FUNCION EXPONENCIAL

Las funciones exponenciales aparecen modelando numerosas situaciones, desde fenómenos de la naturaleza (como el número de bacterias que se reproducen por fisión binaria, la cantidad de miembros de poblaciones, la desintegración radiactiva, o la concentración de medicamentos en sangre, entre otros) hasta problemas pertenecientes al campo de la ciencias económicas

Una función exponencial es una de la forma

$$f(x) = a^x$$

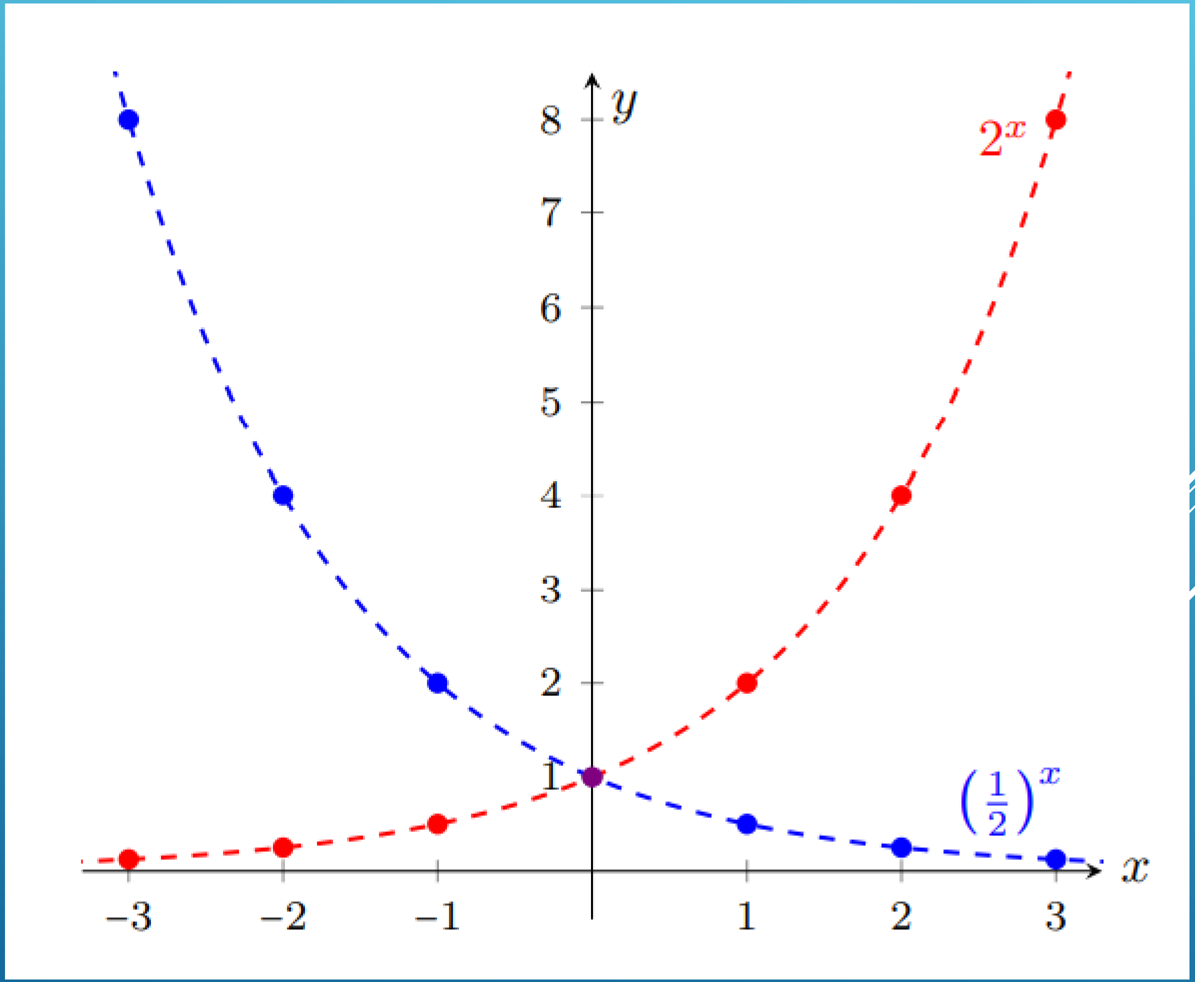
siendo $a > 0 \; y \; a \neq 1$

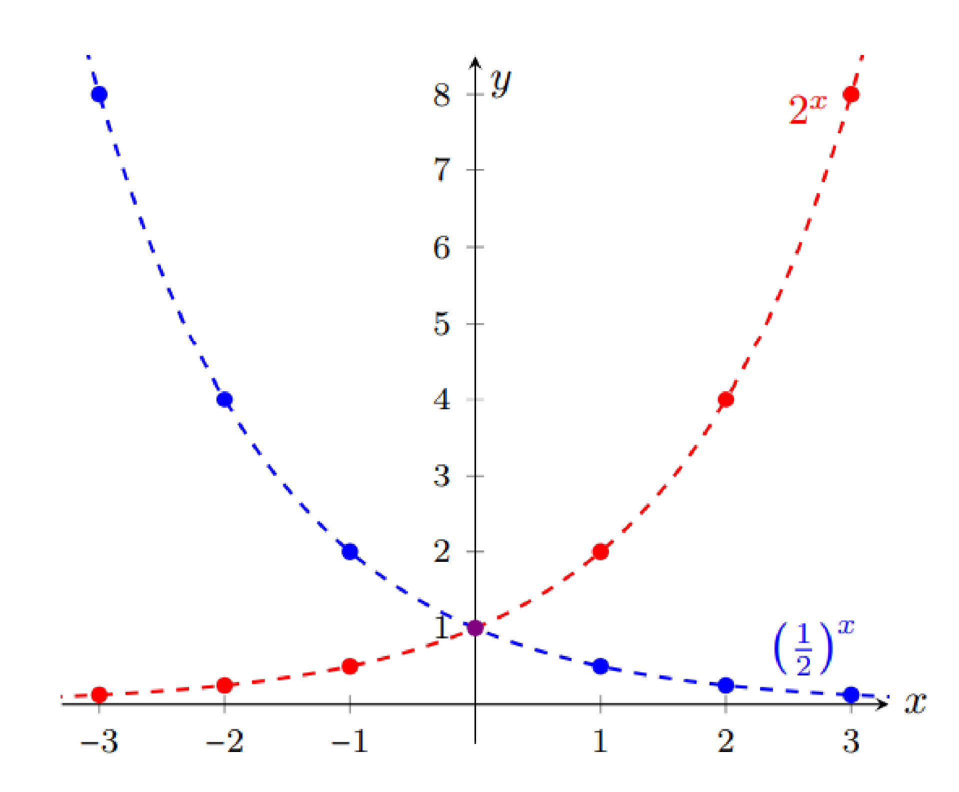
Es decir, es una función en la que la variable aparece en el exponente, y la base a es positiva y distinta de 1

