2.2 El límite de una función

Habiendo visto en la sección anterior cómo aparecen límites cuando deseamos hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, ahora llevamos nuestra atención a límites en general y a métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investiguemos el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La tabla siguiente da valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

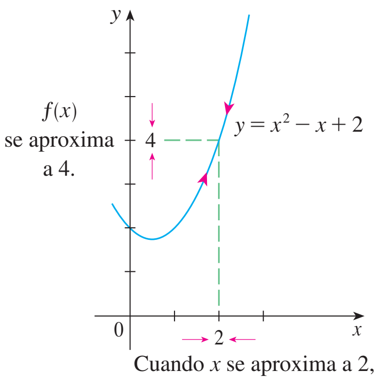


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

De la tabla y gráfica de f (una parábola) mostradas en la Figura 1, vemos que cuando x es cercana a 2 (en cualquiera de los lados de 2), $f(x)$ es cercana a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ sean tan cercanos a 4 como queramos al tomar x suficientemente cerca de 2. Expresamos esto si decimos "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

1 Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L"

si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a L (tan cerca de L como queramos) al tomar x suficientemente cercana a a (en cualquier lado de a) pero no igual a a.

Más o menos, esto dice que los valores de $f(x)$ tienden a acercarse cada vez más al número L a medida que x se acerque más y más al número a (desde cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

que por lo general se lee "$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a".

Observe la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, nunca consideramos $x = a$. En realidad, no es necesario incluso definir $f(x)$ cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo f se define *cerca* de a.

La Figura 2 muestra las gráficas de estas tres funciones. Observe que, en el inciso (c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso (b), $f(a) \neq L$. Pero, en cada caso, cualquiera que sea lo que ocurra en a, es verdadero que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

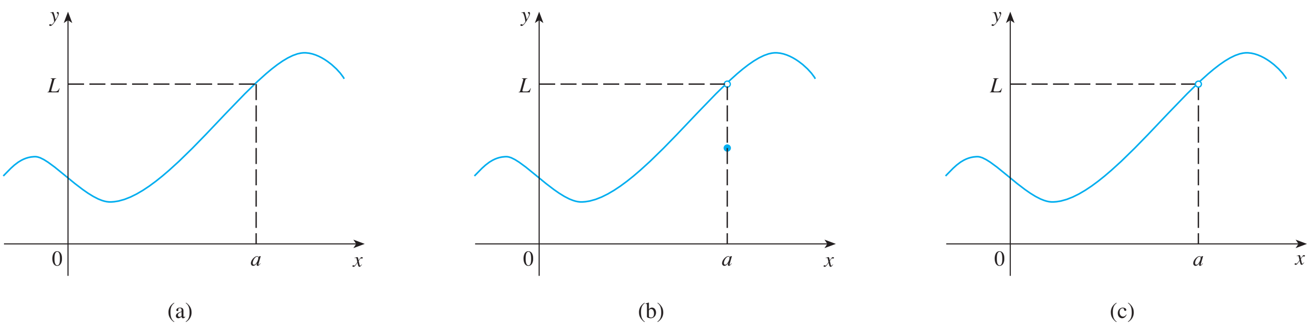


FIGURA 2 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 **Calcular un límite a partir de valores numéricos** Calcule el valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que consideramos valores de x que sean cercanos pero no iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (correctos a seis lugares decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, hacemos el cálculo de que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

El Ejemplo 1 está ilustrado por la gráfica de f en la Figura 3. Ahora cambiemos f ligeramente al darle el valor 2 cuando $x = 1$ y llamar g a la función resultante:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite cuando x se aproxima a 1. (Vea Figura 4.)

