DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Derivada de una función en un punto

Supongamos que lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota, la trayectoria de la pelota es un segmento de recta vertical, ya que la pelota se eleva hasta una cierta altura y luego se detiene por un instante y cae.

Representemos en función del tiempo la altura de la pelota y supongamos que la altura viene dada por la siguiente función:

$h(t) = -4t^2 - 30t$

Supongamos que el tiempo está medido en segundos y la altura en centímetros.

La gráfica de esta función es la figura siguiente.

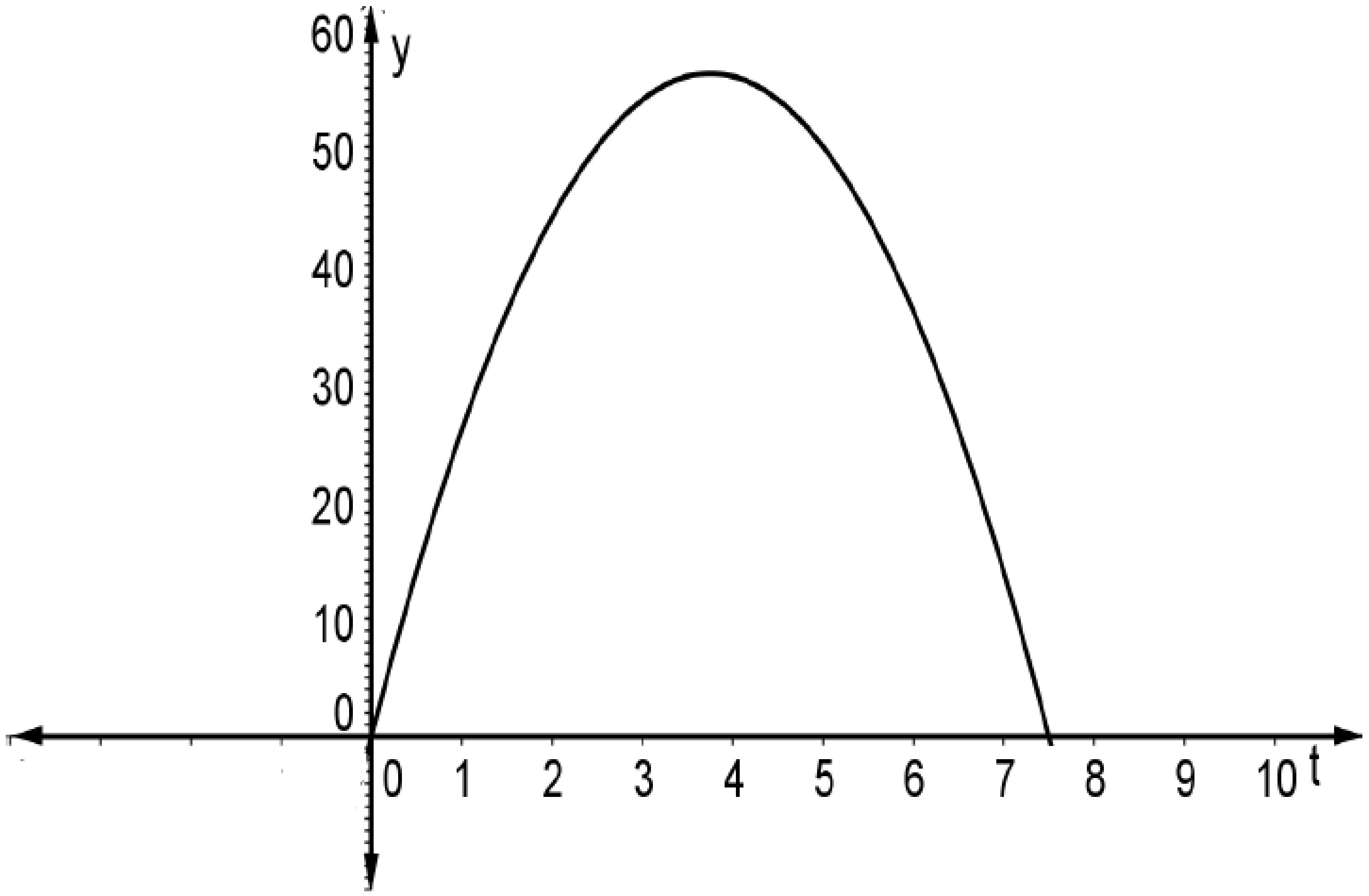


Gráfico de la función $h(t) = -4t^2 + 30t$

Si fuera necesario a partir de la gráfica de la función podemos calcular la altura de la pelota para un tiempo dado. También observando la gráfica, se puede ver como esta describe el movimiento de la pelota, ya que la misma crece hasta alcanzar una altura máxima y luego decrece hasta alcanzar nuevamente la altura desde donde partió.
Podemos encontrar otro tipo de información, como por ejemplo la rapidez del cambio de altura con el tiempo.

