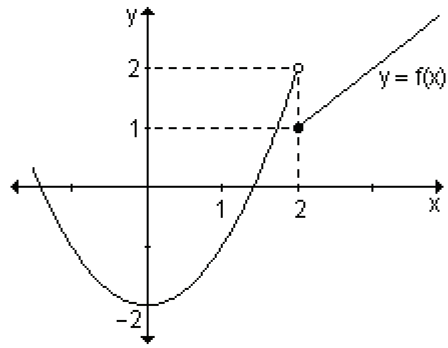
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} f(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f'(x_0).0 + \lim_{h \to 0} f(x_0)$$

Como $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0) = f(x_0)$, entonces: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Luego, $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$.

Observación. No vale el recíproco, es decir que una función sea continua en un punto no implica necesariamente que sea derivable (como se analizó en los ejemplos anteriores).
Sí es válido el contrarrecíproco: si una función no es continua en un punto entonces no es derivable en dicho punto.

Ejemplo. Analice la derivabilidad de la función definida gráficamente.

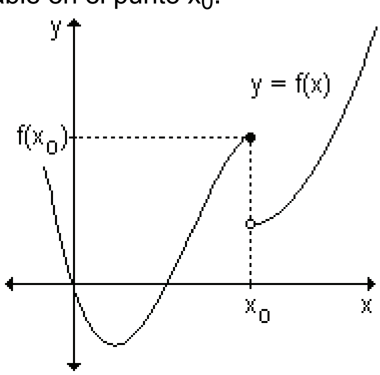


La función definida gráficamente no es continua en $x = 2$, por lo tanto no es derivable en ese punto.

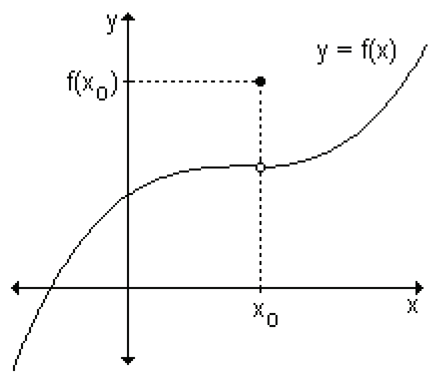
¿En qué puntos una función no es derivable?

- Si una función no es continua en un punto entonces no es derivable en dicho punto. Una función que presenta una discontinuidad (de cualquier tipo) en un punto, no es derivable en ese punto.
- Si la gráfica de una función tiene esquinas o puntos pico, la gráfica de f no tiene tangente en esos puntos ya que las derivadas laterales son distintas.
- Una tercera posibilidad es que la curva tenga recta tangente en un punto pero que sea vertical. En ese caso no existe la derivada en ese punto.

Como resumen se muestran algunos ejemplos gráficos donde la función no es derivable en el punto x_0.

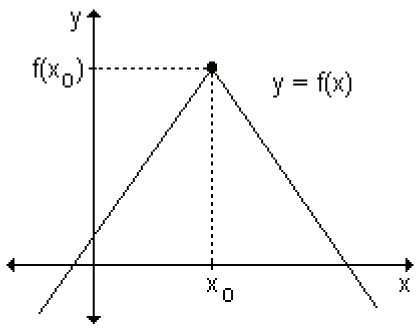


La función no es continua en x_0. A pesar de que x_0 pertenece al dominio no existe la tangente en ese punto. No existe $f'(x_0)$.

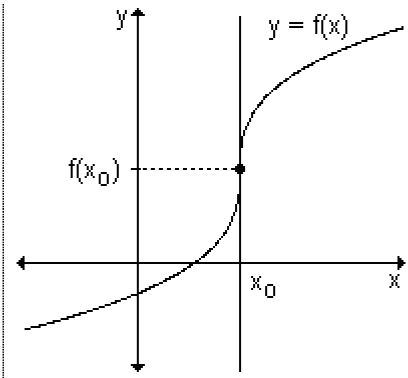


Si bien el punto $x_0 \in D_f$ la función no es continua en él. La gráfica no tiene recta tangente en $(x_0, f(x_0))$. No existe $f'(x_0)$.

Si la función no es continua en un punto x_0 la función no es derivable en ese punto. No existe $f'(x_0)$.