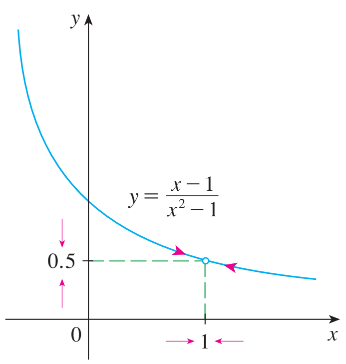


FIGURA 3

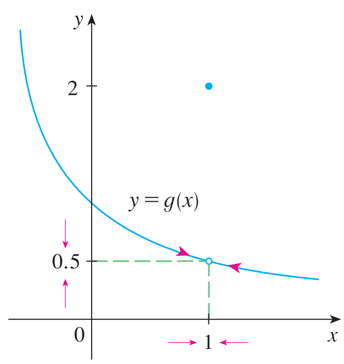


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Calcule el valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla contiene valores de la función para diversos valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t se aproxima a 0, los valores de la función parecen aproximarse a 0.1666666… y por tanto intuimos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

www.stewartcalculus.com
Para una explicación más completa de por qué las calculadoras a veces dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, vea la sección llamada *The Perils*

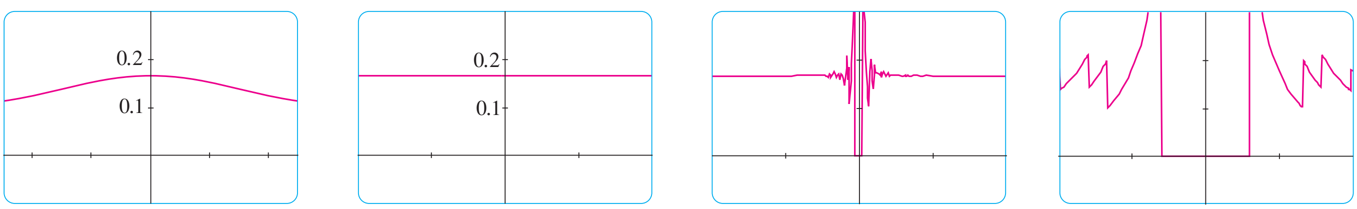
En el Ejemplo 2, ¿qué hubiera pasado si hubiéramos tomado valores de t todavía más pequeños? La tabla que se ve al margen muestra los resultados de una calculadora; usted puede ver que algo extraño parece estar pasando.

Si intenta estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero a final de cuentas obtendría el valor 0 si hace que t sea suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como demostraremos en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ es muy cercano a 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, un valor de calculadora para $\sqrt{t^2 + 9}$ es 3.000… hasta el número de dígitos que la calculadora pueda llevar.)

Algo similar pasa cuando intentamos graficar la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

del Ejemplo 2 en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos (a) y (b) de la Figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f y cuando usamos el modo *trace* (si lo tiene) podemos estimar fácilmente que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero, si hacemos demasiado acercamiento como en los incisos (c) y (d), entonces resultan gráficas imprecisas, otra vez debido a problemas con la sustracción.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Intuya el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recuerde que, si $x \in \mathbb{R}$, sen x significa el seno cuya medida en *radianes* es x), construimos una tabla de valores correcta a ocho lugares decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica de la Figura 6 intuimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Este cálculo es correcto en realidad, como demostraremos en el Capítulo 3 usando un argumento geométrico.

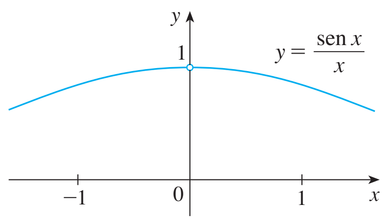


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Una función con comportamiento oscilante Investigue $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

Sistemas computarizados de álgebra

Los sistemas computarizados de álgebra (CAS, por sus siglas en inglés) tienen comandos que calculan límites. Para evitar los tipos de problemas demostrados en los Ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran límites por experimentación numérica. En cambio, usan técnicas más refinadas como por ejemplo el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un CAS, use el comando *limit* para calcular los límites en los ejemplos de esta sección y comprobar su respuesta en los ejercicios de este capítulo.

