Teoría de Conjuntos

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
LICENCIATURA EN SISTEMAS

Esp. Silvina San Miguel

Operaciones con Conjuntos

Unión de Conjuntos

- **Axioma 5 (Axioma de la unión de conjuntos)**

  "Dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto U tal que $A \subset U$ y $B \subset U$".

- **Definición:**

  Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, la unión de A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos $x \in U$ tales que $x \in A$ o $x \in B$.

  Simbólicamente

$$A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

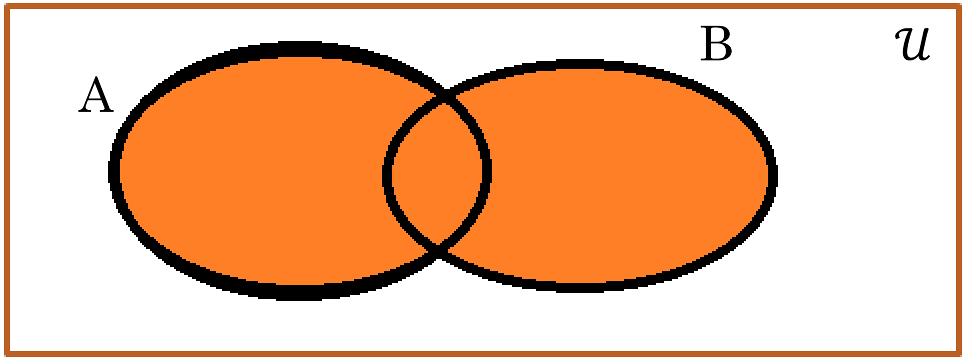
  Es decir

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$$

UNIÓN DE CONJUNTOS

- Gráficamente:

  $A \cup B$



- Relacionando con el Álgebra Proposicional

  Sean $A = \{x \in U \,/\, A(x)\}$ y $B = \{x \in U \,/\, B(x)\}$, los conjuntos de verdad de $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, definimos:

  Conjunto Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, A(x) \in B(x)\}$, la unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la disyunción de las funciones proposicionales correspondientes.

Unión de conjuntos

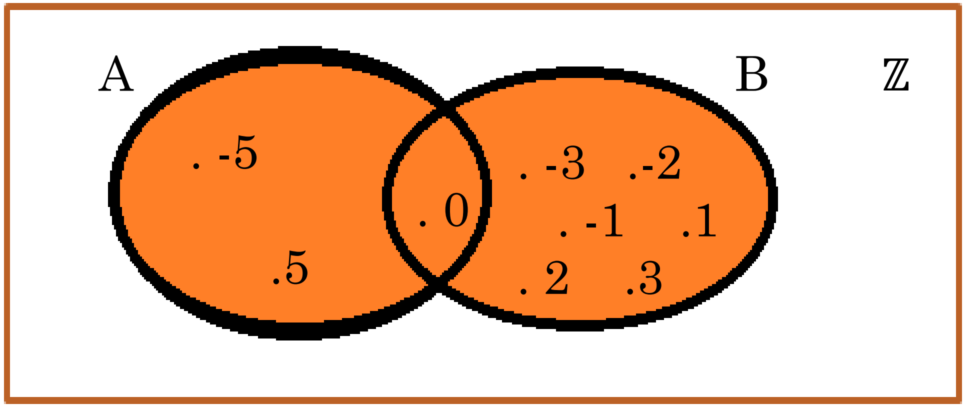
Ejemplos

- Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 25x = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 4\}$

$$x^3 - 25x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 25) = 0$$
$$x \cdot (x-5) \cdot (x+5) = 0$$
$$A = \{-5; 0; 5\}$$

$$|x| < 4$$
$$-4 < x < 4$$
$$B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$A \cup B = \{-5; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$$