Esbozando el grafico de funciones exponenciales. Analizaremos en este ejemplo las funciones dadas por

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$2^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$2^3 = 8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$





podemos observar que la gráfica de a^x siempre pasa por el punto $(0,1)$ pues $a^0 = 1$ para cualquier a positivo.

Además, si $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ entonces

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x).$$

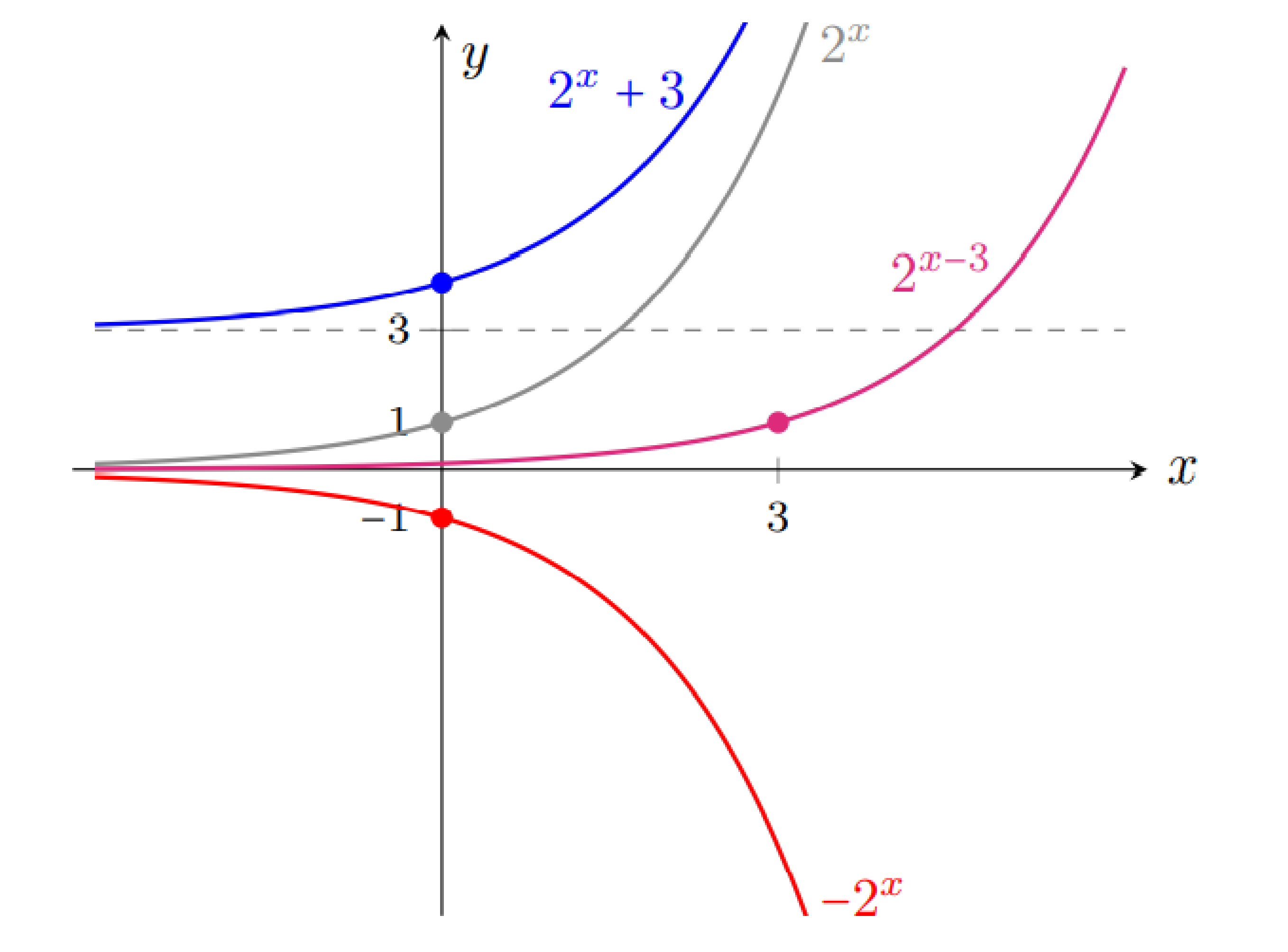
Luego, por las transformaciones estudiadas la gráfica de g puede obtenerse reflejando la grafica de f respecto del eje y, lo que puede observarse en el gráfico.

