Capítulo 5

Funciones

5.1. El concepto de función

En matemática, una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B. Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único valor que pertenece al conjunto B, al cual denotamos por $f(x)$. Escribimos:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Lo anterior se lee "f es una función de A en B". En el renglón de abajo se indica qué valor de B se le asigna a cada $x \in A$, y $f(x)$ se lee "f de x". El conjunto A se llama **dominio** de f o **conjunto de partida**, mientras que B se llama **conjunto de llegada**.

Por ejemplo, supongamos que en un empleo se paga \$150 por cada hora que se trabaja. Entonces la regla

$$x \mapsto 150x$$

es una función que nos dice el salario obtenido al trabajar x horas. Este salario depende, obviamente, de la cantidad de horas trabajadas, lo que se expresa también como "el salario es función de las horas trabajadas".

En forma general, se dice que **una cantidad y es función de otra cantidad x**, si el valor de la primera depende del valor que tome la segunda. Para simbolizar esto se escribe

$$y = f(x).$$

Para indicar en palabras lo anterior, decimos:

y es la **imagen** de x a través de f.

El significado de ambas expresiones es el mismo: que y es el resultado de aplicar la regla f a un determinado valor x. Por eso decimos que x es la **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente**, ya que su valor depende del valor que tome x.

Para fijar estos conceptos, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 137. **Evaluando una función.** Consideremos la regla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Es decir, la función f que va de los reales en los reales, tal que a cada x real le asigna su cuadrado x^2. En la siguiente tabla, vamos a calcular la imagen a través de esta función de algunos valores del dominio de f:

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$
2	$2^2 = 4$
5	$5^2 = 25$

«

En la definición de "función" hay dos condiciones que no deben pasarse por alto: **existencia y unicidad de imagen**. Esto significa que para cada valor x en el dominio debe **existir** un **único** valor en el conjunto de llegada que sea imagen de x. Para ilustrarlo, supongamos que hay un concurso de baile, y tenemos el conjunto A formado por los jurados, y el conjunto B formado por los participantes del concurso. Cada jurado vota por quién piensa que debería ser el ganador:

$$\text{jurado} \mapsto \text{participante elegido.}$$

Pero existe una condición: no se puede votar en blanco o no votar, ni se puede elegir a dos candidatos. Es decir, cada jurado debe elegir un único ganador del concurso. Votar en blanco (o no votar) representa la no existencia de imagen, mientras que elegir a dos candidatos significa la no unicidad de ella. El requisito establecido sobre el voto es lo que convierte a la relación "elección de ganador" en una función.

Ejemplo 138. **No es función.** Sea $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Podemos determinar si es o no función? No, no podemos porque la definición está incompleta, ya que la fórmula sola no es suficiente. Para definir una función hay que indicar además su dominio y conjunto de llegada. Esto puede cambiar la decisión, como veremos a continuación. Sean

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Las asignaciones f y g se definen mediante la misma fórmula, pero tienen distintos dominios, por lo tanto, son distintas. De hecho, como veremos ahora, f no es función, mientras que g sí lo es. En efecto, f no es función porque para algunos elementos del dominio no existe imagen en el conjunto de llegada:

$$f(-4) = \sqrt{-4} \rightsquigarrow \text{ no existe en } \mathbb{R}.$$

Lo mismo ocurre con cualquier otro número negativo, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en los reales. Al no cumplir una de las dos condiciones, en este caso la existencia de imagen, f no es función. Sin embargo, para cada número no negativo x, el símbolo $\sqrt{x}$ denota al único real no negativo r que satisface $r^2 = x$. Por lo tanto g sí resulta ser función. «

Como vimos en el ejemplo anterior, explicitar el dominio es parte importante al momento de definir una función. Sin embargo, existe una **convención** sobre dominios cuando el mismo no esté dado, y consiste en tomar como dominio el mayor conjunto de números reales x para los cuales $f(x)$ es también un número real. Utilizamos

$$\mathrm{Dom}(f) \qquad \text{o} \qquad \mathrm{D}_f$$

para denotar el dominio de una función f.

