LÍMITE DE FUNCIONES

NOCIÓN INTUITIVA

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + x$

Completemos:

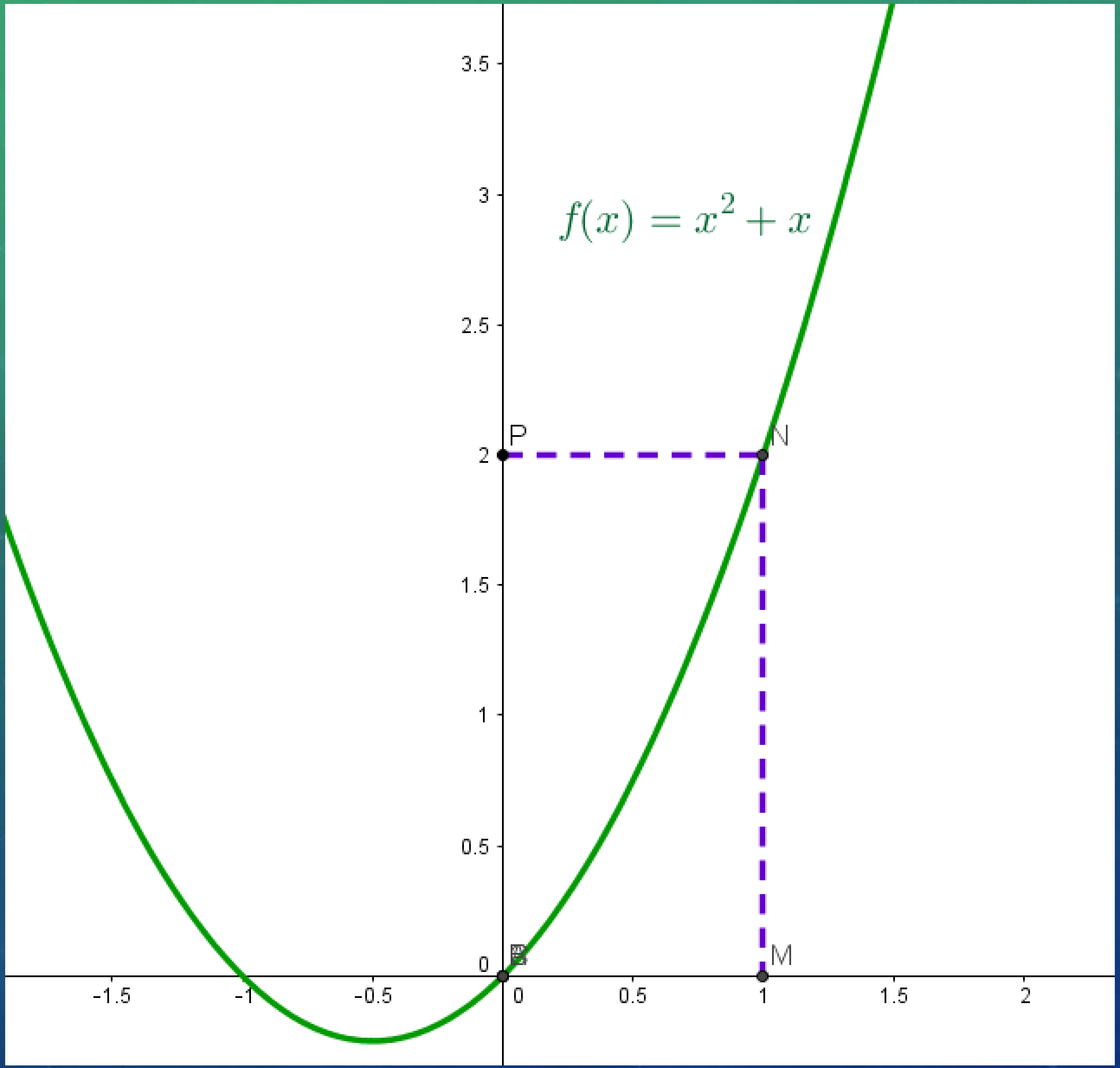
x tiende a 1 por la izquierda

x tiende a 1 por la derecha

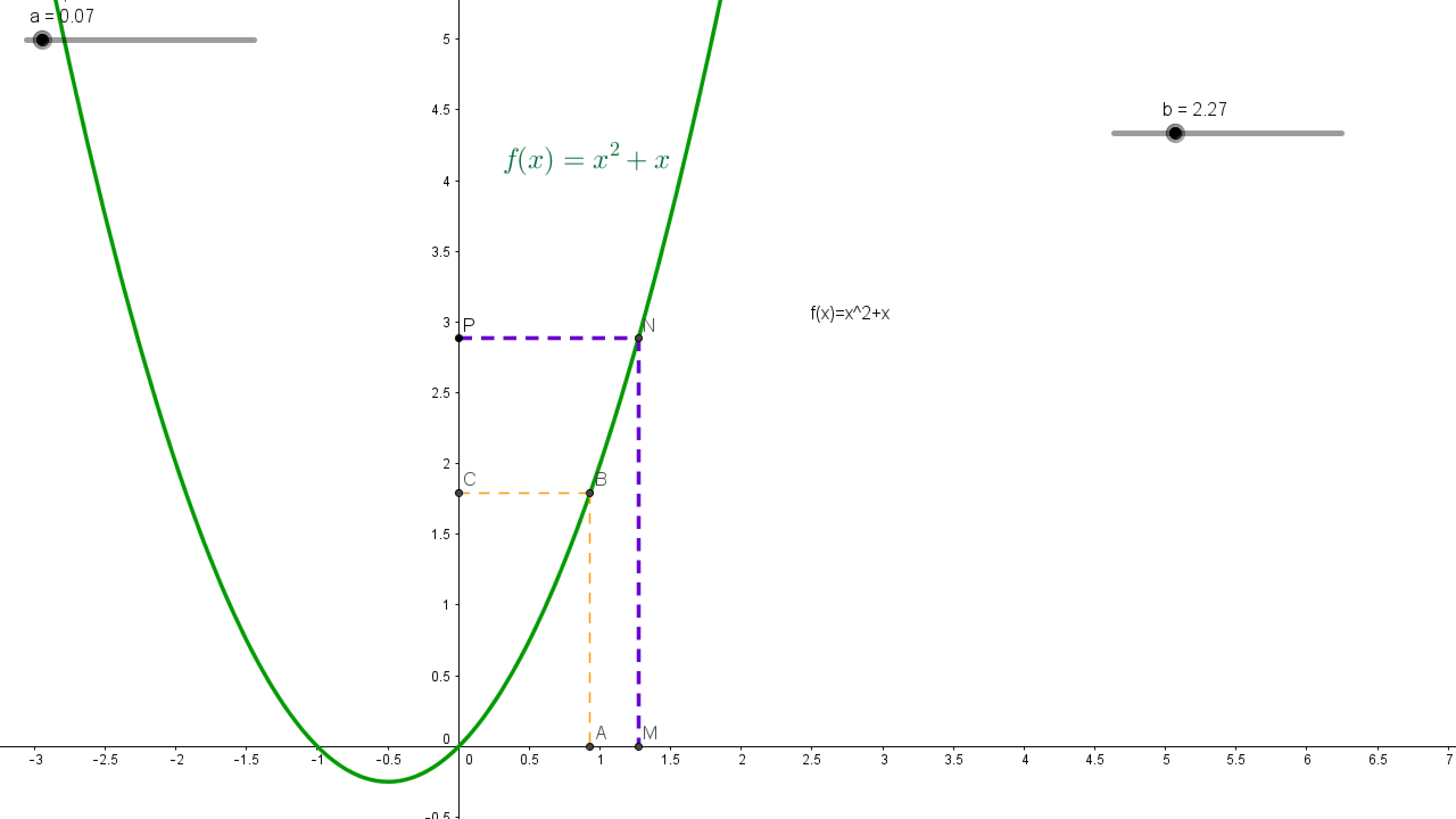
x	0	0,5	0,8	0,99	1	1,01	1,2	1,5	1,8	2
f(x)	0	0,75	1,44	1,97		2,03	2,64	3,75	5,04	6

f(x) tiende a .....

f(x) tiende a .....

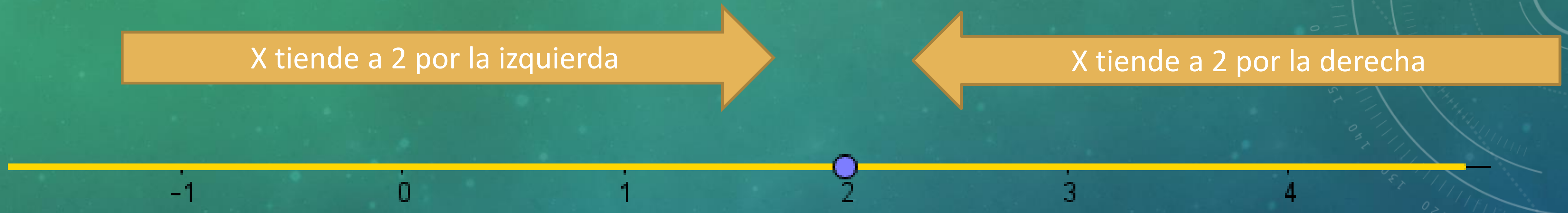


$f(x) = x^2 + x$
P
N
M
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



a = 0.07
b = 2.27
$f(x) = x^2 + x$
f(x)=x^2+x
P
N
C
B
A
M

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + x) = 2$$



$$x \to 2^{-}$$

$$x < 2$$

$$x \to 2^{+}$$

$$x > 2$$

Sea la función $f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$ cuyo dominio es:

$$D = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1\}$$

¿A qué valores se acerca $f(x)$ cuando x se aproxima a 1?