Algunas observaciones sobre la función $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ son las siguientes:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Img}(f) = (0, \infty)$.
- $f(0) = 1$.
- Hay dos "aspectos" posibles para la gráfica de f, dependiendo de si $a > 1$ o si $0 < a < 1$, como se ilustró en el gráfico anterior.
- La gráfica de f nunca "toca" al eje x, aunque se acerca a él tanto como se quiera (hacia la derecha cuando $0 < a < 1$, y hacia la izquierda cuando $a > 1$). Formalmente, esto último se expresa diciendo que el eje x es una **asíntota horizontal*** para f.

Ejemplo 203. **Transformando funciones exponenciales.** A partir de la gráfica de $f(x) = 2^x$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

$$y = 2^x + 3, \qquad y = 2^{x-3}, \qquad y = -2^x.$$



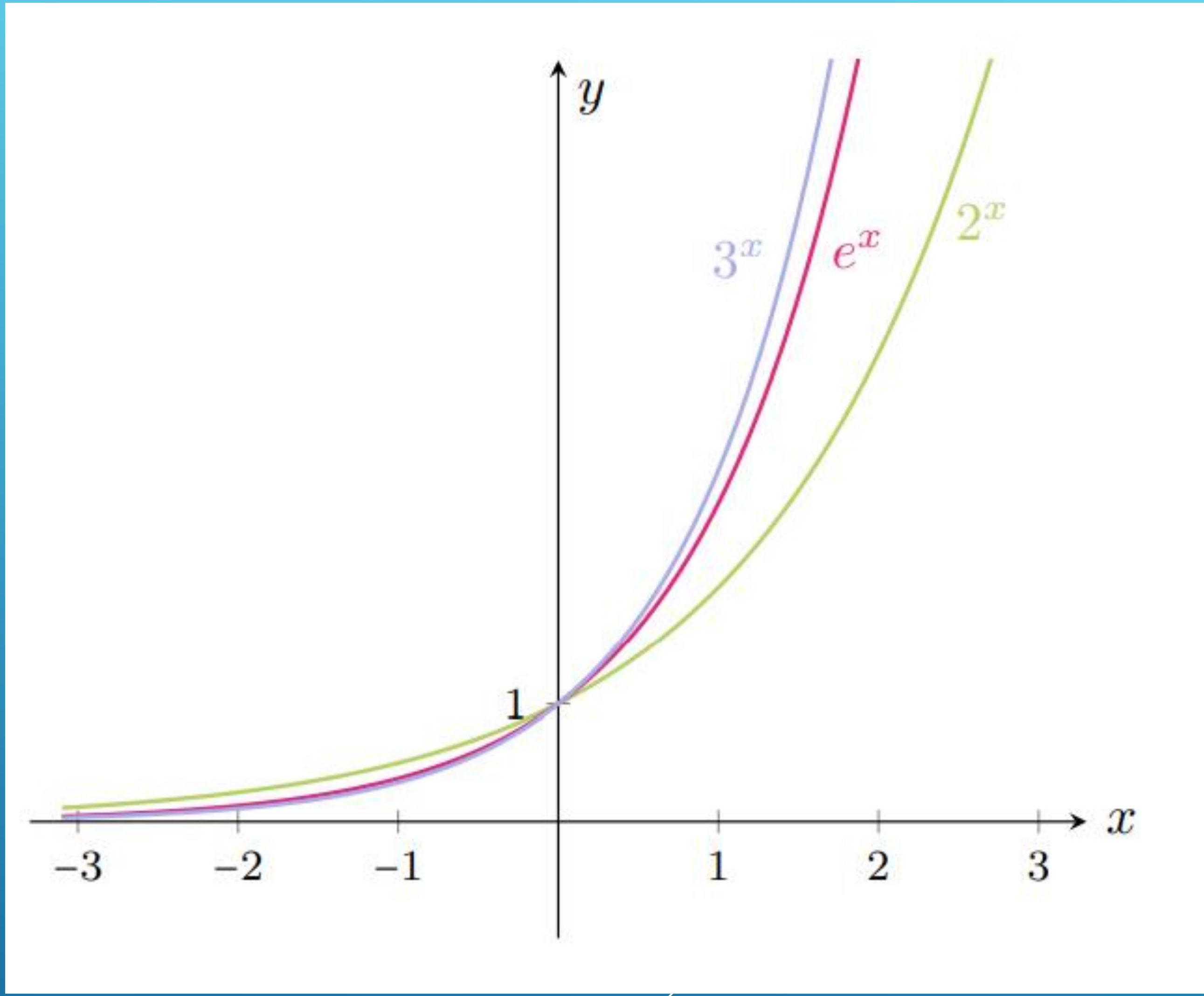
Para obtener la gráfica de $\boldsymbol{y = 2^x + 3}$,debemos desplazar 3 unidades hacia arriba la gráfica de $f(x) = 2^x$, (notar que esto hará que la asíntota, que era el eje x, se desplace de igual manera, siendo ahora la recta $y = 3$.