Ejemplo 139. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de la función definida por $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

Solución: Debido a la convención mencionada, el dominio son todos aquellos valores de x tales que $\sqrt{2x-5}$ sea un número real. Puesto que la raíz cuadrada está definida para números mayores o iguales que cero, queremos que todo el radicando lo sea. Es decir, $f(x)$ está definida si y solo si

$$2x - 5 \geq 0.$$

Esta inecuación es equivalente a $x \geq \frac{5}{2}$. Es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. «

Ejemplo 140. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

Solución: Para que la función g esté definida necesitamos dos condiciones: que el radicando involucrado no sea negativo, y que el denominador no sea cero. Esto se traduce en

$$4 - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 \neq 0.$$

Es claro que la última condición se cumple siempre que $x \neq 1$. Con respecto a la primera, resolviendo tenemos que

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow 2 \geq |x| \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Por lo tanto $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2] - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, 2]$. «

Se dice que una función f es **polinómica** si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

es decir, si la expresión que la define es un polinomio.

Notar que si f es una función polinómica, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para entender el próximo concepto a definir, volvamos a la función f dada en el Ejemplo 137, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = x^2$. Nos preguntamos si, por ejemplo, el número -4 es imagen de algún real x. En otras palabras, ¿existe algún número x real tal que su cuadrado sea igual a -4? Claramente la respuesta es **no**, pues al elevar al cuadrado cualquier número se obtiene como resultado otro número positivo o cero. Luego, no todo elemento en el conjunto de llegada es imagen de algún elemento en el dominio. Todos los que sí son imágenes de algún elemento del dominio, se coleccionan en un conjunto llamado **imagen** del dominio bajo f, el cual se denota y define formalmente como

$$\mathrm{Img}(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\},$$

siendo f una función definida de A en B. De la definición se sigue que la imagen está contenida en el conjunto de llegada. Resumiendo:

Dominio de f: todos los valores x tales que $f(x)$ está definida,

Imagen de f: todos los posibles resultados al efectuar $f(x)$.

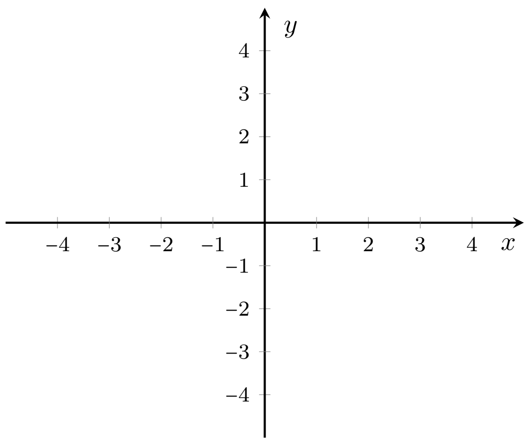
Ejemplo 141. Algunas imágenes. Por lo mencionado arriba, para la función f del Ejemplo 137 tenemos que

$$\mathrm{Img}(f) = [0, \infty).$$

En el ejemplo del concurso de baile, la imagen se forma con todos los participantes que recibieron algún voto. Los que no recibieron ningún voto, son parte del conjunto de llegada pero no de la imagen de la función "elección de ganador", ya que no existe un jurado (en este caso son quienes forman el dominio) que haya votado por ellos. ☹

Para funciones polinómicas, existen infinitas posibilidades para la imagen, que dependerán de cada caso en particular. «

Hasta ahora hemos representado funciones mediante su ecuación, es decir, dando la expresión que la define. Otra forma de representar una función es mediante su gráfica. Para ello, necesitamos primero el concepto de **ejes cartesianos** o **coordenados**, que son simplemente un par de rectas numéricas perpendiculares que nos permitirán ubicar puntos en el plano:



Ejes cartesianos.

La recta horizontal se llama **eje $\boldsymbol{x}$** o **eje de las abscisas**, mientras que la recta vertical recibe el nombre de **eje $\boldsymbol{y}$** o **eje de las ordenadas**. Llamaremos **origen** de coordenadas al punto donde se cruzan las dos rectas, que corresponde al cero en ambas direcciones. A la izquierda del origen, en el eje de las abscisas, se encuentran los valores negativos, y a la derecha los positivos. En el eje de las ordenadas, hacia arriba del origen se encuentran los valores positivos y hacia abajo, los negativos.

