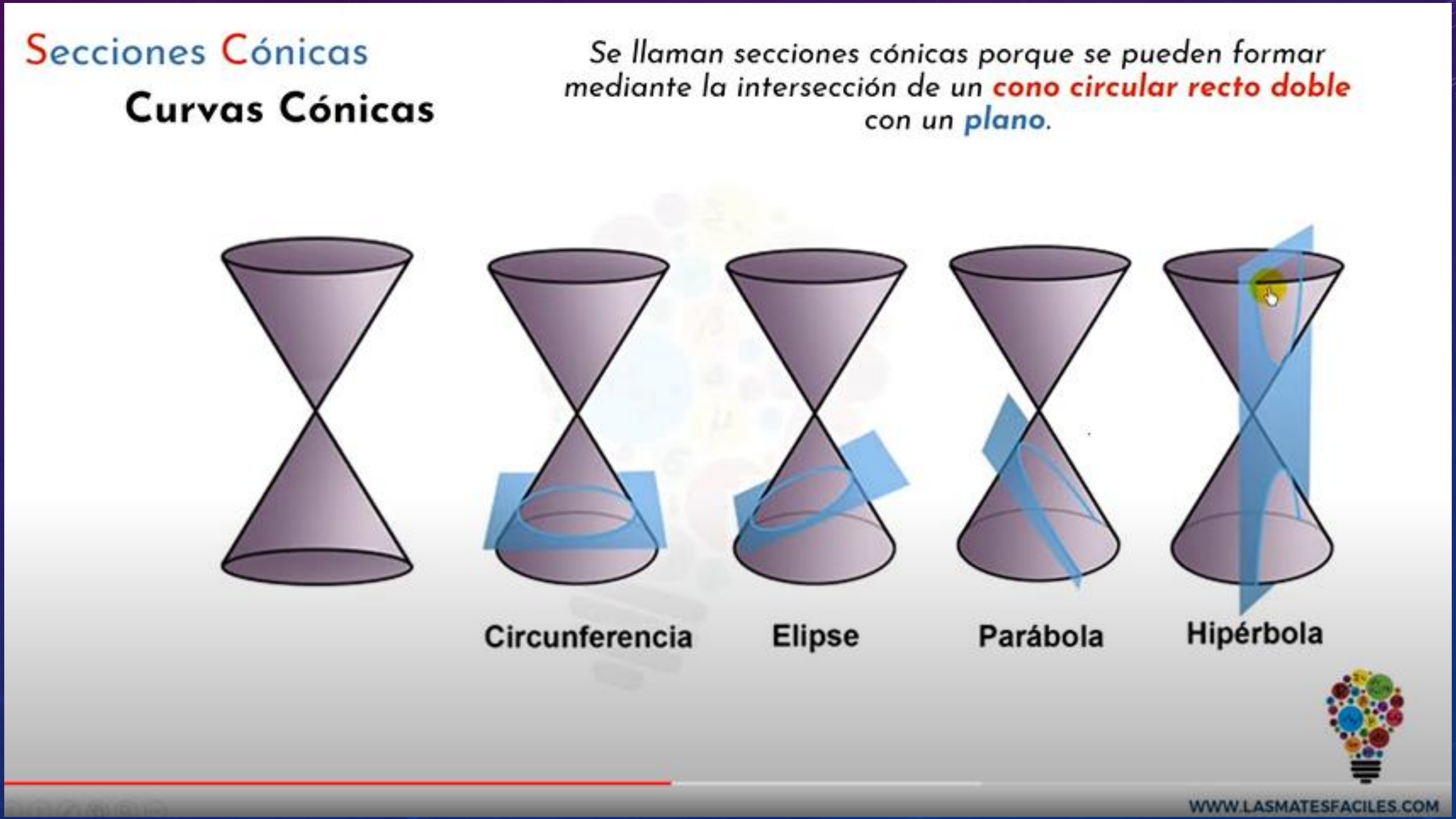
GEOMETRÍA ANALÍTICA

SECCIONES CÓNICAS

¿QUÉ SON LAS SECCIONES CÓNICAS?



DEFINICIONES

ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano, llamados **focos**, es siempre igual a una constante.

CIRCUNFERENCIA

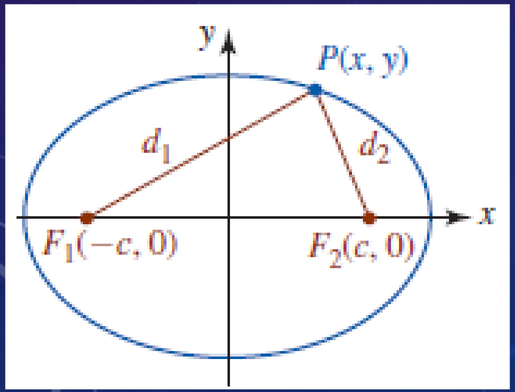
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante se llama **radio**.

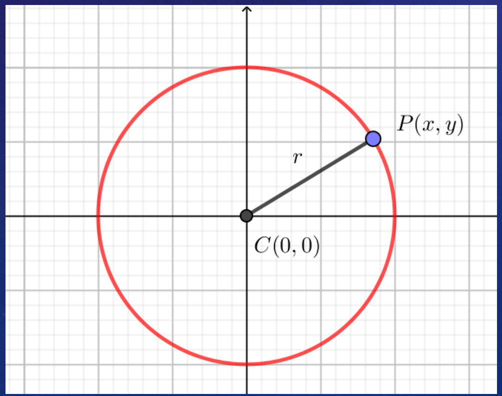
PARÁBOLA

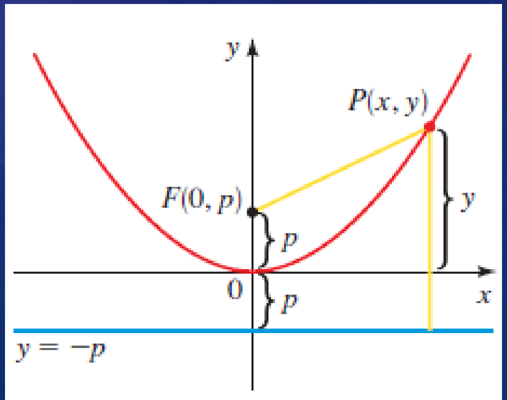
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo, exterior a ella. Al punto fijo se le llama **foco** y a la recta fija, **directriz**

