Teoría de Conjuntos

Producto cartesiano

Relaciones

Par ordenado

- Es todo conjunto de dos elementos en el que se distingue un primer elemento y un segundo elemento.

$$(a, b)$$

par ordenado de primera componente a y segunda componente b

Producto cartesiano de dos conjuntos : $A \times B$

- Es el conjunto que tiene por elementos todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A y cuya segunda componente pertenece al conjunto B.

Simbólicamente

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplos

Hallar $A \times B$ siendo:

$$A = \{x \in Z / -1 \leq x < 2\}$$

$$B = \{x \in N / |x-1| \leq 1\}$$

$$A = \{-1; 0; 1\}$$

$$|x-1| \leq 1$$

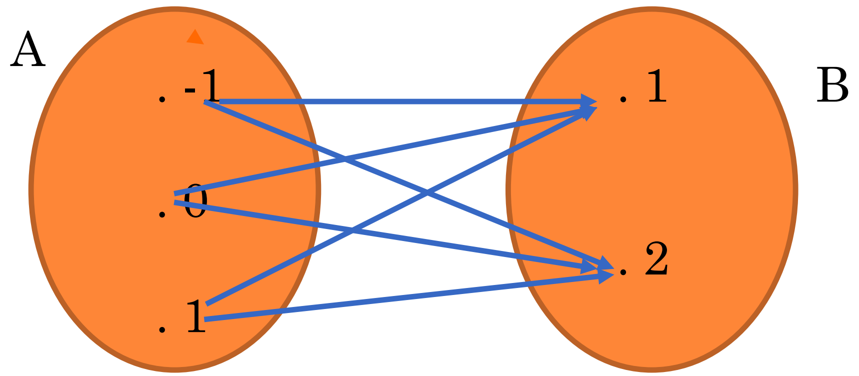
$$-1 \leq x - 1 \leq 1$$

$$-1 + 1 \leq x \leq 1 + 1$$

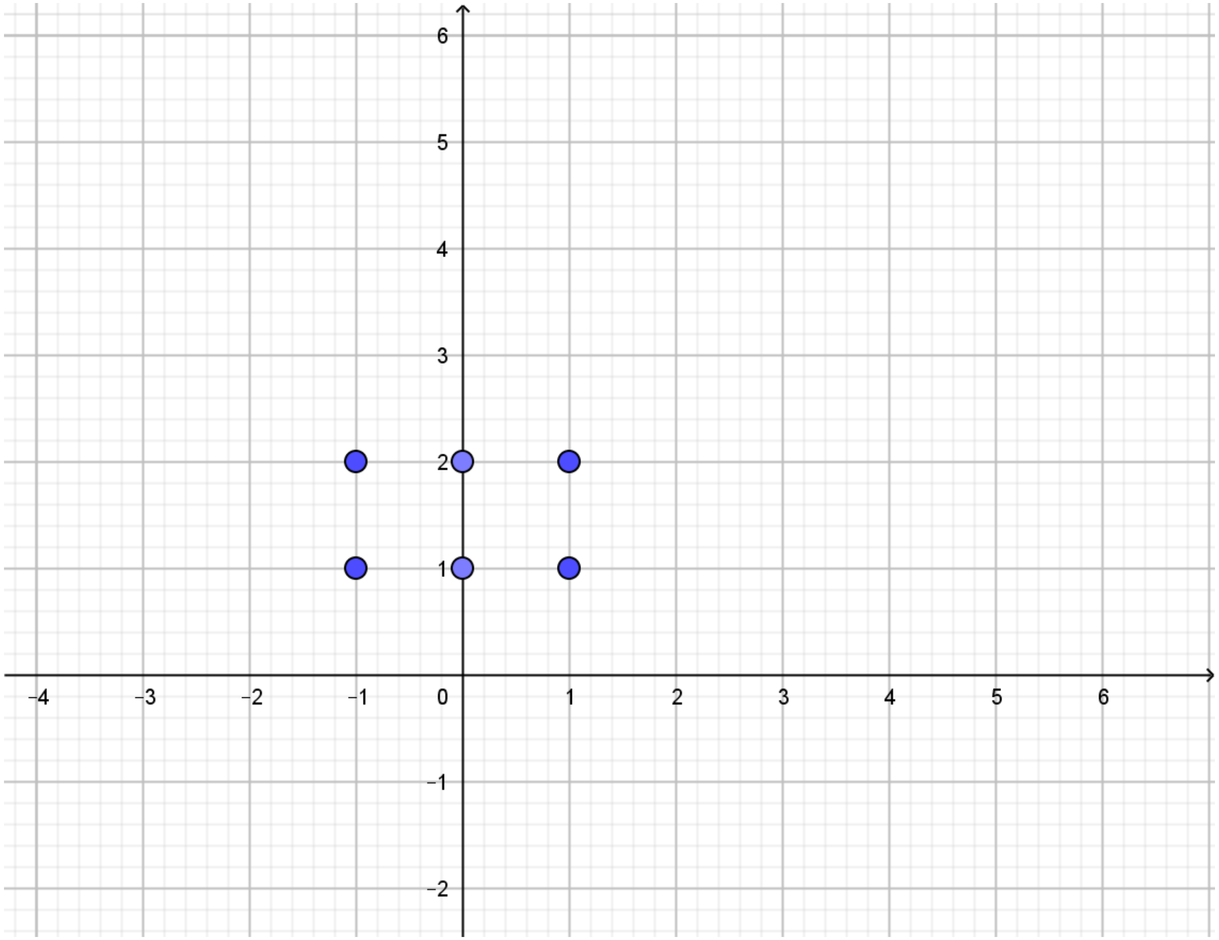
$$0 \leq x \leq 2$$

$$\mathrm{B} = \{1; 2\}$$

$$A \times B = \{(-1; 1), (-1; 2), (0; 1), (0; 2), (1; 1), (1; 2)\}$$



$$A \times B = \{(-1;1),(-1;2),(0;1),(0;2),(1;1),(1;2)\}$$



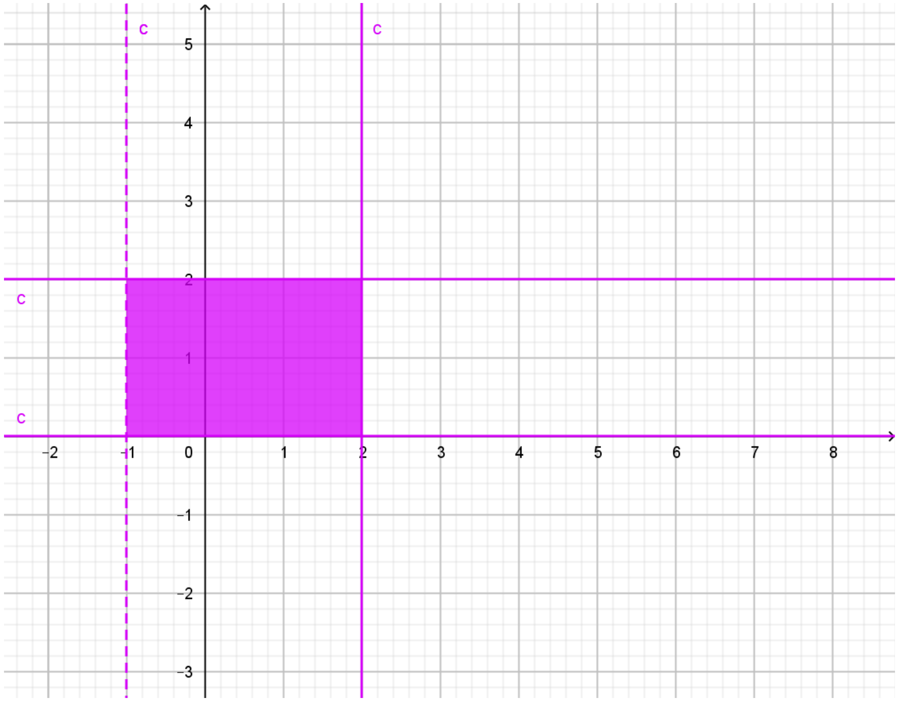
Ejemplos

- Efectuar $A \times B$, considerando:

