



Universidad Nacional
de **Entre Ríos**

Facultad de Ciencias de la Administración

Licenciatura en Sistemas

Organización de computadoras

Mg. Marcelo Alberto Colombani

marcelo.colombani@uner.edu.ar



Unidad N° III

Objetivos:

Comprender en detalle las operaciones lógicas de los componentes digitales estándares más comunes.

Distinguir a estos dispositivos digitales como bloques de construcción para el diseño de circuitos más grandes.

LA LÓGICA DEL COMPUTADOR

Álgebra de Boole.

Circuitos en serie y en paralelo.

Puertas lógicas.

Implementación de funciones booleanas.

Expresiones canónicas.



Unidad N° III

Bibliografía

Orden	Título	Autor(es)	Editorial	Año de edición
1	Organización de computadoras. Un enfoque estructurado.	Andrew S. Tanenbaum	Pearson Educación	Séptima Edición, 2000
3	Organización y arquitectura de computadores	William Stallings	Prentice Hall	Séptima Edición, 2007
4	Principios de arquitectura de computadoras	Murdocca, Miles J. Heuring, Vincent P.	Prentice Hall	2002
5	Arquitectura de ordenadores	M. Rafiquzzaman	Anaya	1988
11	Arquitectura de computadoras. De los microprocesadores a las supercomputadoras	Parhami, Behrooz	Mc Graw Hill	2007



Leemos y analizamos

Los elementos que nos permiten operar con bits en las computadoras clásicas son las puertas lógicas, que implementan las operaciones lógicas del Álgebra de Boole.

Este último es una estructura algebraica diseñada para trabajar sobre expresiones de la lógica proposicional, que tienen la peculiaridad de que solo pueden adoptar uno de dos posibles valores, cierto o falso, de ahí que este álgebra sea también perfecta para llevar a cabo operaciones en sistemas digitales binarios, que, por tanto, también pueden adoptar en un instante dado solo uno de dos valores posibles: 0 o 1.



Leemos y analizamos

La operación lógica AND implementa el producto; la operación OR, la suma, y la operación NOT invierte el resultado de las otras dos, con las que puede combinarse para implementar las operaciones NAND y NOR.

Estas, junto con la operación de suma exclusiva (XOR) y su negación (XNOR) son las operaciones lógicas básicas con las que trabajan a bajo nivel las computadoras que todos utilizamos actualmente. Y con ellas son capaces de resolver todas las tareas que llevamos a cabo.



Leemos y analizamos

Podemos navegar en Internet, escribir textos, escuchar música y jugar con videojuegos, entre muchas otras posibles aplicaciones, gracias a que el microprocesador de nuestra computadoras es capaz de llevar a cabo estas operaciones lógicas.

Cada una de ellas nos permite modificar el estado interno de la CPU, de manera que podemos definir un algoritmo como una secuencia de operaciones lógicas que modifican el estado interno del procesador hasta que alcance el valor que nos ofrece la solución a un problema dado.

Álgebra de Boole.

Teoría matemática desarrollada por el filósofo y matemático George Boole en el año 1854.

En informática y matemática, es una estructura algebraica que esquematiza las operaciones lógicas Y, O, NO y SI

Todos los elementos que contempla el álgebra de Boole, o sea, *constantes y variables* sólo admiten dos estados.

Por lo tanto, se contemplan con la posibilidad de aceptar dos estados.

Así, un interruptor puede estar "abierto" o "cerrado", un relé eléctrico admite estar "activado" o "desactivado", un diodo semiconductor, "conduciendo" o "bloqueado".

Debe notarse que los elementos 0 y 1 no representan números enteros, sino más bien alguna condición física del sistema.



Álgebra de Boole.

La posibilidad de que todos los elementos admitan dos estados en esta estructura matemática ha llevado a llamarla "álgebra binaria".

La denominación de "álgebra lógica", se debe al carácter de tipo intuitivo y lógico que tienen los razonamientos que en ella se aplican.

En 1938, Claude Shannon, sugirió que el A.B. podría usarse para resolver problemas de diseño de circuitos de conmutación.

Álgebra de Boole.

Las variables y constantes binarias de entrada y salida se suelen expresar con las letras del alfabeto.

Sus operaciones se expresan con signos muy similares a los empleados en las operaciones matemáticas clásicas, como la suma y la multiplicación.

Diferencia.

El álgebra clásica establece *relaciones cuantitativas*.

El álgebra de Boole establece *relaciones de tipo lógico*.

Álgebra de Boole.

En el álgebra de Boole se pretende conocer en cuál de los dos estados posibles está uno de los términos de una ecuación lógica.