SOLUCIÓN Otra vez, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si evaluamos la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a intuir que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Observe que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para infinitamente muchos valores de x que se aproximan a 0. La gráfica de f está dada en la Figura 7.

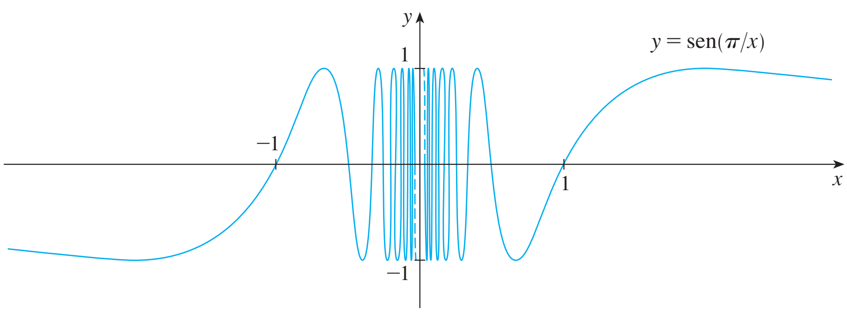


FIGURA 7

Las líneas interrumpidas cerca del eje y indican que los valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando x se aproxima a 0. (Use una calculadora graficadora para graficar f y hacer un acercamiento hacia el origen varias veces. ¿Qué observa?

Debido a que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right)$.

SOLUCIÓN Al igual que antes, construimos una tabla de valores. De la primera tabla al margen se ve que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0$$

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10{,}000}$$

Más adelante veremos que $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$; entonces se deduce que el límite es 0.0001.

Los Ejemplos 4 y 5 ilustran algunas de las dificultades para intuir el valor de un límite. Es fácil intuir lo erróneo de un valor si usamos valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como lo demuestra el análisis después del Ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. En la siguiente sección, no obstante, desarrollaremos métodos eficientes para calcular límites.

V **EJEMPLO 6** **Un límite que no existe** La función H de Heaviside está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

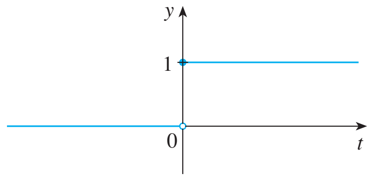


FIGURA 8
La función de Heaviside

[Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se conecte en un tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la Figura 8.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un solo número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxime a 0. Por tanto, $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.

Límites laterales

Ya vimos en el Ejemplo 6 que $H(t)$ se aproxima a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ se aproxima a 1 cuando t se aproxima a 0 por la derecha. Indicamos esta situación simbólicamente si escribimos

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que consideramos sólo valores de t que sean menores a 0. Del mismo modo, "$t \to 0^+$" indica que consideramos sólo valores de t que sean mayores a 0.

2 Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y decimos que el **límite del lado izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ sean arbitrariamente cercanos a L al tomar x cercano lo suficiente a a y x menor que a.

Observe que la Definición 2 difiere de la Definición 1 sólo en que requerimos que x sea menor que a. Del mismo modo, si pedimos que x sea mayor que a, obtenemos "el **límite del lado derecho de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces el símbolo "$x \to a^+$" significa que consideramos sólo $x > a$. Estas definiciones están ilustradas en la Figura 9.

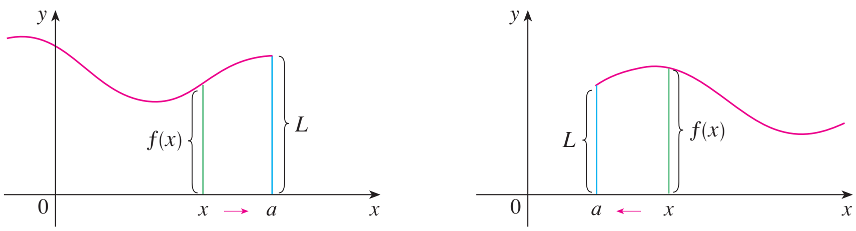


FIGURA 9 (a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la Definición 1 con las definiciones de límites laterales, vemos que lo siguiente es verdadero.