Para graficar la función $\boldsymbol{y = 2^{x-3}}$ desplazamos 3 unidades hacia la derecha la gráfica de f

la gráfica de $\boldsymbol{y = -2^x}$ se obtiene reflejando la grafica de f respecto del eje x.

La base e.

El numero irracional $e = 2.71828 \ldots.$ aparece frecuentemente en matemática. Por tal motivo, la función exponencial con base e, es decir, $f(x) = e^x$, suele llamarse **la** función exponencial. Para graficar esta función procedemos en la misma forma en que lo hicimos con 2^x.



Aplicación: modelando problemas reales.

Analizaremos a continuación ejemplos concretos que se modelan mediante funciones exponenciales. Cuando hablamos de un **crecimiento exponencial** (o decrecimiento) nos referimos a algo que, a diferencia de un crecimiento lineal (o proporcional), crece cada vez más rápido a medida que el tiempo t aumenta, de acuerdo con la fórmula

$$y(t) = y_0\, a^{rt} = y_0\, e^{\ln(a) rt},$$

siendo y_0 la cantidad inicial, y a y r constantes que dependerán de cada problema en particular. Si $r > 0$ habrá crecimiento, mientras que si $r < 0$ se producirá un decrecimiento. Se usará una base a o la base e en forma indistinta, según convenga en cada caso. Como se ve en la fórmula anterior, siempre es posible pasar de una base a otra, modificando el exponente. Ilustramos esto en los ejemplos a continuación.

Crecimiento de una colonia de bacterias

Un cultivo de bacterias comienza con una población inicial de 1000 individuos, y se reproduce de manera que la cantidad de ellos se duplica en cada hora (como las bacterias que se reproducen por fisión binaria, proceso simple en el cual la célula crece al doble de su tamaño y después se divide en dos)

En la realidad, después de cierto tiempo, el crecimiento en forma exponencial se detiene debido a la influencia de factores del ambiente, como el espacio o el alimento limitado. De todas formas, el modelo de crecimiento exponencial refleja el comportamiento de la población durante las primeras etapas del proceso

Crecimiento logístico.

A diferencia del modelo de crecimiento exponencial, en el cual la población siempre crece, en un modelo de crecimiento logístico se tienen en cuenta las limitaciones que tiene la población para crecer, impuestas por el mismo ambiente en el que vive. Este es el caso de las poblaciones de animales, ya que tanto el espacio como el alimento son limitados, y también existen depredadores.

En este tipo de poblaciones, la cantidad de individuos en el tiempo t esta modelada por:

$$P(t) = \frac{c}{1 + ke^{\lambda t}}$$

siendo c, k y λ constantes que dependen de cada caso en particular (suponemos c y k positivas, y λ negativa). La constante c indica la cantidad de equilibrio de la población, es decir, la cantidad a la cual se aproxima (y estabiliza) la población a medida que el tiempo aumenta lo suficiente, y se determina de acuerdo a las condiciones del ambiente.