Ejemplos

- Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x-1}{4} \geq 0\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

$$\frac{2x-1}{4} \geq 0$$

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

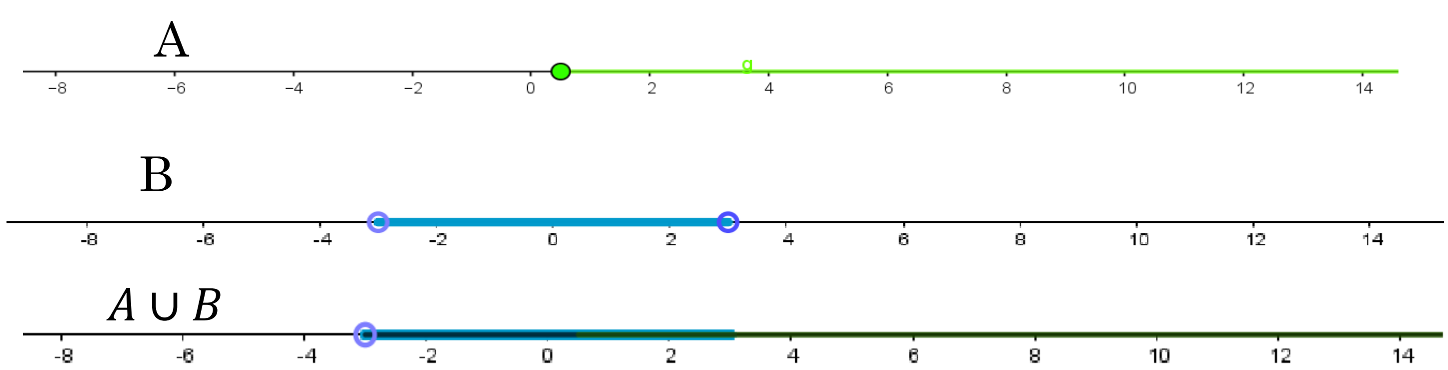
$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$A = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$|x| < 3$$
$$-3 < x < 3$$

$$B = (-3; 3)$$

$$\boxed{A \cup B = (-3; \infty)}$$



Operaciones con Conjuntos

Intersección de Conjuntos

- **Definición:**

  Sean A $\subset$ U y B $\subset$ U dos conjuntos, **la intersección de A y B,** denotada por $A \cap B$, es el conjunto formado por todos los elementos x de U, tales que x $\in$ A y x $\in$ B.

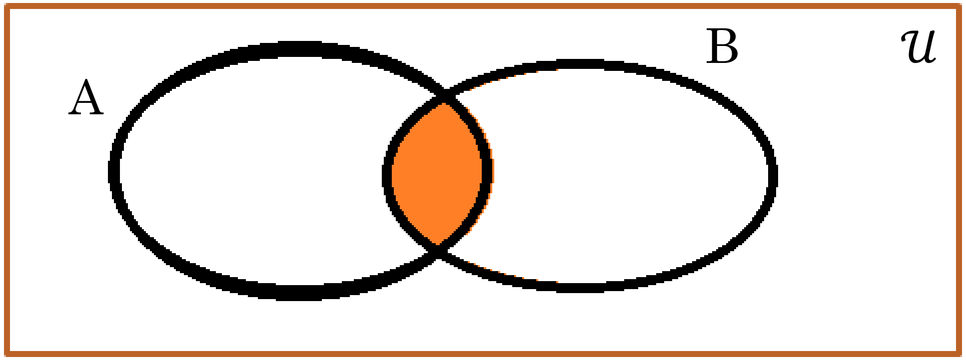
Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$

Es decir: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

- Gráficamente:

  $A \cap B$



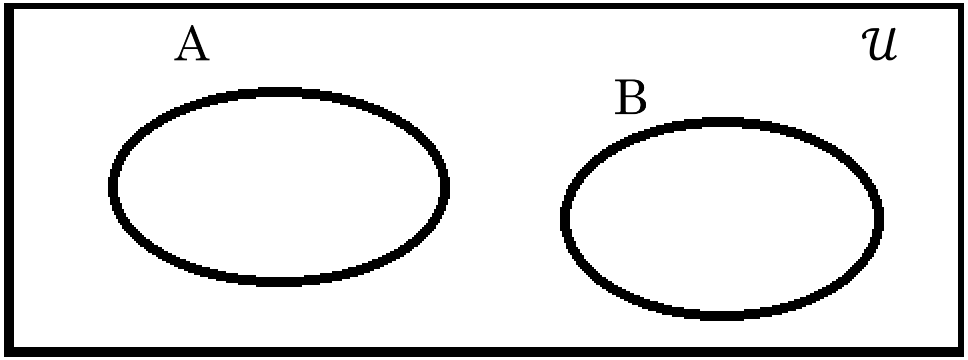
- Relacionando con el Álgebra Proposicional

  Sean $A = \{x \in U \,/\, A(x)\}$ y $B = \{x \in U \,/\, B(x)\}$, los conjuntos de verdad de $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, definimos:

  Conjunto Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, A(x) \wedge B(x)\}$, la intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la conjunción de las funciones proposicionales correspondientes.