Un punto en el plano se localiza con un **par ordenado** de valores (x, y) llamados **coordenadas**, siendo el número x la **abscisa** del punto, y el número y su **ordenada**. Luego, la primera componente del par se localiza en el eje de las abscisas, y la segunda en el eje de las ordenadas. Al trazar las paralelas a cada uno de los ejes desde esos puntos, las líneas resultantes se intersecan[*] en un punto que es el lugar buscado.

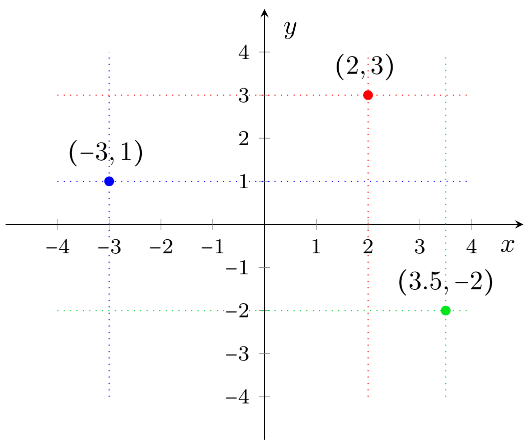
La primera coordenada de un punto indica el desplazamiento horizontal desde el origen de coordenadas (hacia la derecha si es positiva, o hacia la izquierda si es negativa), mientras que la segunda indica el desplazamiento vertical (hacia arriba si es positiva, o hacia abajo si es negativa). El origen representa al punto de coordenadas $(0, 0)$, el cual suele denotarse con la letra O.

[*] Dos curvas se intersecan si se cortan entre sí.

Ejemplo 142. **Ubicando puntos en el plano.** Representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos

$$P = (2, 3), \quad Q = (-3, 1) \quad \text{y} \quad R = (3.5, -2).$$

Solución: Para ubicar al punto P vamos hasta el 2 en el eje x y trazamos una recta paralela al eje y allí. Luego hacemos lo mismo en el valor 3 sobre el eje y (ahora la recta será paralela al eje x), y donde se cortan ambas rectas se ubica el punto P (en color rojo en el gráfico siguiente). Los otros dos puntos los ubicamos de la misma forma (azul para el punto Q y verde para R).

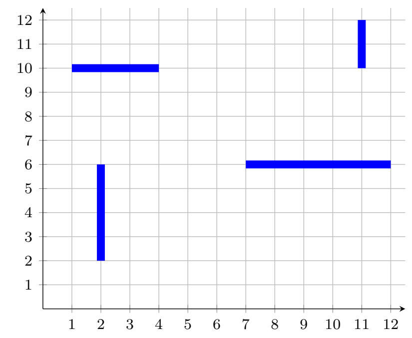


«

Así, a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto en el plano, y recíprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par ordenado determinado por su posición.

En GeoGebra, un punto se ingresa escribiendo en el campo de entradas su nombre y coordenadas, por ejemplo P=(2,3). Desde el menú gráfico, también es posible agregar un punto seleccionando la herramienta A y haciendo clic en algún lugar de la vista gráfica. El software nos dará las coordenadas del punto ingresado.

Ejemplo 143. **Batalla naval.** La “Batalla naval” es un juego de estrategia que consiste en destruir la flota de nuestro adversario a través de misiles, los cuales serán dirigidos por medio de coordenadas. Cada competidor deberá ubicar en un sistema de ejes una cierta cantidad de naves, las cuales pueden ocupar 2, 3, 4, o 5 casillas, según el tipo de embarcación que sea. Para ello dispondrá de una grilla, de la cual solamente puede usar valores enteros para ambas coordenadas, entre 1 y 12 (este rango es arbitrario, para poner algún límite), y las naves no pueden ubicarse en diagonal ni tocarse dos en el mismo sentido. El objetivo es hundir todas las naves del rival, acertando misiles en cada una de las casillas ocupadas por cada nave. En el siguiente gráfico ubicamos 4 naves para ilustrar la situación.



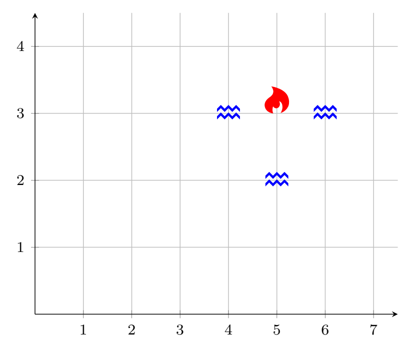
Cuando un misil acierta una nave rival, el participante a cargo de esa flota debe decir "Tocado", y cuando todas las casillas ocupadas por la nave fueron tocadas por un misil, debe decir "Tocado y hundido". Si un misil no impacta en ninguna nave, debe decir "Agua".