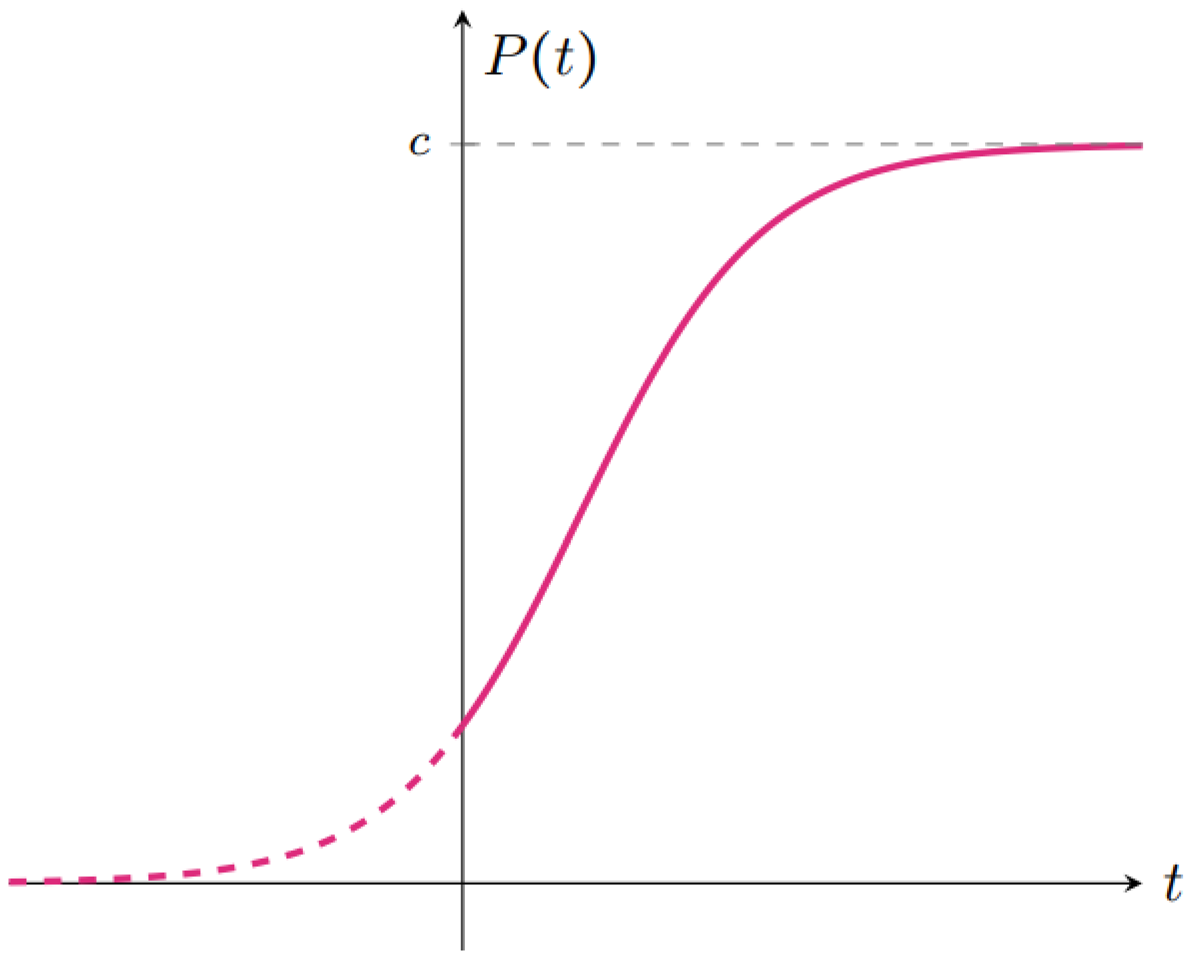


Figura 5.9: Aspecto típico de $P(t)$.

Función logarítmica

El modelo matemático que describe el crecimiento de una población de amebas cuyo número se duplica cada hora y que tiene una ameba como cantidad inicial es la función exponencial $y = 2^t$.

Para distintos valores de t del dominio es posible determinar la cantidad de amebas existentes en ese momento.

Si se desea determinar cuántas horas han transcurrido para que la población sea por ejemplo de 524288 amebas, es preciso hallar el valor de t del dominio cuya imagen es 524288.

t	$y = 2^t$
0	1
1	2
2	4
…..	
¿?	524288

Esto podría resolverse fácilmente si se conociera la inversa de la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(t) = 2^t$$

Esta nueva función recibe el nombre de **función logarítmica.**

Por lo tanto, dada la función exponencial

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} / f(t) = a^{x}, \quad a > 0 \; y \; a \neq 1$$

la función logarítmica, inversa de la exponencial, es

$$f\colon \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} / f(t) = \log_{a} x\,, a > 0 \; y \; a \neq 1$$

La función logarítmica básica está dada por $f(x) = \log_a x$, siendo la base a positiva y distinta de 1.
Solamente podemos calcular el logaritmo de cantidades positivas, por lo que el dominio de f es el conjunto $(0,\infty)$.
Al igual que las demás funciones, esta es la función base, y trabajaremos con transformaciones de ella, lo que puede afectar también al dominio.

Hallando el dominio de funciones logarítmicas.

Determinar el dominio de las funciones:

$$f(x) = \log_2(x-5) \ \ , g(x) = \log_3\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

Para esbozar la gráfica de una función logarítmica, realizaremos tablas de valores. Para ello, recordemos que el logaritmo se define como:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