Consideremos un instante inicial t_0 y un instante final t, luego en el tiempo $t - t_0$ segundos la altura ha variado $h(t) - h(t_0)$ metros.

El cociente

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$$

representa la variación de la altura en el tiempo $t - t_0$.
Este cociente se denomina tasa de variación media de la altura en el intervalo $[t_0, t]$.

En Física se la denomina velocidad media de la pelota en el tiempo [t_0; t].
Si por ejemplo nos interesa la variación de la altura en cada instante t_0,
bastará, calcular:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$$

si este límite existe y es finito, representa la tasa de cambio instantánea
de la altura en el instante t_0.

En Física, se denomina velocidad instantánea de la pelota en t_0.

Cociente incremental

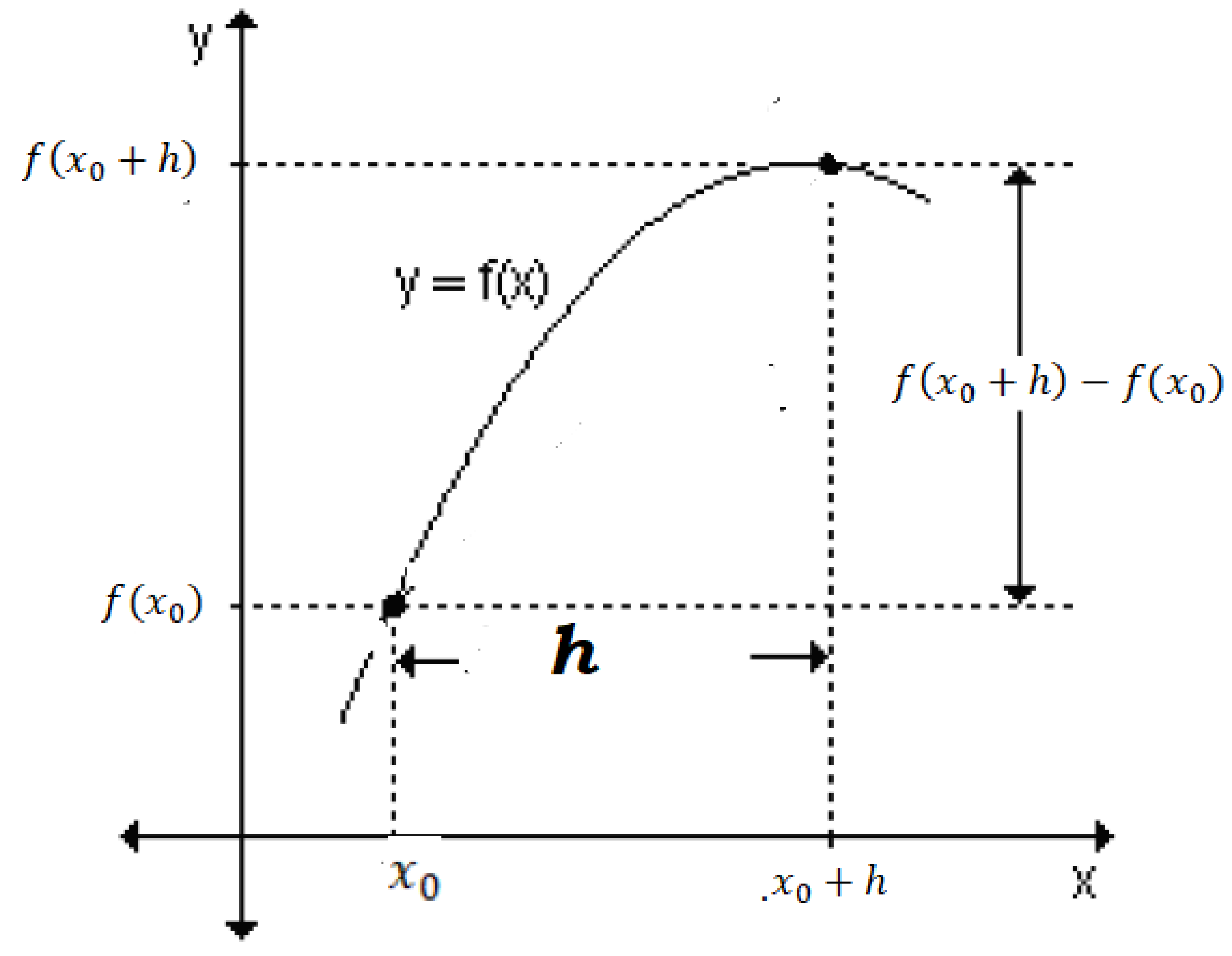
Sea $f: A \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto$A \subseteq \mathbb{R}$, sean $x_0 \ \ y \ \ x_0 + h$ dos puntos de A .