Supongamos que se tiene la siguiente situación:

- Un misil lanzando a la posición $(5,3)$ da como resultado "Tocado".
- Misiles en las posiciones $(6,3)$, $(4,3)$ y $(5,2)$ dan en "Agua".

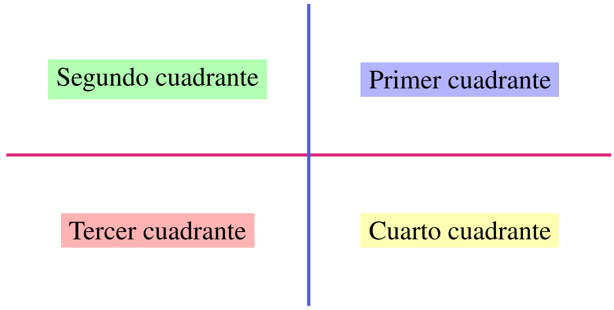
¿Dónde deberá lanzarse el próximo misil para asegurar que se volverá a tocar la nave?

Solución: La situación se ilustra como sigue:



Por lo tanto, para asegurarnos de que el próximo misil toque a la nave, el disparo deberá dirigirse a la posición $(5,4)$.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, como se indica en el siguiente gráfico:



Entonces, el signo que posean las coordenadas de un punto determina la posición en los cuadrantes:

- **Primer cuadrante:** abscisa positiva y ordenada positiva.
- **Segundo cuadrante:** abscisa negativa y ordenada positiva.
- **Tercer cuadrante:** abscisa negativa y ordenada negativa.
- **Cuarto cuadrante:** abscisa positiva y ordenada negativa.
- **Eje horizontal:** ordenada cero, cualquier abscisa.
- **Eje vertical:** abscisa cero, cualquier ordenada.

Si f es una función con dominio es un subconjunto A de los números reales, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, para $x \in A$:

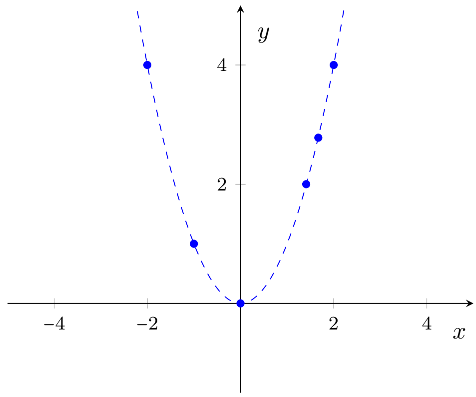
$$\text{gráfica de } f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}.$$

Un método para dibujar la gráfica de una función f es representar suficientes puntos de manera que se pueda sospechar cuál es la forma de la gráfica. Entonces se unen los puntos marcados con una línea. En las secciones siguientes veremos que para ciertas funciones podemos identificar la forma de antemano, de acuerdo a la ecuación que la define. En esos casos, esbozar el gráfico de la función es más rápido y sencillo.

Ejemplo 144. **Esbozando el gráfico de una función mediante puntos.** Retomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ dada en el Ejemplo 137. Allí hicimos una tabla con las imágenes correspondientes a algunos valores del dominio. Esto nos generó los siguientes pares ordenados:

$$(-2, 4), \quad (-1, 1), \quad (0, 0), \quad \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{25}{9}\right), \quad (\sqrt{2}, 2), \quad (2, 4), \quad (5, 25).$$

En el gráfico siguiente representamos estos puntos. Si agregamos varios puntos más, podemos esbozar la forma de la gráfica de la función, que corresponde a una *parábola*, la cual marcamos con línea punteada. Las parábolas serán estudiadas en detalle en la Sección 5.5.



«

Hasta ahora vimos cómo representar gráficamente una función, pero es fundamental en este punto comprender la información que nos brinda. Teniendo la gráfica, para conocer el valor de la función en un valor x cualquiera del dominio, es suficiente con "caminar" sobre el eje horizontal hasta llegar a dicho valor, y "mirar" hacia arriba o hacia abajo, hasta encontrar el gráfico de la función (la existencia y unicidad de la imagen asegura que el gráfico se encuentra, y que se encuentra una única vez). La altura a la que se halla el punto que encontramos al "mirar", corresponde al valor de f en x (será positivo si la gráfica queda hacia arriba del eje horizontal, o negativo si queda hacia abajo).