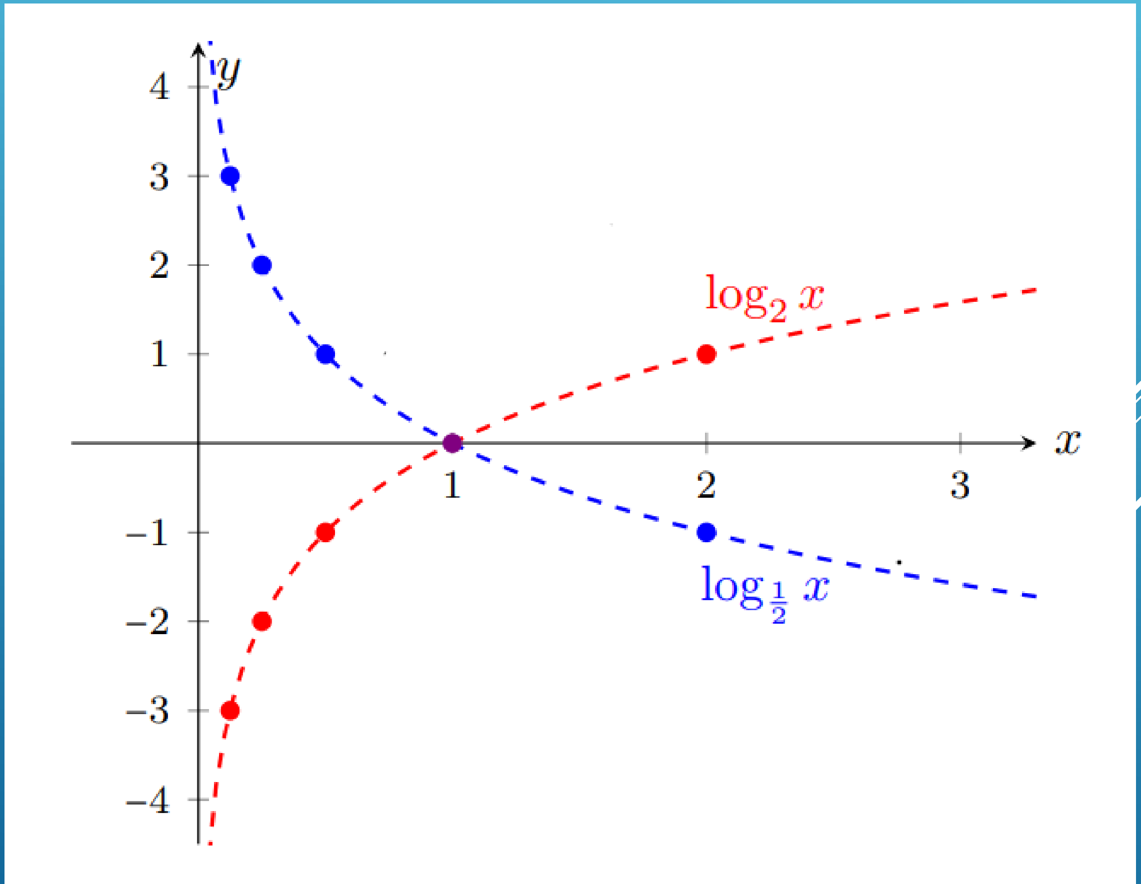
Es decir, $\log_a x$ es el exponente al cual debemos elevar la base a para obtener x. Como siempre, utilizaremos aproximaciones para los números irracionales, y contamos para esto con la ayuda de la calculadora

Esbozando el grafico de funciones logarítmicas.

Analizaremos en este ejemplo el grafico correspondiente a $f(x) = \log_2 x \quad y \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Las tablas de valores para estas funciones son las siguientes:

x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	3	−3
4	2	−2
2	1	−1
1	0	0
$\frac{1}{2}$	−1	1
$\frac{1}{4}$	−2	2
$\frac{1}{8}$	−3	3



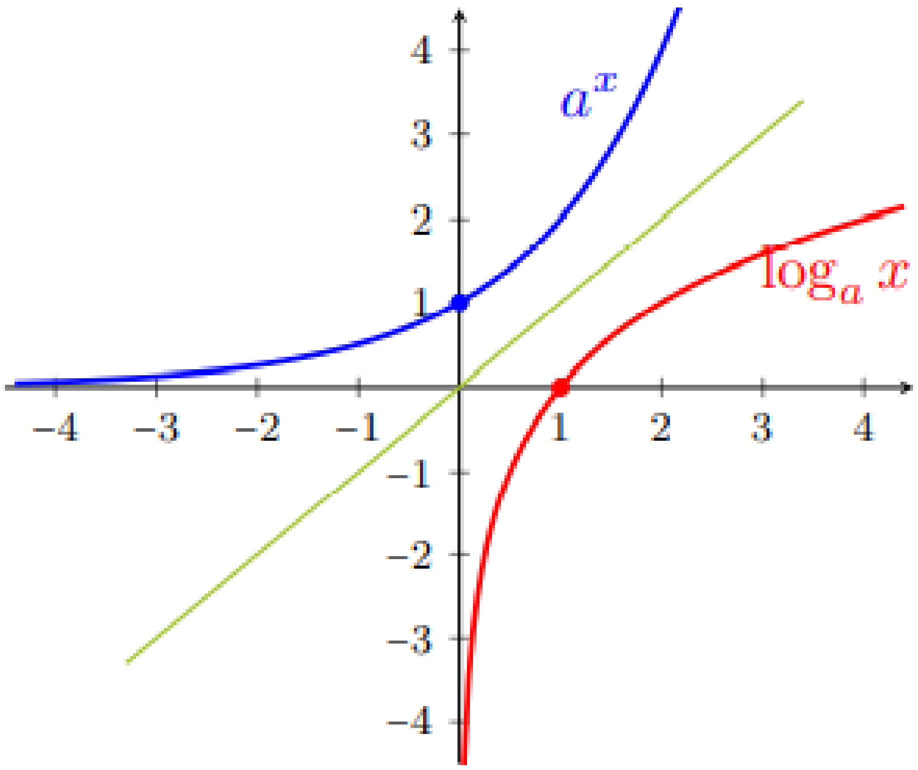
A partir de lo anterior y de lo que sabemos sobre la función exponencial, podemos obtener las siguientes conclusiones sobre la función logarítmica $f(x) = \log_a x \ \ (a > 0, a \neq 1)$

- $Dom(f) = (0, \infty), Img(f) = \mathbb{R}$.