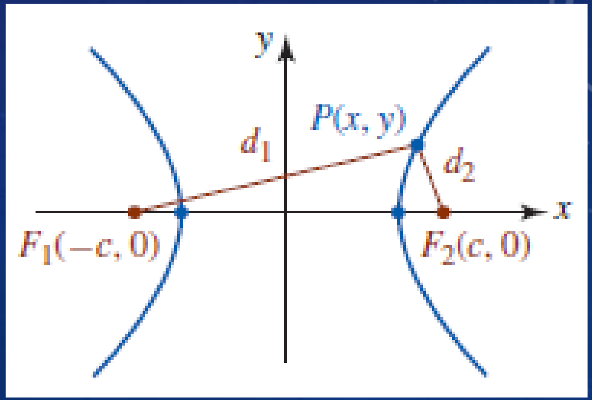
HIPÉRBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

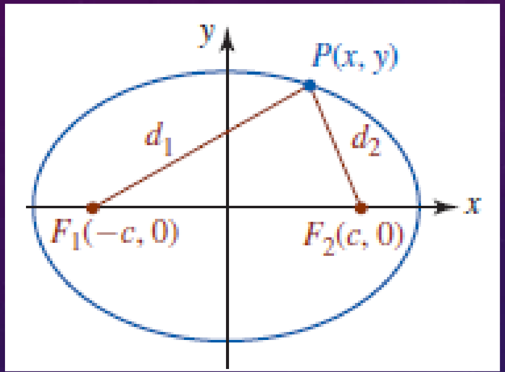








ECUACIÓN DE LA ELIPSE



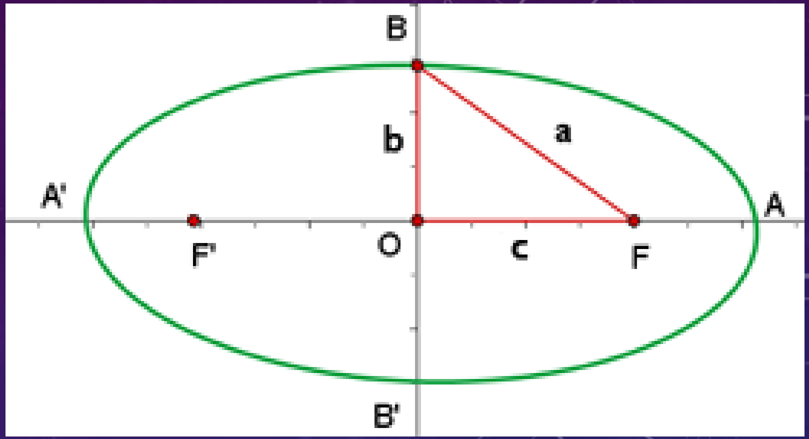
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Eje focal: $y = 0$

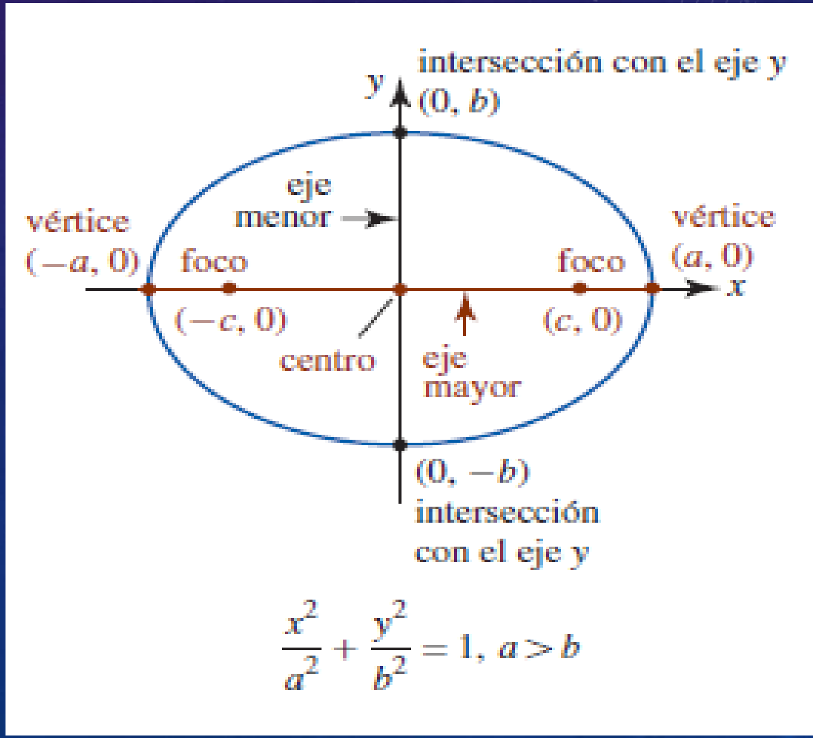
La ecuación se obtiene partiendo de la definición

