FUNCIONES

FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS

Muchas veces, la regla que define una función está dada por más de una expresión matemática. Cuando las funciones están definidas por más de una ley, es decir, por distintas expresiones en distintas partes de su dominio, decimos que es una función definida por tramos.

Problema

Una empresa textil ha considerado que si su producción no supera los cien metros semanales su costo es (300 + 6x), donde x es la cantidad de metros producidos. Si x es mayor que cien metros deben comprar más máquinas y refaccionar el lugar, el costo aumentará y estará dado por (600 + 5x).

a) Escriba la función costo teniendo en cuenta que puede producir como máximo quinientos metros.

b) ¿Cuál es el costo de fabricar cincuenta metros?, ¿y doscientos ochenta metros?

$$\boldsymbol{x = cantidad\ de\ metros\ producidos\ por\ semana}$$

Para toda $x \leq 100\ es$: $c(x) = 300 + 6x$

Para $100 < x \leq 500\ es$: $c(x) = 600 + 5x$

Por lo tanto definimos la función como:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{300 + 6}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si} & \boldsymbol{x} \leq \mathbf{100} \\ \mathbf{600 + 5}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si} & \mathbf{100} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{500} \end{cases}$$

Para hallar el costo de producir 50 metros debemos hallar $c(50)$

Como $50 < 100$, debemos considerer el primer tramo de la definición de la función :

$$c(x) = 300 + 6 \, . \, x$$

$$c(50) = 300 + 6 \, . \, 50$$

$$c(50) = 600$$

El costo de fabricar cincuenta metros es de $600

Para hallar el costo de producir 280 metros debemos hallar $c(280)$

Como $280 > 100$, debemos considerar el segundo tramo de la definición de la función :