La variación absoluta de f cuando x se incrementa de $x_0 \ \ a \ \ x_0 + h$ está medida por $f(x_0 + h) - f(x_0)$

Pero si queremos medir la variación relativa de f, entonces debemos considerar el cociente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Este cociente recibe el nombre de cociente incremental y mide la variación relativa de f cuando x pasa de x_0 a $x_0 + h$.



y
$f(x_0+h)$
$y = f(x)$
$f(x_0+h) - f(x_0)$
$f(x_0)$
h
x_0
$x_0 + h$
x

Derivada de una función en un punto

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto$A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$. Diremos que f es derivable en x_0 si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si el límite existe, se lo indica $f'(x_0)$ y se lo llama derivada de f en x_0.

Otras formas de definir la derivada de una función en un punto.

Observemos que el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

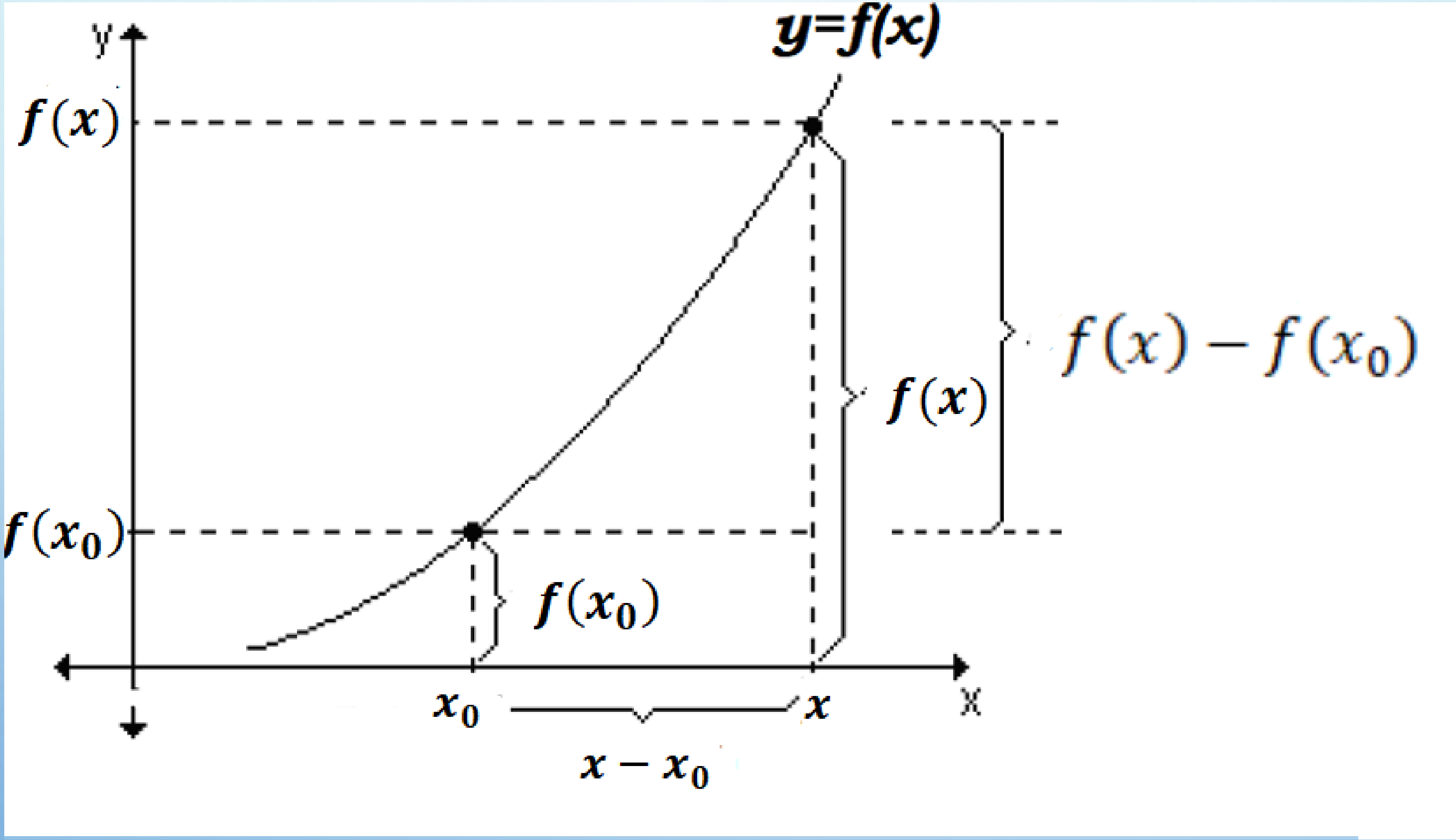
es lo mismo que:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x}$$