Ejemplo 145. **Interpretando el gráfico de una función.** Supongamos que el gráfico en la Figura 5.1 representa los registros de la presión arterial (en milímetros de mercurio, denotados como mmHg) de un paciente durante un período de tiempo medido en horas*. En el eje horizontal se representan las horas transcurridas desde su internación, y en el vertical, la presión del paciente en cada instante de tiempo (en mmHg)†. Las mediciones comienzan un lunes a las 7 de la mañana (lo que consideramos como tiempo $t = 0$), momento en el que el paciente queda internado. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Qué presión tenía el paciente al momento de la internación?

(b) ¿Durante cuánto tiempo se tomaron las mediciones?

(c) ¿Qué presión tenía el paciente el día miércoles a las siete de la mañana? ¿En cuántos momentos tuvo la misma presión?

(d) ¿Cuál fue la presión mínima y cuándo la alcanzó? ¿Y la máxima?

(e) ¿En qué momento la presión fue en aumento? ¿Y en disminución?

(f) ¿En qué momento la presión se mantuvo constante y cuál fue ese valor?

*Datos extraídos de `http://unrn.edu.ar/blogs/RRP-Roca/files/2014/04/TP-Funciones-Interpretacion.pdf`. Consultado en agosto de 2018.

†En el lenguaje coloquial suele utilizarse, por ejemplo, "18" para referirse a una presión de 180 mmHg.

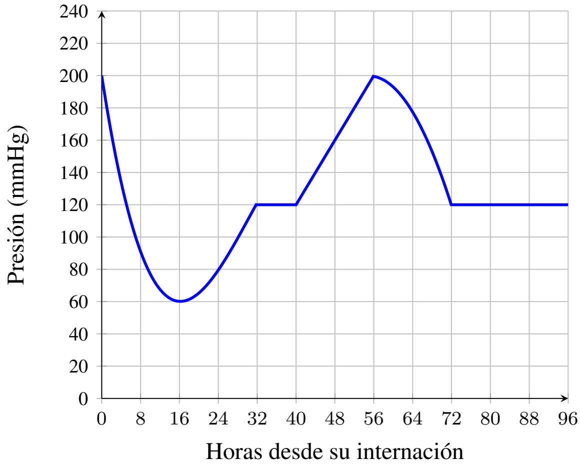


Figura 5.1: Registro de la presión arterial de un paciente.

(g) ¿Cuántos días transcurrieron hasta que el paciente consiguió mantener una presión constante por 24 horas?

Solución:

(a) Al momento de internarse el paciente tenía 200 mmHg de presión arterial.

(b) Las mediciones se tomaron por 96 horas, es decir, durante 4 días.

(c) El día miércoles a las siete de la mañana corresponde a 48 horas luego de la internación. Según el gráfico, la presión era de 160 mmHg. Ese mismo valor lo tuvo además en otros dos momentos (aproximadamente a las 2 horas luego de internarse, y a las 68 horas).

(d) La presión mínima fue de 60 mmHg, y la alcanzó a las 16 horas después de internarse (es decir, el lunes a la hora 23:00). La presión máxima fue de 200 mmHg, y se alcanzó al momento de internarse y a las 56 horas desde el momento de la internación, lo que corresponde al día miércoles a la hora 15:00.

(e) La presión aumentó entre las 16 y 32 horas desde la internación, y también entre las 40 y 56 horas. Esto corresponde al período entre el día lunes a las 23:00 y el día martes a las 15:00, y desde el martes a la hora 23:00 hasta el miércoles a las 15:00. La presión disminuyó durante las primeras 16 horas de internación, y también desde las 56 hasta las 72 horas, lo que se corresponde con el período entre la hora 15:00 del día miércoles, hasta la hora 7:00 del día jueves.

(f) La presión se mantuvo constante en 120 mmHg durante dos momentos: desde las 32 horas de internación hasta las 40 (desde el miércoles a las tres de la tarde hasta las once de la noche), y desde las 72 horas hasta las 96 (desde el jueves a las siete de la mañana hasta el viernes a la misma hora).