Existen tres operaciones básicas en un AB:

o NOT.

o AND.

o OR.

Tabla de Verdad

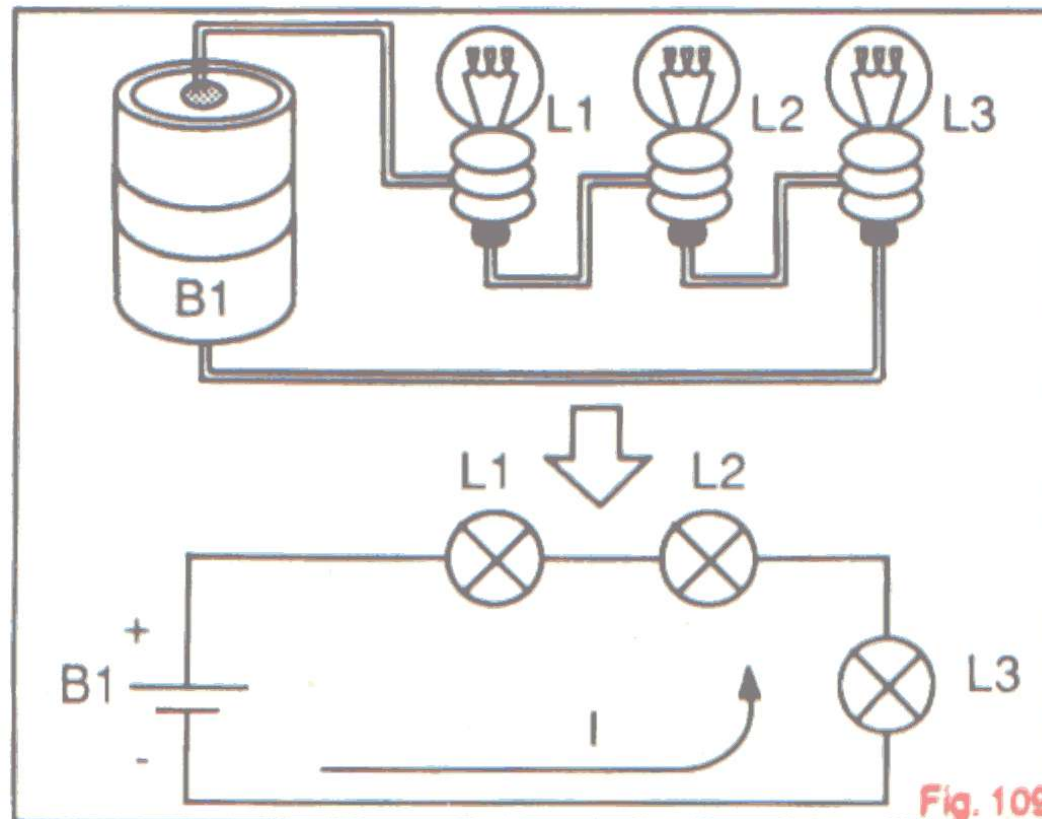
Consiste en una tabla cuyas columnas de la parte izquierda representan todas las combinaciones que pueden tomar las variables de entrada.

En la columna de la derecha se indica el valor que toman las salidas para cada combinación de las entradas.

A	B	X
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

CIRCUITOS EN SERIE

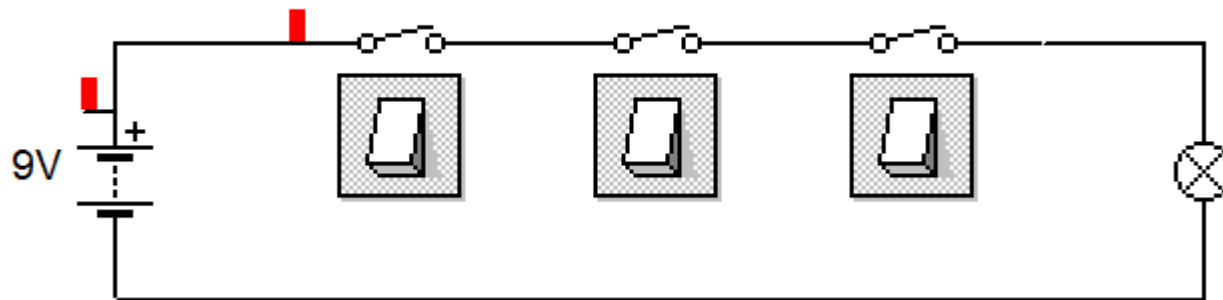
Se dice que los componentes de un circuito están en serie cuando la corriente circula primero por un componente, luego por el siguiente y así sucesivamente hasta recorrer el camino completo.