3 $$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

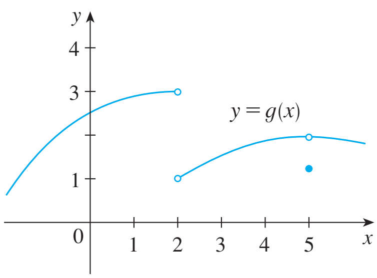


FIGURA 10

V EJEMPLO 7 Límites laterales a partir de una gráfica La gráfica de una función g se muestra en la Figura 10. Úsela para expresar los valores (si existen) de lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN De la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por tanto

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites izquierdo y derecho son diferentes, concluimos de (3) que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Esta vez los límites izquierdo y derecho son iguales y entonces, por (3), tenemos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

SOLUCIÓN A medida que x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla al margen.) En realidad, se ve en la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ mostrada en la Figura 11 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x cercana lo suficiente a 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo cual $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

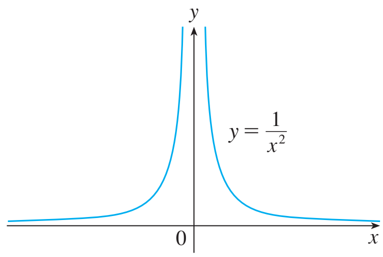


FIGURA 11

Al principio de esta sección consideramos la función $f(x) = x^2 - x + 2$ y, con base en evidencia numérica y gráfica, vimos que

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

De acuerdo con la Definición 1, esto significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer tan cercanos a 4 como queramos, siempre que tomemos x suficientemente cercana a 2. En el siguiente ejemplo usamos métodos gráficos para determinar qué tan cerca es suficientemente cerca.

EJEMPLO 9 Si $f(x) = x^2 - x + 2$, ¿qué tan cerca de 2 tiene que estar x para asegurar que $f(x)$ esté dentro de una distancia de 0.1 del número 4?

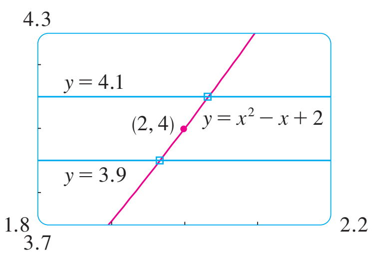


FIGURA 12

SOLUCIÓN Si la distancia de $f(x)$ a 4 es menor a 0.1, entonces $f(x)$ está entre 3.9 y 4.1, por lo que el requisito es que

$$3.9 < x^2 - x + 2 < 4.1$$

Entonces necesitamos determinar los valores de x tales que la curva $y = x^2 - x + 2$ está entre las rectas horizontales $y = 3.9$ y $y = 4.1$. Graficamos la curva y rectas cerca del punto (2, 4) en la Figura 12. Con el cursor, estimamos que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 3.9$ y la curva $y = x^2 - x + 2$ es aproximadamente 1.966. Del mismo modo, la curva cruza la recta $y = 4.1$ cuando $x \approx 2.033$. Por tanto, redondeando para estar seguros, concluimos que

$$3.9 < x^2 - x + 2 < 4.1 \quad \text{cuando} \quad 1.97 < x < 2.03$$

Por tanto, $f(x)$ está dentro de una distancia 0.1 de 4 cuando x está dentro de una distancia 0.03 de 2.

La idea que hay detrás del Ejemplo 9 se puede usar para formular la definición precisa de un límite que se estudia en el Apéndice D.