$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



$$e = \frac{c}{a}$$



ECUACIÓN DE LA ELIPSE

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

eje focal
$x=0$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

eje focal
$y=0$

Eje focal: $x = 0$

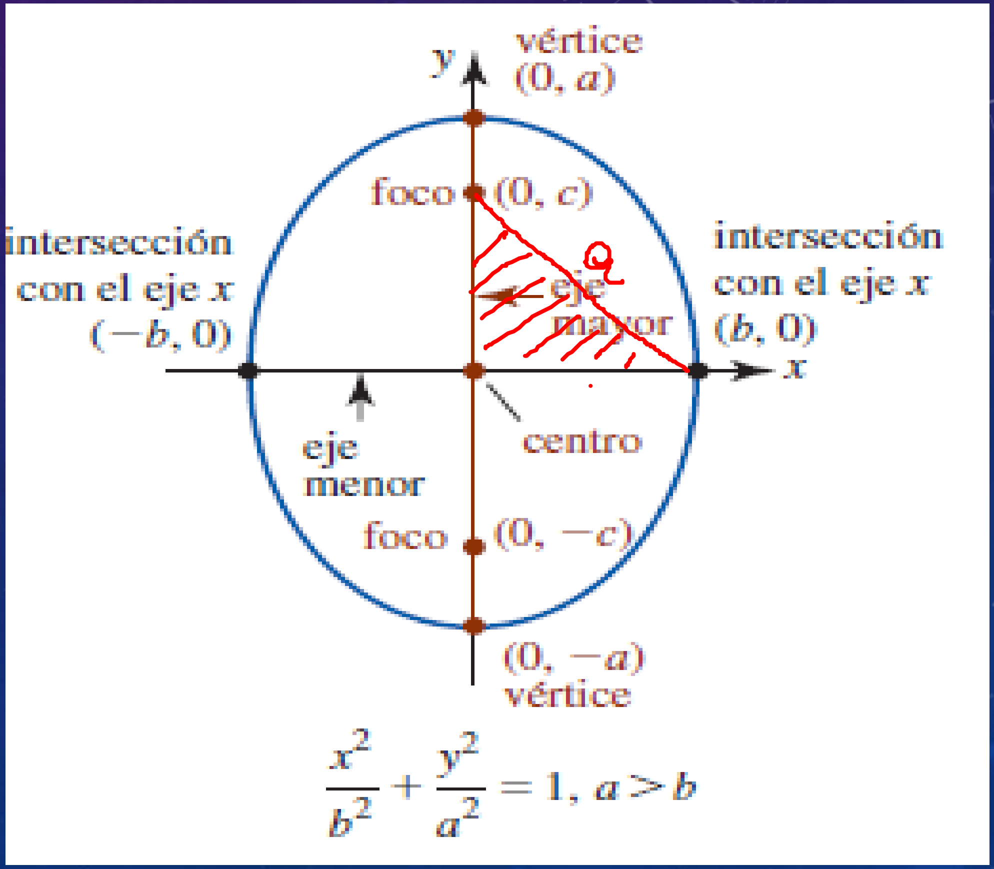
$$a^2 = b^2 + c^2$$

La ecuación se obtiene partiendo de la definición

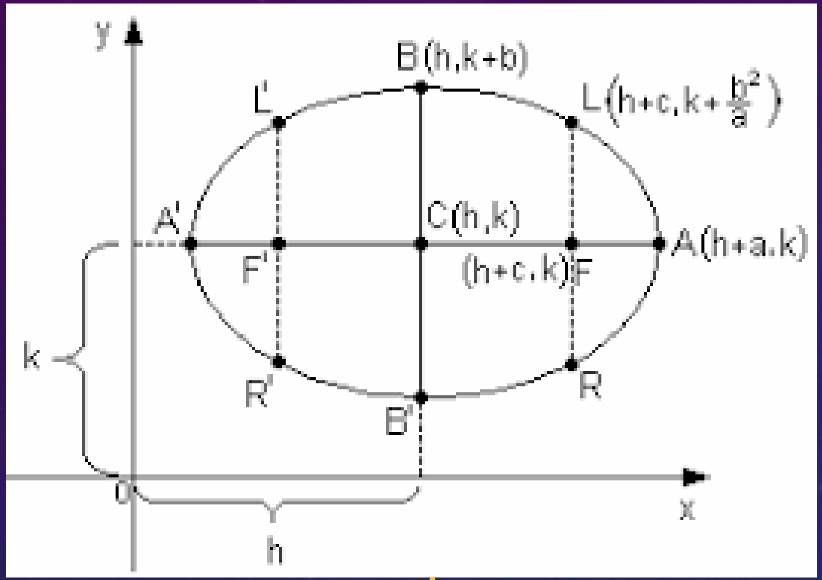
$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

$$e = \frac{c}{a}$$



ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO $C(h,k)$



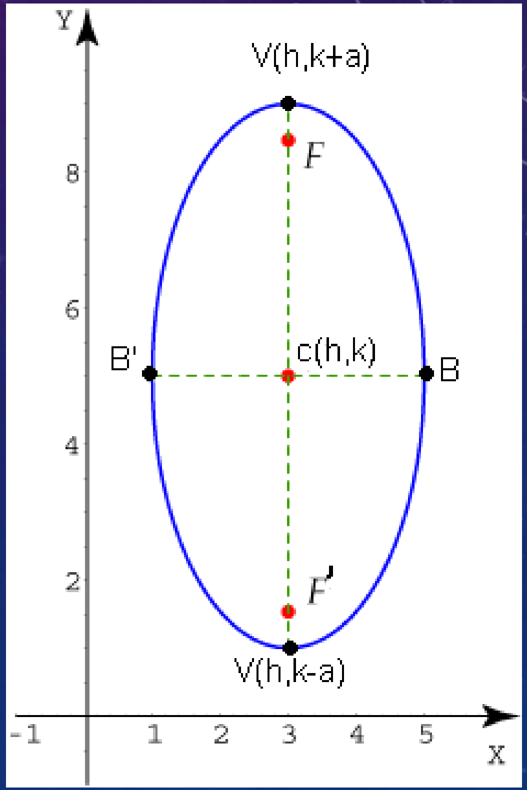
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$e=\frac{c}{a}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

a > b



CIRCUNFERENCIA CASO PARTICULAR DE ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si $a = b$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por a^2

$$\boxed{x^2+y^2=a^2}$$

Circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio a

¿Qué pasa con la excentricidad en este caso?