Observación

Si $A \cap B = \emptyset$, se dirá que los conjuntos A y B son disjuntos.



Intersección de conjuntos

Ejemplos

- Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 25x = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 4\}$

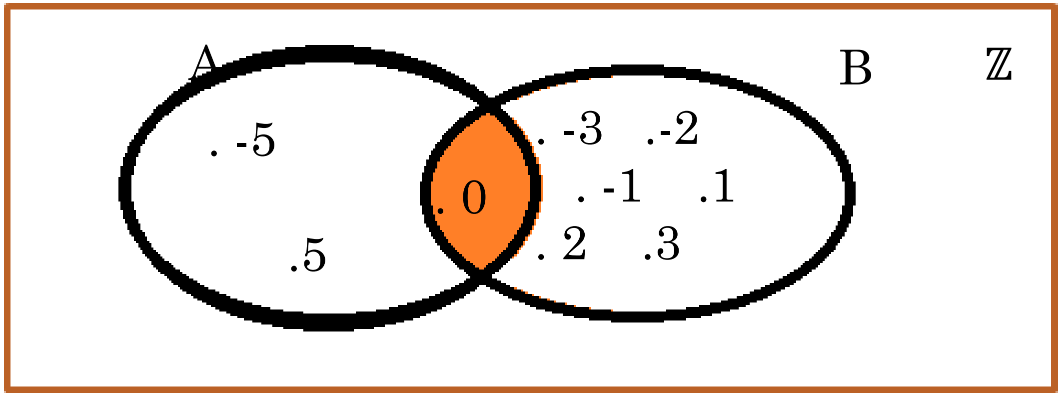
$$x^3 - 25x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 25) = 0$$
$$x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$$

$$A = \{-5; 0; 5\}$$

$$|x| < 4$$
$$-4 < x < 4$$

$$B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$A \cap B = \{0\}$



Ejemplos

- Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x-1}{4} \geq 0\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

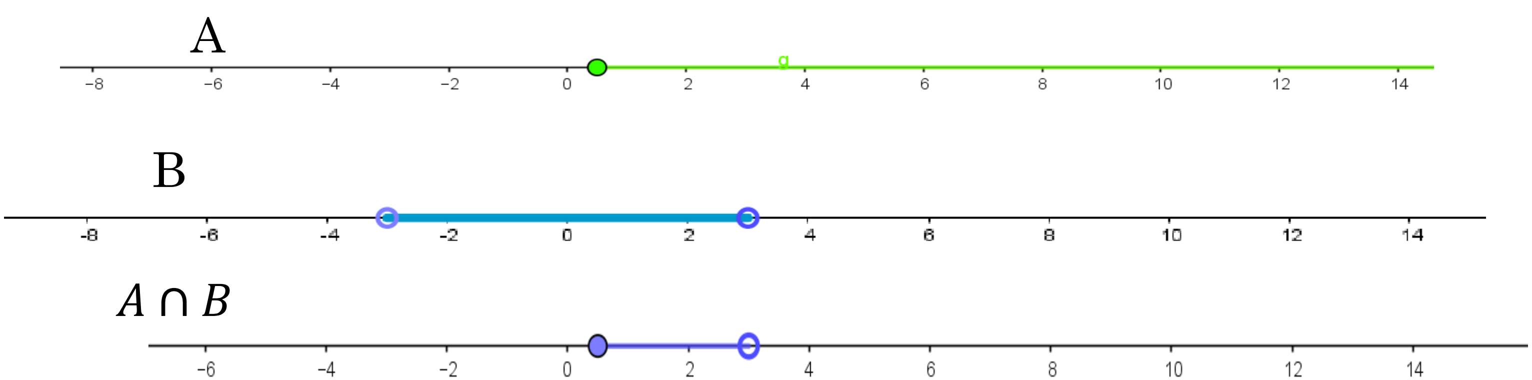
$$\frac{2x-1}{4} \geq 0$$
$$2x - 1 \geq 0$$
$$2x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$A = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$|x| < 3$$
$$-3 < x < 3$$