La función es continua en x_0 pero no presenta tangente en el punto de abscisa x_0. No existe $f'(x_0)$ (existen las derivadas laterales por izquierda y por derecha en x_0 pero son distintas). En x_0 existe un punto pico.

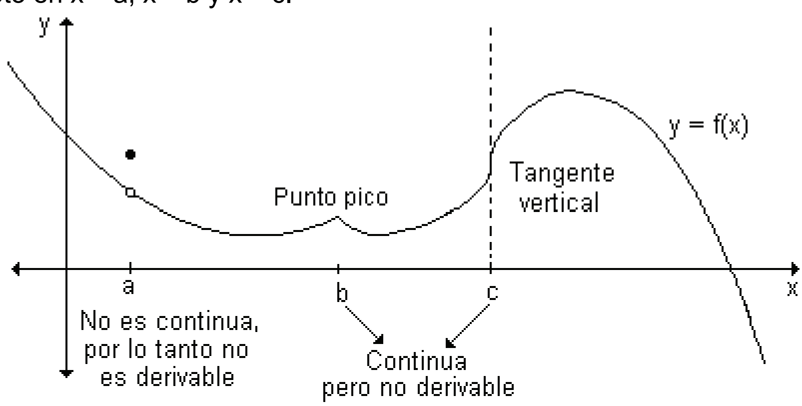


Se puede observar en la gráfica que la función tiene tangente vertical en el punto $(x_0,\ f(x_0))$. Su pendiente no está definida y, por lo tanto, no existe $f'(x_0)$. La función es continua en x_0.

Si una función es continua en un punto x_0 esto no asegura que sea derivable.

Una función $y = f(x)$ es derivable en cierto valor de x si su gráfica es "suave" en el punto correspondiente (x, y). Es derivable si en dicho punto la gráfica tiene una tangente bien definida con una pendiente bien definida. Para que esto ocurra la función debe ser continua en el punto y deben existir y ser iguales las derivadas laterales en dicho punto.

La siguiente gráfica corresponde a una función derivable en todo su dominio excepto en $x = a$, $x = b$ y $x = c$.



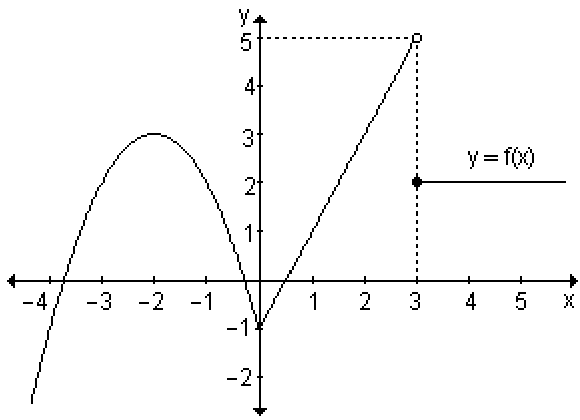
4.8 Derivabilidad de una función en un intervalo

Sabemos que una función es derivable en $x = x_1$ si $f'(x_1)$ existe.

Una función es derivable en un intervalo abierto (finito o infinito) si tiene derivada en cada punto del intervalo.

Una función es derivable en un intervalo cerrado [a, b] si es derivable en el intervalo abierto (a, b) y si los límites $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (derivada en a por derecha) y $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$ (derivada en b por izquierda) existen.

Ejemplo: Dada la función definida gráficamente, analice la derivabilidad.



En x = 0 la función tiene un punto pico ya que las derivadas laterales son distintas. La función no es derivable en x = 0.
En x = 3 la función es discontinua, por lo tanto no es derivable en ese punto.
En los demás valores del dominio la función es derivable, ya que es posible trazar la tangente en cualquier punto y definir su pendiente.