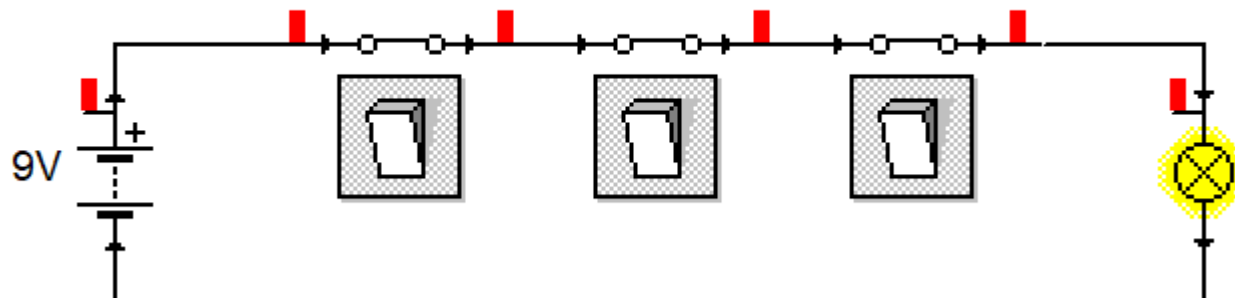
CIRCUITOS EN SERIE

Se dice que los componentes de un circuito están en serie cuando la corriente circula primero por un componente, luego por el siguiente y así sucesivamente hasta recorrer el camino completo.