y lo mismo que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y si existe cualquiera de ellos existen los otros y todos en caso de existir representan a $f'(x_0)$, o sea la derivada de la función f en el punto x_0.



y
y=f(x)
$f(x)$
$f(x_0)$
$f(x)$
$f(x) - f(x_0)$
$f(x_0)$
x_0
x
X
$x - x_0$

Función Derivada

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto$A \subseteq \mathbb{R}$, supongamos que f es derivable en todos los puntos del conjunto A.
Esto quiere decir que para cada $x \in A$ le corresponde $f'(x) \in \mathbb{R}$, de esta manera tenemos definida una función: $x \to f'(x)$ que se llamará función derivada de f, y se indicará $f'(x)$.

Derivada de la función idéntica

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

Como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

Luego

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

Reglas de derivación

Con los resultados obtenidos, podemos confeccionar la siguiente tabla, que contiene las reglas de derivación estudiadas:

1. Si $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante. Entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$
3. Si $f(x) = k.g(x)$ con k constante. Entonces $f'(x) = k.g'(x)$
4. Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f'(x) = n.x^{n-1}$
5. Si f y g dos funciones derivables. Entonces $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
6. Si f y g dos funciones derivables. Entonces

$$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

7. Si f y g dos funciones derivables en x, y $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)\,g(x) - f(x)\,g^{'}(x)}{(g(x))^{2}}$$

8. Si $f(x) = sen(x)$. Entonces $f^{'}(x) = cos(x)$.
9. Si $f(x) = cos(x)$. Entonces $f^{'}(x) = -sen(x)$.
10. Si $f(x) = ln(x)$. Entonces $f^{'}(x) = \dfrac{1}{x}$.
11. Si g es derivable en x, y f es derivable en $g(x)$. Entonces

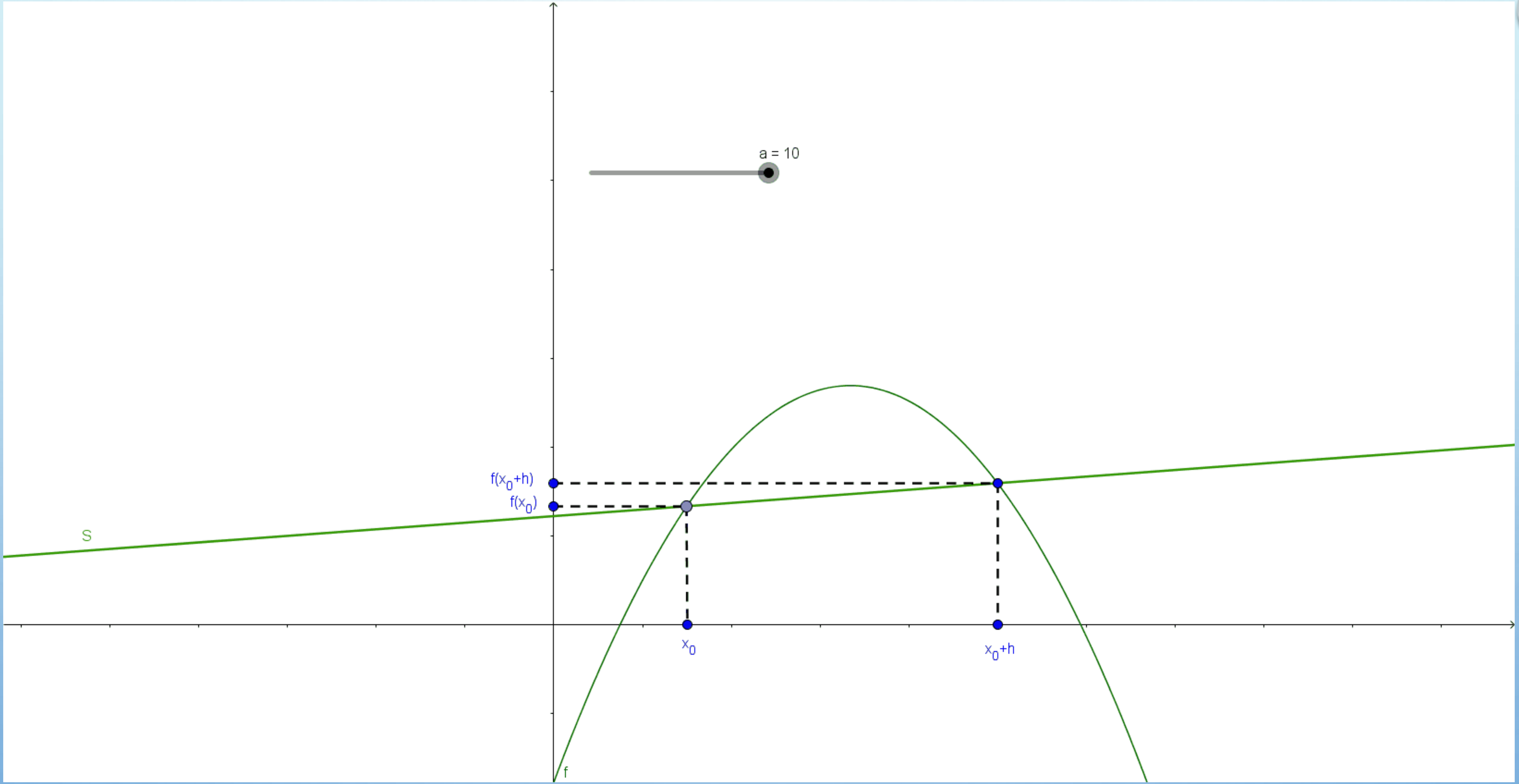
$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}[g(x)]\,g^{'}(x)$$