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

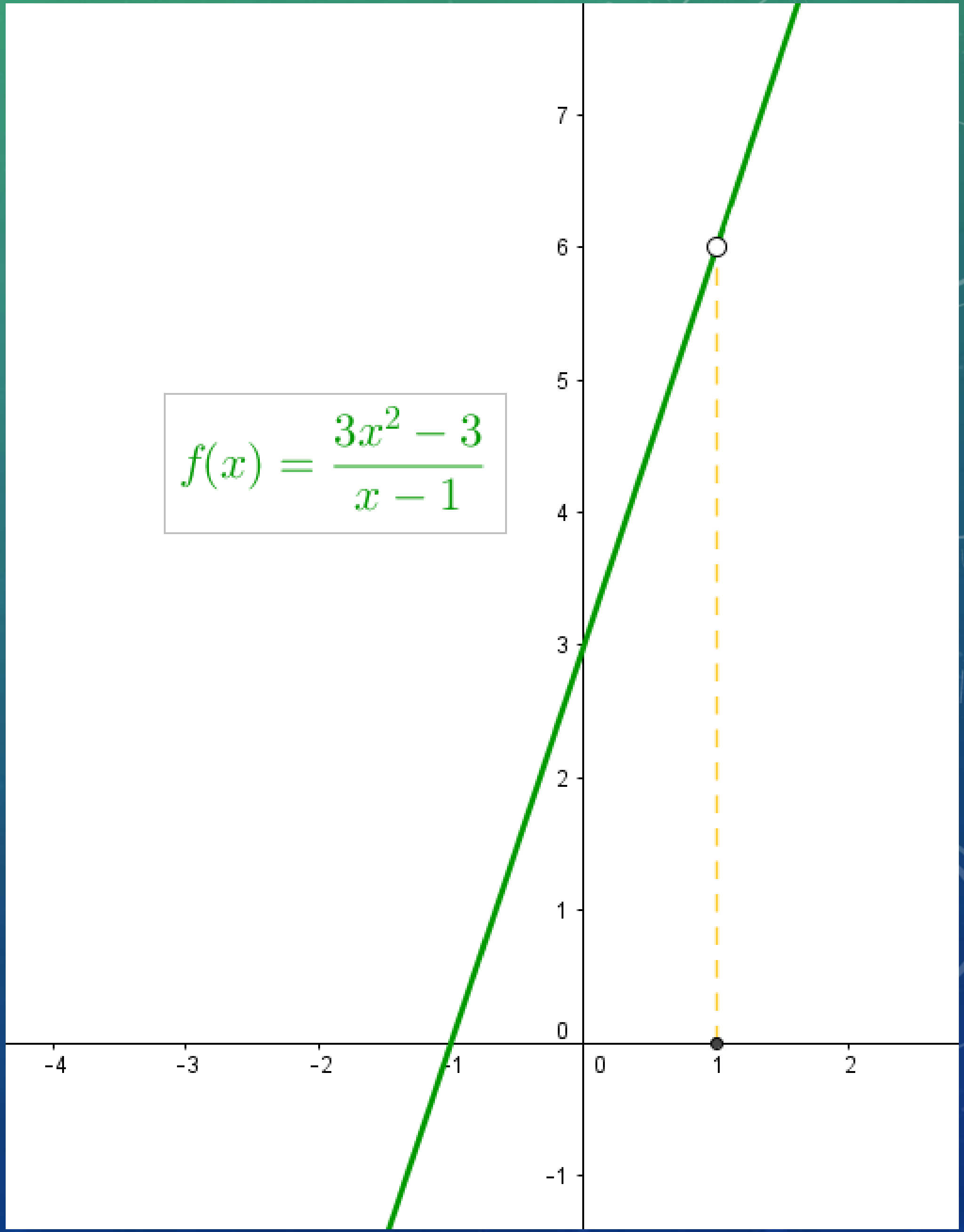
$x < 1$

$x > 1$

x	f(x)
0,9	5,7
0,95	5,85
0,99	5,97
0,995	5,985
0,999	5,997

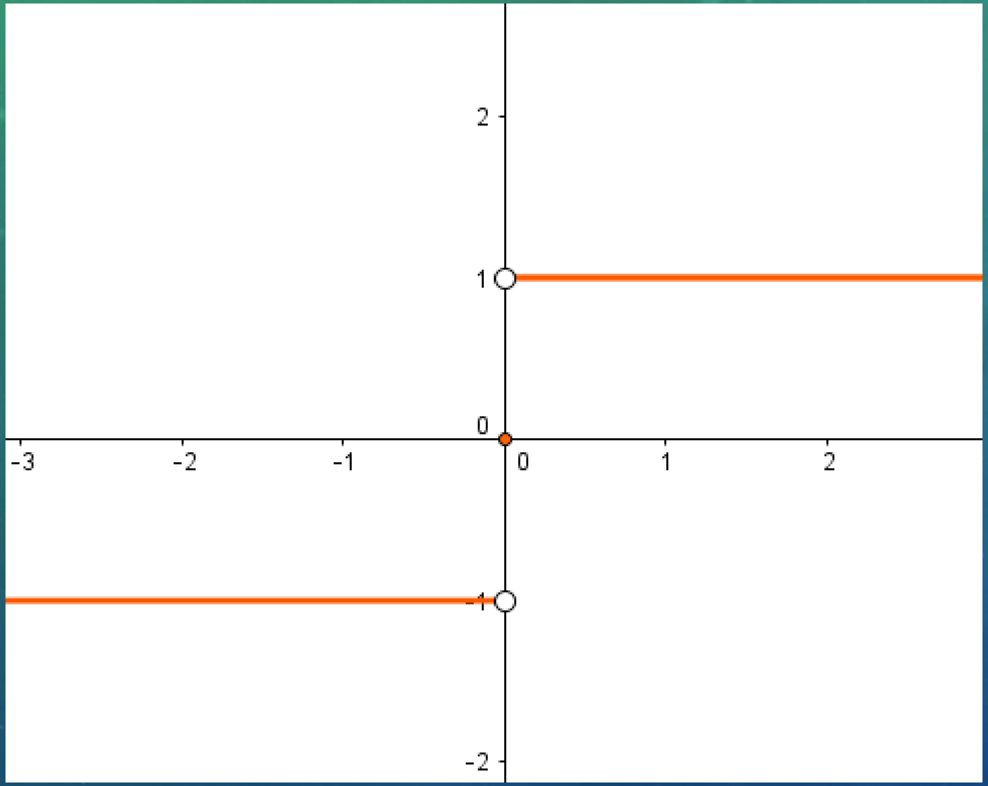
x	f(x)
1,1	6,3
1,05	6,15
1,01	6,03
1,005	6,015
1,001	6,003

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = 6$$



Ejemplo 1

Sea la función: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x)=\begin{cases}-1 \ \ si \ \ x<0\\ 0 \ \ si \ \ x=0\\ 1 \ \ si \ \ x>0\end{cases}$



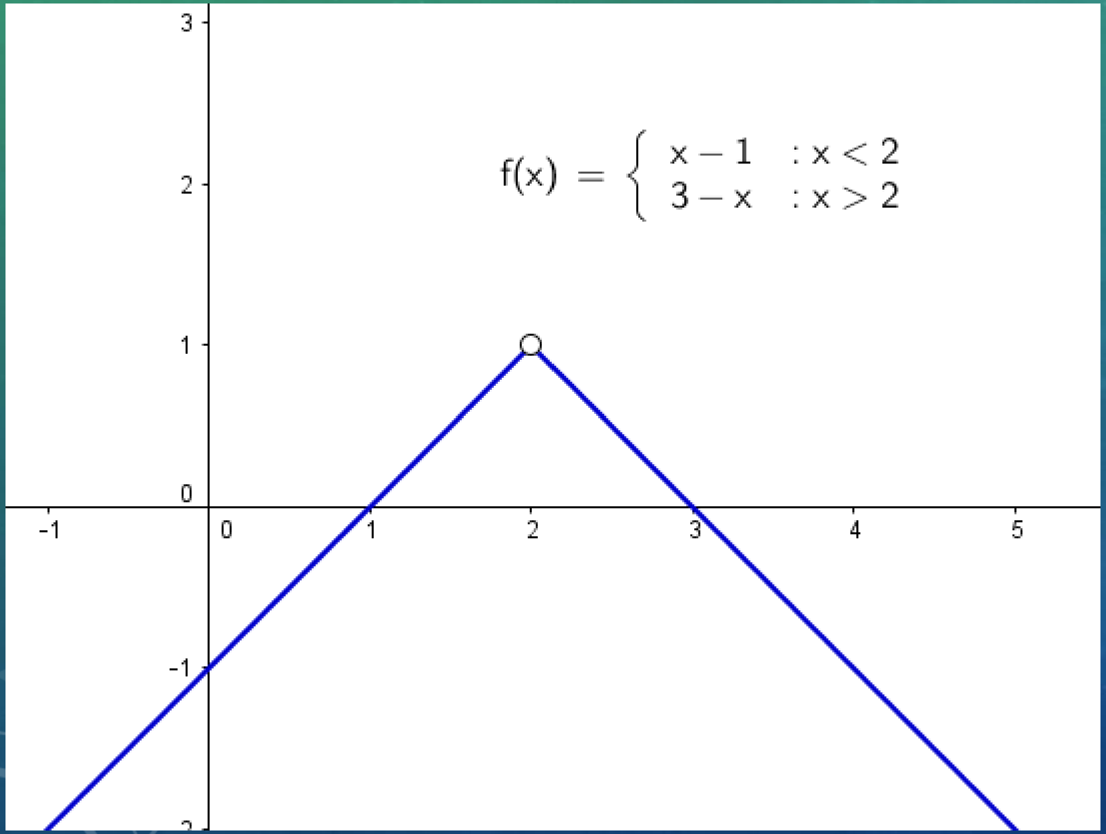
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=No\ existe$$

Ejemplo 2:

Sea la función : $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x - 1 \; si \; x < 2 \\ 3 - x \; si \; x > 2 \end{cases}$