(g) El paciente consiguió mantener su presión constante por 24 horas luego de 72 horas desde el día de internación, es decir, luego de 3 días. «

Ejemplo 146. **Interpretando gráficos: Tiro de proyectil.** La gráfica en la Figura 5.2 corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido, desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?

(b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzó?

(c) ¿A qué altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzó esa altura en algún otro momento?

(d) ¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?

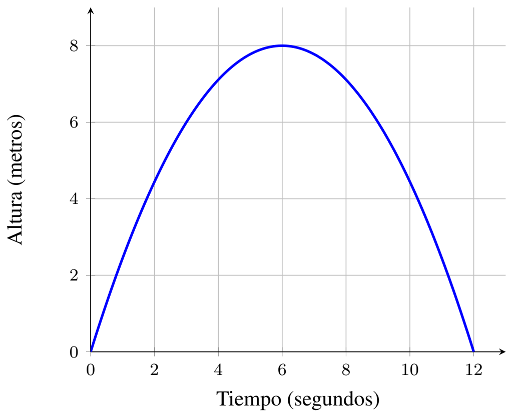


Figura 5.2: Altura del objeto en cada instante.

Solución: Es muy importante observar el gráfico para comprender el por qué de las siguientes respuestas:

(a) Demoró 12 segundos en llegar al suelo.

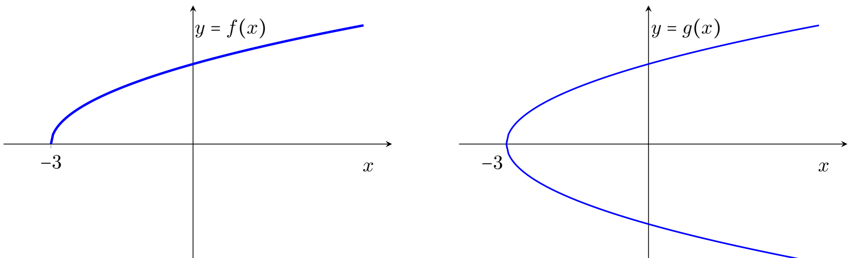
(b) La altura máxima alcanzada fue de 8 metros, a los 6 segundos luego de haber sido lanzado.

(c) A los 3 segundos se encontraba a una altura aproximada de 6 metros, al igual que a los 9 segundos.

(d) El objeto alcanzó una altura de 7 metros a los 4 y 8 segundos posteriores al lanzamiento. «

El gráfico de una curva también nos permite determinar si corresponde o no al gráfico de una función. Como mencionamos, uno debe desplazarse por cada punto del dominio (en el eje horizontal) y "mirar" verticalmente (hacia arriba o abajo) hasta encontrarse con la curva. Esto corresponde a trazar líneas verticales imaginarias en cada punto del dominio, hasta cortar a la curva. Para que sea función, **cada una de estas rectas verticales debe cortar una y solo una vez al gráfico**. Si no lo corta, ese punto no tiene imagen por lo que no cumple con la existencia. Si lo corta más de una vez, no cumple con la unicidad de imagen. Lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 147. **Determinando gráficamente si es función.** Determinar si los siguientes gráficos corresponden a funciones en cada uno de los dominios dados.



(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **(b)** $\mathrm{Dom}(f) = [-3, \infty)$ **(c)** $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ **(d)** $\mathrm{Dom}(g) = [-3, \infty)$

Solución:

(a) El gráfico de f **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos en algún punto a la izquierda de -3, y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de f para ese punto.

(b) El gráfico de f **corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, porque si nos situamos sobre cualquier punto en el eje x que pertenezca a dicho intervalo, y trazamos una recta vertical, esta cortará al gráfico exactamente una vez. Es decir, cumple con la existencia y unicidad de imagen para cada $x \in [-3, \infty)$.