Circuito en Serie

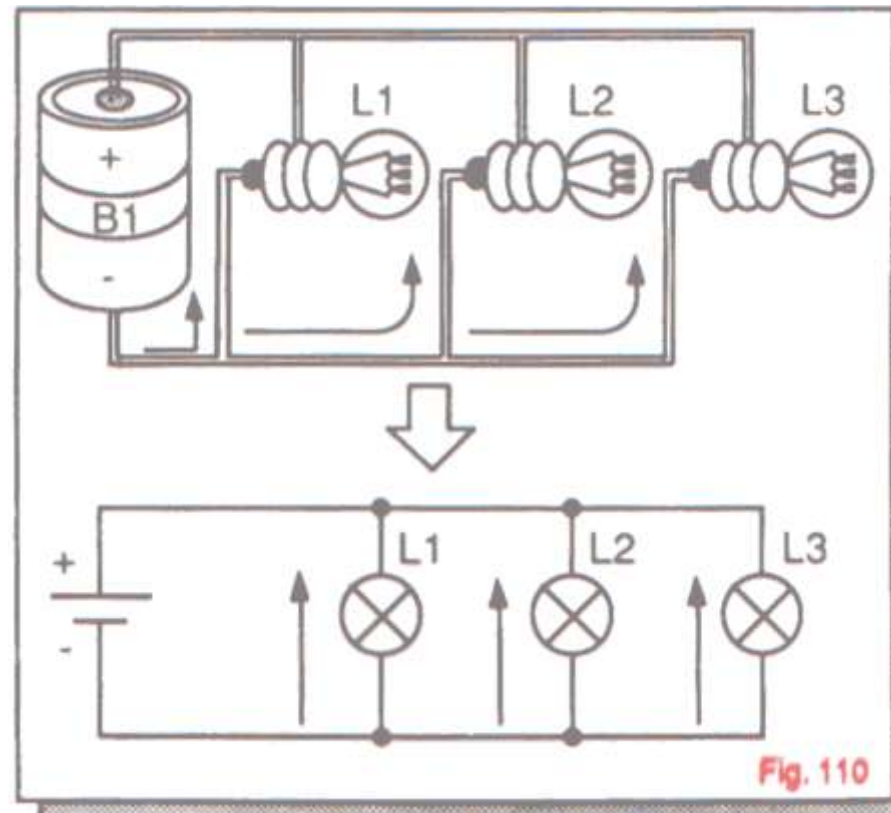


Circuito en Serie



CIRCUITOS EN PARALELO

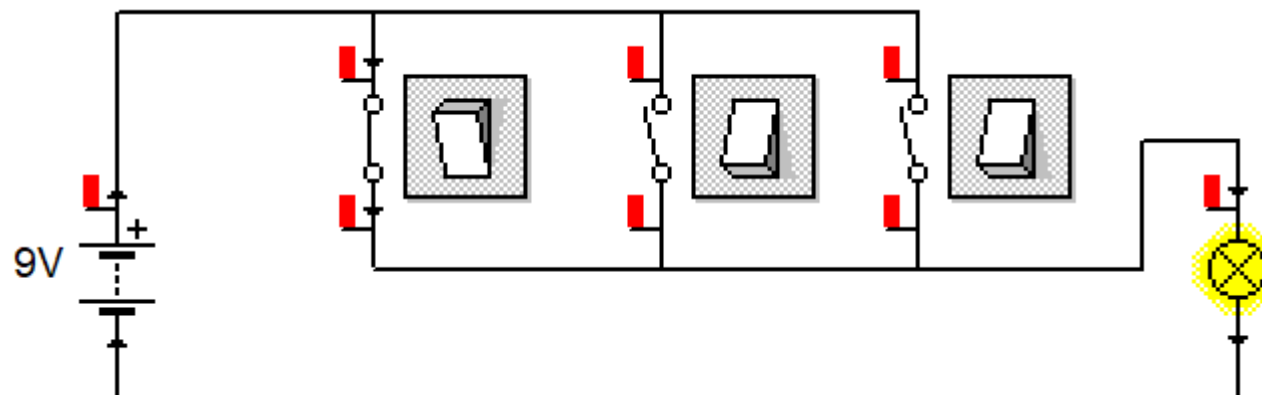
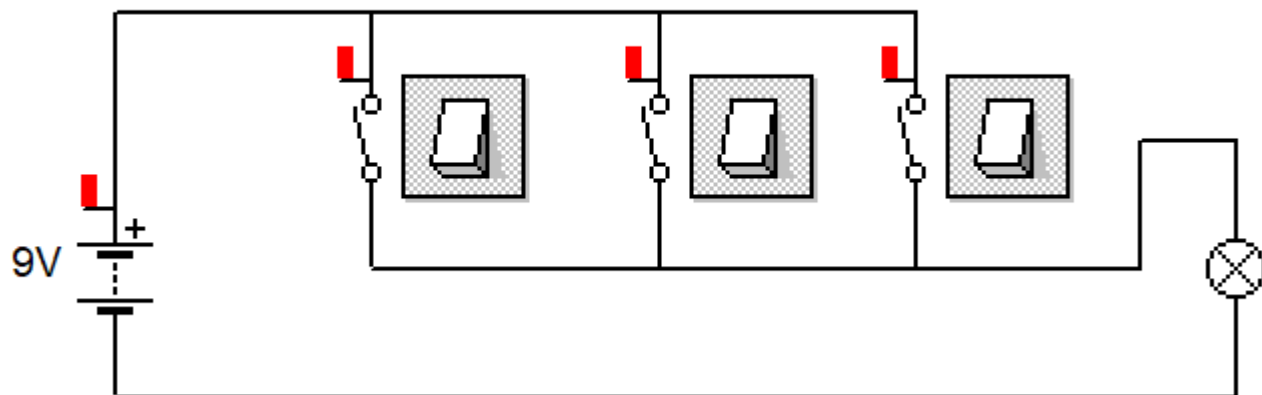
Se dice que un circuito está en paralelo cuando la corriente circula simultáneamente por todos sus componentes, ya que los terminales de cada uno están conectados uno a cada polo de la fuente de voltaje o alimentación.



CIRCUITOS EN PARALELO

Se dice que un circuito está en paralelo cuando la corriente circula simultáneamente por todos sus componentes, ya que los terminales de cada uno están conectados uno a cada polo de la fuente de voltaje o alimentación.

Circuito en paralelo



PUERTA LÓGICA

El bloque fundamental de construcción de todos los circuitos lógicos digitales son las puertas. Las funciones lógicas se implementan interconectando puertas.

- **Una *puerta lógica* es un elemento eléctrico simple, que toma una o más señales de entradas y genera una señal salida cuyo valor depende de los valores de entradas.**

Una tabla de verdad de la puerta define cuál será el resultado de la salida para cada combinación de entradas. Los valores de entrada y salida son representados mediante voltajes.

Típicamente, 5 volts representa un 1 y 0 volts representa un 0.

PUERTA LÓGICA

Una puerta es un circuito electrónico que produce una señal de salida que es una **operación booleana** sencilla de las señales de entrada.

Las puertas básicas usadas en lógica digital son:

- AND
- OR
- NOT
- NAND
- NOR.

Cada puerta se define de tres formas:

- Símbolo gráfico.
- Notación algebraica o ecuación booleana.
- Tabla verdad.

PUERTA AND

Cuando varias variables lógicas, de tipo binario, se combinan mediante la operación lógica AND, producen una variable de salida, que sólo toma el nivel lógico 1 o estado alto o verdadero, si todas ellas tienen dicho nivel o estado.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \cdot B$$

PUERTA AND

La representación eléctrica de la operación AND se realiza mediante interruptores conectados en serie.