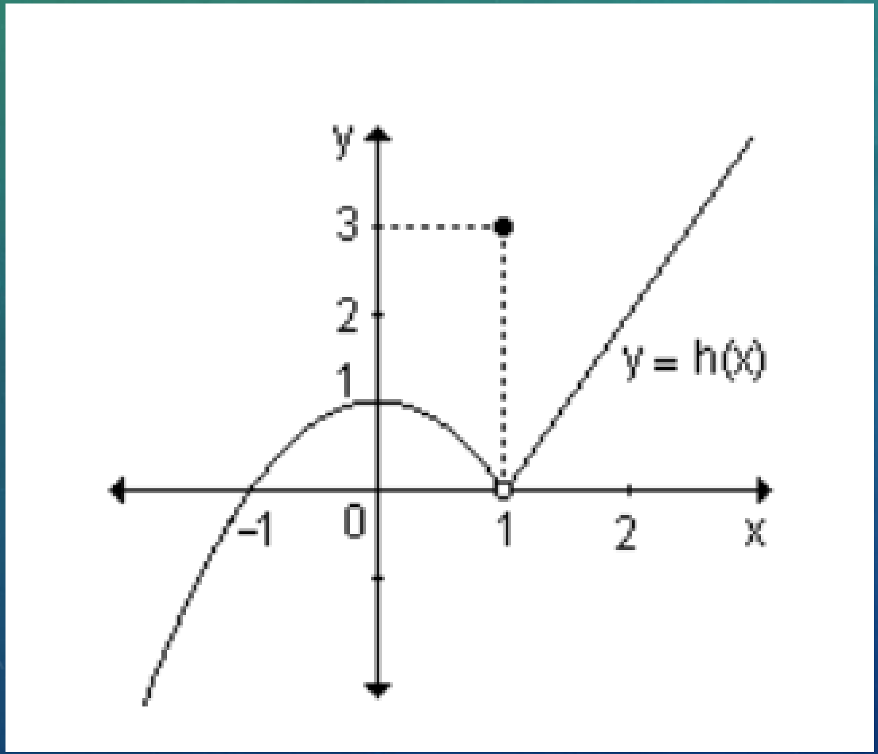


$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = 1$$

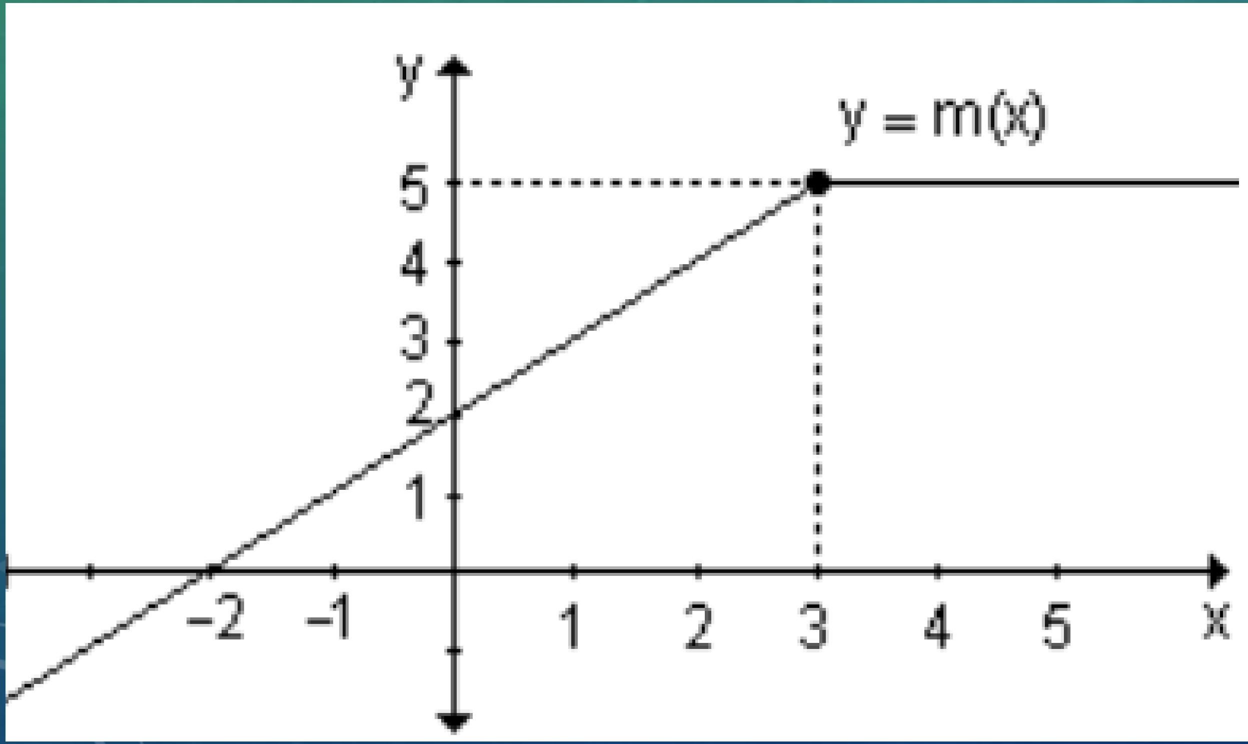
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

Ejemplo. Sea la función h : R → R / $h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$. Grafique la función y determine la imagen del 1 y los límites cuando $x \to 1^+$ y $x \to 1^-$.



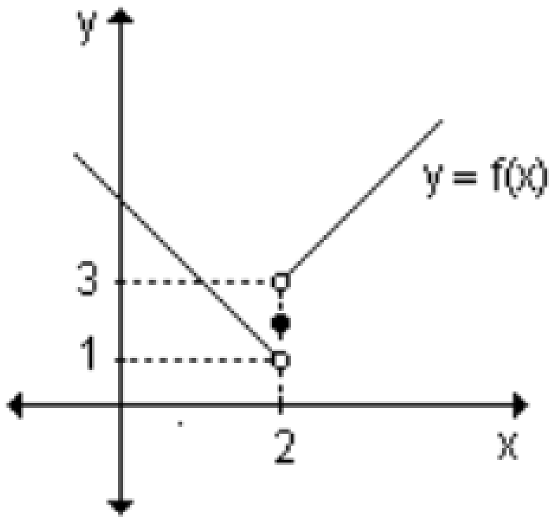
Ejemplo. Sea la función $m : R \to R \,/\, m(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si} \quad x \le 3 \\ 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$. Grafique la función y halle la imagen del 3 y los límites cuando $x \to 3^+$ y $x \to 3^-$.



EJERCICIO

Observe las funciones definidas gráficamente y calcule, si existen, los límites pedidos para cada una:

a)

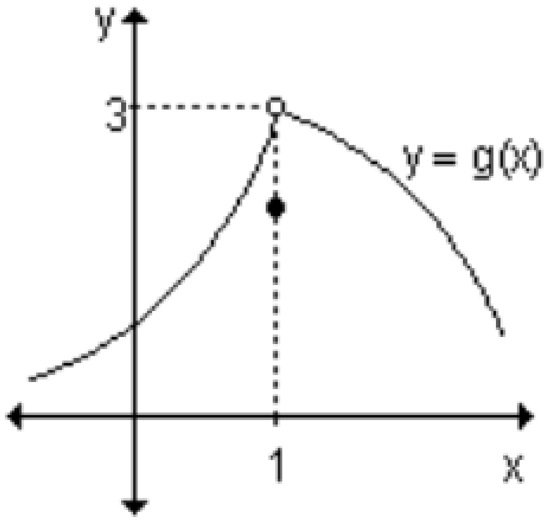


$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b)

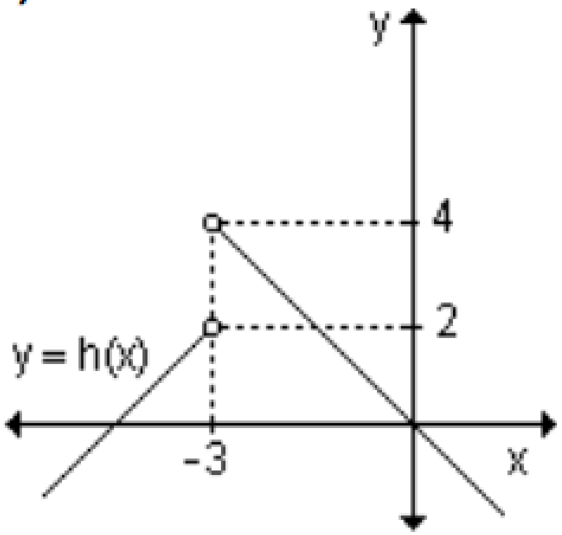


$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

c)



$\lim\limits_{x \to -3^+} h(x)$

$\lim\limits_{x \to -3^-} h(x)$

$\lim\limits_{x \to -3} h(x)$

Ejemplo. Sea la función $f : R \rightarrow R \,/\, x \rightarrow \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Calcule los siguientes límites y compruebe gráficamente:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcule, si existe:

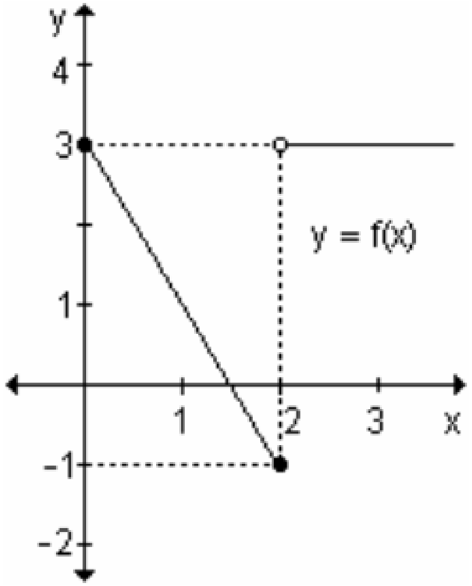
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Sea $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, encuentre, si existe:

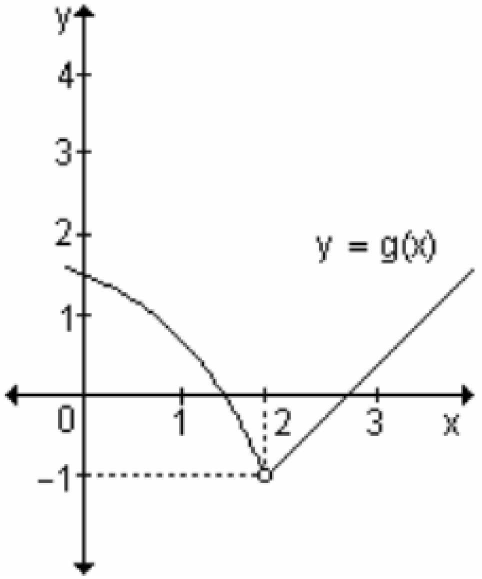
a) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, determine si existe o no el límite para x tendiendo a 2. Justifique la respuesta. En caso de existir, halle el valor.

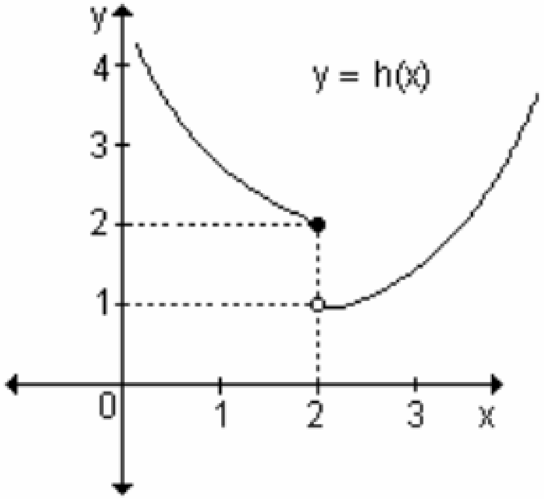
a)



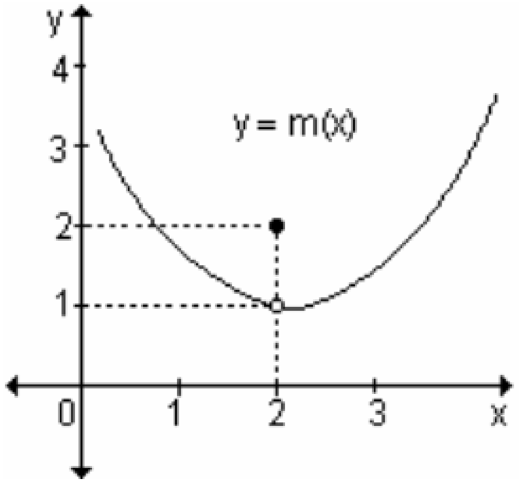
b)



c)



d)



) Dada la función $f : R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ grafique y determine:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