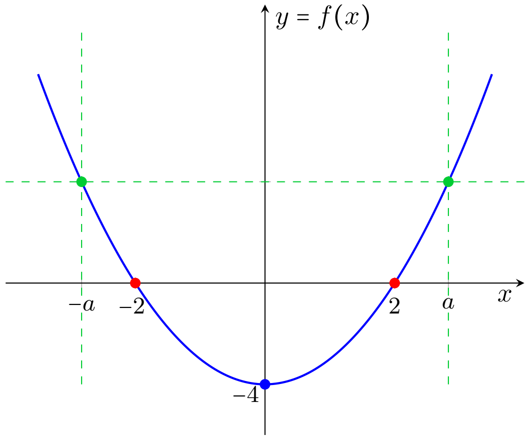
(c) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos en algún punto a la izquierda de -3 y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de g para ese punto. Esto ya es suficiente para afirmar que no es la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, pero notar que tampoco satisface con la unicidad de imagen para los puntos $x \geq -3$ pues, si nos situamos en uno de estos puntos y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico en dos puntos (arriba y abajo del eje horizontal).

(d) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, ya que no satisface la unicidad de imagen para los puntos $x \geq -3$: si nos situamos en uno de estos puntos y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico dos veces. «

Finalmente, notar que el gráfico de una función también nos permite detectar la imagen de la misma. Recordemos que la imagen de una función es el conjunto de valores obtenidos al aplicar f a todos los puntos del dominio, es decir, aquellos alcanzados por la función. Para determinarlos, debemos mirar el eje y e identificar qué valores alcanza la función, y cuáles no. Esto corresponde a trazar **rectas horizontales**, y ver cuáles cortan a la gráfica (no importa cuántas veces) y cuales no.

Por ejemplo, para el caso del tiro de proyectil, podemos observar en el gráfico (ver Figura 5.2) que el objeto nunca superó los 8 metros de altura, y tampoco estuvo debajo del nivel del suelo. Esto nos dice que la imagen de la función representada es $[0, 8]$. Para el gráfico de la presión arterial (ver Figura 5.1), se observa que los valores se mantuvieron entre 60 y 200, por lo que la imagen de la función es el conjunto $[60, 200]$.

Ejemplo 148. Determinando gráficamente la imagen. Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se incluye a continuación:



Solución: En el gráfico puede verse, por ejemplo, que $f(0) = -4$ (marcamos el punto $(0, f(0))$ con azul). En otras palabras, $-4 \in \mathrm{Img}(f)$ pues es la imagen del cero a través de f. También podemos ver que $f(2) = f(-2) = 0$ (puntos marcados en color rojo), por lo que el cero es imagen tanto de 2 como de -2. De manera general, si nos situamos en cualquier punto sobre el eje y por encima de -4 y trazamos una recta horizontal, vemos que siempre corta al gráfico en dos puntos (representados en color verde), y que si trazamos una recta por debajo de -4, esta no corta a la gráfica. De todo esto, y suponiendo que la gráfica continúa de igual modo hacia arriba, podemos concluir que

$$\operatorname{Img}(f) = [-4, \infty).$$

En el ejemplo anterior, los puntos representados en color rojo reciben un nombre especial. Se dice que un valor x^* perteneciente al dominio de una función f es **raíz** de f si

$$\boxed{f(x^*) = 0.}$$

Es decir, se llama raíz de una función f a todo valor del dominio tal que, si le aplicamos f, obtenemos el valor cero como resultado. Gráficamente, esto significa que el punto $(x^*, 0)$ pertenece al gráfico de f, o equivalentemente, la gráfica de f "corta" al eje horizontal en dicho valor. Las raíces de una función también se conocen como **ceros** de dicha función, pues son las soluciones de la ecuación

$$\boxed{f(x) = 0.}$$

Entonces, en el último ejemplo los ceros o las raíces de f son $x = 2$ y $x = -2$.

Ejemplo 149. **Determinando raíces analíticamente.** Hallar las raíces de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Solución: Observar primero que al ser una función polinómica, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para hallar las raíces debemos resolver la ecuación

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Como vimos en el capítulo anterior, la forma de resolver este tipo de ecuaciones es factorizando el polinomio del miembro izquierdo, para aplicar luego la propiedad de producto cero. Para factorizar, notar que $f(1) = 0$, por lo que $x - 1$ es divisor del polinomio (por el teorema del resto). Aplicamos entonces la regla de Ruffini para dividir

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Entonces

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x^2 + 5x + 6).$$

Aplicando la resolvente para $x^2 + 5x + 6$, obtenemos $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$. Así,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3),$$

por lo que el conjunto de raíces de f es $\{1, -2, -3\}$.