Ejemplo. Analice la derivabilidad de $f : R \to R \,/\, x \to \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si} \quad x \le 4 \\ 5x - 16 & \text{si} \quad 4 < x \le 6 \\ 14 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$

Cada tramo de la función está definida por una expresión polinomial. Esto permite asegurar que la función es continua y derivable en todo su dominio, excepto quizás en x = 4 y en x = 6.
También se puede probar que la función es continua en los puntos en los que cambia la ley que define la función, es decir, en x = 4 y en x = 6.
Analicemos la derivabilidad en esos valores. Para ello es necesario analizar si las derivadas laterales existen y son iguales. Recordemos que:

$$f'\left(x_1^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad \text{y} \quad f'\left(x_1^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

Para x = 4 resulta: $f'(4^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

Teniendo en cuenta que $f(4) = 4^2 - 3.4 = 4$, obtenemos:

$$f'(4^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(4+h)^2 - 3(4+h) - 4}{h}$$

$$f'(4^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{4^2 + 2.4.h + h^2 - 12 - 3h - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5h + h^2}{h}$$

$$f'(4^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(5+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} 5 + h = 5 \Rightarrow f'(4^-) = 5.$$

$$f'(4^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$f'(4^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{5(4+h) - 16 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{20 + 5h - 16 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{5h}{h}$$

$$f'(4^+) = \lim_{h\to 0^+} 5 = 5 \Rightarrow f'(4^+) = 5.$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en $x = 4$.

Para $x = 6$, el valor de la función es $f(6) = 5.6 - 16 = 14$ y las derivadas laterales:

$$f'(6^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5(6+h) - 16 - 14}{h}$$

$$f'(6^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{30 + 5h - 16 - 14}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 5 = 5.$$

$$f'(6^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{14 - (5.6 - 16)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$

Debido a que las derivadas laterales $f'(6^-) = 5$ y $f'(6^+) = 0$ son distintas, la función no es derivable en $x = 6$.
El dominio de la función derivada $f'(x)$ es $R - \{6\}$.

Ejemplo. Sea $f : R \to R \,/\, x \to \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 3 \\ ax + b & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Determine los valores de a y b para que sea derivable en todos sus puntos. Para dichos valores grafique la función.

Para valores menores que 3 la representación gráfica es “suave” ya que es una expresión polinomial de segundo grado, por lo tanto la función es derivable en esos puntos. Para valores mayores que 3 ocurre lo mismo pues es una expresión polinomial de primer grado. Para que resulte derivable en $x = 3$ deberá verificar:

- ser continua en $x = 3$, es decir:

$$\lim_{x\to 3^-} x^2 = \lim_{x\to 3^+} ax + b \Rightarrow 3^2 = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 9 \quad \textbf{(*)}$$

• sus derivadas laterales en $x = 3$ deben ser iguales, o sea $f'(3^-) = f'(3^+)$.

Para ello: $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$f(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3^2+2.3.h+h^2-3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} 6+h = 6 \Rightarrow f'(3^-) = 6.$$

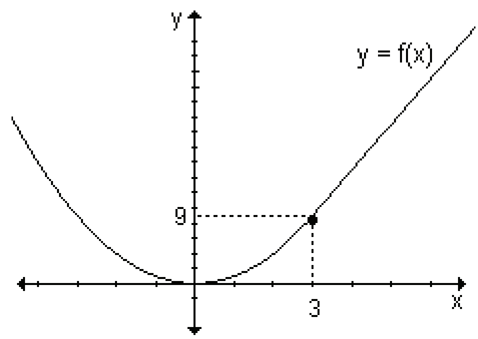
$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(3+h)+b-9}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3a+ah+b-9}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(3a+b)+ah-9}{h} \underset{\text{por (*)}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{9+ah-9}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h} = a \Rightarrow f'(3^+) = a.$$

Como debe ser $f'(3^-) = f'(3^+)$, entonces $a = 6$.

Reemplazando este valor de a en **(*)** resulta: $3.6 + b = 9 \Rightarrow b = -9$.