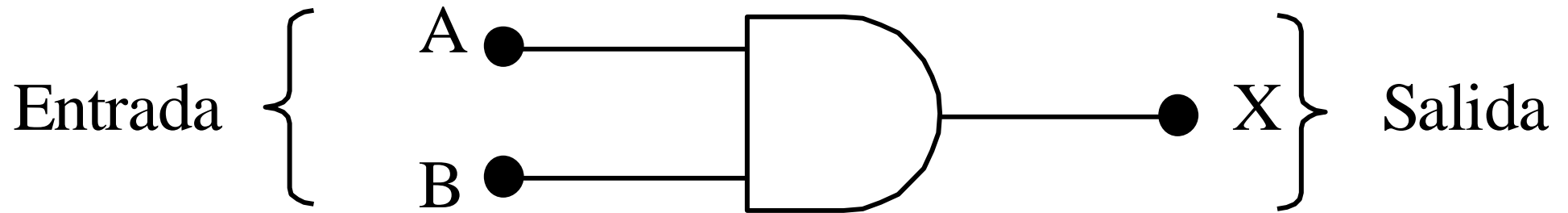
PUERTA AND

En la ecuación $X = A \cdot B$, existen dos variables de entrada (A y B) y una sola salida (X). El número de combinaciones diferentes, N, que se pueden realizar con n variables binarias viene expresado por la fórmula $N = 2^n$, que, en el ejemplo citado, dará lugar a $N = 2^2 = 4$ combinaciones posibles.

A	B	X
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

PUERTA AND

El símbolo lógico que representa una función AND es el siguiente.



PUERTA OR

Cuando distintas variables lógicas se combinan mediante la función OR, el resultado toma el estado ALTO si alguna de ellas tiene dicho estado.

La operación OR es menos exigente que la AND porque sólo exige que alguna de las variables de entrada valga 1, para que la salida tome ese nivel.

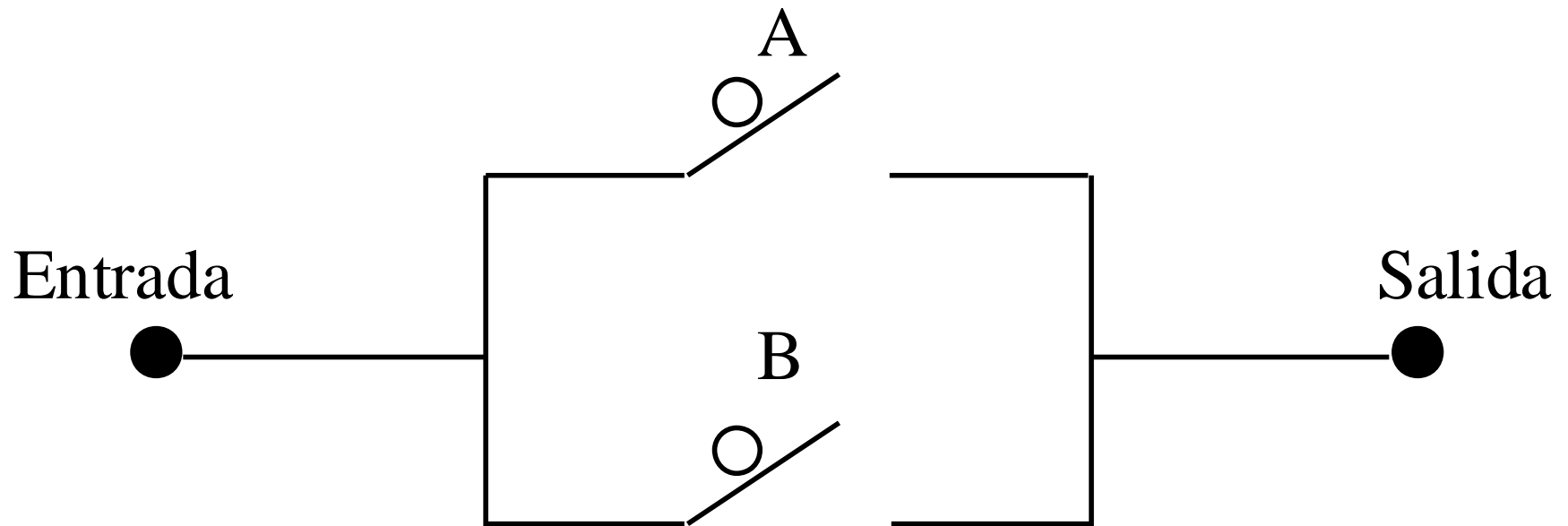
La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A + B$$

PUERTA OR

En la implementación eléctrica de la función OR, los interruptores que referencian las variables de entrada se conectan en paralelo.