$$c(x) = 600 + 5.x$$

$$c(280) = 600 + 5\,.\,280$$

$$c(280) = 2000$$

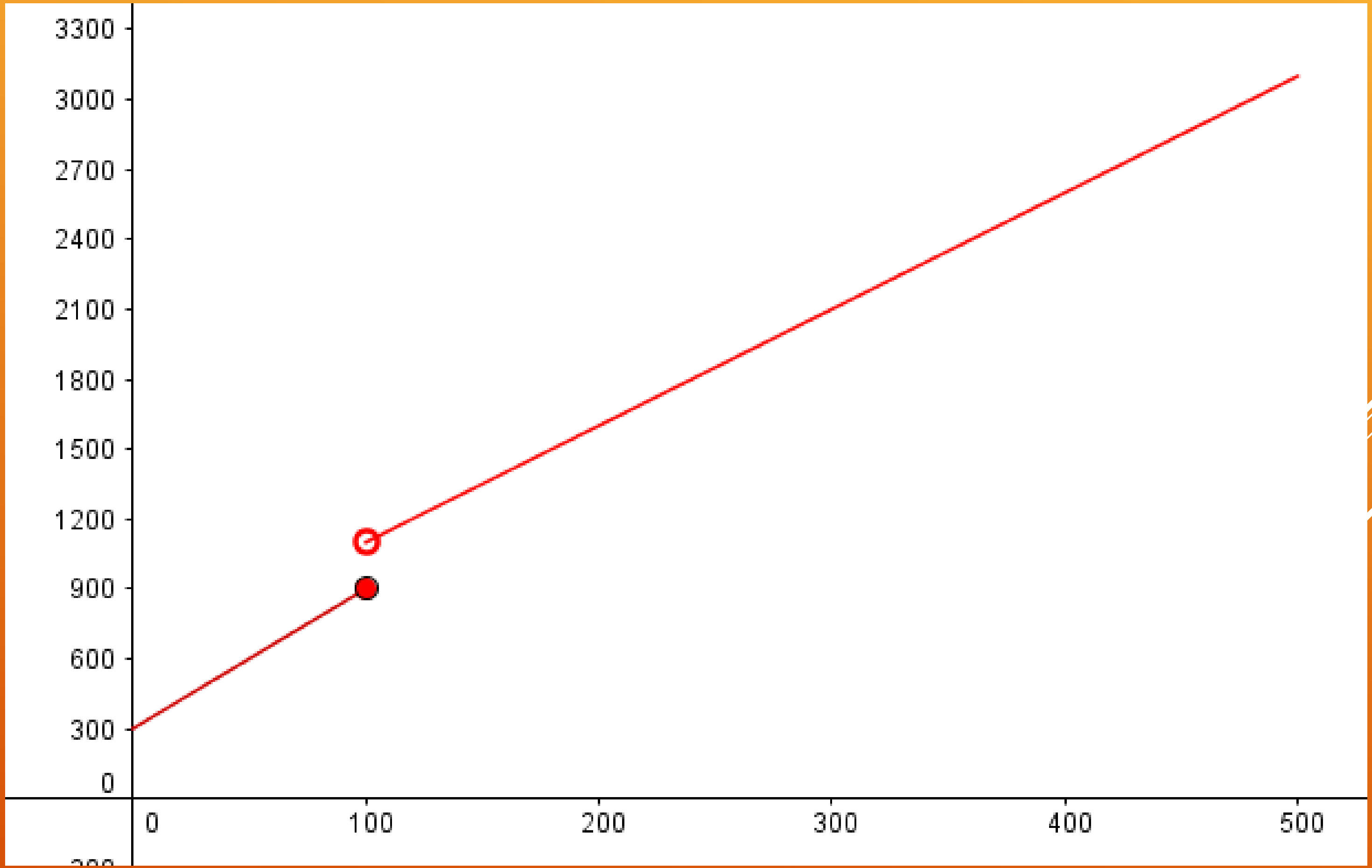
Fabricar 280 metros cuesta $2000

¿Cómo representamos gráficamente una función por tramos?

$$c(x) = \begin{cases} 300 + 6x & si \quad x \leq 100 \\ 600 + 5x & si \quad 100 < x \leq 500 \end{cases}$$

x	y= $300 + 6X$
1	360
50	600
100	900

x	y= $600 + 5X$
(100	1100)
280	2000
500	3100



Muy importante a la hora de graficar una función por tramos!!

1 – todos los tramos se grafican en el mismo sistema de ejes coordenados

2 – Considerar los valores que puede tomar x en cada tramo.

una función definida por tramos es la función valor absoluto.

Recuerde que el valor absoluto de un número a, denotado con |a|, es la distancia de a hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0; de tal manera que:

$$|a| \geq 0$$

Ejemplos:

$$|3| = 3 \quad , \qquad |-3| = 3 \, , \qquad |0| = 0$$

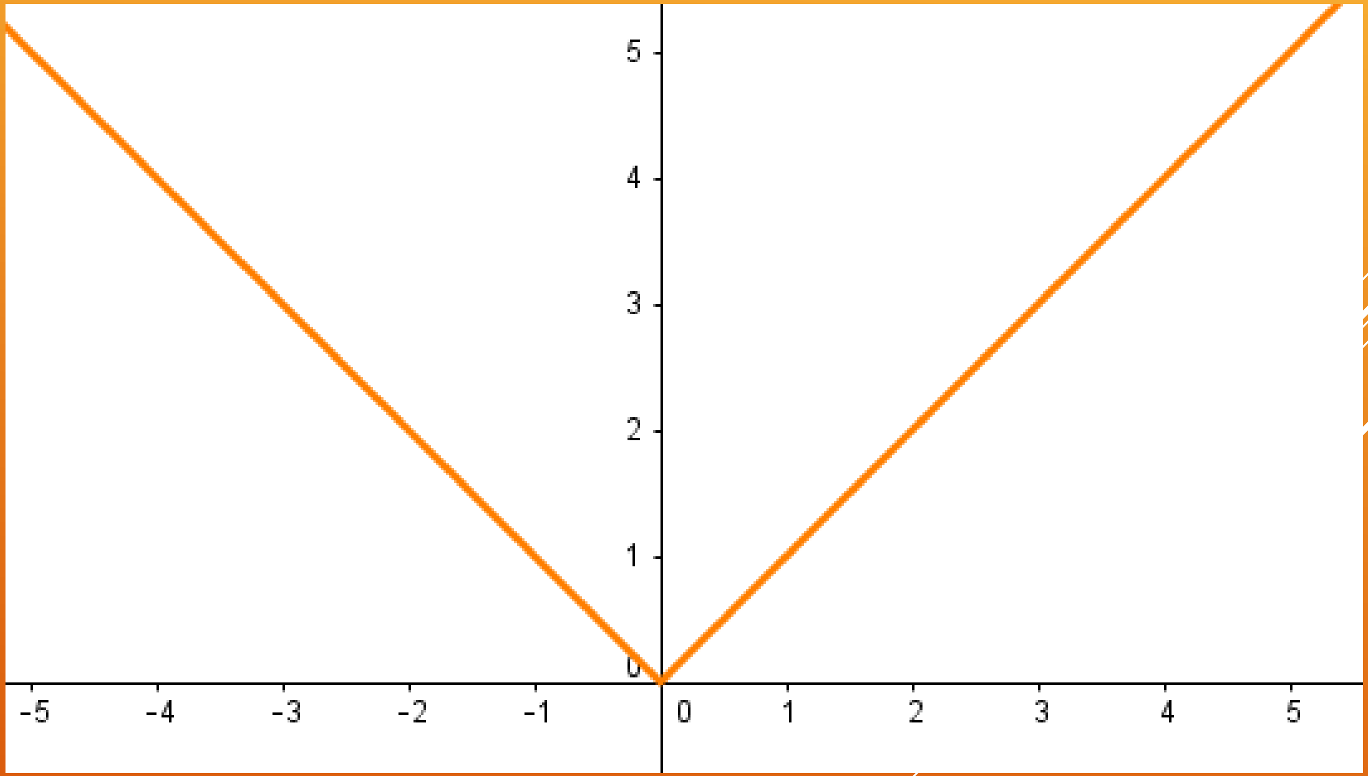
En general:

