16. Graficar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior para comprobar los resultados obtenidos.

5.2. Función afín

En esta sección nos ocuparemos de estudiar el comportamiento de la denominada **función afín***, que es una de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

siendo a y b números reales. Si $a \neq 0$ entonces es una función polinómica de grado 1, y si además se tiene $b = 0$, la función $f(x) = ax$ es conocida como **lineal**. Cuando $a = 0$, la función $y = b$ es llamada también **función constante**.

Vimos en la sección anterior que el dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de todos los números reales. En particular, lo mismo vale para las funciones afines. Luego, si no se indica lo contrario, la convención sobre dominios indica que $\mathbb{R}$ es el dominio de las mismas.

Ejemplo 153. Las siguientes son funciones afines:

$$y = 2x - 5, \qquad y = -x + 2, \qquad y = \tfrac{1}{2}x, \qquad y = -\pi x + 1, \qquad y = 3 + x.$$ «

Ejemplo 154. **Esbozando el gráfico de funciones afines.** Analizaremos las gráficas de las funciones dadas por

$$y = 2x - 1, \qquad y = 2, \qquad y = -x + 1.$$

Haremos tablas de valores para detectar la “forma” de las mismas.

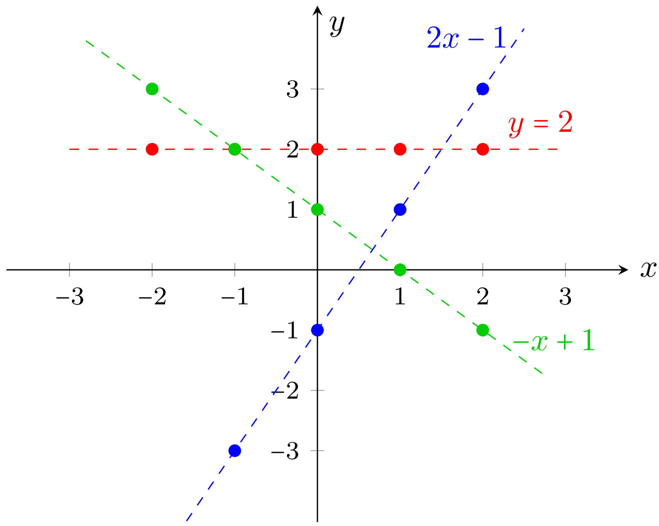
x	$y = 2x - 1$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$

x	$y = 2$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2

x	$y = -x + 1$
-2	$-(-2) + 1 = 3$
-1	$-(-1) + 1 = 2$
0	$-0 + 1 = 1$
1	$-1 + 1 = 0$
2	$-2 + 1 = -1$

En la figura siguiente representamos algunos de los puntos obtenidos (con el color indicado en cada tabla), y los unimos mediante una línea para ver el aspecto de la gráfica de cada función.

*Esta clase de funciones es conocida también como **función lineal**. Sin embargo, en matemática “ser lineal” significa satisfacer una propiedad, que no enunciaremos aquí, pero que las únicas funciones afines que la cumplen son aquellas con $b = 0$, es decir, las de la forma $f(x) = ax$.



Como en el ejemplo anterior, la gráfica de una función afín es siempre una **recta**. Puesto que una recta queda completamente determinada al trazar dos puntos que pertenezcan a ella, dada una función afín será suficiente con conocer la imagen de dos valores para obtener su gráfica. Por simplicidad se suele tomar $x = 0$ como uno de esos valores, lo que produce el punto de coordenadas

$$P = (0, b),$$

y corresponde al punto sobre el eje y por el que pasa la recta. Otro punto que podemos marcar, si $a \neq 0$, es la intersección de la recta con el eje x, es decir, la raíz de la función. Notar que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{b}{a}.$$

En otras palabras, la gráfica interseca al eje horizontal cuando $x = -\frac{b}{a}$, que es la única raíz de f. Entonces, otro punto que pertenece a la recta es el de coordenadas

$$Q = \left(-\tfrac{b}{a}, 0\right).$$

Como mencionamos al comienzo, si $a = 0$ entonces la función tiene la forma $y = b$. Vimos en el ejemplo anterior que en tal caso el gráfico es una recta horizontal trazada a la altura b del eje y. Entonces, esta recta no interseca al eje x (es decir, la función no tiene raíces), salvo la gráfica de la función $y = 0$ que coincide con el eje horizontal.

Notar que si la función afín es lineal, es decir, de la forma $y = ax$, entonces $b = 0$ y los dos puntos definidos arriba son $P = (0,0) = Q$. Entonces será necesario ubicar otro punto perteneciente a la recta además del origen, como por ejemplo $(1,a)$ o cualquiera de la forma $(x, f(x))$.

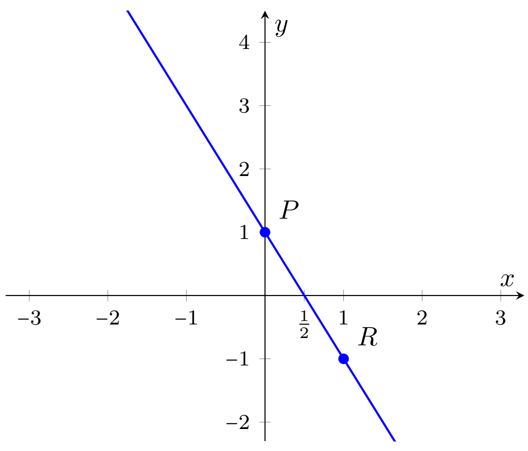
Resumiendo, para representar gráficamente una función afín, ubicamos los puntos P y Q, o cualesquiera otros dos de la forma $(x, f(x))$, en un sistema de ejes cartesianos, y luego trazamos la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 155. **Graficando una función afín.** Representar gráficamente la recta de ecuación $y = -2x + 1$.