2.2 Ejercicios

1. Explique en sus propias palabras qué significa la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que este enunciado sea verdadero y todavía $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique lo que significa decir que

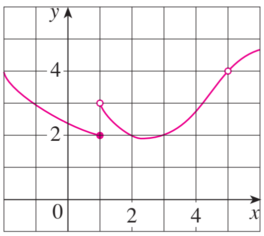
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

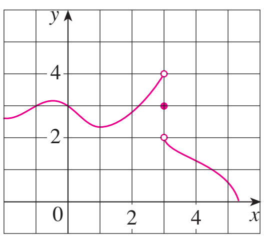
(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



4. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$

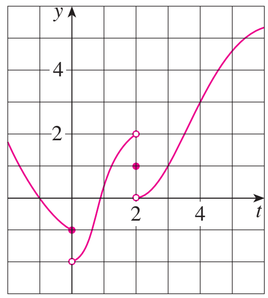


5. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$



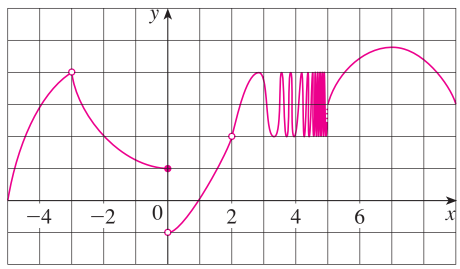
6. Use la gráfica dada de la función h para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$



7–8 Trace la gráfica de la función y úsela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

7. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

9–11 Use la gráfica de la función f para expresar el valor de cada límite, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

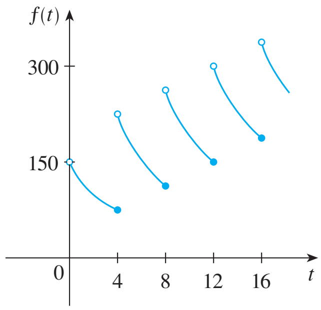
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - 2\cos 2x}}{x}$

12. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 12^+} f(t)$$

y explique la importancia de estos límites laterales.



13–16 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2, \quad f(0) = 1$

14. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 2,$

$f(0) = -1, \quad f(3) = 1$

15. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 2,$

$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

16. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 3,$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

17–20 Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).

17. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \quad x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$

$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

18. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$

$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$

$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

19. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}, \quad t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

20. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^5 - 32}{h},$

$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

21–24 Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. Si tiene calculadora graficadora, úsela para confirmar gráficamente su resultado.

21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25. (a) Al graficar la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y hacer acercamiento (zoom) hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y, estime el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Compruebe su respuesta en el inciso (a) al evaluar $f(x)$ para valores de x que se aproximen a 0.

26. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

al graficar la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Exprese su respuesta correcta a dos lugares decimales.
(b) Compruebe su respuesta en el inciso (a) al evaluar $f(x)$ para valores de x que se aproximen a 0.

27. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ a cinco lugares decimales. ¿Le parece conocido este número?
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

28. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$ en el punto $(0, 1)$ es $\lim_{x \to 0} (2^x - 1)/x$. Estime la pendiente a tres lugares decimales.

29. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05, e intuya el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Intuya otra vez.

30. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.
(b) Intuya el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.
(c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que al final se llegue a un valor de 0 para $h(x)$. ¿Todavía tiene usted confianza en que su estimación en el inciso (b) es correcto? Explique por qué finalmente obtuvo valores de 0. (En la Sección 4.5 se explicará un método para evaluar el límite.)
(d) Grafique la función h en el rectángulo de observación $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y para estimar el

límite de $h(x)$ cuando x se aproxima a 0. Continúe haciendo acercamientos hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

31. Use una gráfica para determinar qué tan cerca de 2 tenemos que llevar x para asegurar que $x^3 - 3x + 4$ está dentro de una distancia de 0.2 del número 6. ¿Qué pasa si insistimos en que $x^3 - 3x + 4$ está dentro 0.1 de 6?

32. (a) Use evidencias numérica y la gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 debe estar x para asegurar que la función del inciso (a) está dentro de una distancia de 0.5 de su límite?

2.3 Cálculo de límites usando las leyes del límite

En la Sección 2.2 usamos calculadoras y gráficas para calcular los valores de límites, pero vimos que estos métodos no siempre llevan a la respuesta correcta. En esta sección usamos las siguientes propiedades, llamadas *Leyes de los Límites*, para calcular límites.