12. Si $f(x) = a^{x}$. Entonces $f^{'}(x) = a^{x} ln(a)$.
13. Si $f(x) = e^{x}$. Entonces $f^{'}(x) = e^{x}$.
14. Si $f(x) = x^{a}$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces $f^{'}(x) = a.x^{a-1}$.

Derivada de la función compuesta

Si g es derivable en x_0, y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0, y :

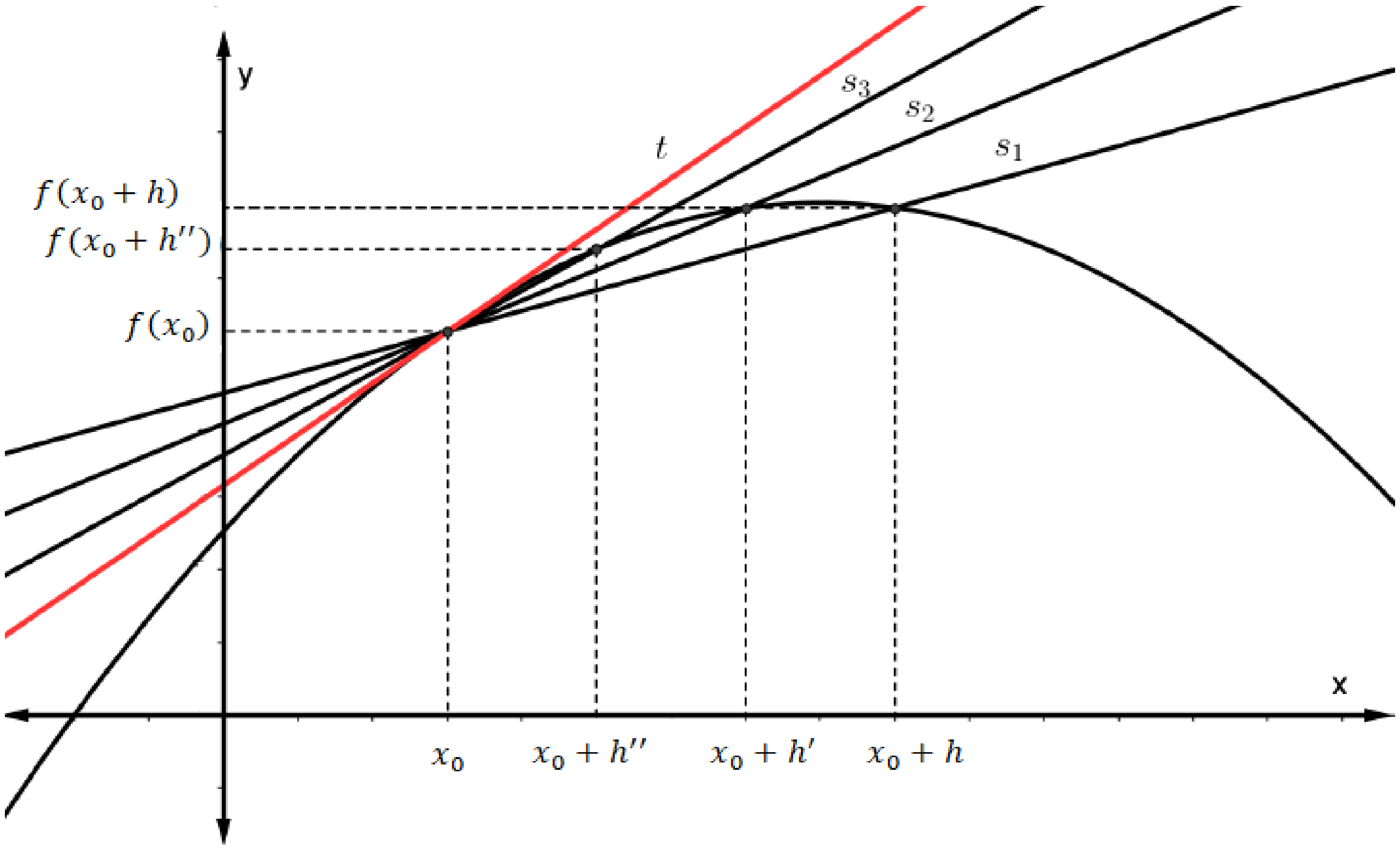
$$(f \circ g)´(x_0) = f'[g(x_0)].\, g´(x_0)$$