Solución: Graficaremos los puntos

$$P = (0, f(0)) = (0,1) \quad \text{y} \quad R = (1, f(1)) = (1,-1),$$

y luego la recta que pasa por ellos. Esta recta debe cortar al eje x en el punto $Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



En lo anterior hemos utilizado varias veces la expresión “un punto que pertenezca a la recta” correspondiente al gráfico de $f(x) = ax + b$. Esto significa que las coordenadas del punto son de la forma $(x, f(x))$. En otras palabras, la coordenada y del punto no es cualquier valor, sino que dado un valor para x, esta debe satisfacer $y = ax + b$. Así, dada la ecuación de la recta, hallamos puntos sobre ella dando diferentes valores a x, y calculando el correspondiente valor de y. Esto también nos permite hacer el proceso inverso, es decir, dado un punto, podemos determinar si está o no sobre la recta, simplemente verificando si sus coordenadas **satisfacen la ecuación** que define la recta. Esto se verá más claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 156. **Determinando si un punto pertenece o no a la recta.** Determinar si los puntos $P = (2,4)$ y $Q = (1,5)$ pertenecen o no al gráfico de $y = 3x - 2$.

Solución: Para determinar si un punto pertenece a la recta, debemos ver si sus coordenadas x e y satisfacen la relación $y = 3x - 2$. Para el punto P tenemos $x = 2$ e $y = 4$. Puesto que

$$3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4, \quad \checkmark$$

se sigue que P es un punto sobre la recta dada. En el caso de Q tenemos $x = 1$ e $y = 5$, pero

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 \neq 5, \quad ✗$$

por lo que Q no pertenece a la recta dada. «

Ubicar puntos de una recta no es la única forma de conocer el aspecto de la misma. También podemos esbozar su gráfica según los valores que tomen a y b. Como vimos antes, el valor de b corresponde a la "altura" a la que la recta atraviesa al eje y. Luego,

- $b < 0$ → Pasa por debajo del origen
- $b = 0$ → Pasa por el origen
- $b > 0$ → Pasa por encima del origen

Para ilustrar lo anterior graficaremos, en un mismo sistema de ejes, rectas de la forma $y = x + b$, para diferentes valores de b.

Ejemplo 157. **El efecto de b.** Graficar las funciones afines

$$y = x, \quad y = x + 2, \quad y = x - 3.$$

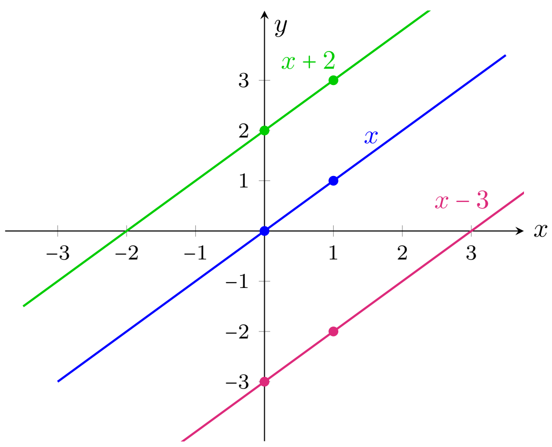
Solución: Para graficar cada recta, aplicaremos el método de ubicar dos puntos pertenecientes a ella, y luego trazaremos la recta que los une. Sabemos que cada una pasa por el punto $(0, b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso:

$$b = 0, \quad b = 2 \quad \text{y} \quad b = -3.$$

Necesitamos ubicar otro punto perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos el punto correspondiente a $x = 1$ para cada una, es decir, el punto $(1, 1 + b)$:

$$\begin{array}{rll} y = x & \text{pasa por el punto} & (1,1) \\ y = x + 2 & \text{pasa por el punto} & (1,3) \\ y = x - 3 & \text{pasa por el punto} & (1,-2) \end{array}$$

En el gráfico siguiente dibujamos las rectas que pasan por los puntos $(0, b)$ y $(1, 1 + b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso.



«

Si observamos la recta correspondiente a $y = x$, graficada en color azul en el ejemplo anterior, vemos que a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas, es decir, que las dos coordenadas de cada punto son idénticas (la recta pasa por el punto $(1, 1)$, el $(5, 5)$, el $(-3, -3)$, y así). Esto conduce a llamarla de la siguiente forma:

La función $y = x$ se conoce como **función identidad**.

Ahora, para analizar el efecto que produce el número a, graficaremos en un mismo sistema de ejes a rectas de la forma $y = ax$, para diferentes valores de a.

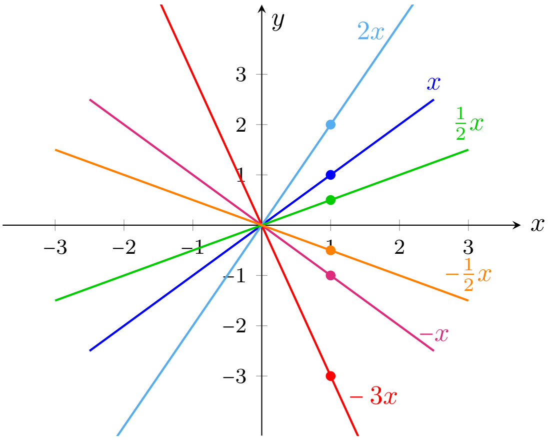
Ejemplo 158. **El efecto de a.** Graficar las funciones lineales

$$y = -\tfrac{1}{2}x, \quad y = -3x, \quad y = -x, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad y = \tfrac{1}{2}x.$$

Solución: Aplicaremos como antes el método de ubicar dos puntos pertenecientes a cada una, y luego trazaremos la recta que los une. Ya que para cada una se tiene $b = 0$, estas rectas pasan todas por el punto $(0, 0)$. Necesitaremos ubicar un punto más, perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos como antes el punto correspondiente a $x = 1$, es decir, el punto $(1, a)$, con a el respectivo en cada caso:

$$\begin{aligned}
y &= -\tfrac{1}{2}x && \text{pasa por el punto} && (1, -\tfrac{1}{2})\\
y &= -3x && \text{pasa por el punto} && (1, -3)\\
y &= -x && \text{pasa por el punto} && (1, -1)\\
y &= x && \text{pasa por el punto} && (1, 1)\\
y &= 2x && \text{pasa por el punto} && (1, 2)\\
y &= \tfrac{1}{2}x && \text{pasa por el punto} && (1, \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

En el siguiente gráfico dibujamos las rectas que pasan por cada uno de los puntos anteriores y por el origen.