Leyes de los Límites Suponga que c es una constante y existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces,

1. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\displaystyle \lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

Ley de la suma

1. El límite de una suma es la suma de los límites.

Ley de la diferencia

2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

Ley del múltiplo constante

3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Ley del producto

4. El límite de un producto es el producto de los límites.

Ley del cociente

5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0.)

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a L y $g(x)$ es cercana a M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para creer que la Ley 1 es verdadera. Todas estas leyes se pueden demostrar con el uso de la definición precisa de un límite. En el Apéndice E damos la prueba de la Ley 1.

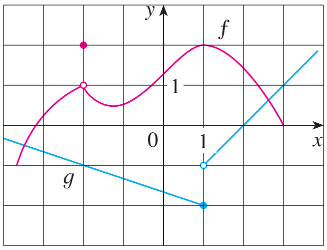


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Use las Leyes de los Límites y las gráficas de f y g de la Figura 1 para evaluar los siguientes límites, si existen.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(Por la ley 1)} \\
&= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(Por la ley 3)} \\
&= 1 + 5(-1) = -4
\end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites izquierdo y derecho son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Por tanto, podemos usar la Ley 4 para el límite deseado. Pero *podemos* usar la Ley 4 para los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Los límites izquierdo y derecho no son iguales, por lo cual $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ no existe.

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como el límite del denominador es 0, no podemos usar la Ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 mientras que el numerador se aproxima a un número diferente de 0.

Si usamos repetidamente la Ley del Producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la ley siguiente.

Ley de potencias

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ donde n es un entero positivo.

Al aplicar estas seis leyes del límite, necesitamos usar dos límites especiales:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (expréselos en palabras o trace gráficas de $y = c$ y $y = x$).

Si ahora ponemos $f(x) = x$ en la Ley 6 y usamos la Ley 8, obtenemos otro límite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Un límite similar se cumple para raíces como sigue.

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley.

Ley de la raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por Leyes 2 y 1)}\\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por 3)}\\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por 9, 8 y 7)}\\
&= 39
\end{aligned}$$

(b) Empezamos por usar la Ley 5, pero su uso está justificado plenamente sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y denominador y el límite del denominador no es 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(por Ley 5)}\\
&= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(por 1, 2 y 3)}\\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(por 9, 8 y 7)}\\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Nota: Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta en el Ejemplo 2(a) al sustituir 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del Ejemplo 2 son una función con polinomio y una racional, y un uso similar de las Leyes del Límite demuestra que la sustitución directa siempre funciona para estas funciones (vea Ejercicios 43 y 44). Expresamos este hecho como sigue.

Propiedad de la sustitución directa Si f es una función polinomial o una racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con la Propiedad de Sustitución Directa se denominan *continuas en a* y se estudiarán en la Sección 2.4. No obstante, no todos los límites pueden ser evaluados por sustitución directa, como muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 **La sustitución directa no siempre funciona** Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley del Cociente, porque el límite del denominador es 0. En cambio necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y por tanto $x - 1 \neq 0$. Por tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo apareció en la Sección 2.1 cuando estábamos tratando de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

Nota: En el Ejemplo 3 pudimos calcular el límite al sustituir la función dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por una función más sencilla, $g(x) = x + 1$, con el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 1$, y al calcular un límite cuando x se aproxima a 1 no consideramos lo que ocurre cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, tenemos el siguiente dato útil.