a = 10
f(x0+h)
f(x0)
S
x0
x0+h
f

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto

Recta tangente a una curva en un punto



Recta tangente a una curva en un punto

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sean x_0 y $x_0 + h$ dos puntos de A.

Sean los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_0 + h; f(x_0 + h))$, la recta S_1 que pasa por dichos puntos se llama recta secante a la gráfica de f.

Si h es cada vez más pequeño, se puede observar que la recta secante S_1 tiende a S_2, S_3, etc.

La recta límite es la recta T. Esta recta se denomina recta tangente a la curva que es gráfica de f en el punto $(x_0; f(x_0))$.

Ahora bien, la pendiente de la recta S_1 está dada por:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

que es el cociente incremental.

Luego, podemos interpretar geométricamente al cociente incremental como la **pendiente** de la **recta secante** a la curva que es gráfica de $\boldsymbol{f}$ por los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_0 + h; f(x_0 + h))$.

Definimos derivada de la función en un punto como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Luego, $f´(x_0)$ es el límite del cociente incremental, podemos entonces interpreter geométricamente a $f´(x_0)$ como la **pendiente de la recta tangente**
(recta límite de las rectas secantes, cuyas pendientes vienen dadas por el cociente incremental) a la curva que es gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) viene dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Luego, por lo visto anteriormente, reemplazando se tiene:

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Es la ecuación de la recta tangente a la curva que es gráfica de f en el punto $(x_0; f(x_0))$