Del ejemplo podemos establecer el efecto que produce el parámetro a en la recta resultante: el signo nos dice si, al mirarla de izquierda a derecha, "sube" (cuando a es positivo) o "baja" (cuando a es negativo). Además, mientras mayor sea su valor absoluto, más empinada será la recta, ya sea en subida o en bajada. Resumimos esto en la Figura 5.4.

Dada una función $f(x) = ax + b$, el número a (es decir, el coeficiente lineal en la expresión polinómica) es llamado **pendiente** de la recta, ya que, como vimos, determina por completo la inclinación de la misma con respecto a los ejes coordenados. El número b (término independiente) es llamado **ordenada al origen**, ya que indica el valor de la ordenada cuando la abscisa toma el valor cero.

$a > 0 \longrightarrow a > 1 \longrightarrow$ Sube, más empinada que $y = x$

$a > 0 \longrightarrow 0 < a < 1 \longrightarrow$ Sube, menos empinada que $y = x$

$a = 0 \longrightarrow$ Recta horizontal

$a < 0 \longrightarrow a < -1 \longrightarrow$ Baja, más empinada que $y = -x$

$a < 0 \longrightarrow -1 < a < 0 \longrightarrow$ Baja, menos empinada que $y = -x$

Figura 5.4: El efecto de a.

Para visualizar dinámicamente el efecto de a y b, se propone la siguiente actividad en GeoGebra:

- Con la herramienta a=2 crear un **deslizador** para el número a, el cual permite variar el valor de a en un rango establecido (dejaremos el que viene dado por defecto, que es $-5 \leq a \leq 5$). Hacer lo mismo para b.
- Ingresar en el campo de entradas y=ax+b.
- Variar los valores de a y de b mediante los deslizadores, para observar el efecto producido en la recta.

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma inclinación. Puesto que, para rectas no verticales, la inclinación está dada por la pendiente, tenemos que:

> Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 159. **Rectas paralelas.** Hallar una recta paralela a la gráfica de la función $f(x) = 3x + 5$, cuya ordenada al origen sea -4.

Solución: Una recta (no vertical) queda determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Estos dos datos fueron dados en la consigna, ya que pedir que sea paralela a la mencionada, implica que deben tener la misma pendiente $a = 3$. Además se pide que $b = -4$, por lo que la ecuación de la recta buscada es

$$y = 3x - 4.$$

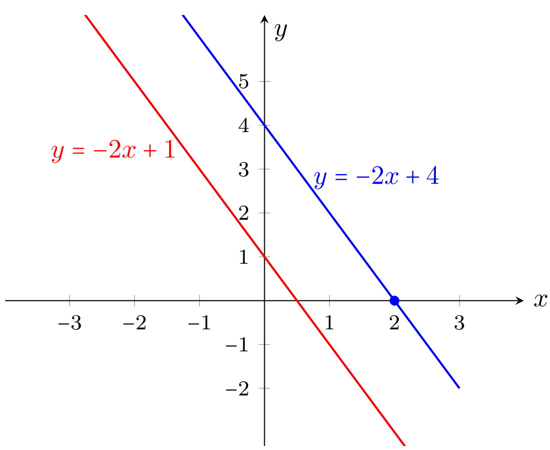
El ejemplo anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando el punto P=(0,-4) y la ecuación de la recta dada, a la cual, supongamos, que el software le asigna el nombre f. Luego, el comando Recta(P,f) trazará la recta que pase por P y que sea *paralela* a la recta f. Esta herramienta posee el ícono en la barra gráfica.

Ejemplo 160. **Rectas paralelas.** Hallar la ecuación de la recta paralela a la gráfica de $f(x) = -2x + 1$, cuya raíz sea $x = 2$.

Solución: Ya sabemos que la pendiente de la recta buscada es -2, es decir, la ecuación es $y = -2x + b$. Determinaremos b de manera que la raíz de la función sea $x = 2$, es decir, que debe cumplirse que el punto $(2, 0)$ pertenezca a la recta. Esto ocurre si

$$0 = -2 \cdot 2 + b$$

lo que implica $b = 4$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = -2x + 4$. Graficamos esta recta junto con la dada en la figura siguiente.



Recordemos que la raíz de una función afín con pendiente distinta de cero está dada por $x = -\frac{b}{a}$. Luego, conociendo los valores de a y de la raíz, otra forma de calcular b es a partir de esta relación. En este caso, sabemos que $a = -2$ y queremos que la raíz sea $x = 2$. Luego, b debe satisfacer:

$$2 = -\frac{b}{-2} = \frac{b}{2},$$

de lo que se deduce, al igual que antes, que $b = 4$. Aunque cualquiera de las dos formas de hallar b es correcta, la primera evita tener que memorizar fórmulas, recurriendo solamente al significado de pertenencia de un punto a la gráfica de una función. «

Dos rectas son **perpendiculares** si forman entre ellas un ángulo recto. Para el caso de dos rectas con *pendientes no nulas*, puede probarse que:

> Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Notar que el producto de dos números es igual a -1 si y solo si uno es el inverso multiplicativo del otro, y con signo opuesto. Es decir, dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son de la forma

$$a \quad \text{y} \quad -\frac{1}{a},$$

siendo a cualquier real distinto de cero.

Ejemplo 161. **Rectas perpendiculares.** Los siguientes son pares de rectas perpendiculares entre sí:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1, & y &= \tfrac{1}{2}x + 5; \\ y &= \tfrac{5}{3}x - 2, & y &= -\tfrac{3}{5}x + 1; \\ y &= \pi x + 7, & y &= -\tfrac{1}{\pi}x + 16. \end{aligned}$$

Esto se debe a que en cada par, el producto de las pendientes es igual a -1:

$$-2 \cdot \tfrac{1}{2} = -1, \qquad \tfrac{5}{3} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = -1, \qquad \pi \cdot \left(-\tfrac{1}{\pi}\right) = -1.$$ «

Ejemplo 162. **Rectas perpendiculares.** Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x - 2$, que pasa por el punto $P = (3, 1)$.