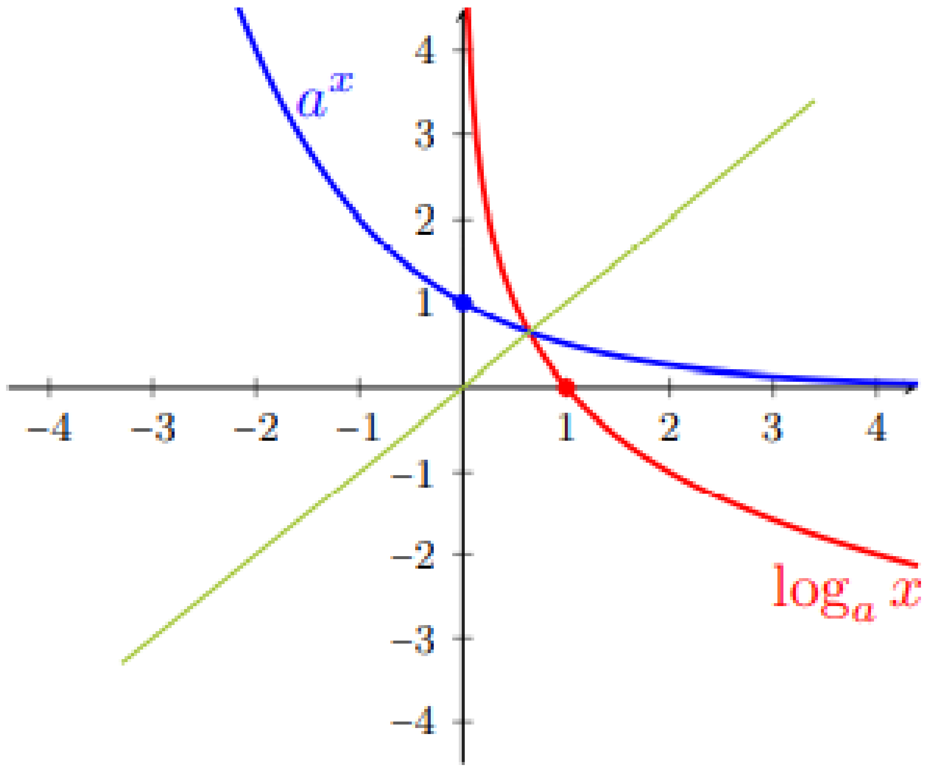
- $f(1) = 0$, es decir la curva siempre pasa por el punto (1, 0), pues $\log_a 1 = 0$ para cualquier a positivo.

- Hay dos "aspectos" posibles para la grafica de f, dependiendo de si $a > 1$ o si $0 < a < 1$, como se observa en los dibujos anteriores. La grafica de f nunca "toca" al eje y, aunque se acerca a él tanto como uno quiera (hacia arriba cuando 0 < a < 1, y hacia abajo cuando a > 1). Esto significa que el eje y es una asÍntota vertical para f.

Existe una relación entre las gráficas de funciones inversas: se obtiene la de una reflejando respecto de la recta $y = x$ la de la otra. Ilustramos este hecho a continuación, según el valor de la base a:



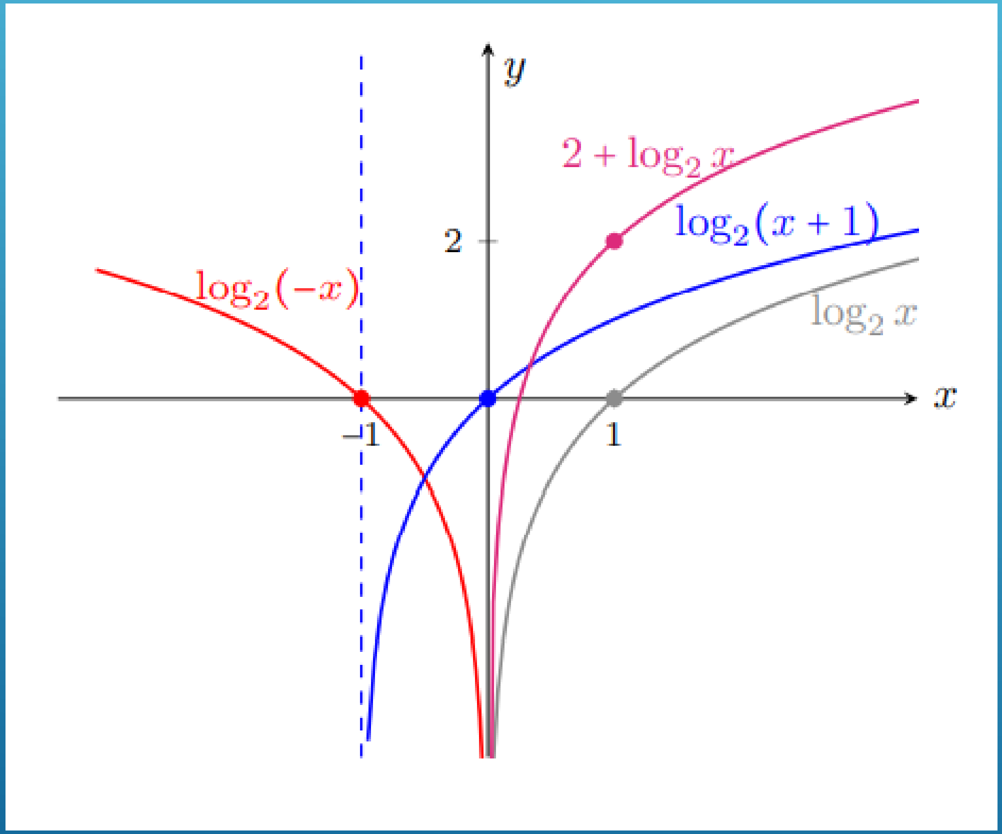
Caso $a > 1$



Caso $0 < a < 1$

Transformando funciones logarítmicas.

A partir de la gráfica de $f(x) = \log_2 x$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones: $y = \log_2(-x)$, $y = 2 + \log_2 x$, $y = \log_2(x+1)$



Para obtener la gráfica de $y = \log_2(-x)$ debemos reflejar la correspondiente a $f(x) = \log_2 x$ con respecto al eje y.

La grafica de $2 + \log_2 x$ se obtiene desplazando 2 unidades hacia arriba la de f

la gráfica de $y = \log_2(x+1)$ se obtiene trasladando una unidad hacia la izquierda la gráfica de f (notar que esto hará que la asíntota, que era el eje y, se desplace de igual manera, siendo ahora la recta $x = -1$.

Aplicación: modelando problemas reales.

Para finalizar, veamos algunos ejemplos concretos que se modelan mediante una función logarítmica.
Vimos que el logaritmo es una herramienta fundamental para resolver ecuaciones exponenciales, pero también las funciones logarítmicas aparecen en varios modelos físicos.
Algunos ejemplos de esto son la intensidad del sonido (escalas de decibeles), de los terremotos (escala de Richter), el brillo de las estrellas (intensidad de la luz), o la medida de acidez o alcalinidad de algunas sustancias químicas (escala de pH).

Problema

Poco después de consumir una dosis sustancial de whisky, el nivel de alcohol en la sangre de una persona sube a $0,3 \frac{mg}{ml}$. De ahí en adelante, este nivel decrece de acuerdo con la ley $y = 0,3 .\ 0,5^t$ donde t es el tiempo medido en horas a partir del instante en que se alcanza el nivel más alto.

a) Indique de qué función se trata y determine su dominio y conjunto de imágenes.

b) ¿Por qué dice en el enunciado que es decreciente?

c) ¿Cuánto tendrá que esperar esa persona para poder conducir legalmente su automóvil si en su ciudad el límite permitido de alcohol en sangre es de $0,08 \frac{mg}{ml}$?

a) Se trata de una función exponencial, su dominio es $[0, \infty)$ y su conjunto de imágenes es $(0; 0,3]$.

b) Es decreciente pues la base $a = 0,5$ es menor que uno.

c) Como el límite permitido de alcohol en sangre es de $0,08\ \frac{mg}{ml}$, para determinar el tiempo que una persona debe esperar para poder conducir, se plantea la ecuación $0,08 = 0,3 .\ 0,5^t \Rightarrow \frac{0,08}{0,3} = 0,5^t \Rightarrow 0,5^t = 0,267$

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros:

$\ln(0,5^t) = \ln 0,267 \Rightarrow t \ln 0,5 = \ln 0,267 \Rightarrow t \approx 1,9$

La persona deberá esperar aproximadamente 1 hora y 54 minutos para poder conducir legalmente su automóvil.

Problema

> Se encontraron restos de un hombre prehistórico y utilizando la técnica del C14 se determinó que quedaba el 49% de la cantidad original ¿Cuántos años de antigüedad tienen los restos de dicho hombre?

Si C(0) es la cantidad original de C14, la cantidad C(t) presente a los t años de haber muerto el hombre se describe por la ley $C(t) = C(0)\, e^{kt}$.

Dado que la vida media del C14 es de 5730 años, resulta: $\frac{1}{2} C(0) = C(0)\, e^{k\,5730}$

Resolviendo:

$$\frac{1}{2} = e^{k\,5730} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = k\,5730 \ln e \;\Rightarrow\; k \approx \frac{\ln 1 - \ln 2}{5730} \;\Rightarrow\; k \approx -0{,}000121$$

Por lo tanto, $C(t) = C(0)\, e^{-0{,}000121\,t}$.

Como la cantidad de C14 encontrada en los restos es del 49% de la cantidad original, resulta: $0{,}49\, C(0) = C(0)\, e^{-0{,}000121\,t}$.

Resolviendo, $0{,}49 = e^{-0{,}000121\,t} \;\Rightarrow\; \ln 0{,}49 = -0{,}000121\,t$

$$t = -\frac{\ln 0{,}49}{0{,}000121} \;\Rightarrow\; t \approx 5895$$

El hombre prehistórico vivió hace aproximadamente 5895 años.