$$A = \{x \in R / -1 < x \leq 2\}$$
$$B = \{x \in R / |x - 1| \leq 1\}$$

$A = (-1; 2]$ $\quad$ $B = [0; 2]$

$$|x - 1| \leq 1$$
$$-1 \leq x - 1 \leq 1$$
$$0 \leq x \leq 2$$



El rectángulo sombreado corresponde al producto cartesiano

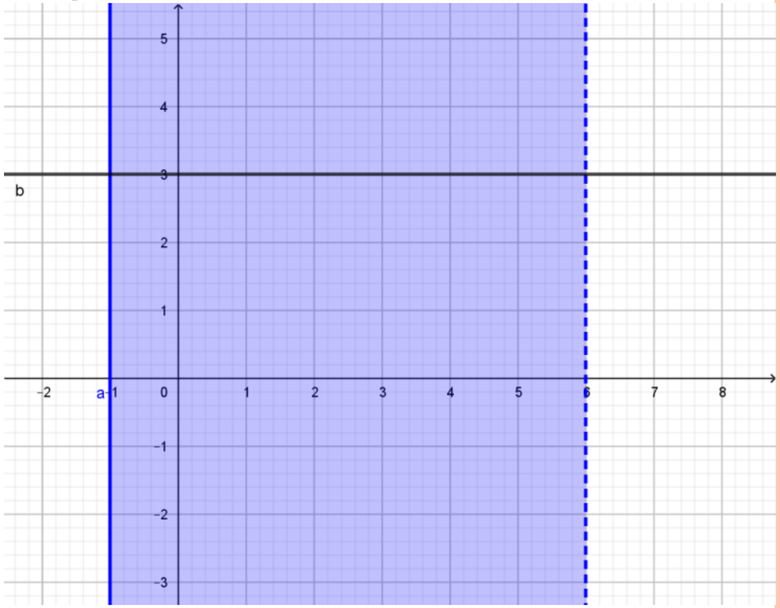
EJEMPLOS

- Hallar $A \times B$, siendo: $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 6\}$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 9 = 0\}$$

$$A = [-1; 6)$$

$$B = \{3\}$$



El segmento de recta incluido en la faja del plano sombreada, es la gráfica del producto cartesiano.

Propiedades del producto cartesiano

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times \phi \neq \phi \times A = \phi$$

$$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$$

$$(A \times C) \subset (B \times D) \wedge (A \times C) \neq \phi \Rightarrow A \subset B \wedge C \subset D$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

Relación binaria

- Una relación binaria entre los elementos de los conjuntos A y B, es todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B / x\mathcal{R}y\}$$

Ejemplos:

Sean los conjuntos $A = (-2; 4)$; $B = (1; 5]$

Hallar $A \times B$

Determinar

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$$

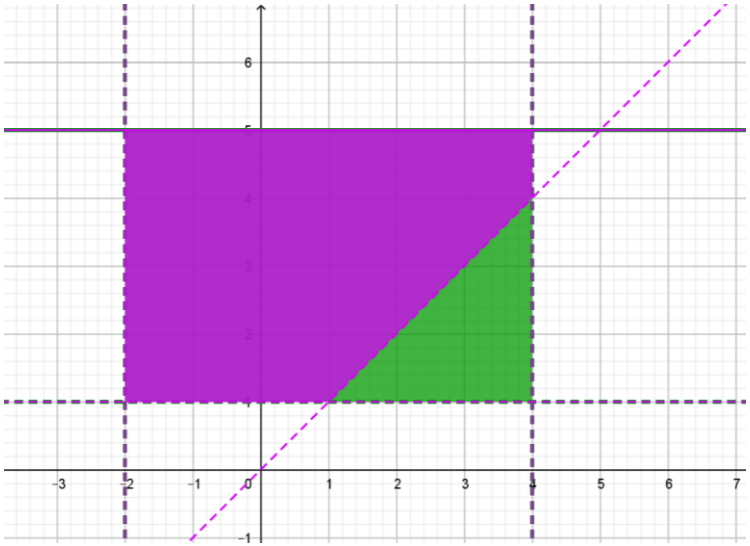
$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x + y = 1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B / y = x^2\}$$

Conjuntos importantes

- A es el **conjunto de partida** de la relación.
- B es el **conjunto de llegada** de la relación.
- **Dominio de la relación:** es el conjunto que tiene por elementos las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.
- **Imagen de la relación:** es el conjunto que tiene por elementos las segundas componentes de los pares ordenados de la relación.