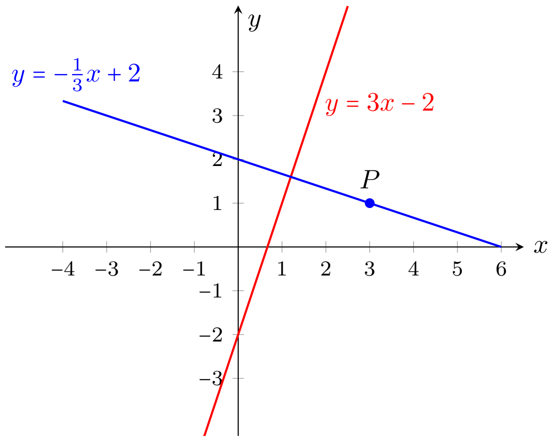
Solución: Al pedir que sea perpendicular a una recta con pendiente 3, nos está diciendo que la recta buscada debe tener pendiente $a = -\frac{1}{3}$. Es decir, será

$$y = -\tfrac{1}{3}x + b,$$

y determinaremos b de manera que $(3, 1)$ pertenezca a la recta. Para ello, debe valer la igualdad

$$1 = -\tfrac{1}{3} \cdot 3 + b,$$

de donde se obtiene $b = 2$. Entonces, la recta buscada es $y = -\frac{1}{3}x + 2$, cuya representación gráfica se encuentra en la figura siguiente:



El ejercicio anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando primero el punto P=(3,1) y la ecuación de la recta dada. Luego, seleccionando la herramienta cuyo ícono gráfico es , se elige el punto P y después la recta dada. Se obtiene así la recta perpendicular a ella por el punto seleccionado. El comando correspondiente para esto es Perpendicular(<Punto>,<Recta>).

Vimos que dos rectas con pendientes no nulas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1. Pero toda recta horizontal es de la forma $y = b$, por lo que su pendiente es cero, y no podemos obtener su recíproco. Entonces, ¿cuál es la ecuación de la recta perpendicular a una horizontal? Así como las rectas horizontales tiene ecuación $y = b$ (lo que significa que y posee siempre el mismo valor constante aunque x varíe), las **rectas verticales** tienen ecuación

$$x = c,$$

lo que significa que el valor de x no cambia, aunque los valores de y varíen. Toda recta horizontal es perpendicular a cualquier recta vertical (ver Figura 5.5).

Las rectas verticales no corresponden al gráfico de una función, pues no hay unicidad de imagen.

Sabemos que una recta no vertical queda completamente determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Pero conocer su ordenada al origen es equivalente a saber que el punto $(0, b)$ pertenece a la recta. ¿Será posible hallar una fórmula general para determinar la ecuación de una recta conociendo su pendiente y otro punto que pertenece a ella? Supongamos que sabemos que la recta tiene pendiente $a \neq 0$ y que el punto $P = (x_1, y_1)$ pertenece a

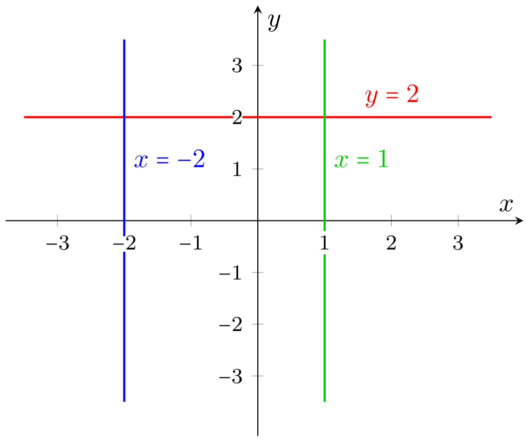


Figura 5.5: $y = b$ es perpendicular a $x = c$.

ella. La ecuación de la recta es $y = ax + b$, y solamente falta determinar b. Pero P pertenece a la recta, por lo que sus coordenadas satisfacen su ecuación, es decir,

$$y_1 = ax_1 + b,$$

de lo que se obtiene inmediatamente $b = y_1 - ax_1$. Entonces la ecuación de la recta con pendiente a que pasa por $P = (x_1, y_1)$ es

$$\boxed{y} = ax + \underbrace{y_1 - ax_1}_{b} = \boxed{a(x - x_1) + y_1},$$

lo que se conoce como **ecuación punto-pendiente** de una recta.

Ejemplo 163. **Usando la ecuación punto-pendiente.** Hallar la ecuación de la recta con pendiente $a = 4$ y que pasa por el punto $(-2, 5)$.

Solución: Utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta, sabemos que la recta buscada está dada por

$$y = 4(x - (-2)) + 5 = 4x + 13.$$

«

No es necesario memorizar la fórmula anterior, ya que podemos obtener b como lo hicimos antes en otros ejemplos. Sabiendo que la pendiente es 4 y que $(-2, 5)$ pertenece a la recta, entonces debe ocurrir que

$$5 = 4 \cdot (-2) + b,$$

y despejando se obtiene $b = 13$, como en el ejemplo anterior.

? Ya que dos puntos dados determinan una única recta que pasa por ellos, nos preguntamos ahora si es posible determinar la ecuación de dicha recta a partir de las coordenadas de los puntos. La respuesta es sí, y lo haremos primero mediante un ejemplo, para luego enunciar la fórmula general.