$$|a| = a \ si \ a \geq 0$$

$$|a| = -a \ \ si \ a < 0$$

Función Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$



FUNCIONES INVERSAS

La tabla 1 proporciona información de un experimento en el cual un cultivo de bacterias se inició con 100 bacterias en un medio nutriente limitado; el tamaño de la población de bacterias se registró a intervalos de horas.

El número de bacterias N es una función del tiempo t. $N = f(t)$.

Sin embargo, suponga que la bióloga modifica su punto de vista y se interesa en el tiempo que se requiere para que la población alcance diversos niveles. En otras palabras, ella considera a t como una función de N. A esta función se le llama función inversa de f, denotada por f^{-1}, y se lee "f inversa". De esta manera $t = f^{-1}(N)$, es el tiempo que se requiere para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse leyendo la tabla 1 de derecha a izquierda o bien consultando la tabla 2. Por ejemplo $f^{-1}(550) = 6$ porque $f(6) = 550$

TABLA 1 N como una función de t

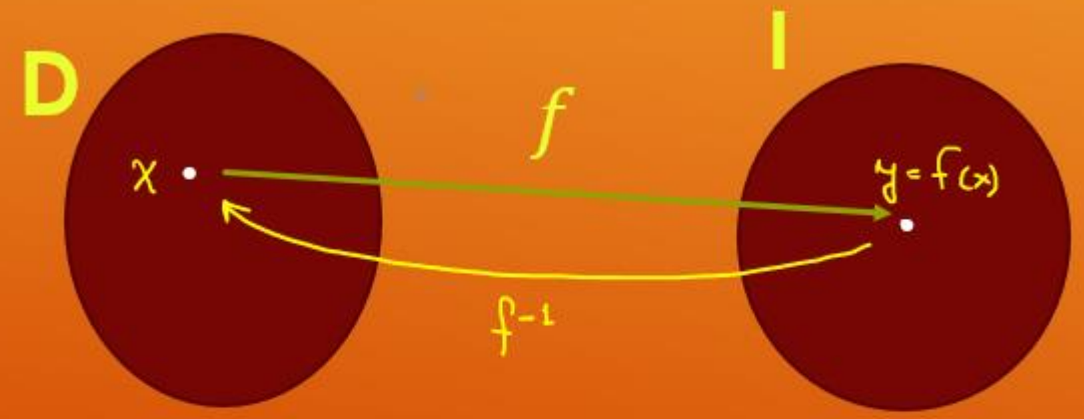
t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

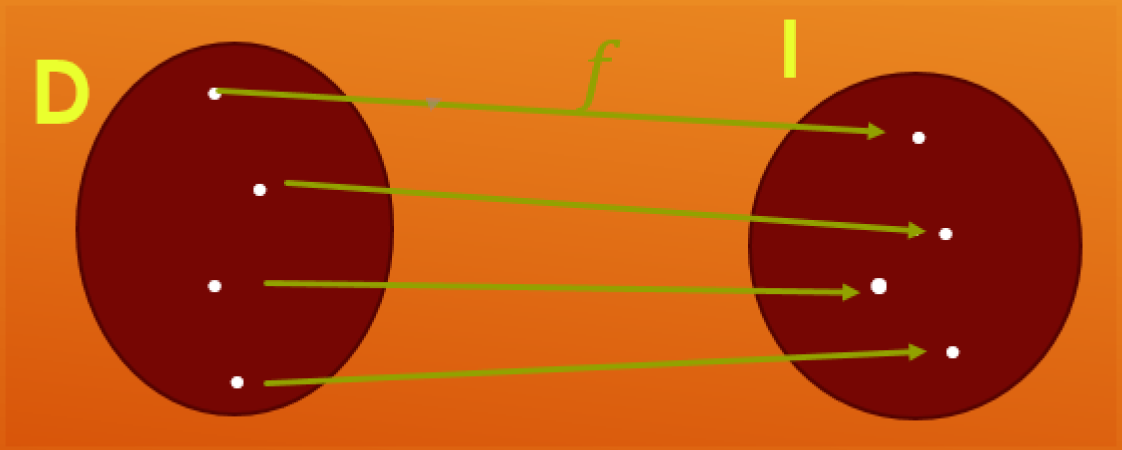
N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