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$$



Ejemplo

- Conjunto de partida

$$A = (-2; 4)$$

- Conjunto de llegada

$$B = (1; 5]$$

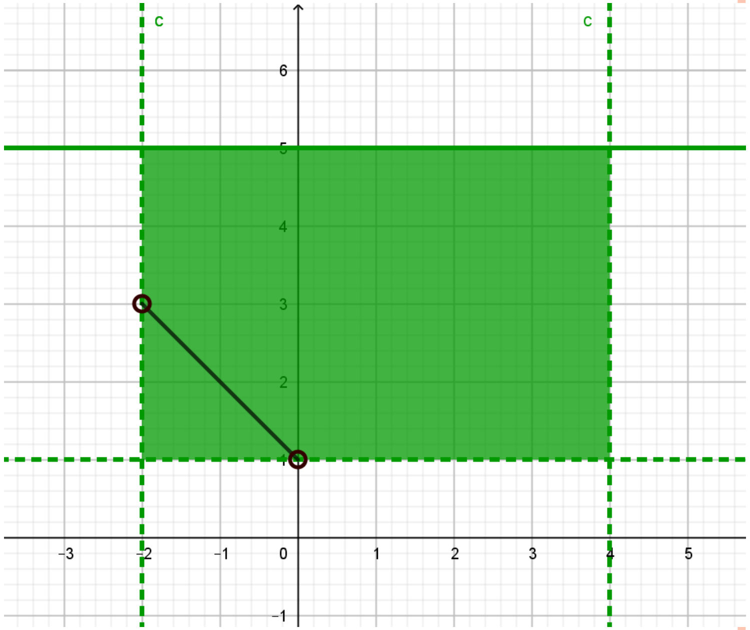
- Dominio de la relación

$$D_{\mathcal{R}} = A$$

- Imagen de la relación

$$I_{\mathcal{R}} = B$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \, / \, x + y = 1\}$$



- Conjunto de partida

$$A = (-2; 4)$$

- Conjunto de llegada

$$B = (1; 5]$$

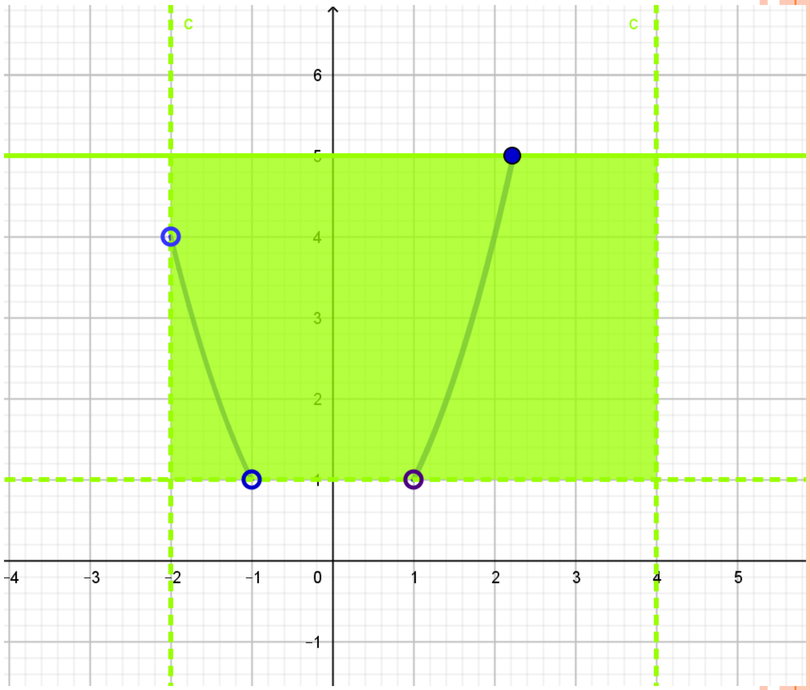
- Dominio de la relación

$$D_{\mathcal{R}} = (-2; 0)$$

- Imagen de la relación

$$I_{\mathcal{R}} = (1; 3)$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$$



- Conjunto de partida

$$A = (-2; 4)$$

- Conjunto de llegada

$$B = (1; 5]$$

- Dominio de la relación

$$D_{\mathcal{R}} = (-2; -1) \cup \left(1; \sqrt{5}\right]$$

- Imagen de la relación

$$I_{\mathcal{R}} = (1; 5]$$

Relación definida en un conjunto

- Es toda relación definida a partir del producto cartesiano $A \times A$. El conjunto de partida es igual al conjunto de llegada.