Ejemplo 164. **Recta por dos puntos dados.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

Solución: Sabemos que la ecuación de la recta tiene la forma $y = ax+b$. Debemos determinar a y b de manera que tanto P como Q satisfagan la ecuación de la recta. Es decir,

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b = 3, \\ a \cdot (-1) + b = -3. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas a y b, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Por ejemplo, despejando b en ambas ecuaciones tenemos

$$b = 3 - 2a \quad \text{y} \quad b = -3 + a.$$

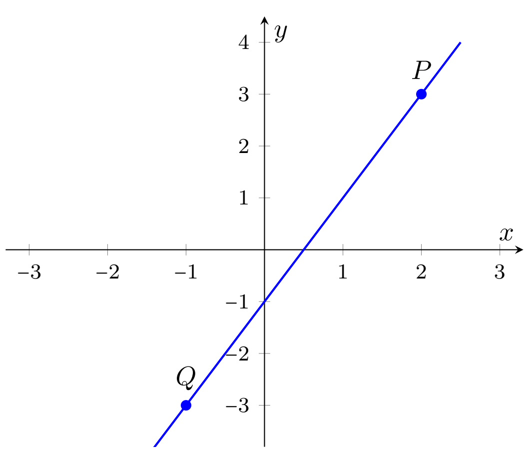
Igualando estas dos cantidades se obtiene

$$3 - 2a = -3 + a,$$

de lo que se concluye fácilmente $3a = 6$, o equivalentemente $a = 2$. Entonces $b = 3 - 2a = 3 - 4 = -1$. Por lo tanto la ecuación de la recta buscada es

$$y = 2x - 1,$$

cuya gráfica se encuentra a continuación:



«

El ejemplo anterior muestra de qué manera, dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, podemos determinar la recta que pasa por ellos. Lo que hicimos fue hallar a y b de manera que ambos puntos satisfagan la ecuación de la recta $y = ax + b$, quedando planteado así el sistema

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b & = & y_1, \\ a \cdot x_2 + b & = & y_2. \end{cases}$$

Despejando b de ambas ecuaciones e igualando luego lo obtenido, llegamos a

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2.$$

Resolvamos esta ecuación para determinar la pendiente a de la recta buscada:

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 \Leftrightarrow ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1 \Leftrightarrow a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1,$$

de lo que se obtiene

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Lo anterior nos da la pendiente de la recta que une dos puntos dados, siempre que $x_1 \neq x_2$ (si $x_1 = x_2$, entonces la recta que pasa por P y Q es vertical, de ecuación $x = x_1$). Luego, podemos hallar $b = y_1 - ax_1$, o bien podemos utilizar la fórmula punto-pendiente con el valor de a hallado y con cualquiera de los dos puntos dados.

Vamos a rehacer el ejemplo anterior, utilizando la fórmula hallada.

Ejemplo 165. **Recta que pasa por dos puntos.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

Solución: Sabemos que la pendiente de la recta que une P y Q está dada por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Aplicando ahora la fórmula punto-pendiente con $a = 2$ y P, obtenemos:

$$y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1.$$

«

En GeoGebra es posible hallar la recta que pasa por dos puntos P y Q mediante el comando Recta(P,Q), introduciendo previamente dichos puntos. Esta herramienta también se encuentra en el menú gráfico como . Notar que la ecuación $y = ax + b$ de una recta también puede expresarse como $y - ax = b$ o $y - ax - b = 0$. Recíprocamente, una expresión de la forma

$$\boxed{Ay + Bx + C = 0} \qquad \text{o} \qquad \boxed{Ay + Bx = D,}$$

con $A \neq 0$, puede llevarse fácilmente (dividiendo por A y despejando y) a la forma usual $y = ax + b$, conocida también como **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta. Las formas anteriores se conocen como **ecuación general** de la recta, y GeoGebra suele expresar así la ecuación de la recta hallada en la versión para computadoras. Sin embargo, es posible convertir de una forma a otra simplemente haciendo clic derecho sobre la recta, y eligiendo la forma que uno desee.

Aplicación: modelando problemas reales.

Veamos ahora algunas aplicaciones de las funciones afines a problemas concretos. A lo largo del libro, por simplicidad en la representación gráfica de los modelos, supondremos que todas las variables involucradas (tiempo, dinero, etc.) son **continuas** en lugar de discretas. Esto significa que pueden tomar cualquier valor en un intervalo determinado. Luego, si estuviéramos modelando la ganancia en función de la cantidad de unidades vendidas de un determinado artículo (el cual no puede fraccionarse), el dominio será el conjunto de los números naturales (no se puede vender un lápiz y medio, por ejemplo). En tal caso, el gráfico debería ser un conjunto de puntos, en lugar de una línea continua. Sin embargo, graficaremos aquí la función como si su dominio fuera el conjunto de los números reales o un intervalo, y luego el resultado deberá interpretarse según el contexto.

Ejemplo 166. El dueño de una agencia de viajes paga a cada empleado un sueldo base de \$6300 por mes, más \$500 por cada viaje vendido.

(a) Determinar el sueldo mensual de cada empleado, en función de los viajes vendidos.
(b) Determinar el sueldo de un empleado que vende 12 viajes en un mes.
(c) Determinar la cantidad de viajes que debe vender en un mes para que el sueldo sea de \$14800.

Solución:

(a) El sueldo mensual (en pesos) de cada empleado está dado por

$$S(x) = 500x + 6300,$$

donde x denota la cantidad de viajes vendidos en ese mes.

(b) Si vende 12 viajes en un mes, el sueldo es $S(12) = 500 \cdot 12 + 6300 = 12300$ pesos.

(c) Debemos hallar x natural tal que $S(x) = 14800$. Resolvamos esta ecuación:

$$14800 = 500x + 6300 \Leftrightarrow 8500 = 500x \Leftrightarrow 17 = x.$$

Entonces, un empleado debe vender 17 viajes en un mes para que el sueldo sea de \$14800. «

Ejemplo 167. Una pileta se vacía con una bomba que extrae agua a razón de 400 litros por minuto. Al encender la bomba, en la pileta había 30000 litros de agua.

(a) Hallar la función que indica el caudal restante de agua en función del tiempo, y representarla gráficamente.

(b) Determinar la cantidad de agua que queda en la pileta luego de media hora de comenzar a vaciarla.

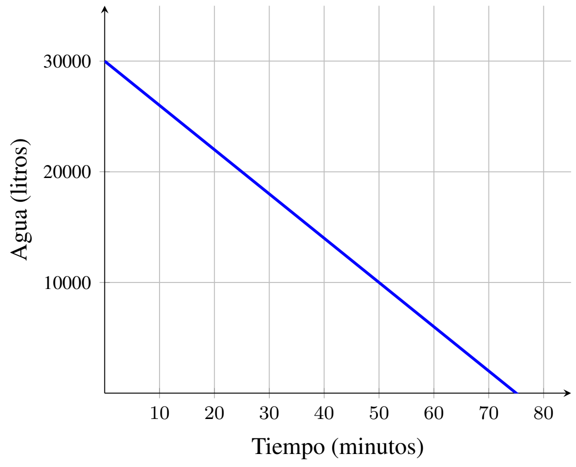
(c) Determinar el tiempo necesario para vaciar la pileta por completo.