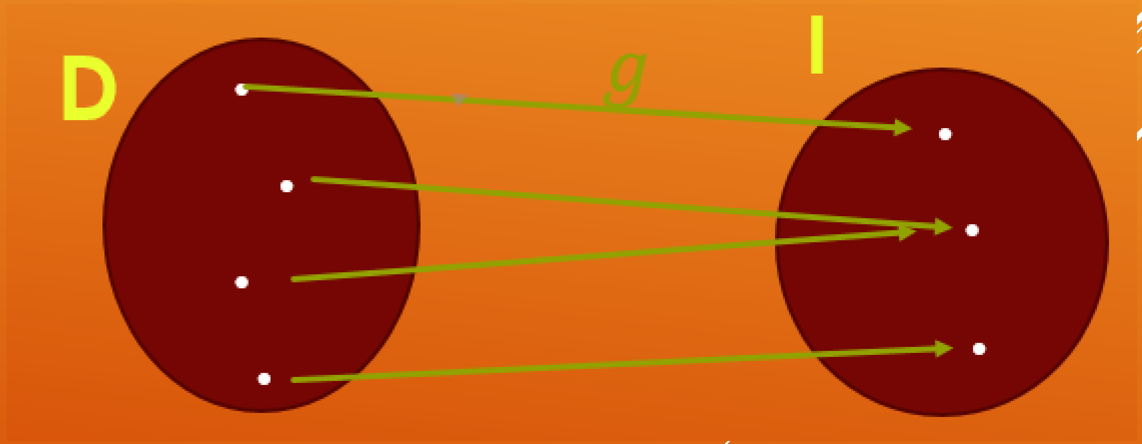
Una función f está dada por una ley que se aplica a la variable x para obtener su única imagen $y = f(x)$.

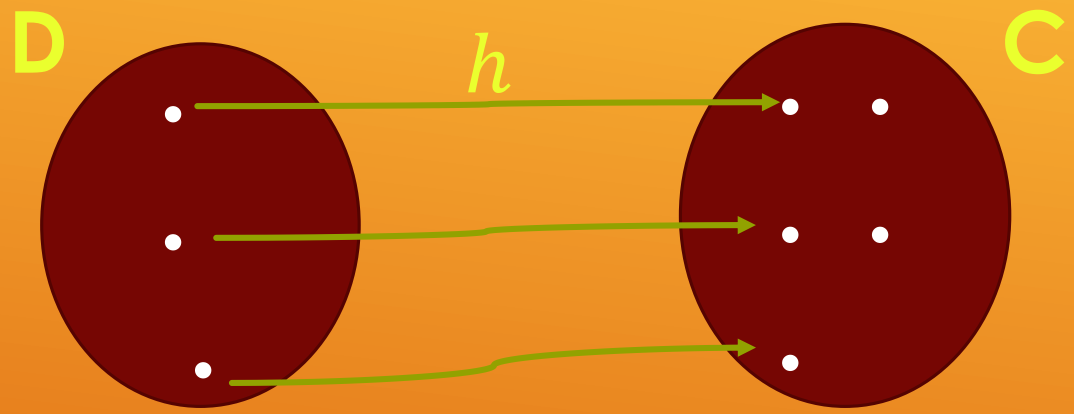
Podemos pensar que la función inversa de f, que se indica f^{-1} deshace lo que f hace. Es decir, si tomamos la variable independiente x y le aplicamos la función f obtenemos $f(x)$ y si a $f(x)$ le aplicamos la inversa f^{-1} logramos la variable x de la cual partimos.



No todas las funciones poseen inversas que resulten función. Si Comparamos las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura observamos que f nunca adopta el mismo valor dos veces (dos entradas cualesquiera en D tienen salidas diferentes), en tanto que g adopta el mismo valor dos veces.
Las funciones que comparten esta característica con f se llaman funciones uno a uno(o biyectivas)






D
h
C

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas según la siguiente definición

Definición

Sea f una función uno a uno con dominio D e imagen I. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio I e imagen D y se define mediante:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier $y \in I$.