La tensión aplicada a la entrada del circuito eléctrico pasa a la salida X, siempre que alguno de los interruptores esté cerrado.



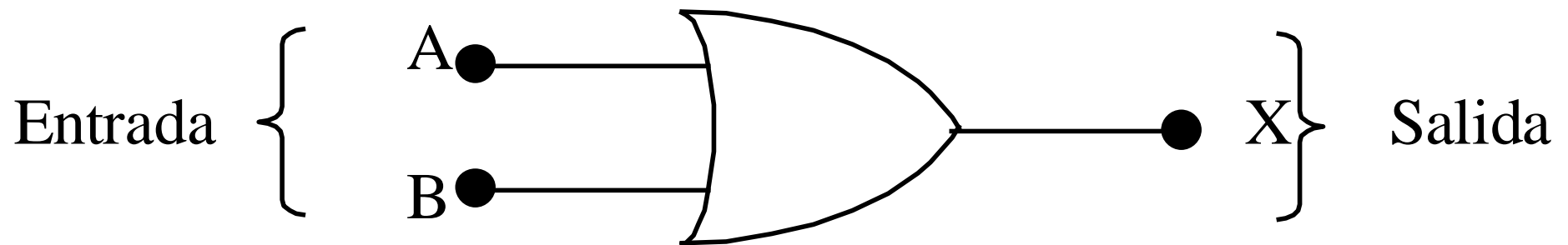
PUERTA OR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	X
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

PUERTA OR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación OR, es decir, el símbolo de la puerta OR.



PUERTA NOT

Se trata de una operación que sólo maneja una variable de entrada y otra de salida.

La salida toma estado opuesto o inverso del que tiene la entrada. Por este motivo, también se la llama función inversión o negación.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = \overline{A}$$

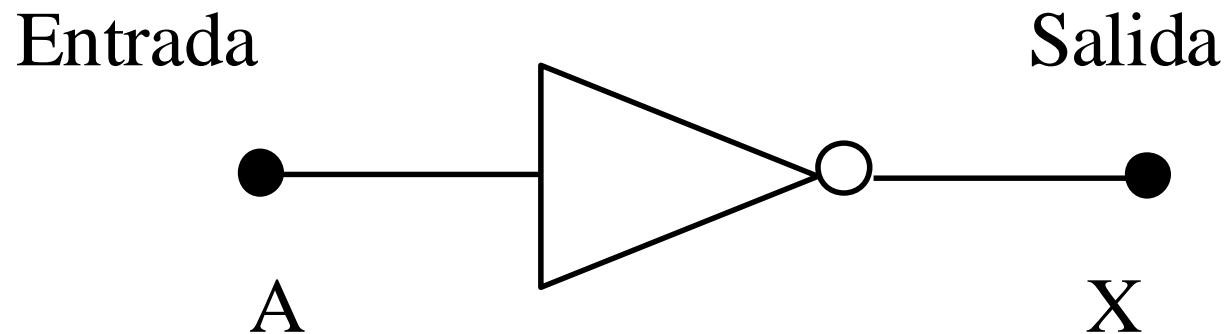
PUERTA NOT

La tabla de verdad correspondiente.

A	X
0	1
1	0

PUERTA NOT

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NOT, es decir, el símbolo de la puerta NOT.





PUERTA NAND

La puerta NAND produce la función inversa de la AND, o sea, la negación del producto lógico de las variables de entrada. Actúa como una puerta AND seguida por una NOT.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \text{ NAND } B = \overline{AB}$$

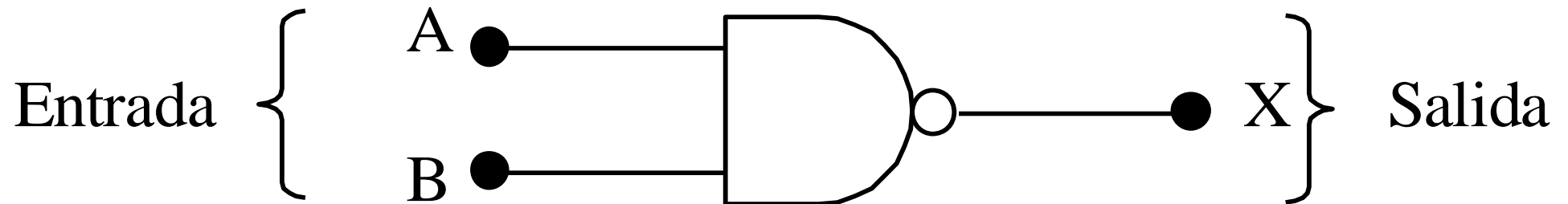
PUERTA NAND

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	A NAND B
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

PUERTA NAND

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NAND, es decir, el símbolo de la puerta NAND.