Solución:

(a) El caudal de agua (en litros) en función del tiempo (en minutos) es

$$C(t) = 30000 - 400t,$$

cuya gráfica es la siguiente:



(b) Luego de media hora, la cantidad de agua en la pileta está dada por $C(30) = 30000 - 400 \cdot 30 = 18000$ litros de agua.

(c) Debemos hallar t tal que $C(t) = 0$ (es decir, hallar la raíz de C). Resolvamos esta ecuación:

$$0 = 30000 - 400t \Leftrightarrow -30000 = -400t \Leftrightarrow t = 75.$$

Entonces, para vaciar por completo la pileta se necesitan 75 minutos. «

Ejemplo 168. **Grados Celsius vs. Grados Fahrenheit.** En Argentina se utiliza generalmente la escala de grados Celsius (°C) para medir la temperatura. Sin embargo, en otros países se utiliza la escala de grados Fahrenheit (°F). La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula

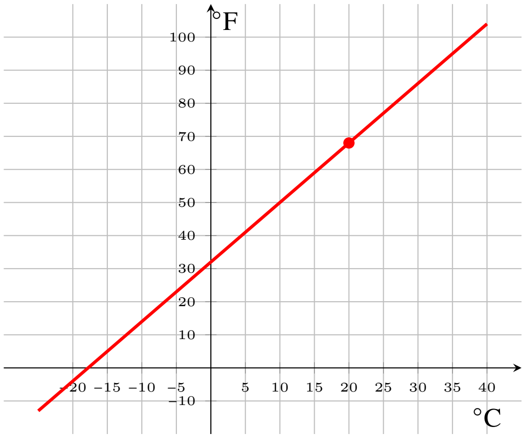
$$f(x) = \tfrac{9}{5}x + 32,$$

siendo x la temperatura en grados Celsius, y $f(x)$ es la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

(a) Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.
(b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 °C?
(c) ¿Cuántos grados Celsius son 50 °F?
(d) ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Solución:

(a) La recta correspondiente es la siguiente:



(b) El equivalente a 20 °C en °F es $f(20) = 68$ (se marca el punto en la recta).
(c) Debemos hallar x tal que $f(x) = 50$. Resolvemos la ecuación:

$$50 = \tfrac{9}{5}x + 32 \;\Leftrightarrow\; 18 = \tfrac{9}{5}x \;\Leftrightarrow\; 18 \cdot \tfrac{5}{9} = x \;\Leftrightarrow\; 10 = x.$$

Es decir, 50 °F equivalen a 10 °C.
(d) Debemos hallar los valores de x tales que $f(x) < 0$. Entonces resolvemos la inecuación:

$$\tfrac{9}{5}x + 32 < 0 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{9}{5}x < -32 \;\Leftrightarrow\; x < -32 \cdot \tfrac{5}{9} \approx -17.78.$$

Es decir, para tener una temperatura “bajo cero” en la escala Fahrenheit, debemos tener una temperatura inferior a los -17.78 °C (observar en la gráfica que este valor es donde la recta interseca al eje x). «

Ejemplo 169. **Movimiento rectilíneo uniforme.** Se llama **movimiento rectilíneo uniforme** (MRU) al que desarrolla un objeto que describe una trayectoria recta respecto a un observador, con velocidad constante (esto significa aceleración nula). En un movimiento rectilíneo uniforme, la posición s del objeto en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$s(t) = vt + s_0,$$

siendo s_0 la posición inicial del objeto y v la velocidad. La gráfica de la posición en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la velocidad, y su ordenada al origen es la posición inicial.

Supongamos que un auto parte desde un punto sobre una autopista recta, y conduce por ella a una velocidad constante de 83 km/h.

(a) Escribir la fórmula que exprese la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas, luego de la partida).

(b) Calcular a qué distancia del punto de partida se encontrará luego de dos horas de recorrido.

(c) ¿Cuánto recorrió luego de tres horas y media?

(d) Hallar el tiempo transcurrido entre su partida y el instante en el que lleva recorridos 498 km.

Solución:

(a) Tomamos como punto de referencia al lugar donde partió, es decir, colocamos allí el “kilómetro cero”. Aplicando entonces la fórmula con $s_0 = 0$, la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas) está dada por

$$s(t) = 83t.$$

(b) La distancia que habrá recorrido luego de 2 horas es $s(2) = 166$ km.

(c) Luego de tres horas y media habrá recorrido $s(3.5) = 290.5$ km.

(d) Buscamos t tal que $s(t) = 498$. Debemos resolver la ecuación

$$498 = 83t,$$

lo que equivale a $t = 6$. Luego, pasaron 6 horas desde su partida hasta recorrer 498 km. «

Ejemplo 170. **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.** Se llama **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** (MRUA) al que desarrolla un objeto cuando se mueve en línea recta y su aceleración es constante (esto quiere decir que su velocidad varía uniformemente). En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la velocidad v del móvil en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$v(t) = at + v_0,$$

siendo v_0 la velocidad inicial* del móvil, y a su aceleración. La gráfica de la velocidad en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la aceleración, y su ordenada al origen es la velocidad inicial.

Supongamos que un tren de alta velocidad, que se encuentra en reposo, comienza su trayecto en línea recta con una aceleración constante de 0.5 m/s^2.

(a) Escribir la fórmula que exprese la velocidad alcanzada por el tren en función del tiempo, indicando las unidades utilizadas.
(b) Calcular la velocidad (en kilómetros por hora) que alcanza el tren a los 3 minutos y medio.
(c) ¿Cuántos minutos le lleva alcanzar una velocidad de 165 m/s?

Solución:

(a) Como el tren parte desde el reposo, la velocidad inicial es cero. Puesto que la aceleración está dada en m/s^2, la fórmula

$$v(t) = 0.5t$$

nos dará la velocidad del tren (en m/s) en función del tiempo (en segundos).