EJEMPLO Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

EJEMPLO Demuestre que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

EJEMPLO Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO

Límites infinitos

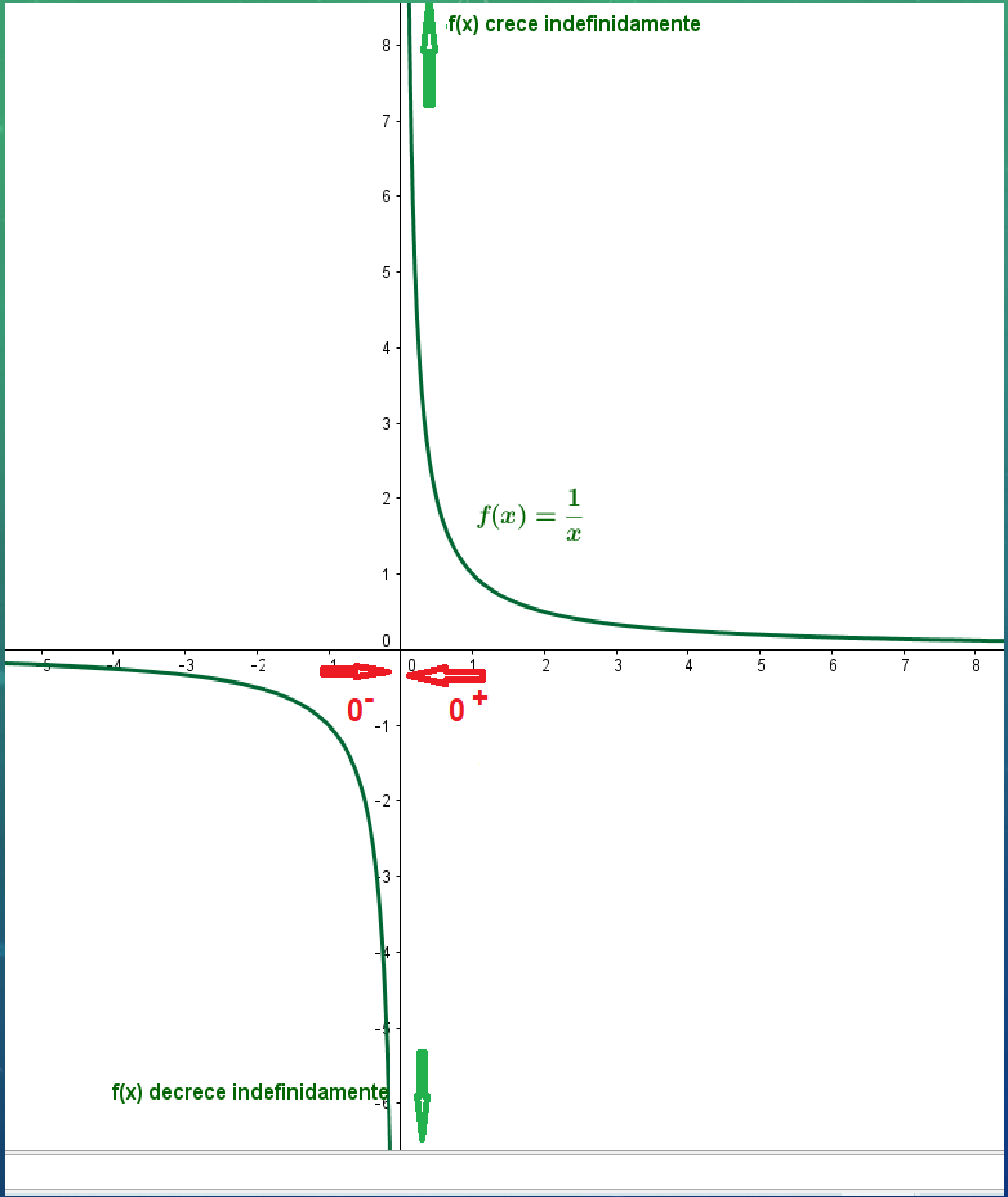
Analizaremos, a partir de sus gráficas, la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

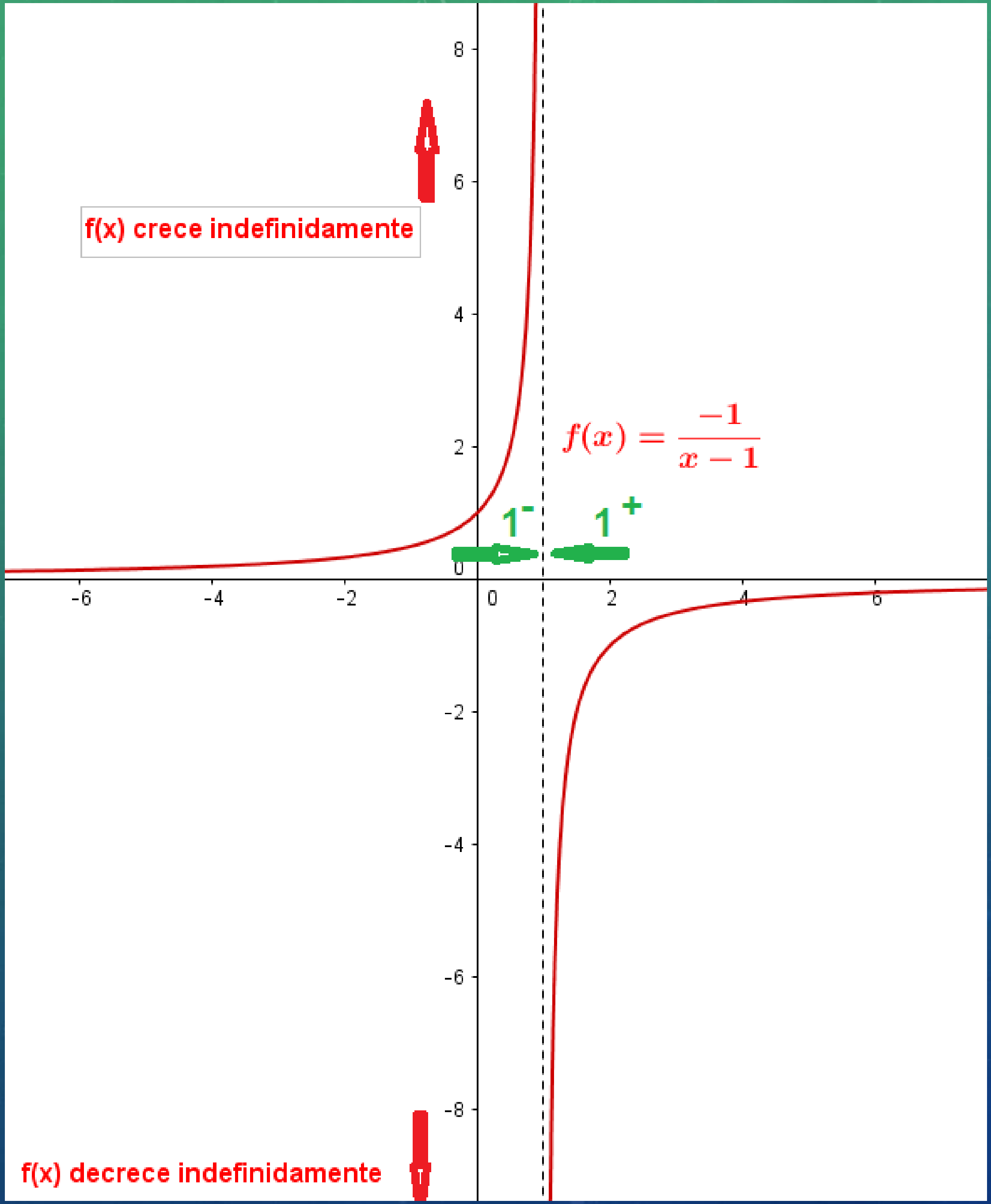


- Si $x \to 0^+$ los valores de la función crecen indefinidamente.
- Si $x \to 0^-$ los valores de la función decrecen indefinidamente.

Observamos que:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ No existe

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1}$$



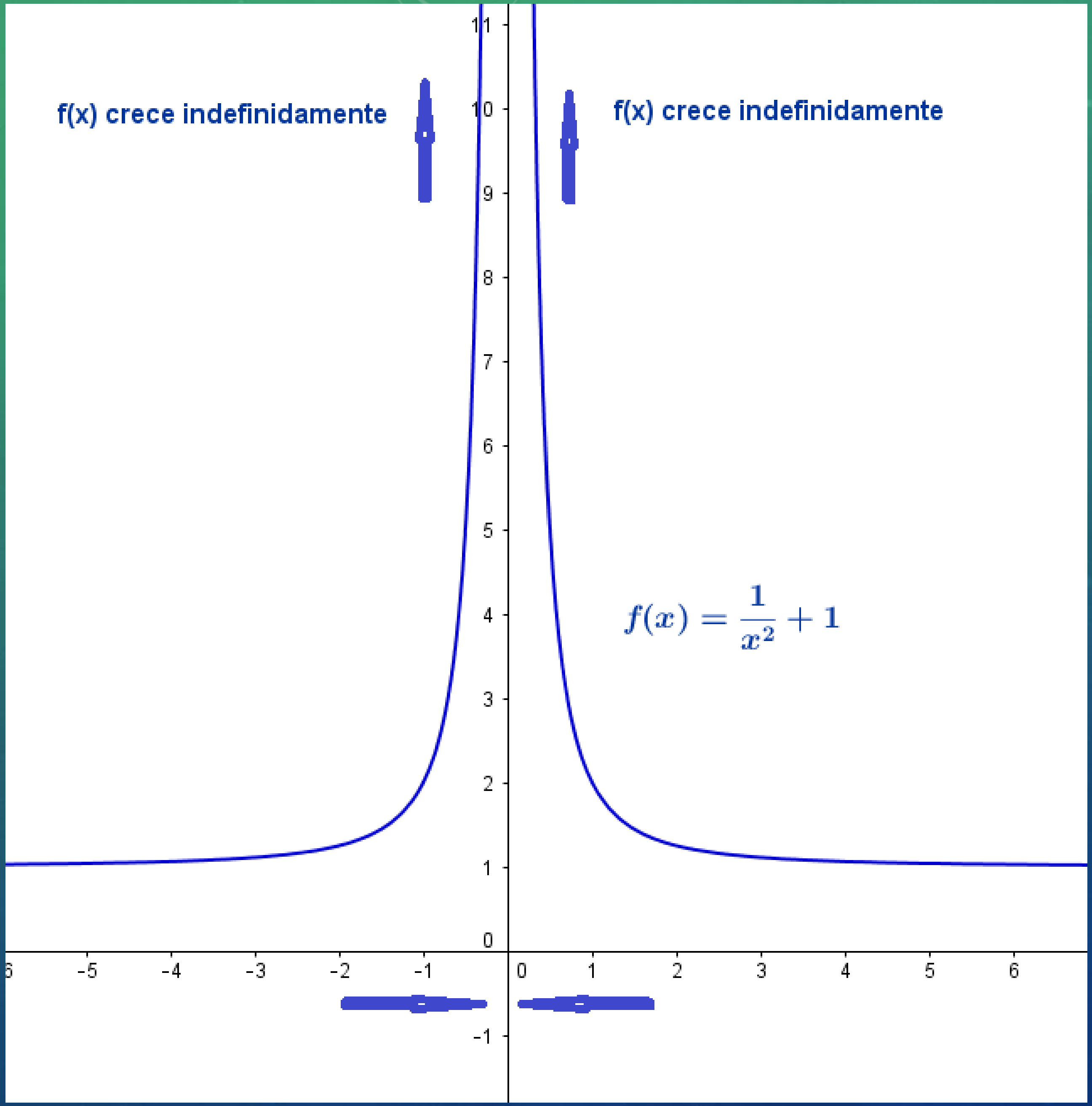
- Si $x \to 1^+$ los valores de la función decrecen indefinidamente.

- Si $x \to 1^-$ los valores de la función crecen indefinidamente.

Observamos que: $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1}$ No existe

Las dos ramas de la curva se aproximan cada vez más a la recta $x = 1$ a medida que x se aproxima a ese valor. Para esta gráfica la recte $x = 1$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$$



- Si $x \to 0^+$ los valores de la función crecen indefinidamente.
- Si $x \to 0^-$ los valores de la función crecen indefinidamente.