PUERTA NOR

La puerta NOR produce la función inversa de la OR, o sea, la negación de la suma lógica de las variables de entrada. Actúa como una puerta OR seguida por una NOT.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \text{ NOR } B = \overline{A + B}$$

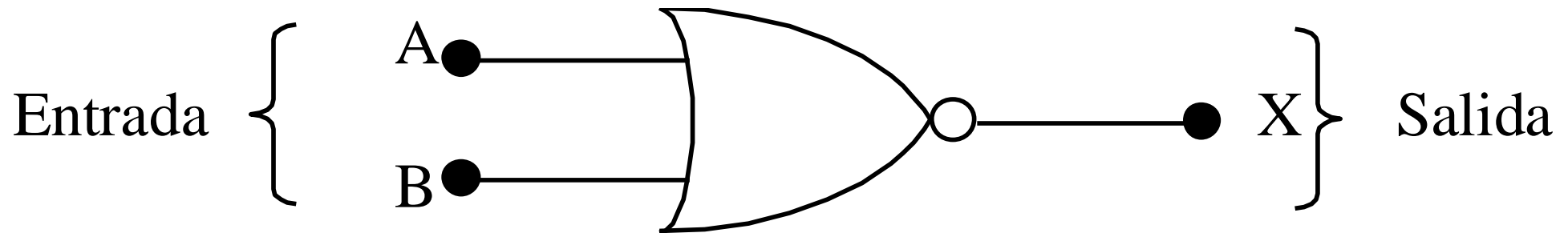
PUERTA NOR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	A NOR B
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

PUERTA NOR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NOR, es decir, el símbolo de la puerta NOR.



PUERTA XOR

A esta puerta se la denomina OR EXCLUSIVA porque su comportamiento es igual al de la puerta OR excepto en la combinación en que el número de entradas que tienen nivel lógico 1 es par, en cuyo caso la salida de la XOR es 0.

El símbolo matemático es el del OR pero rodeado de un círculo \oplus .

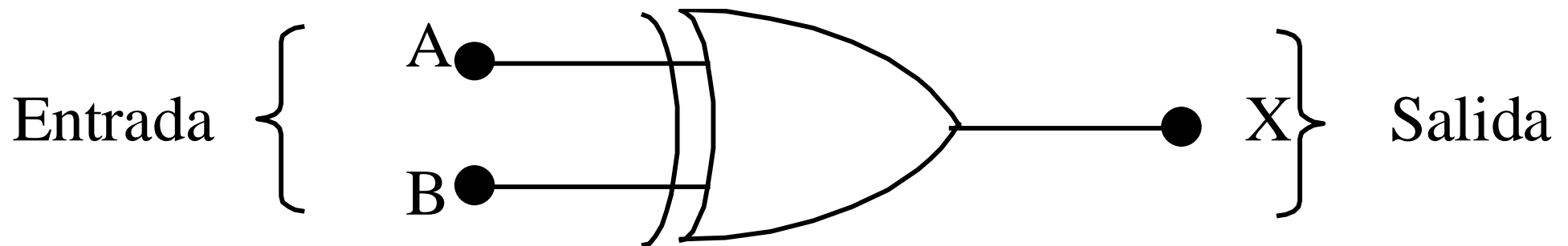
PUERTA XOR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

PUERTA XOR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación XOR, es decir, el símbolo de la puerta XOR.



Implementación de funciones booleanas

La puerta XOR puede representarse utilizando puertas AND y OR.