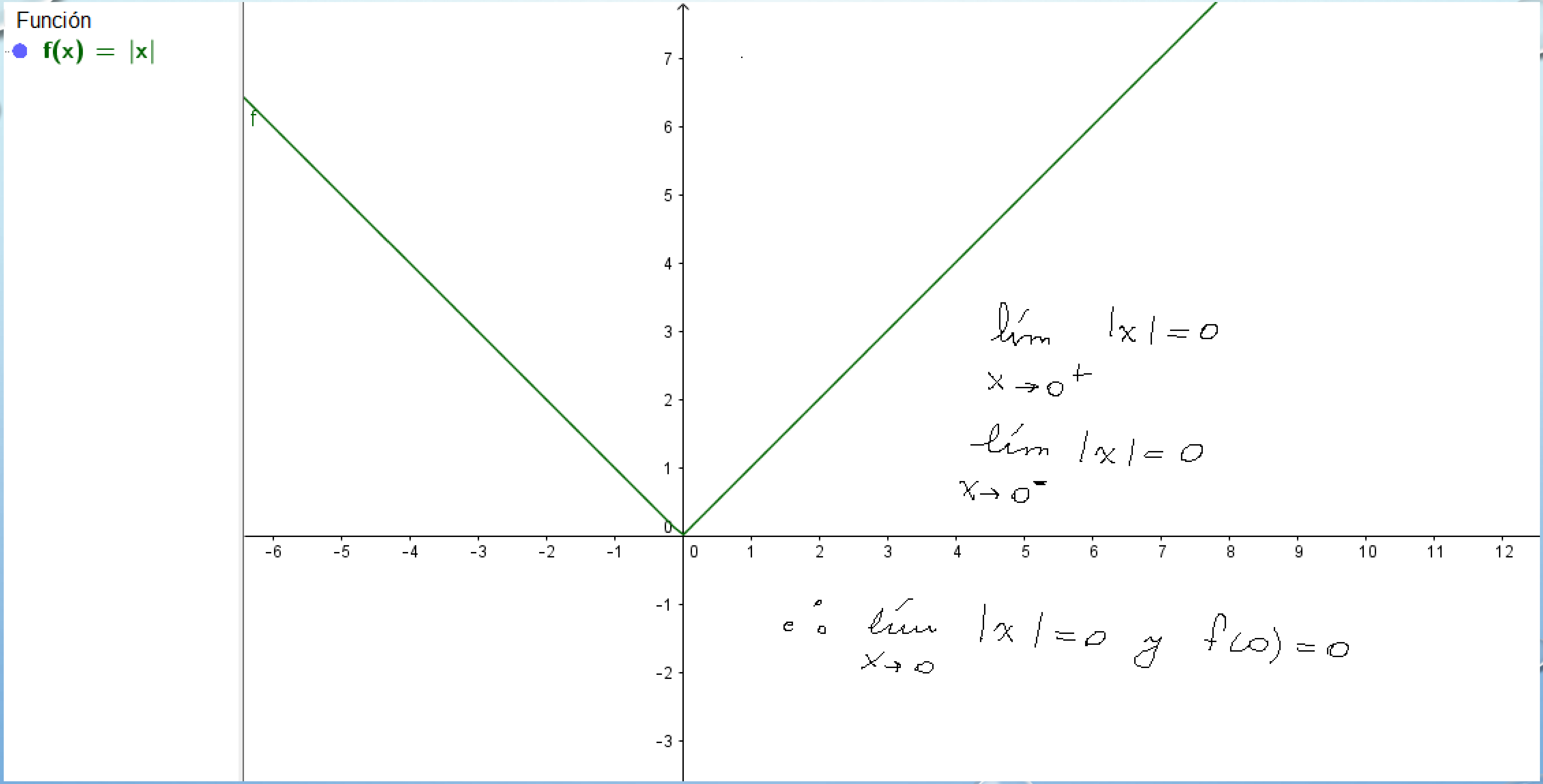
Relación entre derivabilidad y continuidad

Cuando definimos derivada de una función en un punto dijimos que si $f'(x_0)$ existe, entonces la función ***f*** se dice **derivable** en dicho punto. Veremos a continuación un teorema que relaciona la derivabilidad de la función en un punto con la continuidad de la función en dicho punto.

Teorema

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$. Si f es derivable en x_0 entonces, es continua en x_0.

El recíproco de este teorema no es cierto, ya que hay funciones que son continuas en un punto, pero no son derivables en dicho punto.


Función
$f(x) = |x|$
f
$\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$
$\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$
$\therefore \lim_{x \to 0} |x| = 0$ y $f(0) = 0$

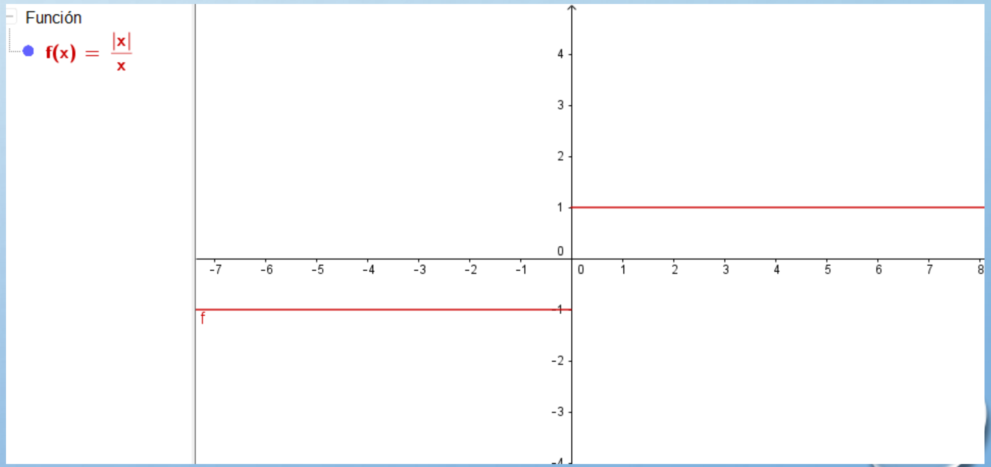
Ejemplo:

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ ya vimos que es continua en x = 0, probaremos que no es derivable en dicho punto.