Observamos que:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$No existe

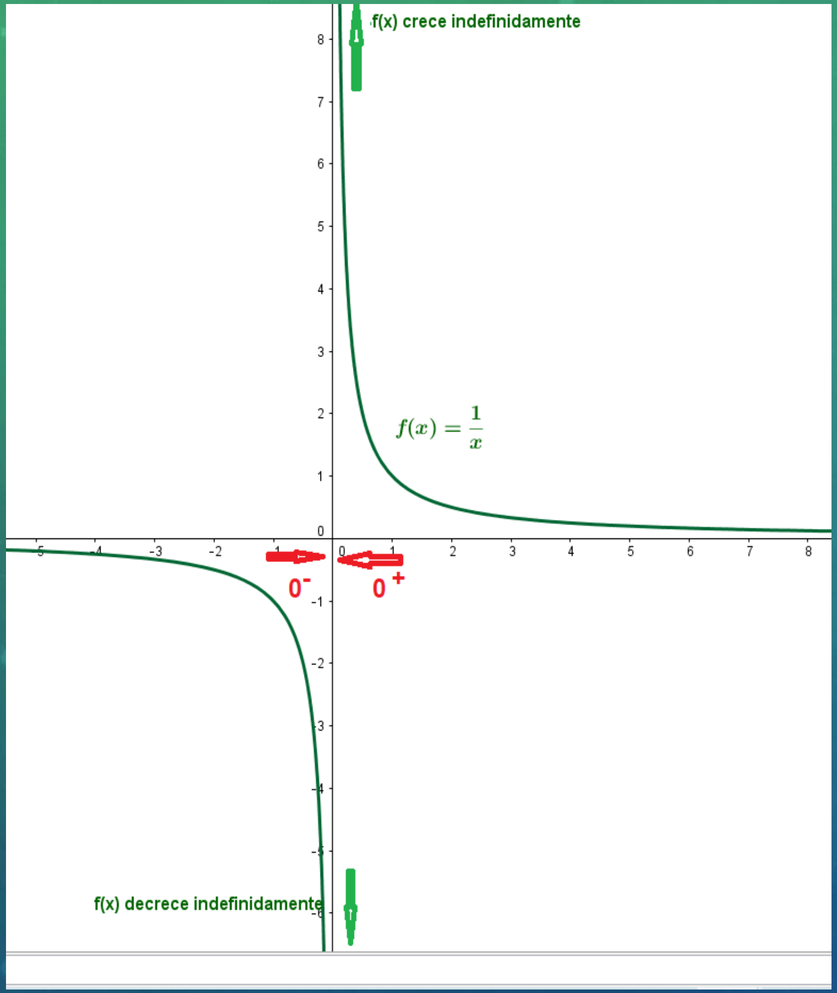
El comportamiento de estas funciones no puede describirse con la idea y el concepto de límite estudiado hasta ahora.

Analizando, por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se observa que cuando $x \to 0^+$ los valores de la función crecen más allá de todo tope.

Decimos que no tiene límite cuando $x \to 0^+$, sin embargo es conveniente decir que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$.

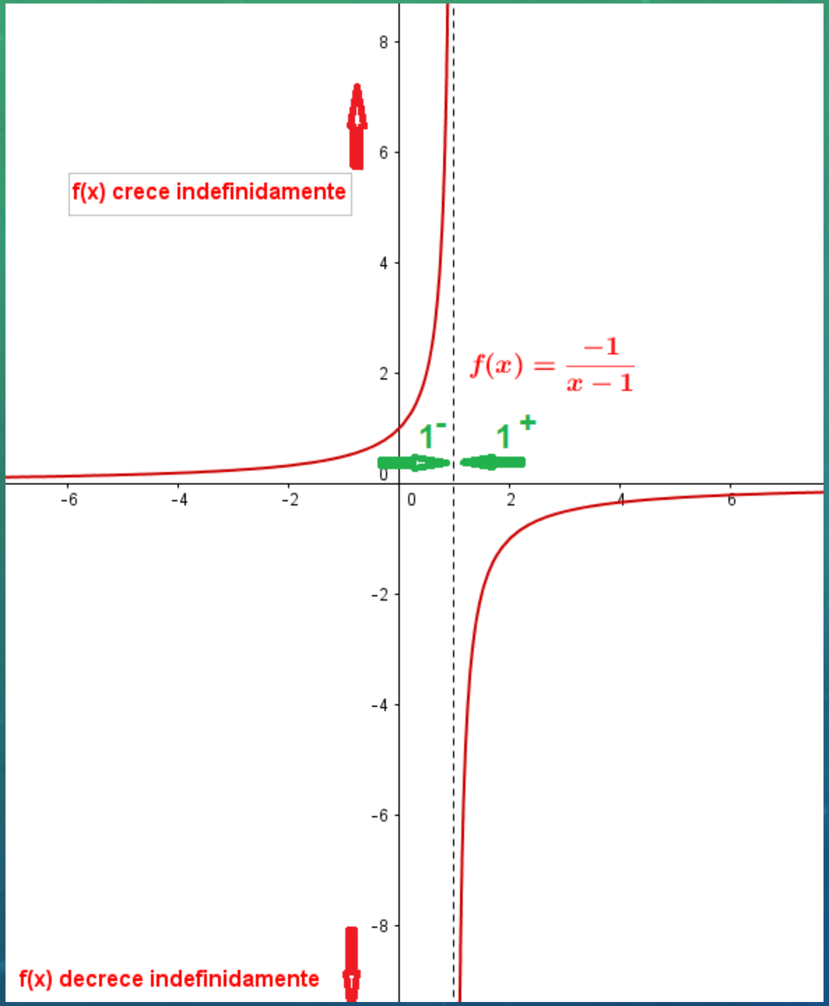
Esta afirmación se escribe: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

Esto no significa que el límite exista ni que $+\infty$ sea un número real sino que la función se hace tan grande como se desee tomando x suficientemente cercano a cero.



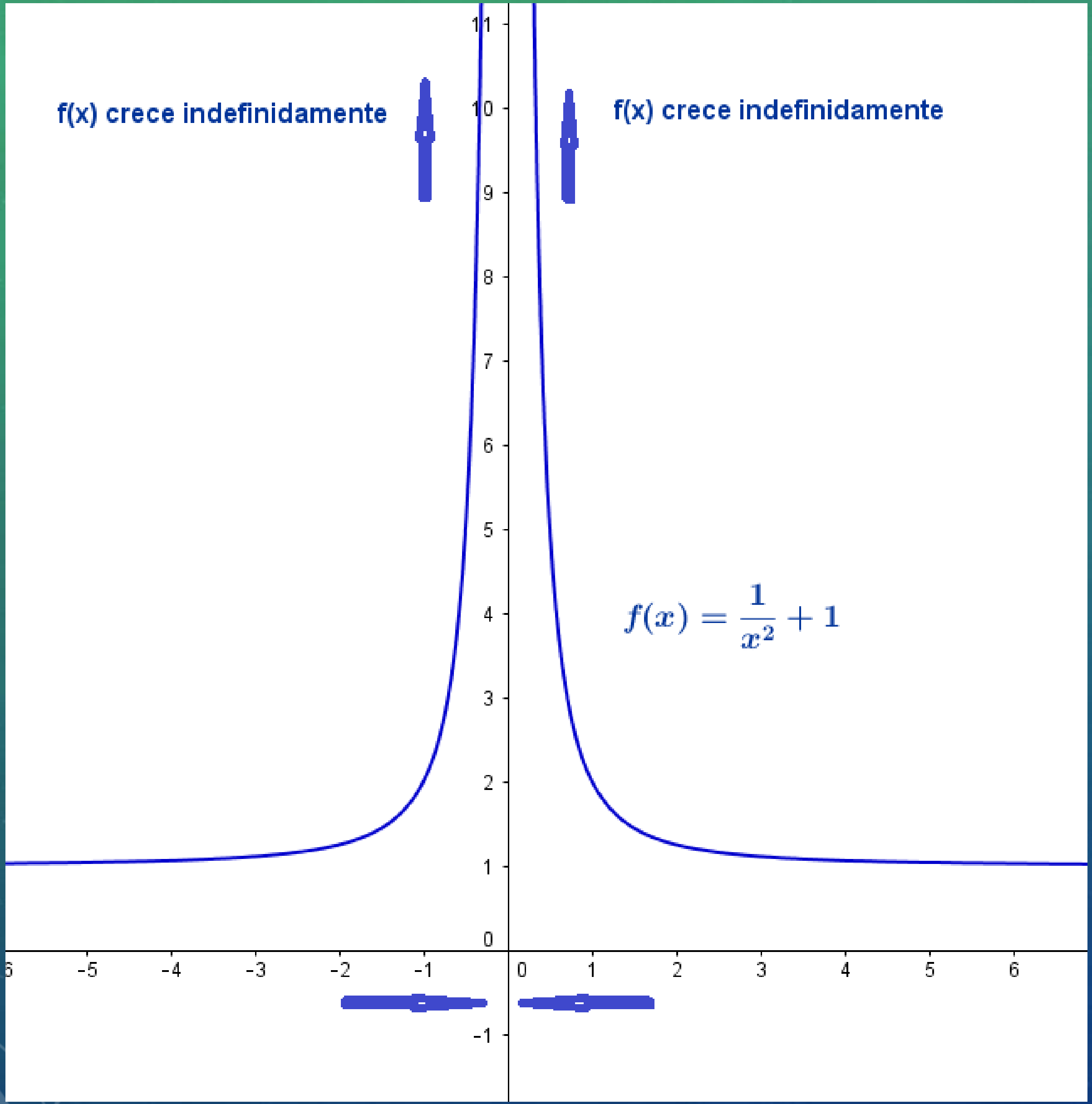
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$



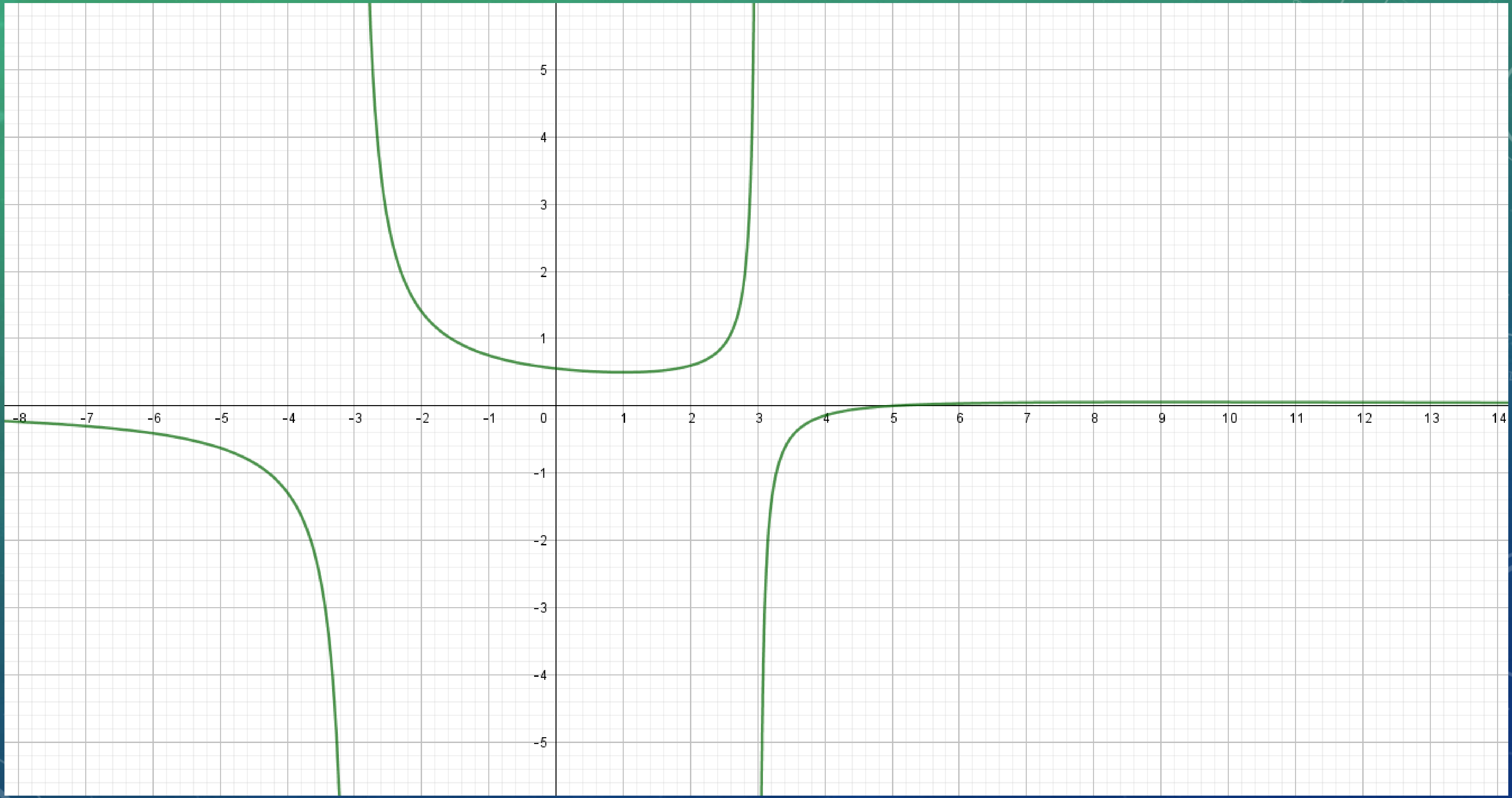
$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = +\infty$$