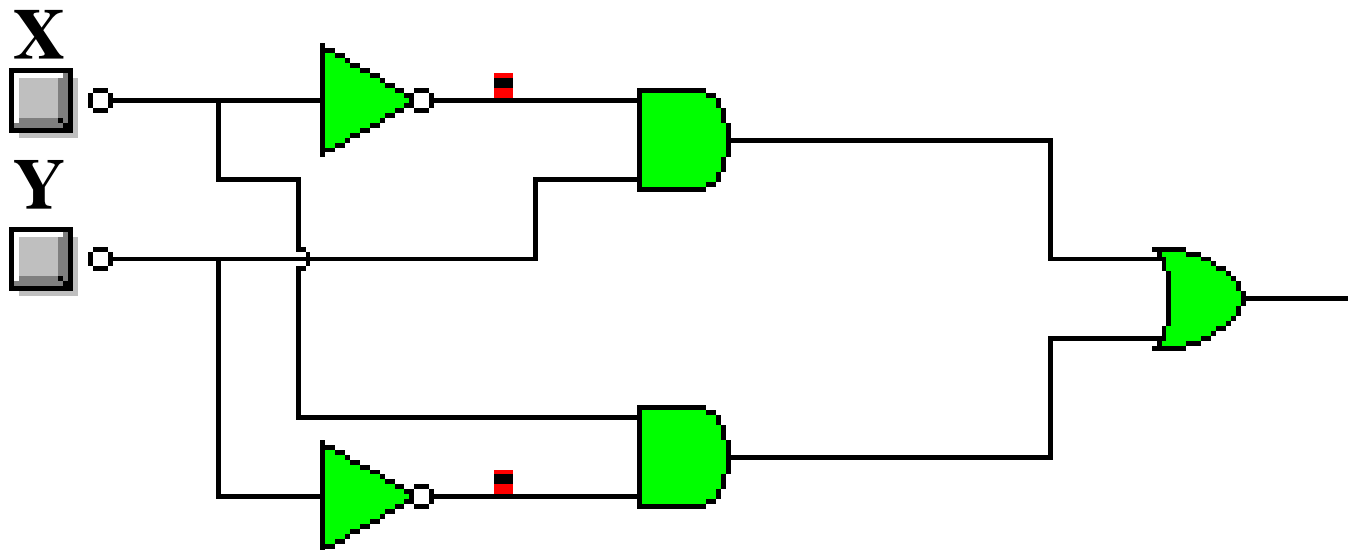
- Si consideremos que para que se obtenga un valor 1 en la salida debe una de las entradas ser 1.

$$X = 0 \text{ y } Y = 1 \Rightarrow Z = 1$$

$$X = 1 \text{ y } Y = 0 \Rightarrow Z = 1$$

- siendo Z el resultado la función XOR

$$Z = X' \cdot Y + X \cdot Y'$$



Propiedades del álgebra de boole

A continuación se resumen algunas de las propiedades más importantes de estos operadores:

Las operaciones AND y OR son **conmutativas**. Es decir:

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

$$X + Y = Y + X$$

Las operaciones AND y OR son **asociativas**. Es decir:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

Propiedades del álgebra de boole

La operación AND es **distributiva** respecto a la operación OR y viceversa. Es decir:

$$X (Y + Z) = XY + XZ$$

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) (X + Z)$$

Se verifica la ley de la doble negación o principio de involución

$$(X')' = X$$

Propiedades del álgebra de boole

Cuando se efectúa una operación AND sobre una variable booleana y su complementario, el resultado es 0.

$$X \cdot X' = 0$$

Sin embargo, cuando se efectúa una operación OR sobre una variable booleana y su complementario, el resultado es 1.

$$X + X' = 1$$

Cuando se efectúa una operación AND sobre una variable booleana y el valor 0, el resultado es 0.

$$X \cdot 0 = 0$$

Sin embargo, cuando se efectúa una operación OR entre una variable booleana y un 1, ésta resulta invariante. Es decir:

$$X + 1 = X$$

Propiedades del álgebra de boole

De la misma manera, efectuar una operación AND entre una variable booleana y 1 producirá un efecto nulo.

$$X \cdot 1 = X$$

Por otra parte, cuando se efectúa una operación OR entre una variable y 1, el resultado es siempre 1. De manera más formal:

$$X + 1 = 1$$

Propiedades del álgebra de boole

El complemento de un producto booleano es la suma de los complementos individuales.

$$(X \cdot Y \cdot Z)' = X' + Y' + Z'$$

De forma similar, el complemento de una suma booleana es el producto de los complementos individuales. Es decir:

$$(X + Y + Z)' = X' \cdot Y' \cdot Z'$$

Los dos resultados anteriores se conocen normalmente como *Leyes de De Morgan*

Expresiones canónicas

En Álgebra booleana, se conoce como término canónico de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa.

Existen dos formas básicas de expresiones canónicas que pueden ser implementadas en dos niveles de compuertas:

- **Suma de productos o expansión de minterminos**
- **Producto de sumas o expansión de maxterminos**

Suma de productos lógicos

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = A'.B'.C + A'.B.C + A.B'.C + A.B.C' + A.B.C$$

Producto de sumas lógicas

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B'+C) \cdot (A'+B+C)$$

Ejemplo

Se pretende armar un circuito que permita accionar una alarma que posee 3 interruptores.

La salida deberá ser 1 cuando dos entradas sea 1.

Si hay 3 entradas en uno el resultado deberá ser 0.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F = A'.B.C + A.B'.C + A.B.C'$$

Ejemplo