$$B = (-3; 3)$$

$$A \cap B = \left[\frac{1}{2}; 3\right)$$



Operaciones con Conjuntos

Diferencia de Conjuntos

- **Definición.-** Dados los conjuntos $A \subset U$ y $B \subset U$, **la diferencia de A y B**, denotado por $A - B$, es el conjunto formado por todos los elementos x de U tales que $x \in A$ y $x \notin B$.

  Simbólicamente:

$$A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

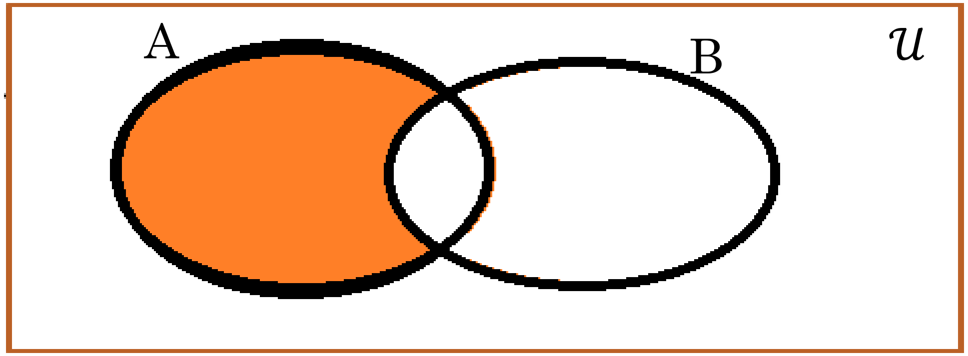
Es decir,

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow [\, x \in A \wedge x \notin B \,]$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

- Gráficamente

$A - B$



- Relacionando con el Álgebra Proposicional

Sean $A = \{x \in U \,/\, A(x)\}$ y $B = \{x \in U \,/\, B(x)\}$, los conjuntos de verdad de $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, definimos:

Conjunto Diferencia:

$A - B = \{x \in U \,/\, A(x) \wedge -B(x)\}$, la diferencia de dos conjuntos A y B en ese orden es el conjunto de verdad de la conjunción entre A(x) y la negación de B(x).

Diferencia de conjuntos

Ejemplos

- Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 25x = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 4\}$

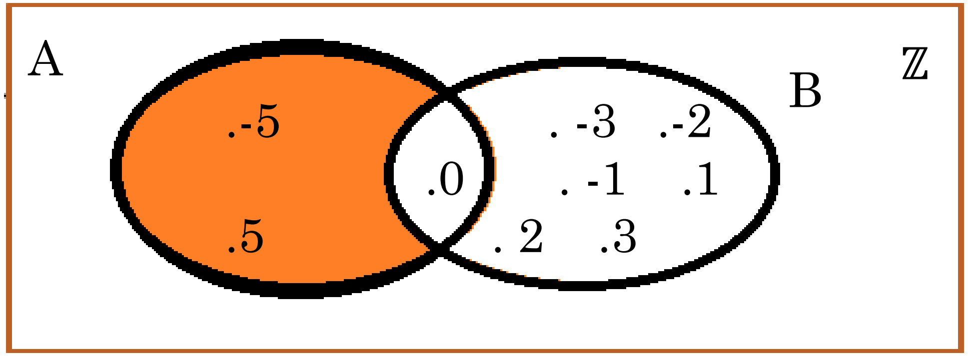
$$x^3 - 25x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 25) = 0$$
$$x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$$

$$A = \{-5; 0; 5\}$$

$$|x| < 4$$
$$-4 < x < 4$$

$$B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$\boxed{A - B = \{-5; 5\}}$$



Ejemplos

- Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x-1}{4} \geq 0\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