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, siempre que existan los límites.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x se aproxima a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año en que murió Galileo. Cuando entró a la Universidad de Cambridge en 1661 Newton no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió rápidamente leyendo las obras de Euclides y Descartes y asistiendo a conferencias de Isaac Barrow. Cambridge estuvo cerrado debido a la peste bubónica en 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Aquellos dos años fueron sorprendentemente productivos porque en aquel tiempo hizo cuatro de sus principales descubrimientos: (1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; (2) su trabajo sobre cálculo diferencial e integral; (3) sus leyes del movimiento y ley de gravitación universal; y (4) sus experimentos con prismas sobre la naturaleza de la luz y el color. Por el temor a controversias y a críticas, se negaba a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, por recomendación del astrónomo Halley, que Newton publicó *Principia Mathematica*. En esta obra, el tratado científico más importante jamás escrito, Newton enunció su versión de cálculo y la usó para investigar la mecánica, dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes hechos por sabios de la antigua Grecia, por ejemplo Eudoxio y Arquímedes. Aun cuando algunos aspectos de la idea de un límite están explícitos en su "método de agotamiento", Eudoxio y Arquímedes nunca formularon de manera explícita el concepto de un límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, inmediatos precursores de Newton en la creación del cálculo, no usaron realmente límites. Fue Isaac Newton el primero en hablar explícitamente sobre límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se aproximan más que por cualquier diferencia dada." Newton expresó que el límite era el concepto básico en cálculo, pero se dejó a matemáticos posteriores como Cauchy aclarar las ideas de Newton acerca de límites.

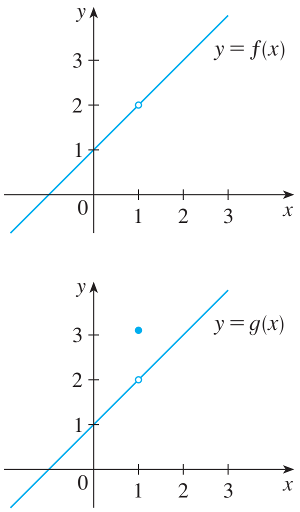


FIGURA 2
Gráficas de las funciones f (del Ejemplo 3) y g (del Ejemplo 4)

Observe que los valores de las funciones de los Ejemplos 3 y 4 son idénticos excepto cuando $x = 1$ (véase la Figura 2) y por tanto tienen el mismo límite cuando x se aproxima a 1.

V EJEMPLO 5 Encuentre un límite al simplificar la función Evalúe $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

entonces, como en el Ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h\to 0} F(h)$ al hacer $h = 0$ porque $F(0)$ no está definida. Pero, si simplificamos $F(h)$ algebraicamente, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h se aproxime a 0.) Así,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Cálculo de un límite por racionalización Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar de inmediato la Ley del Cociente, porque el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma el trabajo de cálculo que hicimos en el Ejemplo 2 en la Sección 2.2.

Algunos límites se calculan mejor si primero encontramos los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que descubrimos en la Sección 2.2. Dice que existe un límite si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales.

1 Teorema $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, usamos el hecho de que las Leyes del Límite también se cumplen para límites laterales.

EJEMPLO 7 **Hallar un límite al calcular límites por la izquierda y por la derecha** Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del Ejemplo 7 se ve plausible de la Figura 3.

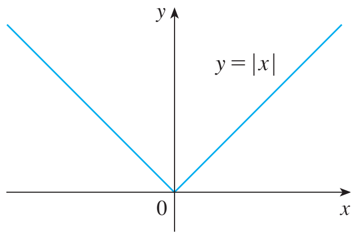


FIGURA 3

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ y así

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

V **EJEMPLO 8** Demuestre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

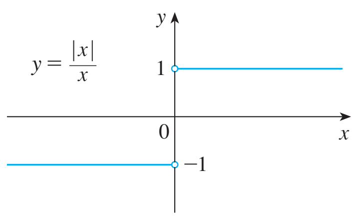


FIGURA 4

Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se deduce del Teorema 1 que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la Figura 4 y apoya los límites laterales que encontramos.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. La función de entero máximo a veces recibe el nombre de *función de nivel mínimo*.