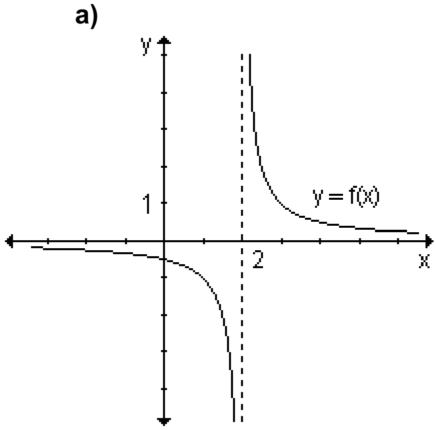
Por lo tanto la función f(x) se define por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 3 \\ 6x-9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ y su gráfica es:



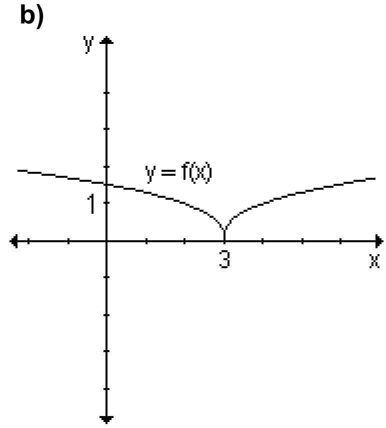
EJERCICIOS

1) Halle todos los puntos en los que la función f(x) es derivable:

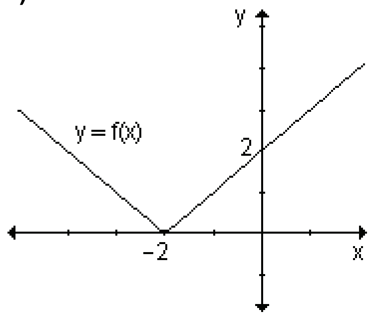
a)



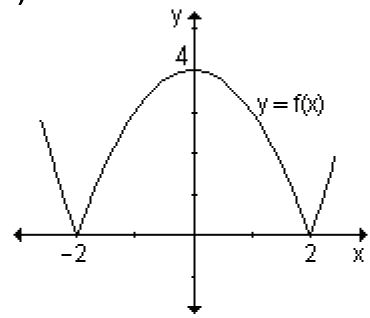
b)



c)



d)



2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ definida en el intervalo [0, 2]. ¿Es derivable en $x = 1$? ¿Por qué?

3) Sea la función $g: R \to R \,/\, g(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x < 2 \\ 4x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ ¿Es derivable en $x = 2$? ¿Por qué?

RESPUESTAS

1)a) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ **b)** $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

c) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ **d)** $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

2) La función no es continua en $x = 1$, por lo tanto no es derivable en ese punto.

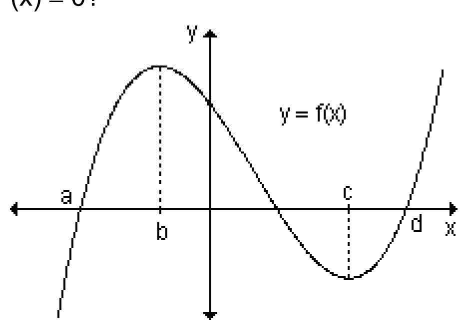
3) La función es continua y admite derivadas laterales, que además son iguales, por lo tanto $g(x)$ es derivable en $x = 2$.

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.4 CONCEPTO DE DERIVADA. 4.5 FUNCIÓN DERIVADA. 4.6 DERIVADAS LATERALES. 4.7 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD. 4.8 DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

1) Halle, aplicando la definición, la primera derivada de cada función:

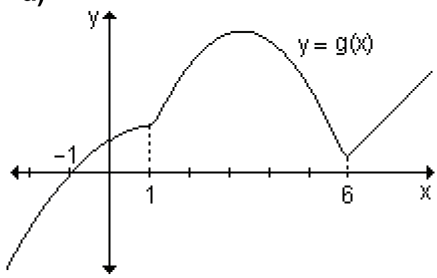
a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = 5x - 2$

2) Sea la función $y = f(x)$ definida gráficamente. ¿Para qué valores de x, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f'(x) = 0$?

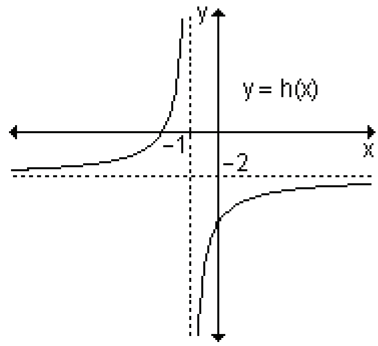


3) ¿Para qué valores de x las funciones definidas gráficamente no son derivables? Justifique.

a)



b)



4) Sea $m: [-1, 3] \to R \,/\, m(x) = \dfrac{1}{x-2}$. ¿Es derivable en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$?