$r = a = b$

$$e=\frac{c}{a}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=a^2+c^2$$

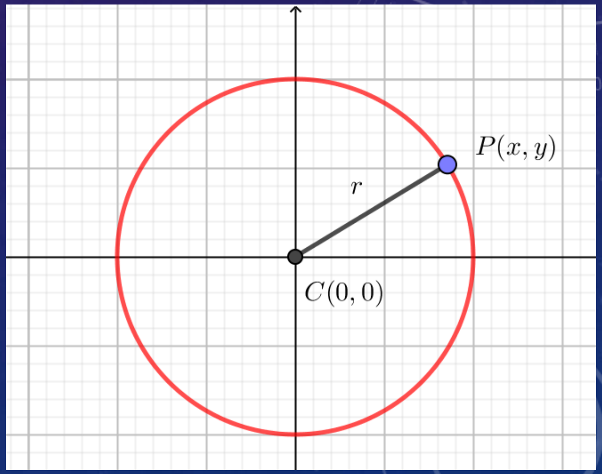
$$0=c^2$$

$$c=0$$

Reemplazando:

$$e=\frac{0}{a}$$

$$\boxed{e=0}$$



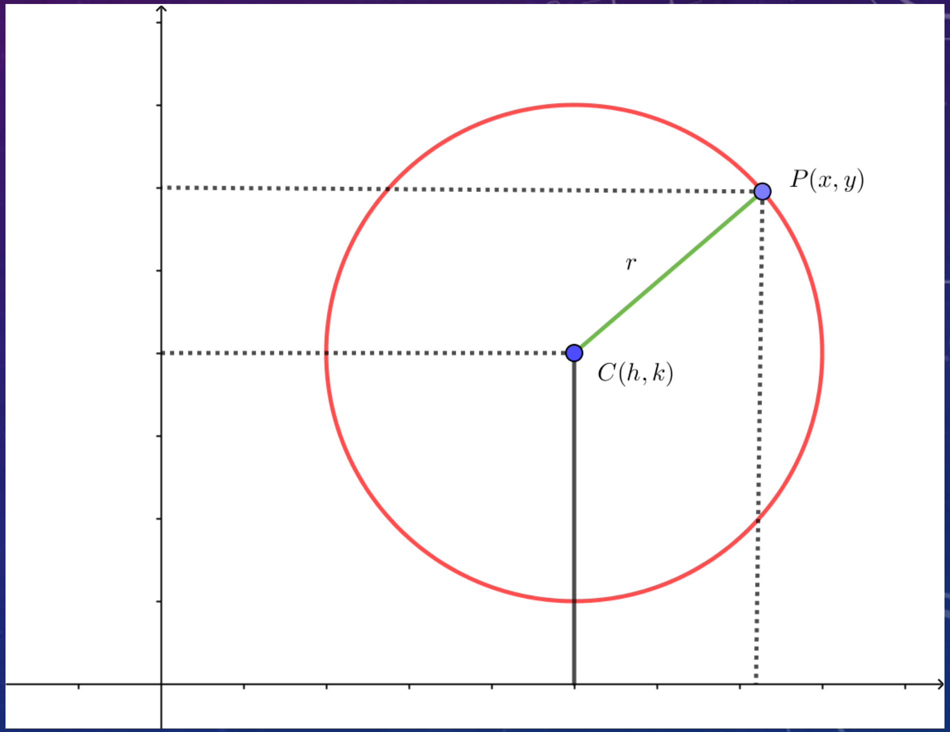
ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

La ecuación se obtiene partiendo de la definición

$$d(PC) = r$$

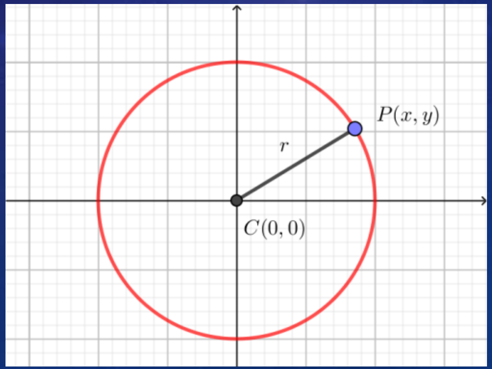
$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}\right)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

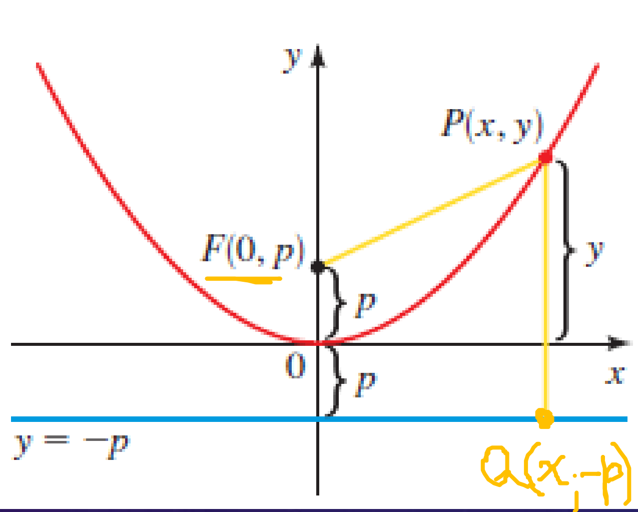


Si el centro es el origen de coordenadas:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA



Eje de simetría: $x = 0$

Vértice $(0; 0)$

La ecuación se obtiene partiendo de la definición

$$d(PF) = d(PD)$$

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}\right)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2} = \cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}$$