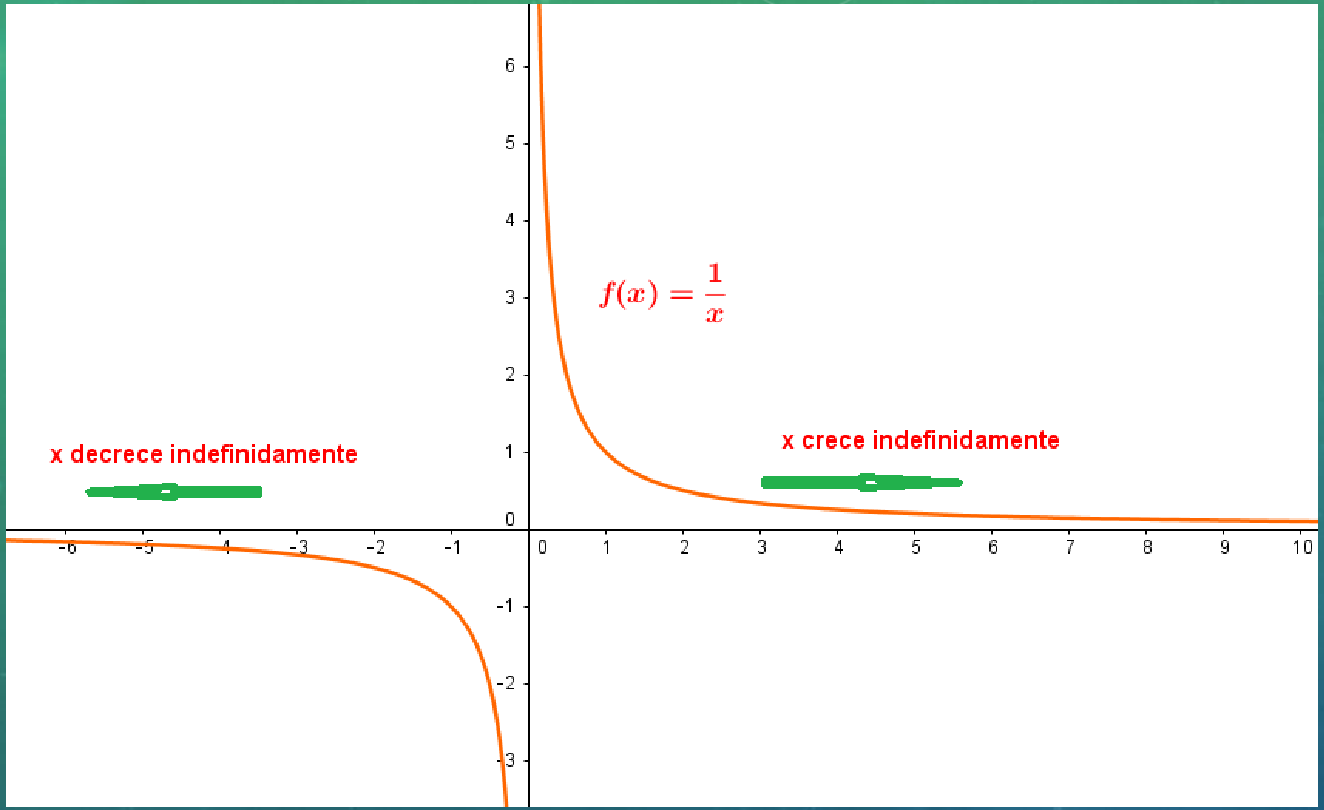
Ejemplo. Determine los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-5}{x^2-9}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-5}{x^2-9}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-5}{x^2-9}$


5
4
3
2
1
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
-1
-2
-3
-4
-5

Límites en el infinito

Vamos a discutir ahora el comportamiento de algunas funciones definidas gráficamente cuando x crece indefinidamente y cuando x decrece indefinidamente.

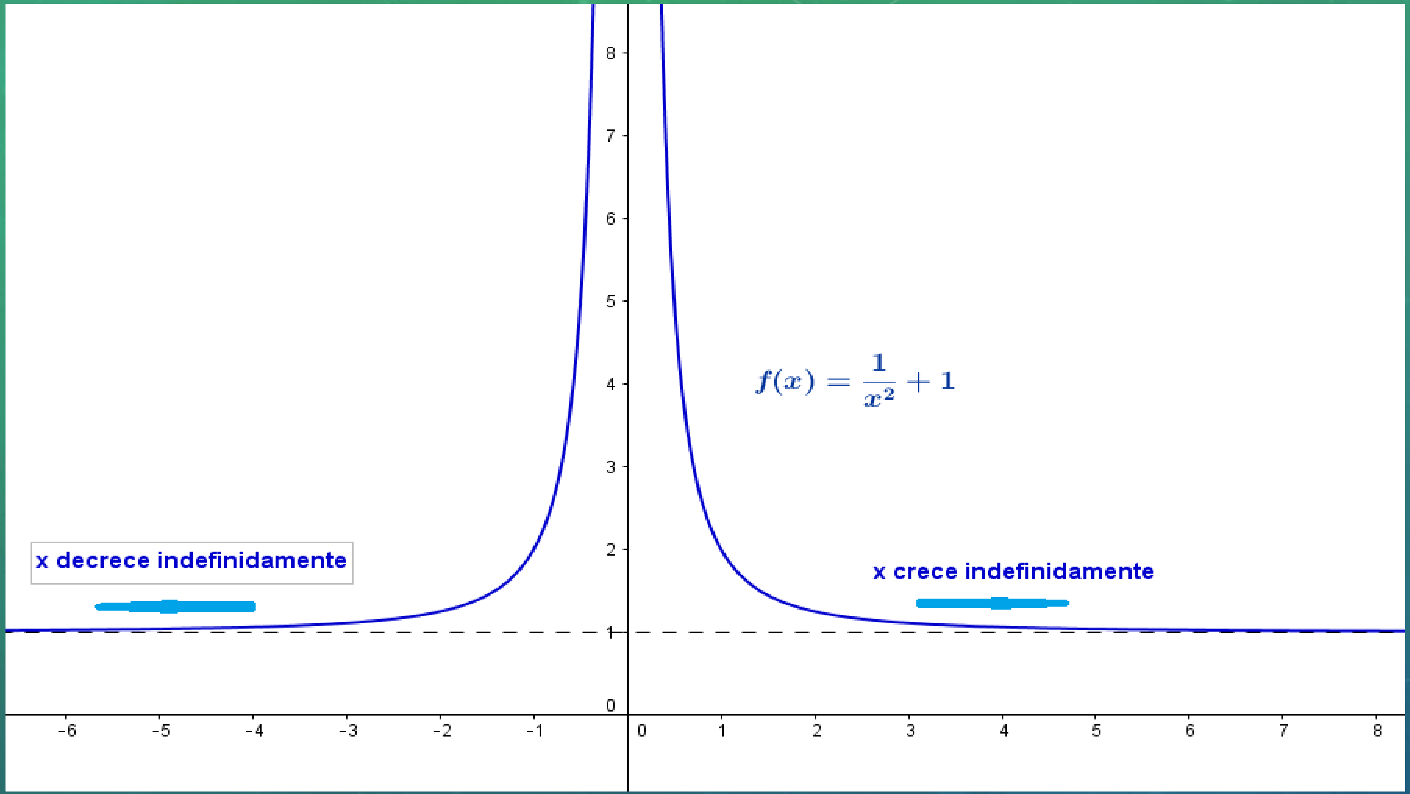


- Si x crece indefinidamente $f(x)$ se acerca a 0.
- Si x decrece indefinidamente $f(x)$ se acerca a 0.

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función.

Escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

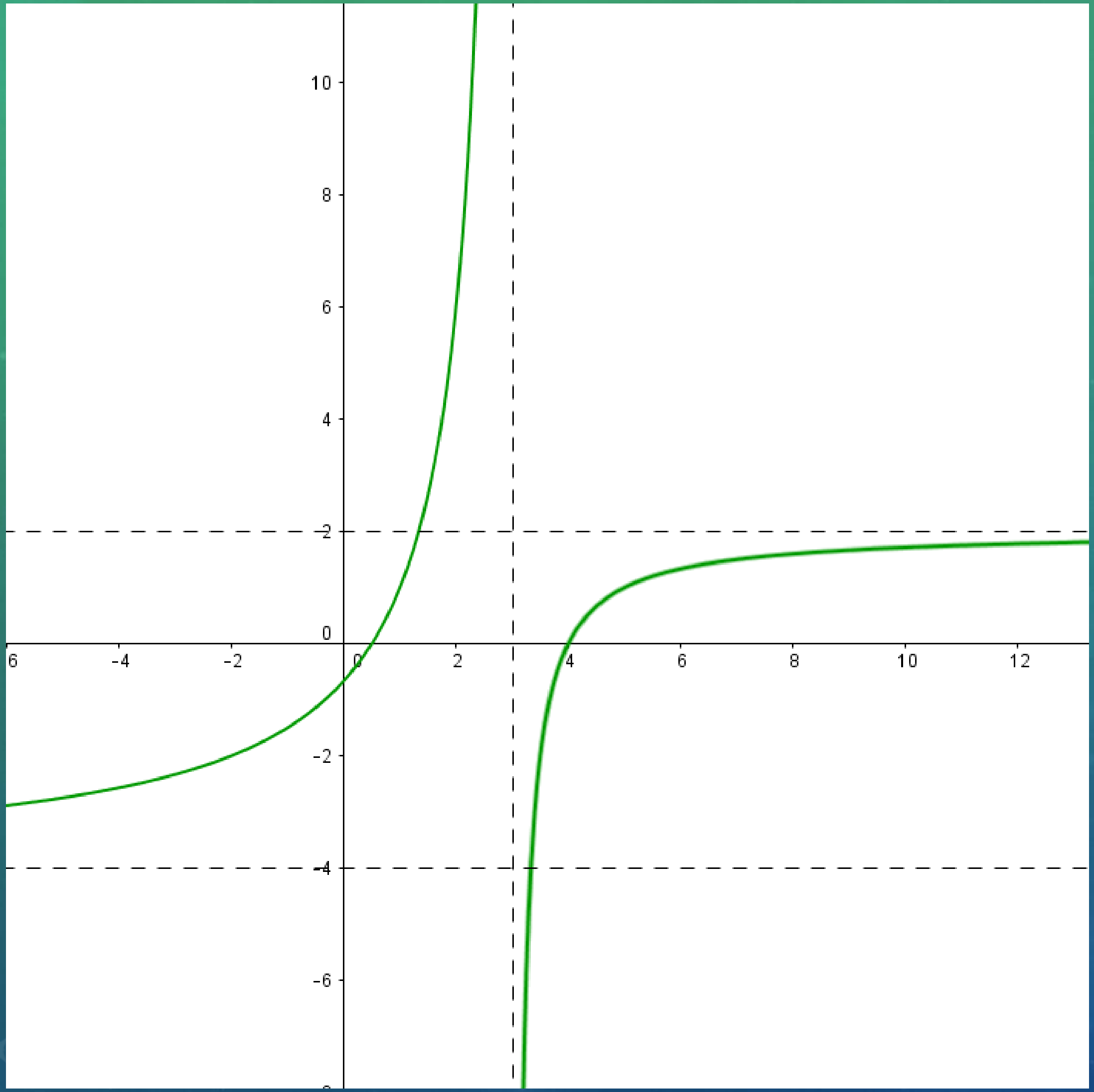


- Si x crece indefinidamente $f(x)$se acerca a 1.
- Si x decrece indefinidamente $f(x)$se acerca a 1.