(b) Notar que 3 minutos y medio equivalen a 210 segundos, por lo que la velocidad en ese momento será $v(210) = 105$, pero en m/s. Para expresarla en km/h, escribimos

$$105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underbrace{\frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}}}_{=1} = 378\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(c) Debemos hallar t tal que $v(t) = 165$. Resolvamos la ecuación:

$$165 = 0.5t \Leftrightarrow t = 330.$$

Esto nos dice que le lleva 330 segundos alcanzar la velocidad indicada, lo que equivale a 5 minutos y medio. «

*Por estar en un movimiento rectilíneo, la dirección de la velocidad está dada por su signo.

Ejemplo 171. **Hallando la aceleración en un MRUA.** Un automóvil que va a una velocidad de 8 m/s acelera uniformemente su marcha, de forma que a los 30 segundos su velocidad es de 23 m/s.

(a) Calcular la aceleración aplicada en ese tiempo.
(b) Calcular la velocidad (en metros por segundo) que alcanza el automóvil luego de 6 segundos de comenzar a acelerar.
(c) Determinar el tiempo transcurrido desde que acelera hasta que alcanza una velocidad de 20 m/s.

Solución:

(a) Por un lado sabemos que la aceleración es la pendiente de la recta dada por la velocidad. Por otro lado, sabemos cómo calcular la pendiente de una recta conociendo dos puntos sobre ella. Si empezamos a contar el tiempo desde el momento que empieza a acelerar, entonces dos puntos en la recta correspondiente al gráfico de la velocidad son

$$(0, 8) \quad \text{y} \quad (30, 23).$$

Entonces la aceleración es $a = \frac{23-8}{30} = \frac{15}{30} = 0.5$ m/s^2.

(b) La velocidad en cada instante t del período indicado está dada por

$$v(t) = 0.5t + 8,$$

por lo que la velocidad a los 6 segundos de comenzar a acelerar es igual a $v(6) = 11$ m/s.

(c) Buscamos t tal que $v(t) = 20$. Entonces resolvemos la ecuación

$$20 = 0.5t + 8 \Leftrightarrow 12 = 0.5t \Leftrightarrow 24 = t.$$

Esto significa que a los 24 segundos de comenzar a acelerar, llegó a una velocidad de 20 m/s (lo que equivale a 72 km/h). «

Ejemplo 172. **Caída libre - Tiro vertical.** Se denomina **caída libre** al movimiento vertical* de un cuerpo sometido únicamente a la aceleración de la gravedad, la cual es constantemente 9.8 m/s^2 (este valor se denota con la letra g), que lo atrae hacia el suelo (supondremos que no hay resistencia del aire). Este tipo de movimiento se produce cuando se lanza un objeto *verticalmente* hacia arriba o hacia abajo, o cuando simplemente lo dejamos caer. La caída libre (o tiro vertical) es un caso particular del movimiento uniformemente acelerado, por

*Un cuerpo describe un movimiento vertical si su trayectoria forma con la horizontal un ángulo recto. Luego estudiaremos lo que se conoce como “tiro de proyectil”, en el que el objeto se lanza con un ángulo de tiro agudo, produciendo un desplazamiento del mismo en dirección vertical y también horizontal.

lo que la velocidad v (en m/s) de un objeto en caída libre en cada instante t (en segundos) se puede calcular por la fórmula

$$v(t) = -9.8t + v_0,$$

siendo v_0 la velocidad inicial del objeto ($v_0 > 0$ si el objeto es lanzado hacia arriba, $v_0 < 0$ cuando es lanzado hacia abajo, y $v_0 = 0$ cuando el objeto se deja caer). El signo menos en la aceleración de la gravedad corresponde a la dirección, ya que el objeto es atraído hacia abajo. Por otro lado, se sabe que la altura (en metros) del objeto en caída libre en cada instante de tiempo está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + v_0 t + y_0,$$

siendo y_0 la altura desde la que se arroja el objeto. Nos ocuparemos con más detalle de esta función de altura en la Sección 5.5.

Supongamos que una piedra se deja caer desde una altura de 54 metros.

(a) Escribir la fórmula que exprese la velocidad (en m/s) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos).

(b) Calcular la velocidad que alcanzará la piedra a los 4 segundos de haber sido soltada.

(c) ¿En qué instante alcanzará una velocidad de -19.6 m/s?

(d) Escribir la fórmula que exprese la altura (en metros) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos).

(e) ¿A qué altura se encontrará la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada?

(f) Determinar los segundos que demora en llegar al suelo, y con qué velocidad llega.

Solución:

(a) Ya que la piedra se deja caer, se tiene $v_0 = 0$. Luego, la velocidad de la piedra (en m/s) en función del tiempo (en segundos) está dada por

$$v(t) = -9.8t.$$

(b) A los 4 segundos de haberla dejado caer, la velocidad de la piedra será de $-9.8 \cdot 4 = -39.2$ m/s. El signo de la velocidad indica el sentido, en este caso el signo menos indica que la piedra está cayendo.

(c) Buscamos t tal que $v(t) = -19.6$. Es decir, hay que resolver la ecuación $-9.8t = -19.6$, lo que arroja $t = 2$ segundos.

(d) Ya que la altura de lanzamiento es de 54 metros, se tiene $y_0 = 54$. Luego, la altura (en metros) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos) está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + 54.$$

(e) La altura a la que se encuentra la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada es

$$y(3) = -4.9 \cdot 3^2 + 54 = 9.9,$$

es decir, se encuentra a 9.9 metros de altura.

(f) Primero busquemos t tal que $y(t) = 0$. Para ello resolvemos

$$0 = -4.9t^2 + 54 \Leftrightarrow 4.9t^2 = 54 \Leftrightarrow t^2 \approx 11.02 \Leftrightarrow t \approx \pm 3.32.$$

Como estamos hablando de tiempo, la solución negativa se descarta. Entonces la piedra llega al suelo, aproximadamente, a los 3.32 segundos de comenzar a caer, y la velocidad con la que llega (en m/s) es alrededor de

$$v(3.32) = -32.5.$$ «

Ejemplo 173. Se lanza desde el suelo una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s.