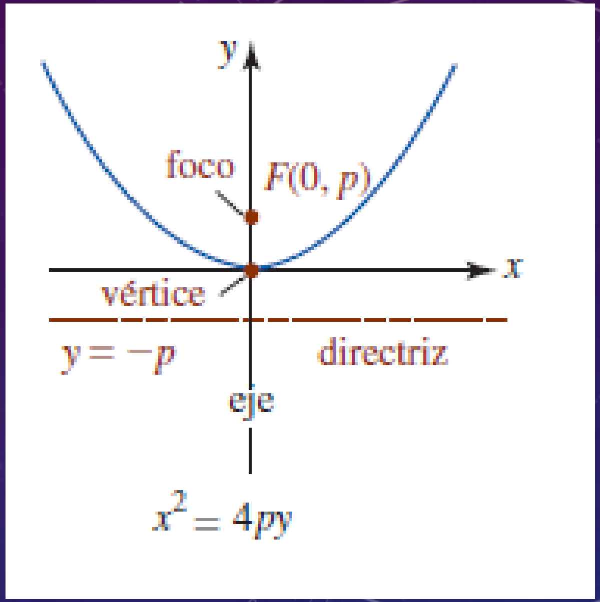
$$x^2 = 2py+2py$$

$$4py = x^2$$

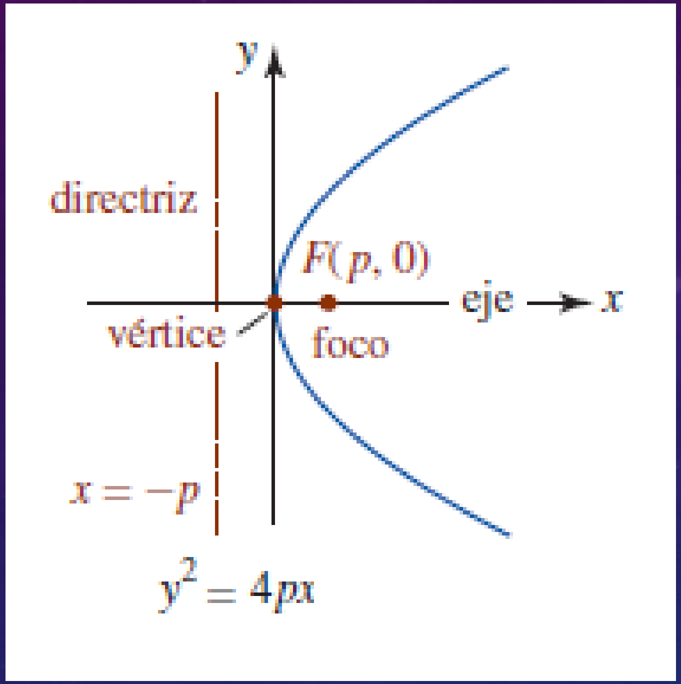
$x^2 = 4py$

$y = \frac{1}{4p}x^2$

$y = ax^2$



ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA



Eje de simetría: $y = 0$
Vértice $(0; 0)$

La ecuación se obtiene partiendo de la definición

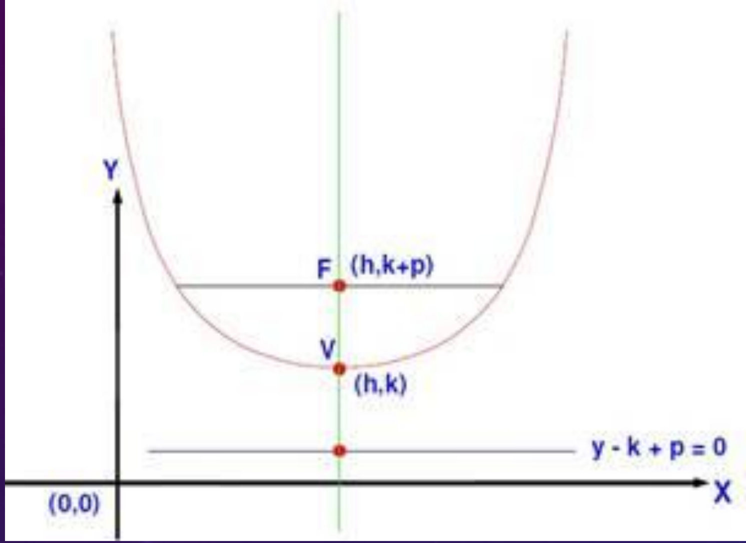
$$d(PF) = d(PD)$$

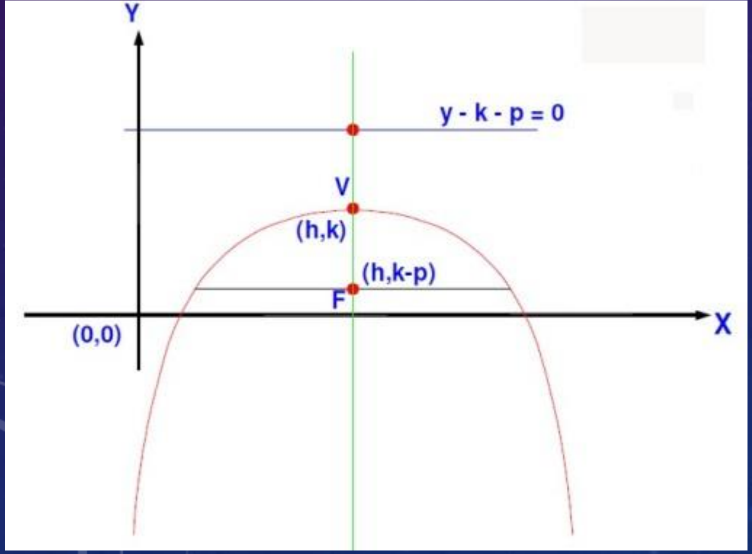
$$\boxed{4px = y^2}$$

$x = \frac{1}{4p} y^2$

$x = a \cdot y^2$

PARÁBOLAS DESPLAZADAS





$$y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$$

$$y - k = a(x - h)^2$$

$$y - k = a(x^2 - 2xh + h^2)$$

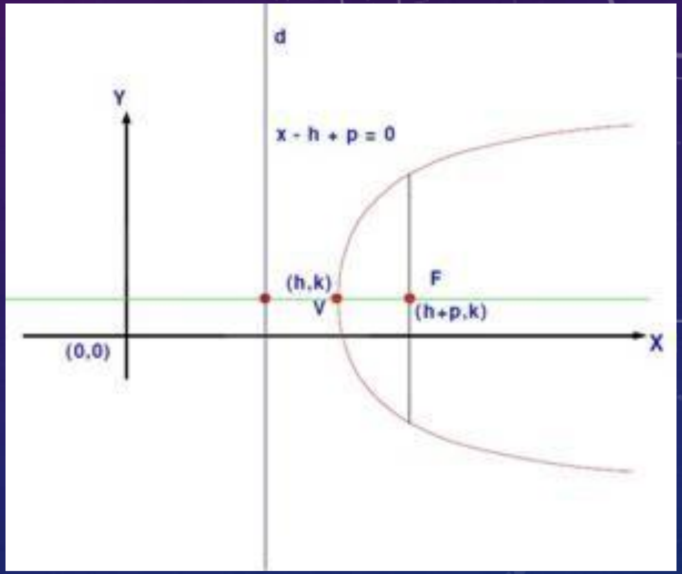
$$y - k = ax^2 - 2ahx + ah^2$$

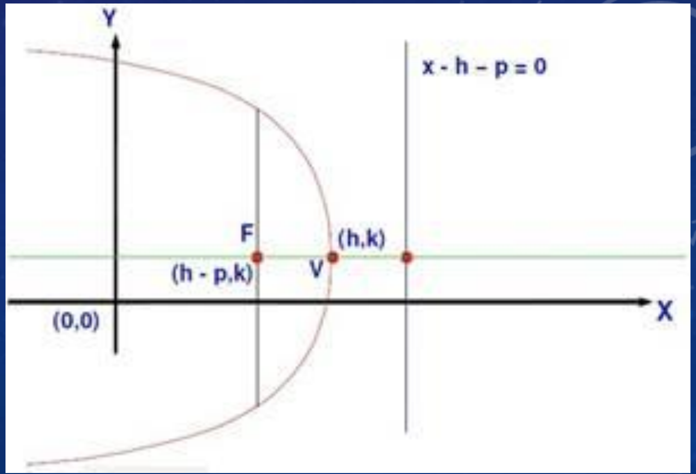