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función.

Escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



- Si x crece indefinidamente $f(x)$se acerca a 2.
- Si x decrece indefinidamente $f(x)$se acerca a -4.

Las rectas $y=2$ e $y=-4$ son las asíntotas horizontales de la función.

Escribimos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$$

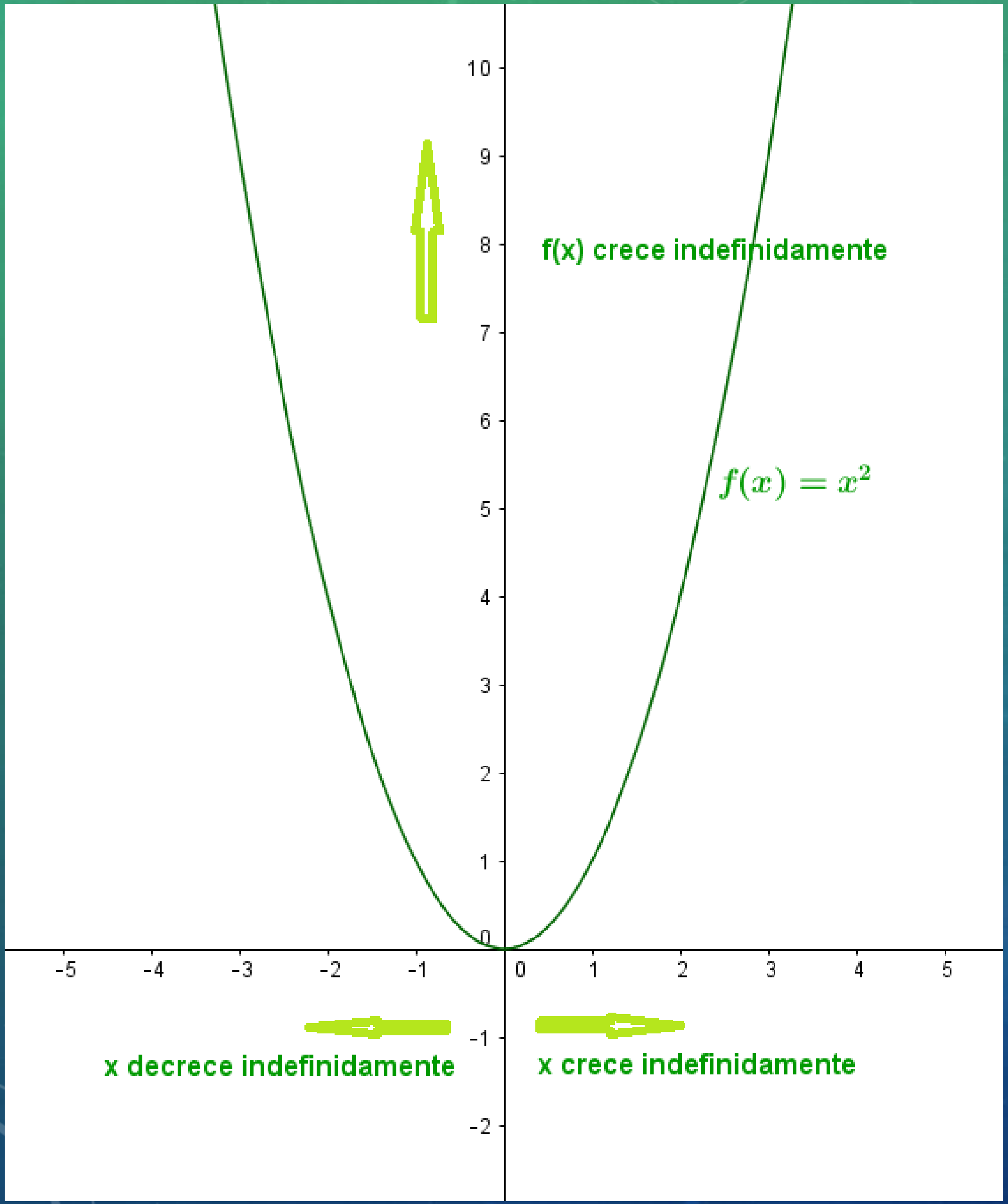
Ejemplo. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)$.

Problema

Se proyecta que dentro de t años, la población de cierto pueblo será $p(t) = 20-\frac{6}{t+1}$ miles de personas. ¿Qué se espera que suceda con la población a medida que el tiempo transcurre indefinidamente?

Límites infinitos en el infinito

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando x crece o decrece indefinidamente. Por ejemplo, ninguna función polinomial tiene límite finito cuando x tiende a infinito



Escribimos:

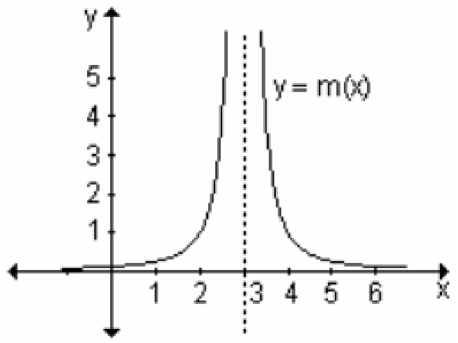
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

EJERCICIOS

1) Observe las funciones definidas gráficamente y calcule los límites indicados:

a)

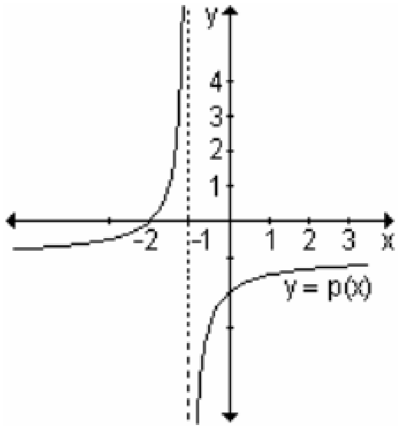


$\lim\limits_{x\to 3^+} m(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} m(x)$

$\lim\limits_{x\to 3} m(x)$

b)

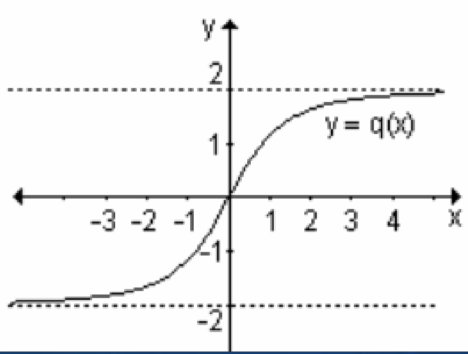


$\lim\limits_{x\to -1^+} p(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} p(x)$

$\lim\limits_{x\to -1} p(x)$

c)



$\lim\limits_{x\to +\infty} q(x)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} q(x)$

2) Halle los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5 - 3x^3\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x + x^4 + x^3\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3 - x}{x^2 - 16}$

h) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{3 - x}{x^2 - 16}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - x^2 - 4x^3\right)$

RESPUESTAS

1)a) $\lim\limits_{x\to 3^+} m(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} m(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3} m(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^+} p(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1} p(x)$ no existe

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} q(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to -\infty} q(x) = -2$

2)a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$

f) $+\infty$ g) $+\infty$ h) $-\infty$ i) $-\infty$

Problema

Un tanque contiene 5000 litros de agua pura. Se bombea al tanque salmuera que contiene 30 gramos de sal por litro de agua, a razón de $25\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$. La concentración de sal después de t minutos es: $C(t) = \frac{30t}{200+t}$ (en $\frac{\text{grs}}{\text{l}}$).

a) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la concentración sea de $10\ \frac{\text{grs}}{\text{l}}$?

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando el tiempo transcurre indefinidamente?

Límites Indeterminados

La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo. Halle $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + x^4 + 1}{x + x^3 - 3}$.

La indeterminación $\frac{0}{0}$

Ejemplo. Halle $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

EJERCICIOS

1) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$

b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$

d) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{3x+15}$

e) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

2) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{2x-5}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7-6x^5}{x+3}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^4}{3x^4+1}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3-2x^2}{x+1}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4+x}{x^3+x^2+8}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2-9}$

Un límite importante

Se puede demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Al evaluar el numerador y el denominador en $x = 0$, se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$. Para resolverlo, no pueden utilizarse las técnicas vistas anteriormente, pero sin embargo, el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe y vale 1.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \frac{10\,t}{t^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

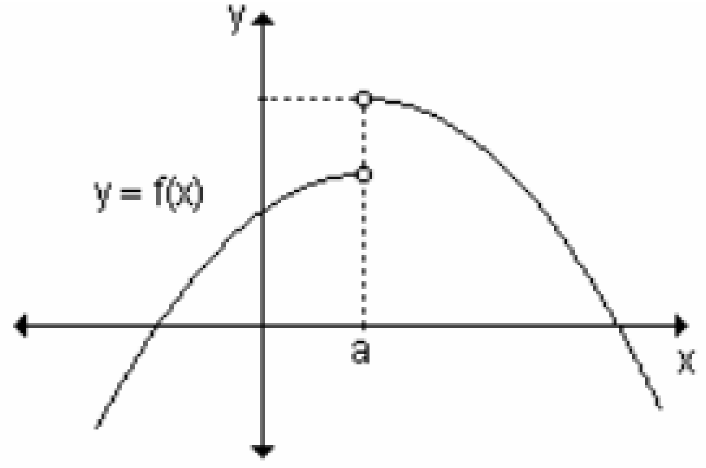
2) En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y = \frac{4}{2+8e^{-2x}}$.

a) ¿Cuál es la población inicial de la colonia?