(a) ¿Qué velocidad tendrá la pelota luego de 2 segundos? ¿Se encontrará subiendo o bajando? ¿A qué altura se encontrará?

(b) ¿En qué instantes la pelota estará a 15 metros de altura?

(c) ¿Cuánto tiempo demora en volver al suelo?

(d) Hallar la altura máxima alcanzada por la pelota, sabiendo que esta corresponde al instante en el que su velocidad es cero.

(e) ¿Cuál debió haber sido la velocidad inicial para que la altura máxima de la pelota sea 25 metros?

Solución: Comencemos dando las funciones que determinan la velocidad (en m/s) y la altura (en metros) de la pelota en cada instante de tiempo (en segundos):

$$v(t) = -9.8t + 20, \qquad y(t) = -4.9t^2 + 20t.$$

(a) La velocidad luego de 2 segundos es $v(2) = 0.4$ m/s. Por ser positiva, la pelota se encuentra subiendo, y la altura será $y(2) = 20.4$ metros.

(b) Para determinar en qué momentos la altura de la pelota es de 15 metros, debemos hallar t tal que $y(t) = 15$, es decir, debemos resolver la ecuación

$$15 = -4.9t^2 + 20t.$$

Para ello aplicamos la resolvente, obteniendo como resultados $t_1 \approx 1$ y $t_2 \approx 3.1$, que corresponden a los momentos en que la pelota se encuentra subiendo y bajando, respectivamente. En ambos instantes alcanza 15 metros de altura.

(c) Buscamos t tal que $y(t) = 0$. Esto significa que debemos resolver la ecuación $-4.9t^2 + 20t = 0$. Extrayendo t como factor común, se obtiene

$$t(-4.9t + 20) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{o} \quad -4.9t + 20 = 0.$$

La opción $t = 0$ corresponde a cuando la pelota es lanzada, por lo que vuelve al piso cuando $-4.9t + 20 = 0$, lo que implica $t \approx 4.08$ segundos.

(d) Primero hallemos t tal que $v(t) = 0$. Resolviendo $-9.8t + 20 = 0$ se obtiene $t = 20/9.8 \approx 2.04$ segundos. Ahora calculamos

$$y(2.04) = -4.9 \cdot (2.04)^2 + 20 \cdot (2.04) = 20.4,$$

por lo que la altura máxima alcanzada por la pelota es de aproximadamente 20.4 metros.

(e) Sea v_0 la velocidad inicial. Entonces la velocidad y la altura están dadas por

$$v(t) = -9.8t + v_0, \qquad y(t) = -4.9t^2 + v_0 t.$$

Con el mismo razonamiento del inciso anterior, queremos que

$$\begin{cases} -9.8t + v_0 & = & 0, \\ -4.9t + v_0 & = & 25. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones lineales y dos incógnitas t y v_0, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Resolviendo se obtiene $t \approx 5.10$ y $v_0 = 50$. Esto significa que si la velocidad inicial es de 50 m/s, la pelota alcanza una altura máxima de 25 metros a los 5 segundos de ser lanzada, aproximadamente. «

Las funciones lineales también modelan una infinidad de situaciones frecuentes. Este es el caso de problemas de proporción directa, lo que incluye, en particular, a problemas de porcentaje.

Proporcionalidad directa.

Las relaciones de proporcionalidad aparecen con mucha frecuencia en nuestra vida cotidiana. Para que dos magnitudes mantengan una relación de **proporcionalidad directa**, tienen que estar relacionadas de tal forma que si aumentamos la cantidad de una, la otra tiene que aumentar también proporcionalmente, y lo mismo ocurre si reducimos una de ellas. Por ejemplo, si duplicamos una, la otra se tiene que duplicar, si la triplicamos la otra también se triplica, y si la reducimos a la mitad, la otra también se tiene que reducir a la mitad. Esto se traduce matemáticamente como: dos magnitudes x e y son directamente proporcionales si existe una constante a, llamada **constante de proporcionalidad**, tal que

$$y = ax.$$

Estamos rodeados de magnitudes directamente proporcionales entre sí, como veremos en los ejemplos contenidos hasta finalizar esta sección.

Para resolver un problema de proporcionalidad directa se puede utilizar:

- La constante de proporcionalidad.
- Una regla de tres simple.

En el siguiente ejemplo recordamos estas dos formas de resolución de problemas de proporción directa.

Ejemplo 174. **Proporción directa.** Sabiendo que 16 entradas para el cine costaron \$3840, determinar el precio de 29 entradas (estamos suponiendo que no hay ningún tipo de promoción).

Solución 1: hallando la constante de proporcionalidad. Puesto que la cantidad de entradas a adquirir (x) es directamente proporcional al dinero a abonar (y), sabemos que existe una constante a tal que $y = ax$, lo que equivale a $a = \frac{y}{x}$ cuando $x \neq 0$. Reemplazando x e y por los datos dados, tenemos que

$$a = \frac{3840}{16} = 240.$$

Entonces, el precio a abonar en pesos en función de la cantidad de entradas está dado por

$$y = 240x.$$

Esto implica que el valor de 29 entradas será de $y = 240 \cdot 29 = 6960$ pesos. Notar que la constante de proporcionalidad a corresponde al *valor de la unidad*, lo que en este caso corresponde al valor de una sola entrada.

Solución 2: usando regla de tres simple. La regla de tres simple es una operación que tiene por objetivo hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres. Recordamos a continuación el método para magnitudes directamente proporcionales*:

$$\left.\begin{array}{ccc} 16 & \longrightarrow & 3840 \\ 29 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{29 \cdot 3840}{16} = 6960,$$

obteniendo así el mismo resultado que con el método anterior. «

*Por simplicidad en la escritura, no colocaremos aquí las unidades correspondientes a las cantidades involucradas. Se recomienda al alumno hacerlo en caso de que esto ayude a "encolumnar" de manera correcta dichas cantidades. Recordar que, al resolver, las unidades deben "cancelarse" de forma que el resultado quede indicado en la unidad adecuada.