$$y = ax^2 \underbrace{-2ahx}_{b} + \underbrace{ah^2 + k}_{c}$$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

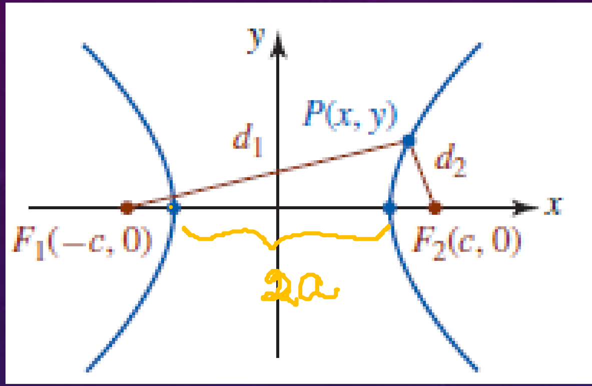
$$x - h = \frac{1}{4p}(y - k)^2$$

$$x - h = a(y - k)^2$$





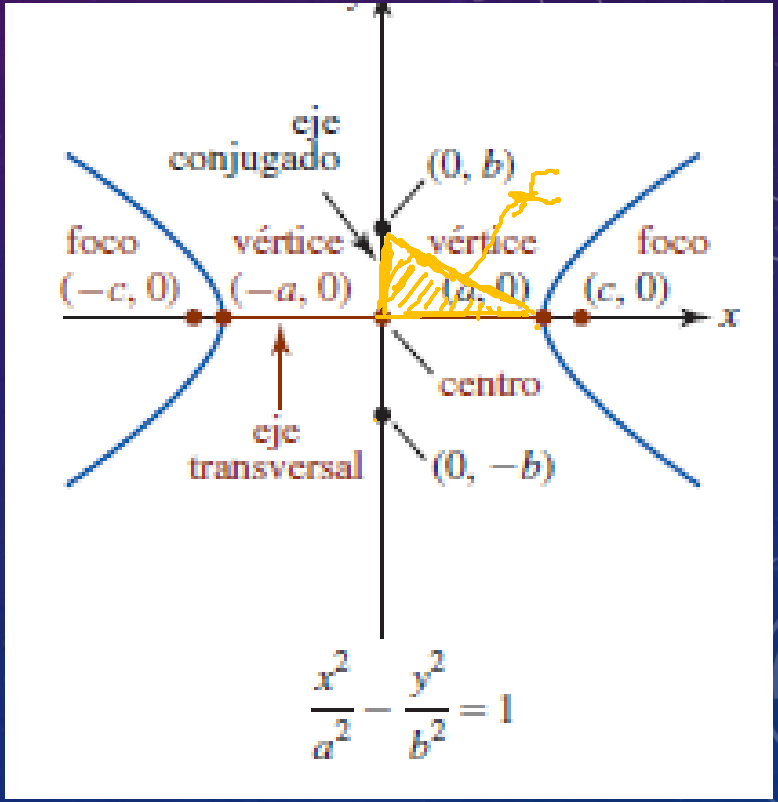
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA



Eje focal: $y = 0$

$c > a$

$e = \frac{c}{a} > 1$



La ecuación se obtiene partiendo de la definición

$$|d(PF_1) - d(PF_2)| = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Relación entre a, b y c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Eje focal: $x = 0$

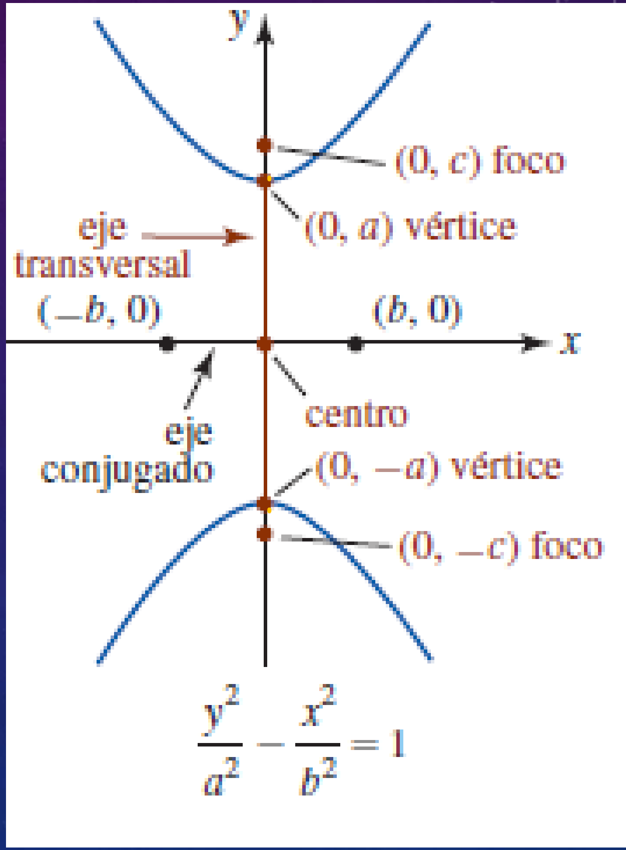
$e = \frac{c}{a} > 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