5) Determine si existe la derivada de $f : R \to R /\ f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 + 3x + 7 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

6) La posición de un objeto en un movimiento rectilíneo está dada por la función $s(t) = t^2 - 4t + 4$, donde t se mide en segundos y $s(t)$ en metros.

a) Encuentre la velocidad de la partícula en cada instante t.

b) Analice el movimiento del objeto en el intervalo $[0, 4]$ y dibuje el diagrama que represente el movimiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 4$.

c) Encuentre la posición de la partícula en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$

d) Halle la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cuatro segundos.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Un cuerpo que cae recorre una distancia $d = f(t) = 16t^2$ pies en t segundos.

a) Calcule los pies que cae durante el segundo segundo (es decir, en el intervalo $t = 1$ a $t = 2$). Obtenga la velocidad promedio en dicho intervalo.

b) Realice los mismos cálculos para el intervalo $t = 1$ a $t = 1{,}5$.

c) De manera análoga, obtenga la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 1{,}1$; de $t = 1$ a $t = 1{,}01$ y luego para el de $t = 1$ a $t = 1{,}001$.

d) Cuanto más pequeño es el intervalo, mejor es la aproximación a la verdadera velocidad en el instante $t = 1$. Teniendo en cuenta lo obtenido en los ítems anteriores, ¿cuál es dicha velocidad? Verifique ese valor calculando la velocidad instantánea en $t = 1$.

2) Un objeto se desplaza de manera tal que su posición es $s(t) = 2t^2 + 2$ metros después de t segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?

b) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo $2 \leq t \leq 2{,}001$?

c) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo $2 \leq t \leq 2 + h$?

d) Determine la velocidad instantánea para $t = 2$.

3) En el año 1994, un pueblo tenía 15000 personas y creció de acuerdo a la expresión $N(t) = 15000 + 25t^2$ donde el tiempo t está medido en años posteriores a 1994.

a) Halle la velocidad media de crecimiento hasta 1999 .

b) Determine la velocidad instantánea de crecimiento en 1997.

4) Un negocio está prosperando de manera tal que su beneficio total después de t años está dado por $b(t) = 1000\, t^2$ dólares.

a) ¿Cuánto producirá el negocio durante el tercer año (entre $t = 2$ y $t = 3$)?

b) ¿Cuál es su ganancia promedio durante el primer semestre del tercer año (entre $t = 2$ y $t = 2{,}5$)?

c) ¿Cuál es la ganancia instantánea para $t = 2$?

5) La población de una ciudad crece de manera tal que la cantidad de personas está dada por $p = f(t) = 200\sqrt{5t + 1}$ una vez transcurridos de t años.

a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $3 \leq t \leq 3{,}1$?

b) ¿Cuál fue el crecimiento medio durante el intervalo $3 \leq t \leq 3{,}1$?

c) ¿Cuál fue su razón de crecimiento instantáneo cuando $t = 3$?

6) La cantidad de agua de un tanque, t minutos después de que ha empezado a vaciarse, está dada por $W = 100(15 + t)^2$ litros.

a) ¿Con qué rapidez sale el agua a los de 5 minutos?

b) ¿Cuál es la rapidez promedio con la que fluye el agua durante los primeros 5 minutos?

7) Se lanza una pelota al aire y su altura puede expresarse en función del tiempo mediante la función $h(t) = -16t^2 + 128t$, donde h(t) es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

a) Calcule los pies que recorre en el intervalo comprendido entre $t = 2$ y $t = 4$. Obtenga la velocidad promedio en dicho intervalo.

b) Obtenga la velocidad media de los 5 primeros segundos de recorrido.

c) Determine los segundos que demora en caer al suelo y la velocidad con que la pelota impacta contra el mismo.

8) En el siguiente cuadro se presentan las ventas anuales (en millones de dólares) realizadas por una empresa entre los años 1993 y 1996.

Año	1993	1994	1995	1996
Ventas anuales	\$ 50,8	\$ 55,4	\$ 59,8	\$ 66,4

Determine el incremento promedio de las ventas entre 1993 y 1995, entre 1994 y 1995 y entre 1993 y 1996.

