Unidad 3

FUNCIONES CONTINUAS

Definición:

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es continua en un punto $a \in A$, si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 1: La función tiene límite infinito en el punto.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$

$$y\, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

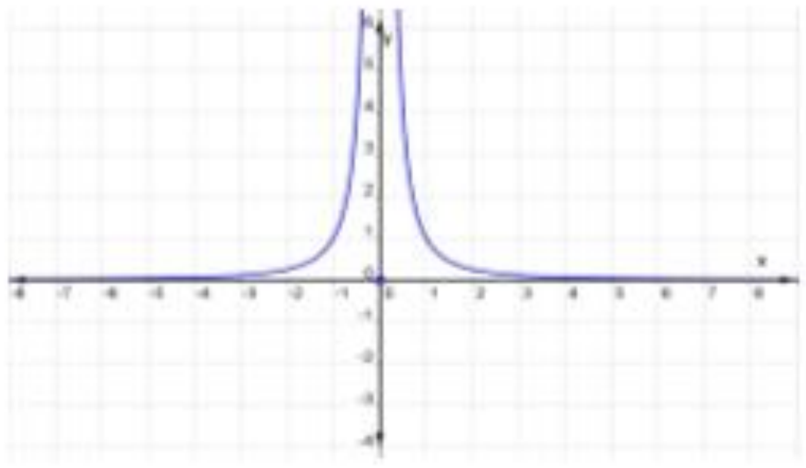


Figura 1: Gráfico de la función $y = f(x)$

En este caso $f(0) = 0$ pero $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Por lo que la función no es continua en $a = 0$.

Ejemplo 2: La función no tiene límite en el punto.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = g(x)$

Y $g(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

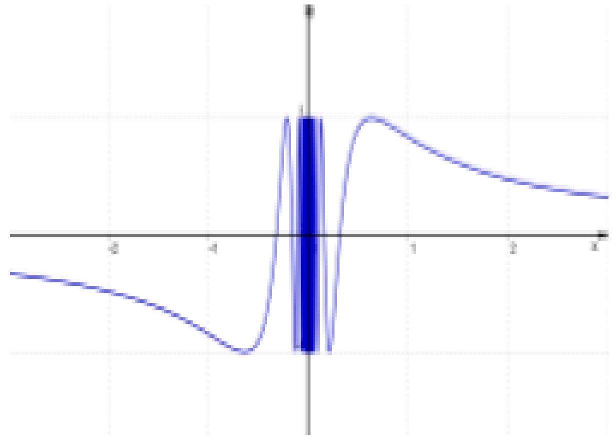


Figura 2: Gráfico de la función $y = g(x)$

En este caso, $g(0) = 0$ pero no existe $\lim_{x \to 0} g(x)$. Por lo que la función no es continua en $a = 0$.

Ejemplo 3:

La función tiene límite pero no es igual al valor de la función en el punto.

Sea la función:

$l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$l(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x \neq 2 \\ 5 \quad si \quad x = 2 \end{cases}$$

Para esta función es:

$l(2) = 5$

Pero: $\lim_{x \to 2} l(x) = 4$

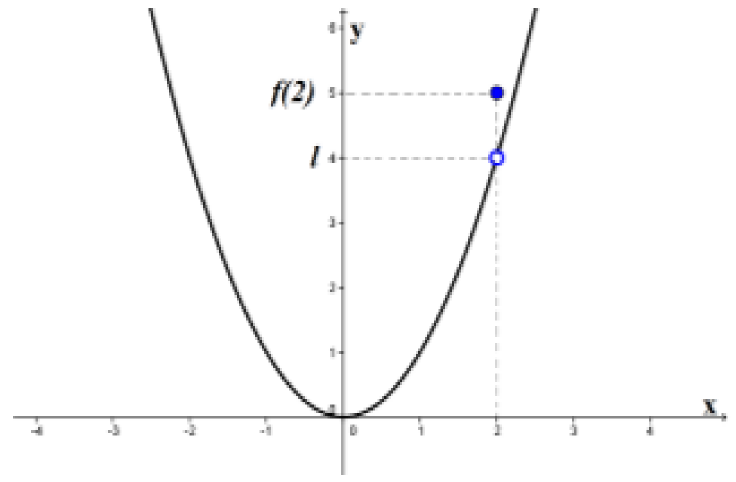


Figura 4: Gráfico de la función $y = l(x)$

Definición:

Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A, cuando f es continua en todos los puntos de A.