La ecuación se obtiene partiendo de la definición

$$|d(PF_1) - d(PF_2)| = 2a$$

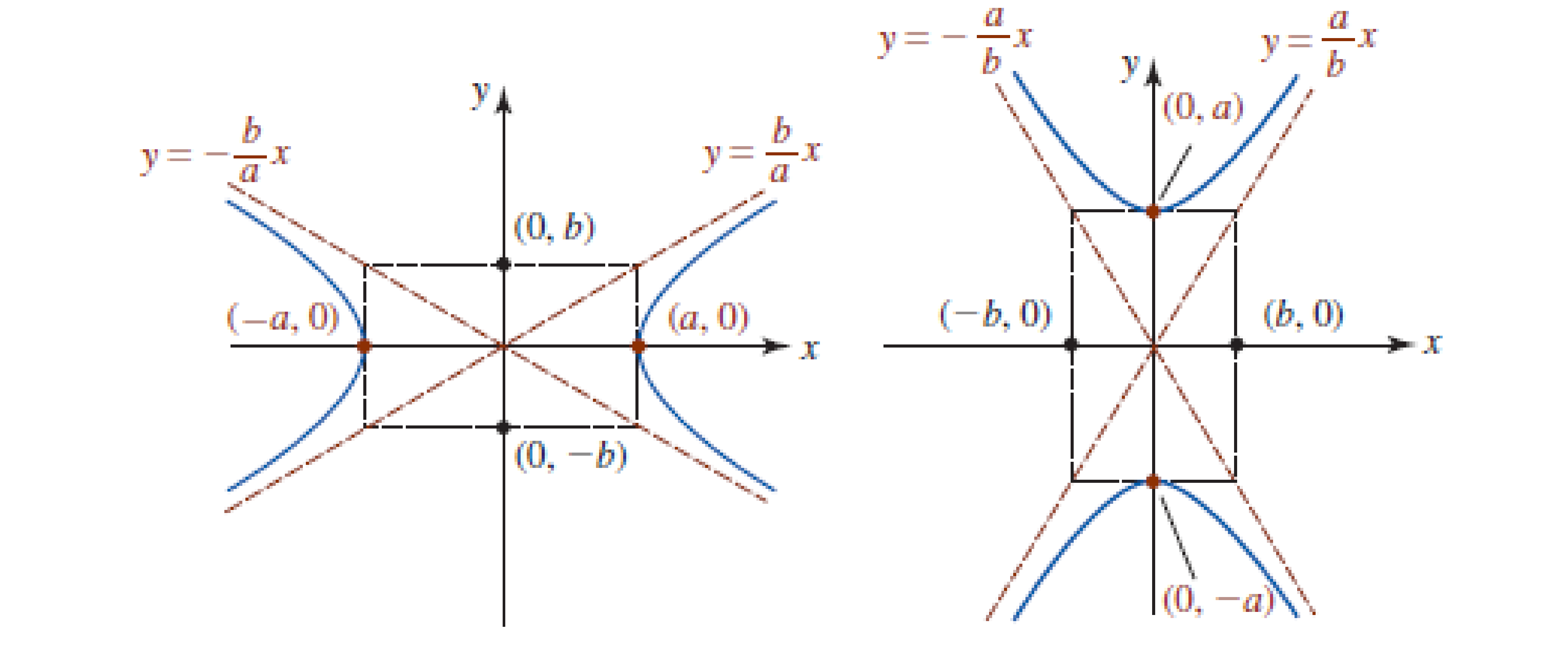
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



Relación entre a, b y c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

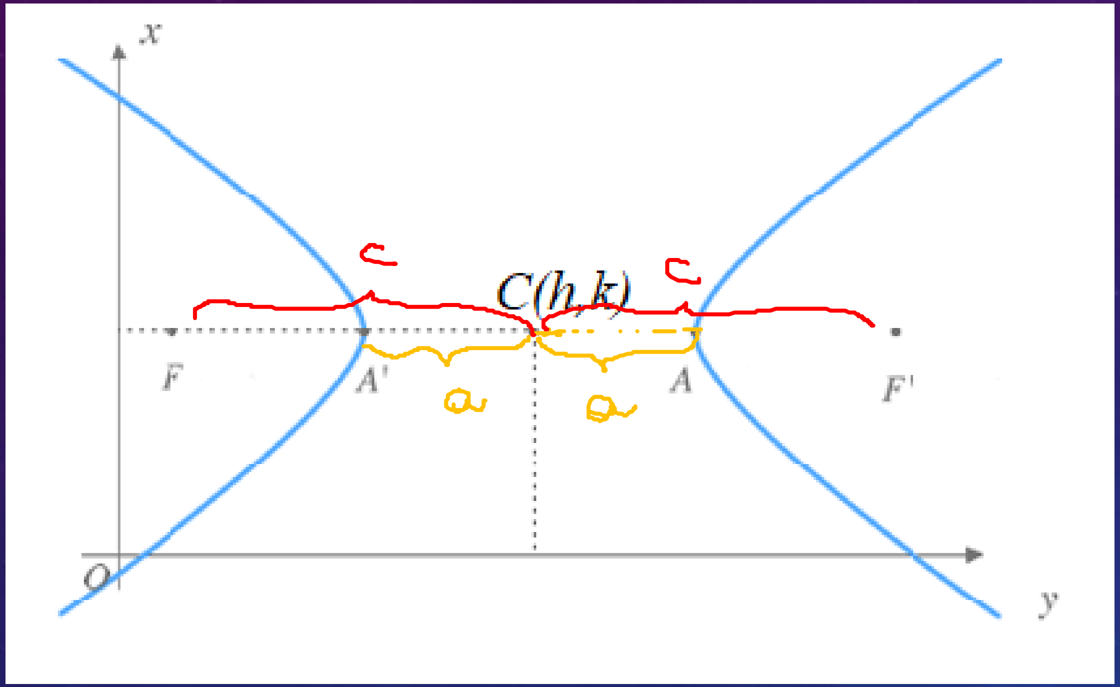
ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