9) La función $h = f(t) = 2{,}5\, t^3$ describe la altura h (en miles de pies) de un misil t segundos después de haber sido lanzado, siendo $0 \leq t \leq 30$.

a) Determine la distancia recorrida por el misil entre el primer y quinto segundos posteriores a su lanzamiento y calcule la velocidad promedio en dicho intervalo.

b) Obtenga la velocidad que llevaba a los cinco segundos de haber sido lanzado.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1) Sea $d(t) = 18t^2 + 24t$, con $0 \leq t \leq 4$, (en kilómetros) la distancia recorrida por un automóvil en t horas. La velocidad promedio en la segunda hora de viaje es:

a) 78 km **b)** $78\ \frac{km}{h}$ **c)** $120\ \frac{km}{h}$ **d)** $60\ \frac{km}{h}$

2) Sea la función $y = x^2 - 9$. La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 1$ es:

a) $y = 2x - 10$ **b)** $y = 2x + 10$ **c)** $y = \frac{1}{2}x - 10$ **d)** $y = -2x - 10$

3) La razón de cambio promedio de una función en un intervalo [a, b] coincide con:

a) la pendiente de la recta tangente en $x = a$.

b) la pendiente de la recta secante que une los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$.

c) la recta tangente en $x = a$.

d) la recta secante que une los puntos de abscisas en $x = a$ y $x = b$.

4) La razón de cambio instantánea en el punto de abscisa $x = x_0$ es:

a) la pendiente de la recta tangente en $x = x_0$.

b) la pendiente de la recta secante en $x = x_0$.

c) la recta tangente en $x = x_0$.

d) la recta secante en $x = x_0$.

5) Cierto cultivo de bacterias crece de manera tal que luego de t horas tiene una masa de $M = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)$ gramos. La razón de crecimiento instantáneo en $t = 2$ es:

a) $3\ \frac{gr.}{h}$ **b)** $2\ \frac{gr.}{h}$ **c)** $1\ \frac{gr.}{h}$ **d)** ninguno de los anteriores

6) La función $f : R \to R \,/\, x \to \begin{cases} 1 + 2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ es:

a) continua y derivable en $x_0 = 2$.

b) continua pero no derivable en $x_0 = 2$.

c) derivable pero no continua en $x_0 = 2$.

d) ni continua ni derivable en $x_0 = 2$.

AUTOEVALUACIÓN

1) En la siguiente tabla t representa el tiempo en minutos y c(t) la concentración expresada en $\frac{mg}{cm^3}$ de un fármaco en el torrente sanguíneo.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
C(t)	0,84	0,89	0,94	0,98	1	1	0,97	0,9	0,79	0,63	0,4

Halle la razón de cambio promedio entre 0,5 y 1 minuto. Interprete el resultado.

2) Una epidemia de gripe se está propagando y los funcionarios del ministerio de salud estiman que el número de personas que se contagiarán es una función del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia.

Esta función es $n = f(t) = 300t^3 - 20t^2$ donde n es el número de personas y t es el tiempo medido en días, donde $0 \leq t \leq 60$.

a) ¿Cuántas personas se espera que se contagien al cabo de 20 días?

b) ¿Cuál es la tasa promedio que se espera a que la epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 15$?

c) ¿Cuál es la tasa instantánea que se espera a que la enfermedad se propague al cabo de 25 días?

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$:

a) ¿es continua en $x = -1$?

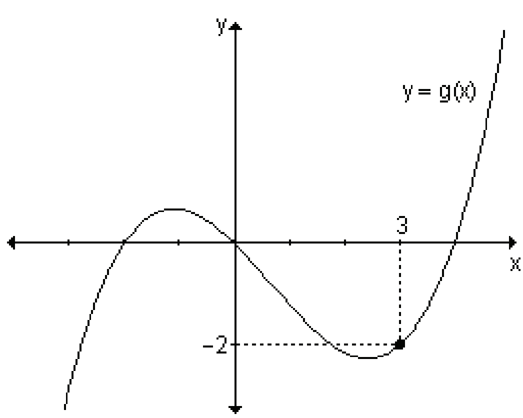
b) ¿es derivable en $x = -1$?