En efecto, intentemos calcular por definición la derivada de f en x = 0:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

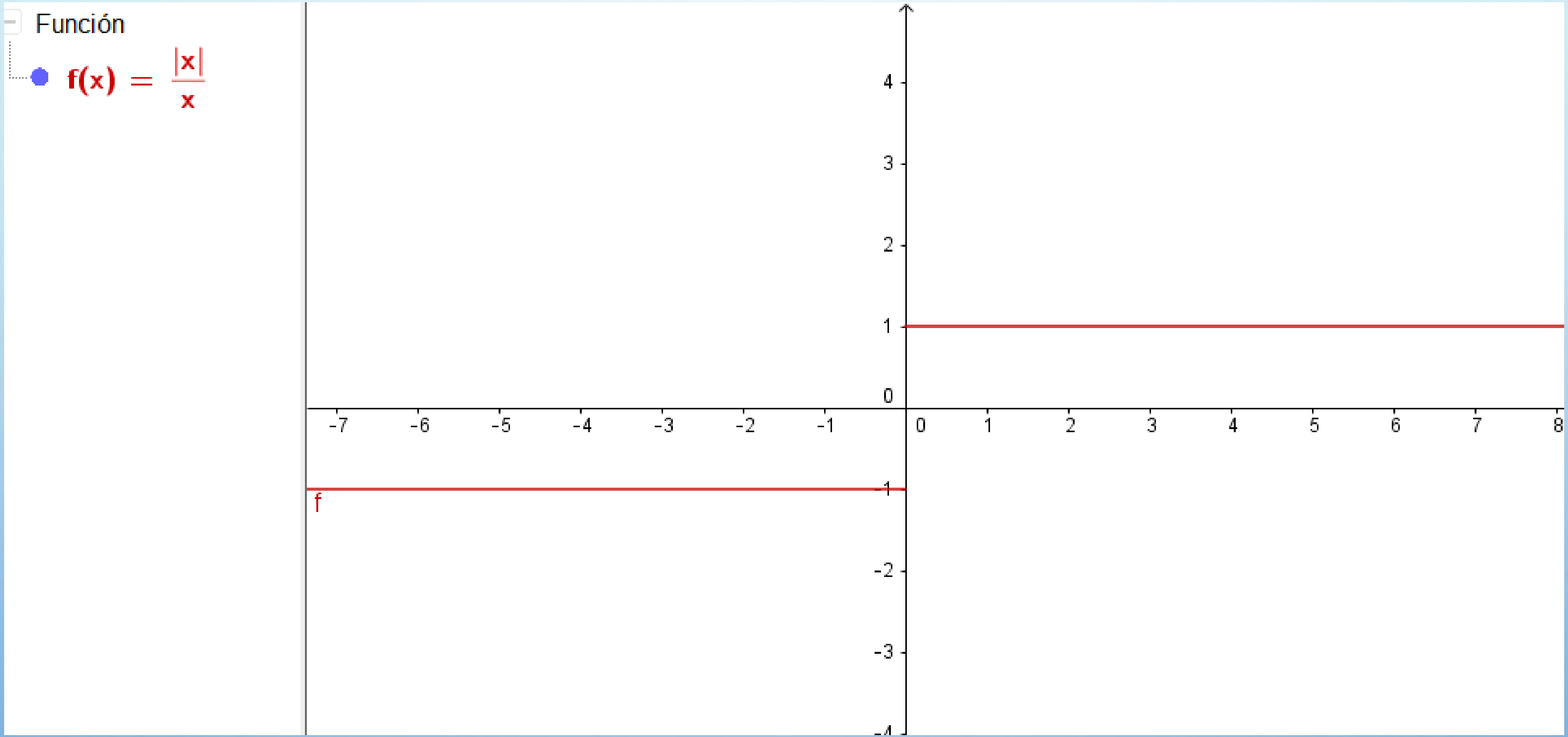
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$



Y este límite no existe, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

por lo que $f'(0)$ no existe. Luego, $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$


Función
$f(x) = \frac{|x|}{x}$
f
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4

Derivadas laterales

Los límites laterales del cociente incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ cuando $h \to 0$, si existen se denominan derivadas laterales de la función en el punto $x = x_0$.

Definimos entonces:

$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a la derivada lateral por derecha de f en $x = x_0$ y

$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a la derivada lateral por izquierda de f en $x = x_0$, respectivamente.

Al igual que en el caso de los límites laterales, si la función es derivable en el punto$x = x_0$, las derivadas laterales deben ser iguales