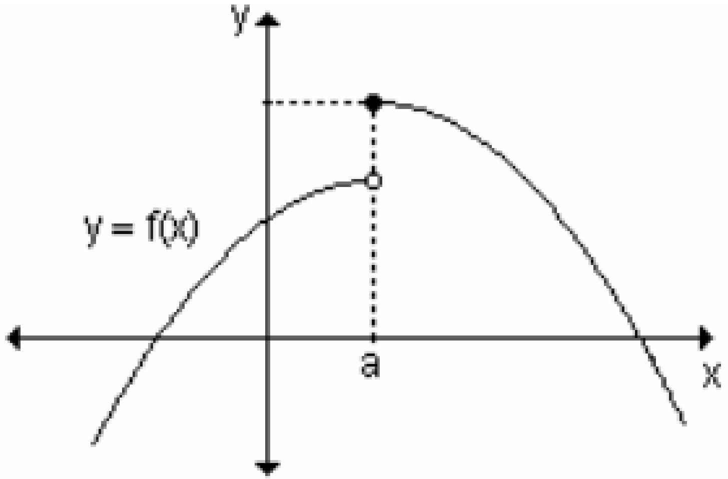
b) Resolviendo $\lim\limits_{x \to +\infty} y$, se obtiene información acerca de si la población crece indefinidamente o tiende a estabilizarse en algún valor fijo. ¿Cuál de estas situaciones ocurre?

¿En cuál de las siguientes gráficas f(a) no está definida pero existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

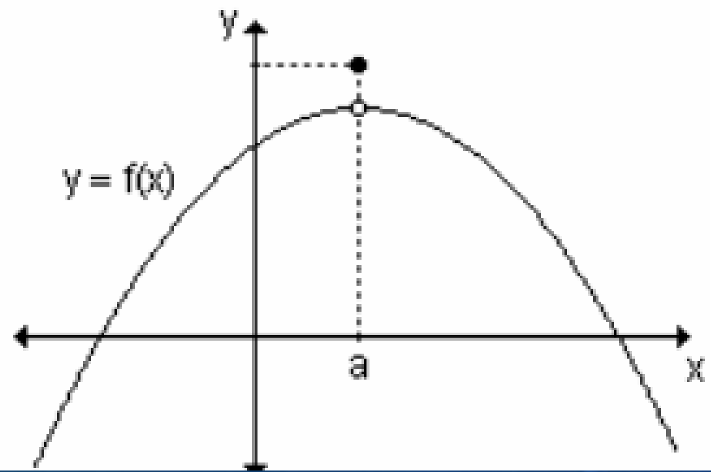
a)



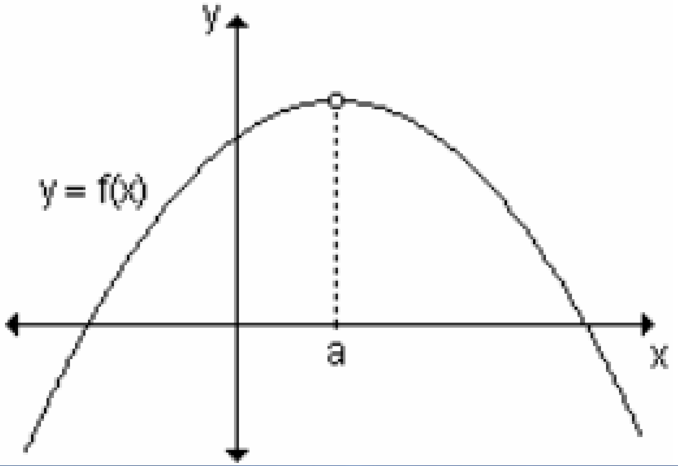
b)



c)

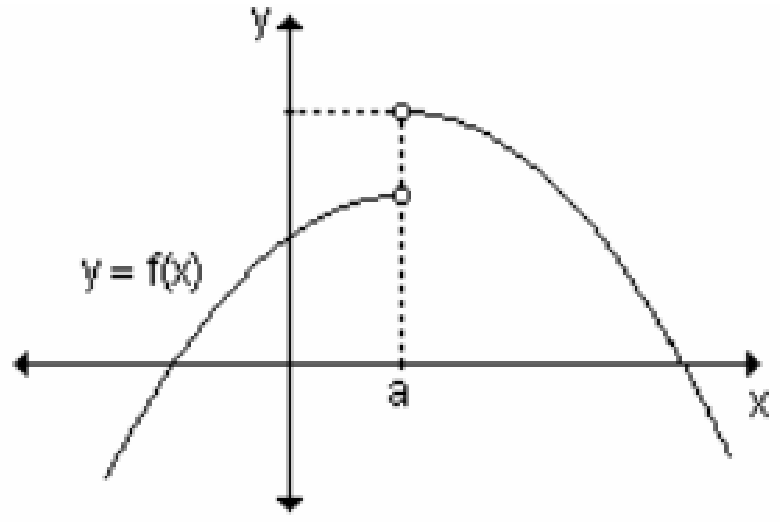


d)

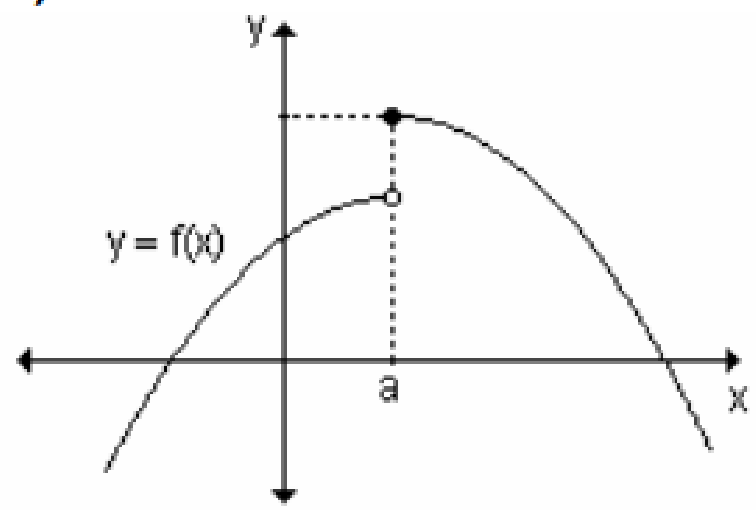


¿En cuál de las siguientes gráficas f(a) está definida pero no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

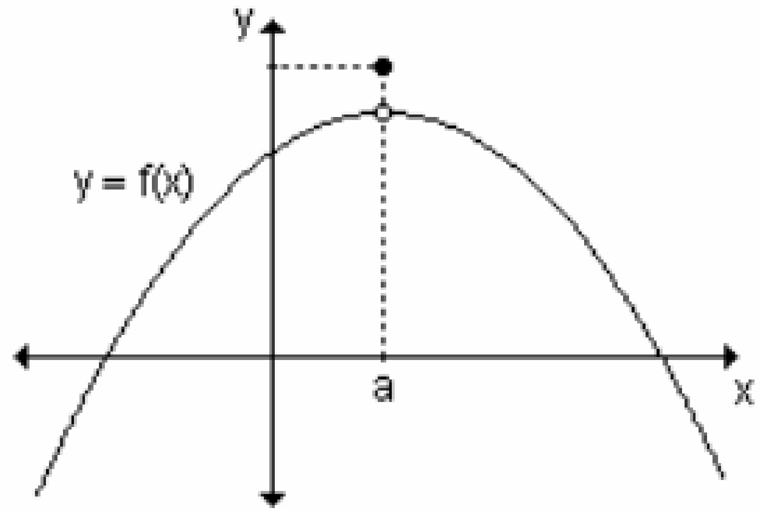
a)



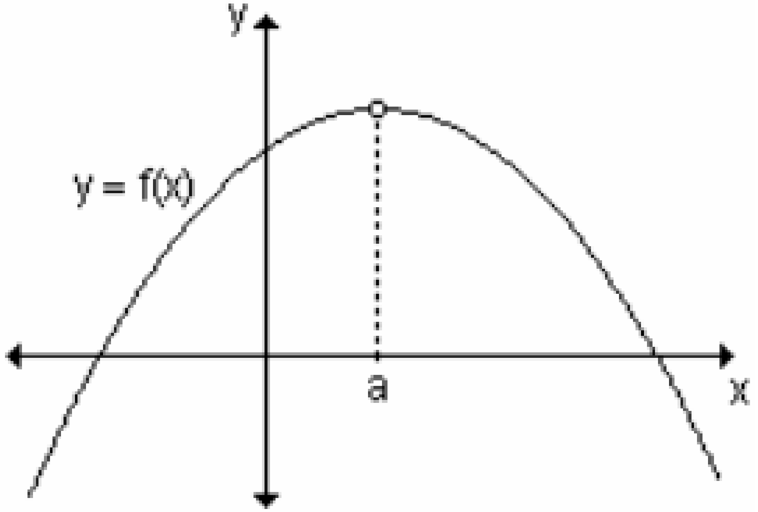
b)



c)



d)



Límite de funciones trascendentes

Los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular mediante la sustitución directa, es decir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Las funciones trigonométricas, las exponenciales y logarítmicas también tienen esta propiedad. Enunciamos algunas de ellas teniendo en cuenta que a es un número real en el dominio de la función dada.

1) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ **2)** $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$ **3)** $\lim_{x \to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

4) $\lim_{x \to a} \log x = \log a$ **5)** $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$ **6)** $\lim_{x \to a} 10^x = 10^a$

7) $\lim_{x \to a} e^x = e^a$

Álgebra de límites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ donde $L_1 \in R$, $L_2 \in R$ entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

3) $\lim\limits_{x\to a} c.f(x) = c.\lim\limits_{x\to a} f(x) = c.L_1,\ c \in R$

4) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right] = L_1.L_2$

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$

6) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L_1^n$ si L_1^n es un número real.

7) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = L_1^{L2}$, si L_1^{L2} es un número real.

Nota. Debemos tener en cuenta que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe si $L_1 \neq 0$ y $L_2 = 0$.

Nota. Las propiedades anteriores nos permiten asegurar que existen límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ que pueden ser evaluados calculando f(a), es decir sustituyendo directamente x por a en la expresión de la función aún cuando f(x) es una combinación algebraica de funciones para las cuales está definida f(a).

Ejemplo. Resuelva los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x + x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^3 - 3^x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (-12.\text{sen}\, x)$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}.x^2$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 10}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} x^{\frac{2}{3}x}$

Teniendo en cuenta el álgebra de los límites y las diferentes propiedades:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2) = \lim\limits_{x\to 1}\ln x + \lim\limits_{x\to 1} x^2 = \ln 1 + 1^2 = 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3 - 3^x\right) = \lim\limits_{x\to 2} x^3 - \lim\limits_{x\to 2} 3^x = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3 - 3^x\right) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(-12.\text{sen}\,x\right) = -12.\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \text{sen}\,x = -12.\text{sen}\frac{\pi}{2} = -12.1 = -12$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(-12.\text{sen}\,x\right) = -12$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}.x^2\right) = \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}.\lim\limits_{x\to 4} x^2 = \sqrt{4}.4^2 = 2.16 = 32 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}.x^2 = 32$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 10}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^4 - 10\right)}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^4 - \lim\limits_{x\to 2} 10}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \dfrac{2^4 - 10}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 10}{x} = 3$. Es posible resolver este límite pues $\lim\limits_{x\to 2} x \neq 0$.

f) $\lim\limits_{x\to 3} x^{\frac{2}{3}x} = \left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{3}x} = \left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)^{\frac{2}{3}.\lim\limits_{x\to 3} x} = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 3} x^{\frac{2}{3}x} = 9$