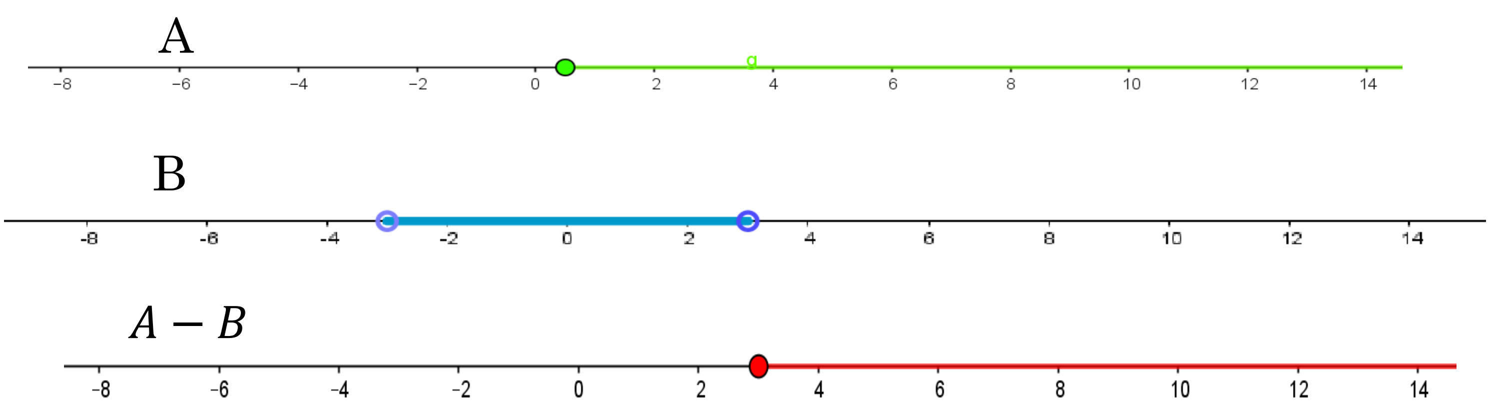
$$\frac{2x-1}{4} \geq 0$$
$$2x - 1 \geq 0$$
$$2x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$A = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$|x| < 3$$
$$-3 < x < 3$$

$$B = (-3; 3)$$

$$\boxed{A - B = [3; \infty)}$$



Operaciones con Conjuntos

Complemento de un conjunto con respecto al conjunto universal.

- **Definición.-** Sea A tal que A $\subset$ U. Se llama **complemento de A con respecto al conjunto universal**, y se denota $\bar{A}$ al conjunto $\mathcal{U} - A$.

  Por definición: **x pertenece a $\bar{A}$ si, y sólo si, x no es elemento de A.**

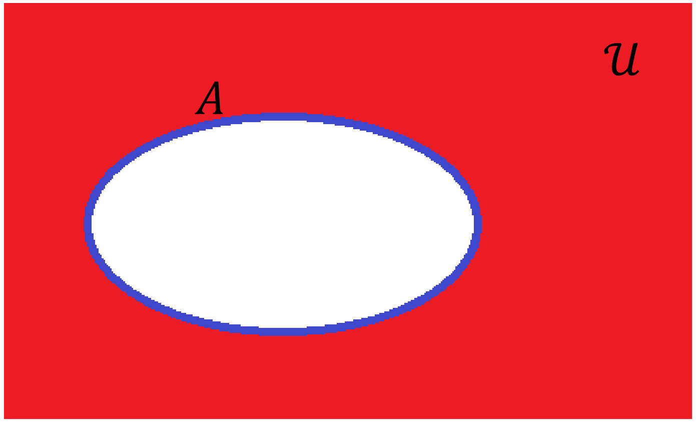
  En símbolos,

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A$$

Complemento de un conjunto

- Gráficamente

$\bar{A}$



- Relacionando con el Álgebra de Proposiciones.

  Sea $A = \{x \in U \;/\; A(x)\}$

  Complemento de un conjunto:

  $\bar{A} = \{x \in \mathcal{U} / -A(x)\}$ el complemento de un conjunto A es el conjunto de verdad de la negación de la función proposicional correspondiente.