EJEMPLO 9 La **función de entero máximo** está definida por $[\![x]\!]$ = el entero máximo que sea menor o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función de entero máximo se muestra en la Figura 5. Como $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

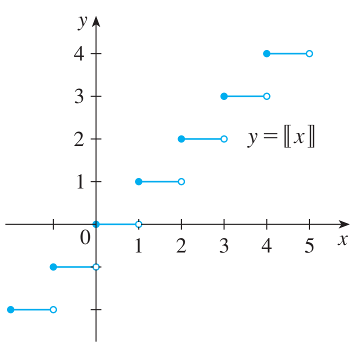


FIGURA 5
Función de entero máximo

Como $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

Como estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe por el Teorema 1.

Los siguientes dos teoremas aportan dos propiedades adicionales de límites. Ambos pueden demostrarse usando la definición precisa de un límite del Apéndice D.

2 **Teorema** Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x es cercana a a (excepto posiblemente en a) y los límites de f y g existen cuando x se aproxima a a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

3 **Teorema de la compresión** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x es cercana a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

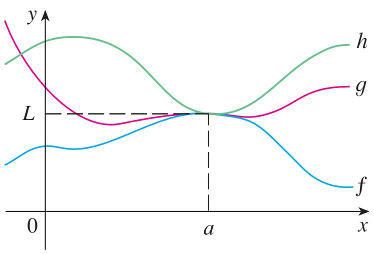


FIGURA 6

El Teorema de Compresión, que a veces recibe el nombre de Teorema de Interpolación o Teorema de Contracción, se ilustra en la Figura 6. Nos dice que si $g(x)$ está atrapada entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

V EJEMPLO 10 **Cómo comprimir una función** Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero observamos que **no podemos** usar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (vea Ejemplo 4 en la Sección 2.2).

En lugar de esto aplicamos el Teorema de Compresión y por tanto necesitamos hallar una función f menor a $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor a g tal que $f(x)$ y $h(x)$ se aproximen a 0. Para hacer esto usamos nuestro conocimiento de la función seno. Como la función seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos escribir

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1 \qquad \boxed{4}$$

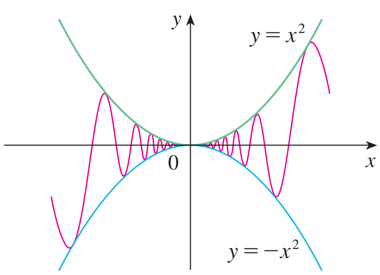


FIGURA 7
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Cualquier desigualdad continúa siendo verdadera cuando se multiplique por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x y por tanto, al multiplicar por x^2 cada lado de las desigualdades de (4) obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la Figura 7. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, y $h(x) = x^2$ en el Teorema de Compresión, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

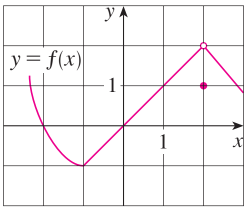
encuentre los límites que existen. Si no existe el límite, explique por qué.

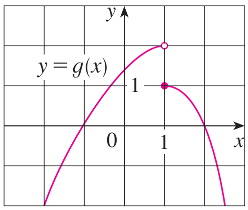
(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe; si no existe, explique por qué.





(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–7 Evalúe el límite y justifique cada paso al indicar la Ley(es) de los Límites apropiada.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{t \to -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5$

5. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

8. (a) ¿Qué está mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

9–24 Evalúe el límite, si existe.

9. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

10. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

11. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

12. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

13. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

14. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

16. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

17. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

19. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

21. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

22. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

23. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

24. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

25. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e intuya el valor del límite.

(c) Use la Ley de los Límites para demostrar que su intuición es correcta.

26. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ a dos lugares decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite a cuatro lugares decimales.

(c) Use las Leyes de los Límites para hallar el valor exacto del límite.

27. Use el Teorema de Compresión para demostrar que $\lim_{x \to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre al graficar las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ en la misma pantalla.

28. Use el Teorema de Compresión para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre al graficar las funciones f, g y h (en la notación del Teorema de Compresión) en la misma pantalla.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC