Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Bibliografía:
Álgebra lineal de Stanley Grossman

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$. determine la matriz X que satisfaga

$$2X + B = -3A + C$$

$$2X + \underbrace{B + (-B)}_{\theta} = -3A + C + (-B)$$

$$2 \cdot X + \theta = -3A + C - B$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot X = \frac{1}{2}(-3A + C - B)$$

$$X = \frac{1}{2}(-3A + C - B)$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left[-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$4 \cdot x = 8$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot 8$$

$$1 \cdot x = 2$$

$$x = 2$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

- Sea

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$$

n×n
CUADRADO

- Diremos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{\mathbf{n\times n}} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots. \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{n\times 1}} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

- Entonces: $\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$

Matriz identidad

- Matriz identidad: $I = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ es la matriz cuadrada tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad i = j \\ 0 & \textbf{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Teorema: Sea A una matriz cuadrada de n x n. Entonces:

$$\boxed{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A.I = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad I.A = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz cuadrada

- La matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es **invertible, regular o no singular** si y sólo existe una matriz B= $(b_{ij})_{n\times n}$ tal que su producto por A, a izquierda y a derecha, es la identidad.

$$A \,\mathbf{es\ invertible} \Leftrightarrow \exists\ B / A.B = B.A = I_n$$

- Si la matriz inversa existe, es única y se denota A^{-1}
- Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = B \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ a + 3.c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0 \Rightarrow b = -2.d \\ b + 3.d = 1 \end{cases}$$

$$a = -3c \qquad\qquad -2d + 3d = 1 \qquad b = -2$$

$$-3c + 2c = 1 \qquad\qquad d = 1$$

$$-c = 1 \Rightarrow c = -1$$

$$a = -3.(-1) \Rightarrow a = 3 \qquad A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teoremas:

- **Unicidad de la matriz inversa**: Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración:

Suponemos que A admite dos matrices inversas: B y C

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$
$$A \cdot C = C \cdot A = I$$

por igualdad de matrices

$$B \cdot A = B \cdot A$$

$$B \cdot A \cdot C = B \cdot A \cdot C$$

$$(B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C)$$

$$I \cdot C = B \cdot I$$

$$C = B$$

Luego: **La inversa es única**

Volvemos a los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\; y + z = 1 \\ x + y \quad\;\; = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = b$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$X = A^{-1} \cdot b$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 0 \\
y + z &= 1 \\
x + y &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & A & & & I & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{array}
$$

$F_3 \to F_3 + F_1 \cdot (-1)$

$F_1 \to F_1 + F_2 \cdot (-1)$

$F_3 \to F_3 \cdot (-1)$

$F_2 \to F_2 + F_3$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Procedimiento para obtener la inversa

- Sea A_{nxn}, una matriz, a su derecha se escribe la matriz identidad (de orden n x n). Se aplican operaciones elementales por renglones hasta transformar A en la identidad. La matriz resultante a la derecha es la inversa de A.

A	I_n
I_n	A^{-1}

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 \rightleftarrows F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 + F_1 \cdot (-2) \\ F_3 \to F_3 + F_1 \cdot (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 \rightleftarrows F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_2 \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \cdot (-3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$