- Ejemplo:

$$A = \left\{ x \in R \,/\, \frac{x+1}{x-3} < 1 \right\}$$

$$R = \{(x, y) \in A \times A \,/\, y = 2x - 1\}$$

$$A = \left\{ x \in R \,/\, \frac{x+1}{x-3} < 1 \right\}$$

$$\frac{x+1}{x-3} < 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} - 1 < 0$$

$$\frac{x+1-(x-3)}{x-3} < 0$$

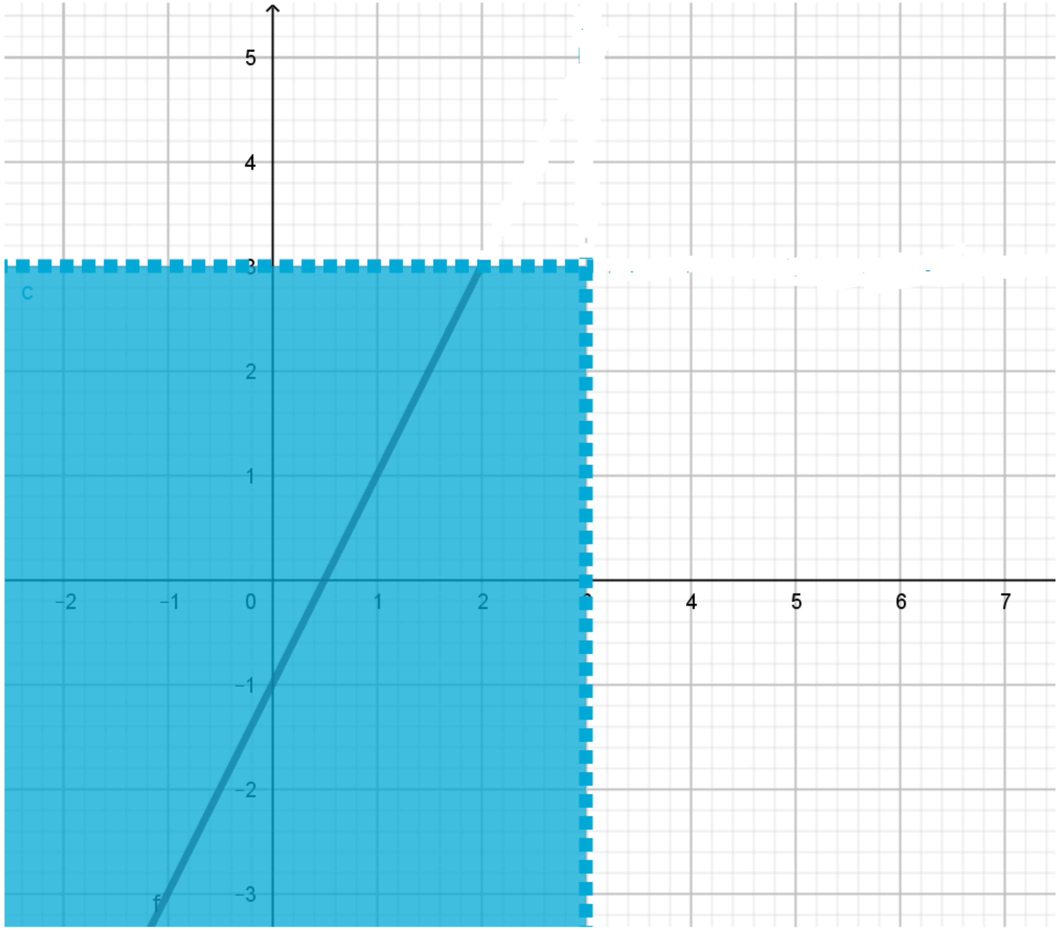
$$\frac{x+1-x+3}{x-3} < 0$$

$$\frac{4}{x-3} < 0 \Rightarrow x-3 < 0$$

$$A = (-\infty; 3)$$

$A = (-\infty; 3)$

$$R = \{(x, y) \in A \times A / y = 2x - 1\}$$



$D_{\mathcal{R}} = (-\infty; 2) \quad I_{\mathcal{R}} = (-\infty; 3)$