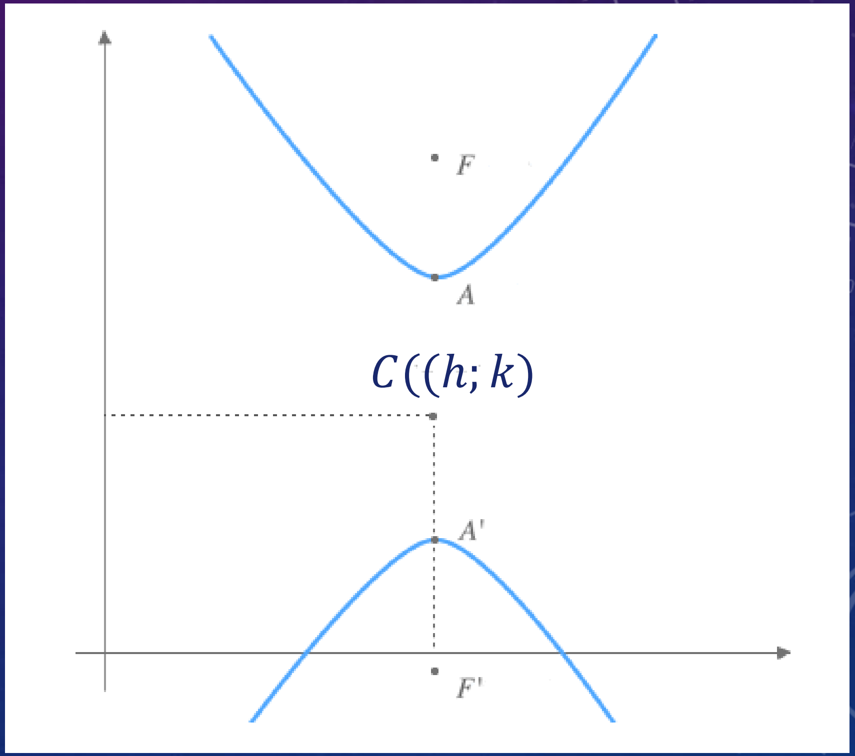


a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

HIPÉRBOLAS CON CENTRO C(h, k)





$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

ECUACIONES GENERALES

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

ELIPSE

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

CIRCUNFERENCIA

$$y-k=\frac{1}{4p}(x-h)^2$$

$$x-h=\frac{1}{4p}(y-k)^2$$

PARÁBOLA

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

HIPÉRBOLA

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad C(h,k)$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{9(x+1)^2 + 16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$9(x^2+2x+1) + 16y^2 = 144$$

$$h = -1$$
$$k = 0$$

$$9x^2 + 18x + 9 + 16y^2 = 144$$

$$9x^2 + 16y^2 + 18x + 9 - 144 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 + 18x - 135 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 + 18x - 135 = 0$$

$$(9x^2 + 18x) + 16y^2 = 135$$

$$9(x^2 + 2x) + 16y^2 = 135$$

$$(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$$
$$x^2 + 2x + (-1)^2$$

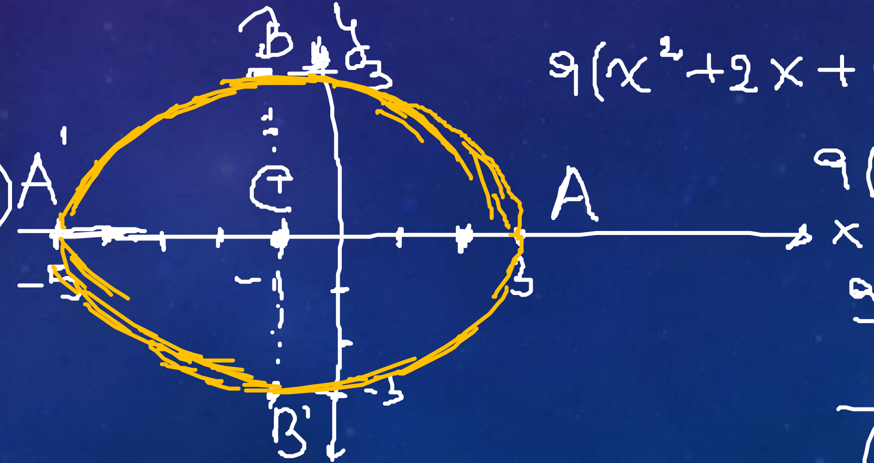
$$-2hx = 2x$$
$$-2h = 2 \Rightarrow h = -1$$

$$9(x^2+2x+1) + 16y^2 = 135 + 9$$

$$9(x+1)^2 + 16y^2 = 144$$

$$\frac{9(x+1)^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



RECONOCIMIENTO DE CÓNICAS

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $A = B$ (ambos no nulos): puede definir una circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Si $A \neq B$ y de igual signo (ambos no nulos): puede definir una elipse

Si $A \neq B$ y de distinto signo (ambos no nulos): define una hipérbola

Si $A = 0 \vee B = 0$: define una parábola

$A = 0 \rightarrow x - h = \frac{1}{4p}(y-k)^2$

$B = 0 \rightarrow y - k = \frac{1}{4p}(x-h)^2$

¿QUÉ CÓNICA SE ESCONDE?

$4x^2 + y^2 + 5x + 7y + 8 = 0$ → puede existir elipse

$2x^2 + 3y^2 + 6x + 7y + 8 = 0$ → ¿Elipse?

$16x^2 - 9y^2 - 32x - 9y + 100 = 0$ → HIPÉRBOLA

$2y^2 - x - 12y + 7 = 0$ → PARÁBOLA

$16x^2 - 9y^2 - 32x - 9y + 100 = 0$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$(16x^2 - 32x) + (-9y^2 - 9y) = -100$$

$$16(x^2 - 2x) + (-9)(y^2 + y) = -100$$

$$16(x^2 - 2x + 1) - 9\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = -100 + 16 - \frac{9}{4}$$

$$\frac{16.(x-1)^2 - 9.\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{345}{4}} = \frac{-\frac{345}{4}}{-\frac{345}{4}}$$

$$-\frac{64}{345}(x-1)^2 + \frac{36}{345}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$-2hx = -2x$$

$$h = 1 \Rightarrow h^2 = 1$$

$$(y-k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$$

$$y^2 + y + \frac{1}{4}$$

$$-2k.y = y$$

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{36}{345}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{64}{345}(x-1)^2=1$$

$C(h;k)$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{345}{36}}-\frac{(x-1)^2}{\frac{345}{64}}=1$$

$C\left(1;-\frac{1}{2}\right)$