Justifique las respuestas.

4) Determine los valores de a y b tales que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea derivable en 1.

5) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 5x + 1$ en el punto $P(1, -3)$.

6) Se sabe que la función $y = g(x)$ definida gráficamente satisface que $g'(3) = \frac{1}{2}$, ¿puede encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 3$? En caso afirmativo, hállela.



7) Una persona viaja en automóvil. La distancia recorrida d (en kilómetros) se describe en función del tiempo t (en horas) por la ley $d(t) = 20t^2 + 18t$, donde

$0 \leq t \leq 5$.

a) Halle la velocidad promedio en la primera hora.

b) Calcule la velocidad promedio durante todo el viaje.

c) Determine la velocidad del automóvil a las tres horas.

8) La función $e(t) = t^3 - t^2 + 1$ expresa la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta en el minuto t. Determine el minuto $t \in (0, 3)$ en el cual la velocidad coincide con la velocidad media en $[0, 3]$.

9) En un laboratorio se realiza un experimento con bacterias. Después de t horas la cantidad de bacterias es $n = f(t)$.

a) ¿Qué significa la expresión $f(5) = 960$?

b) ¿Qué significa la expresión $f'(5) = 665$? ¿En qué unidad se expresa este resultado?

EJERCICIOS DE REPASO

1) Sea la función $g(x) = x^2 - 2x$.

a) Halle la razón de cambio media cuando x cambia de $x_0 = -1$ a $x_1 = 2$.

b) Determine la ecuación de la recta secante que une los puntos de abscisas $x_0 = -1$ y $x_1 = 2$.

c) Obtenga la razón de cambio instantánea en $x = 1$.

d) Halle la ecuación e la recta tangente en $x = 1$.

2) Sea la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Halle la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 4$.

3) Analice la derivabilidad de la función $m : [-4, 2] \to R / x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

4) Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique la respuesta.

a) Si $f'(x) = g'(x)$ para todo x, entonces $f(x) = g(x)$ para todo x.

b) Si existe $f'(c)$ entonces f es continua en c.

5) Derive las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $h(x) = x^2 + 4x$ **b)** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$

c) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ **d)** $g(x) = \dfrac{3x - 2}{2x + 4}$

6) Calcule por definición la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 3x$ en $x_0 = 0$ **b)** $f(x) = x^3$ en $x_0 = -2$ **c)** $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en $x_0 = 1$

7) Teniendo en cuenta los gráficos siguientes responda:

a) ¿existe la derivada primera por izquierda en x_0?

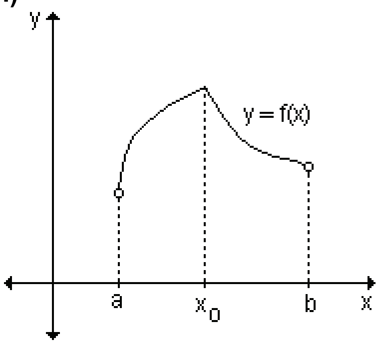
b) ¿existe la derivada primera por derecha en x_0?

c) ¿existe la derivada primera en x_0?

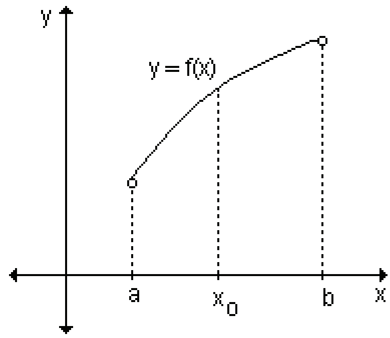
d) el dominio de la función coincide con el de su derivada? Justifique.

e) determine si es posible, el signo de la función derivada en todo el intervalo de definición de la función.

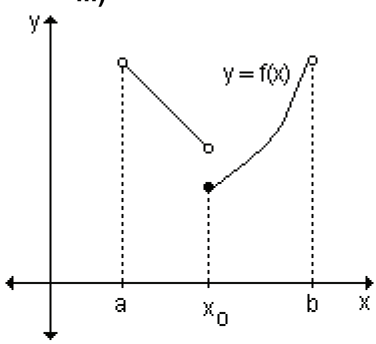
i)



ii)



iii)



iv)