Complemento de un conjunto

Ejemplos

- Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x-1}{4} \geq 0\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

$$\frac{2x-1}{4} \geq 0$$

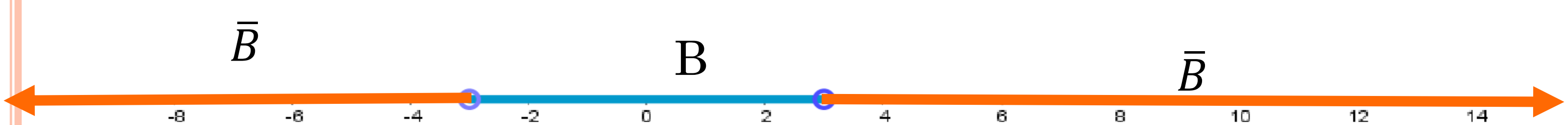
$$|x| < 3$$
$$-3 < x < 3$$

$$A = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$B = (-3; 3)$$

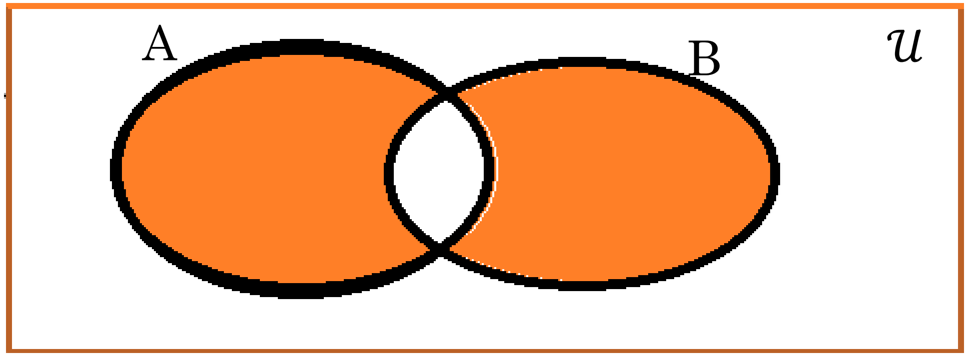
$$\boxed{\bar{A} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{\bar{B} = (-\infty; -3] \cup [3; \infty)}$$



DIFERENCIA SIMÉTRICA

- Gráficamente:



- Relacionando con el Álgebra de Proposiciones.

  Sean $A = \{x \in U \ / \ A(x)\}$ y $B = \{x \in U \ / \ B(x)\}$, los conjuntos de verdad de $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, definimos:

  Diferencia simétrica:

  $A \triangle B = \{x \in U \ / \ A(x) \underline{\vee} B(x)\}$, la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, es el conjunto de verdad de la disyunción excluyente de las funciones proposicionales correspondientes.

Diferencia simétrica

Ejemplos

- Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 25x = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 4\}$

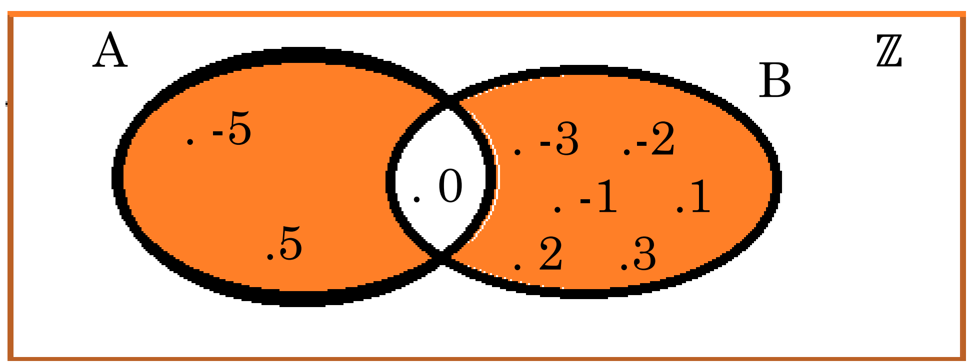
$$x^3 - 25x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 25) = 0$$
$$x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$$

$$A = \{-5; 0; 5\}$$

$$|x| < 4$$
$$-4 < x < 4$$

$$B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$\boxed{A \Delta B = \{-5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5\}}$$



Ejemplos

- Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x-1}{4} \geq 0\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

$$\frac{2x-1}{4} \geq 0$$
$$2x - 1 \geq 0$$
$$2x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$A = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$|x| < 3$$
$$-3 < x < 3$$

$$B = (-3; 3)$$

$$A \Delta B = \left(-3; \frac{1}{2}\right) \cup [3; \infty)$$