Propiedades de las funciones continuas

1. Si f y g son dos funciones continuas en a, entonces $f+g$ y $f.g$ son continuas en a. Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

2. La función $f:(0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}/\ f(x) = \ln(x)$, es continua.

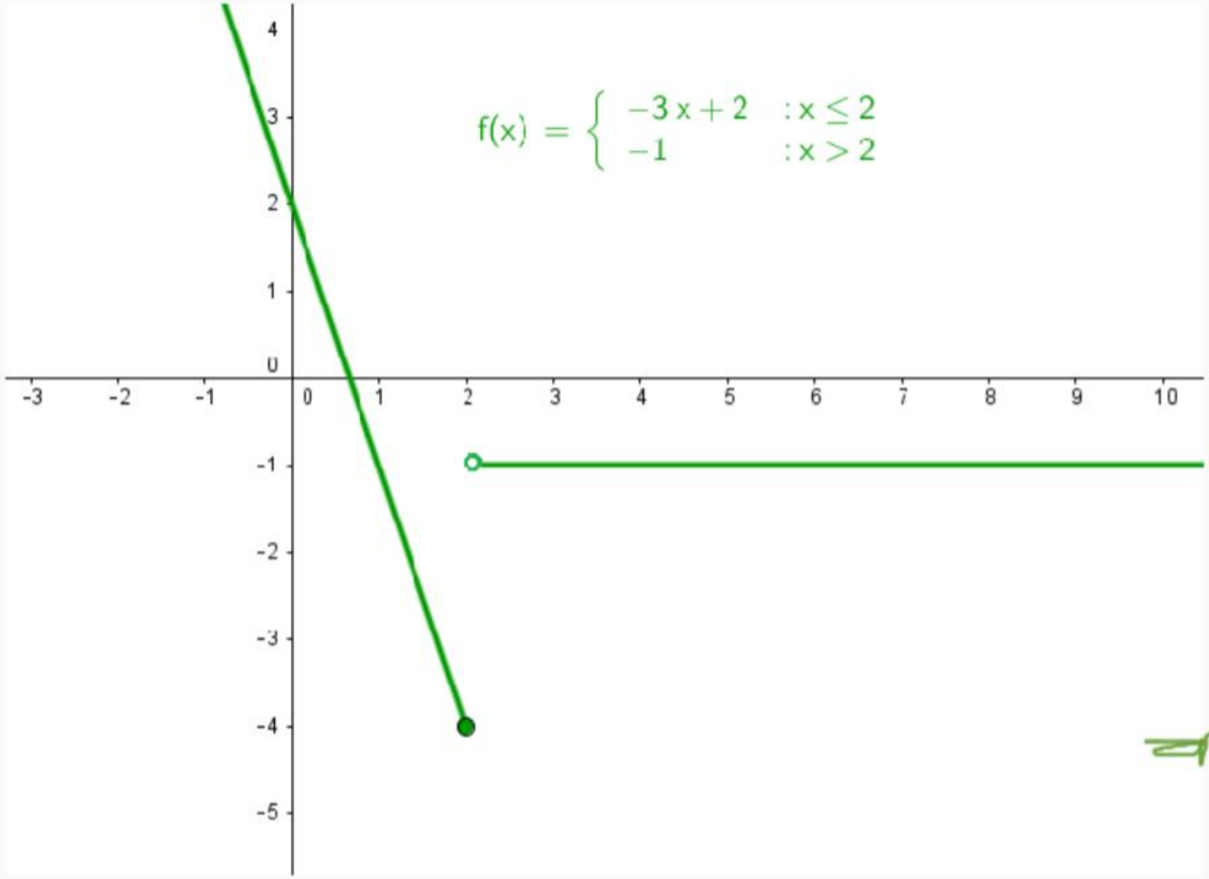
3. Si $a > 0$, la función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\ f(x) = a^x$, es continua.

4. Toda función polinómica es continua. Una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 1:

Estudiar la continuidad de la función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = \begin{cases} -3x + 2 \ si \ x \leq 2 \\ -1 \quad si \quad\quad x > 2 \end{cases}$$



$$f(2) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$$

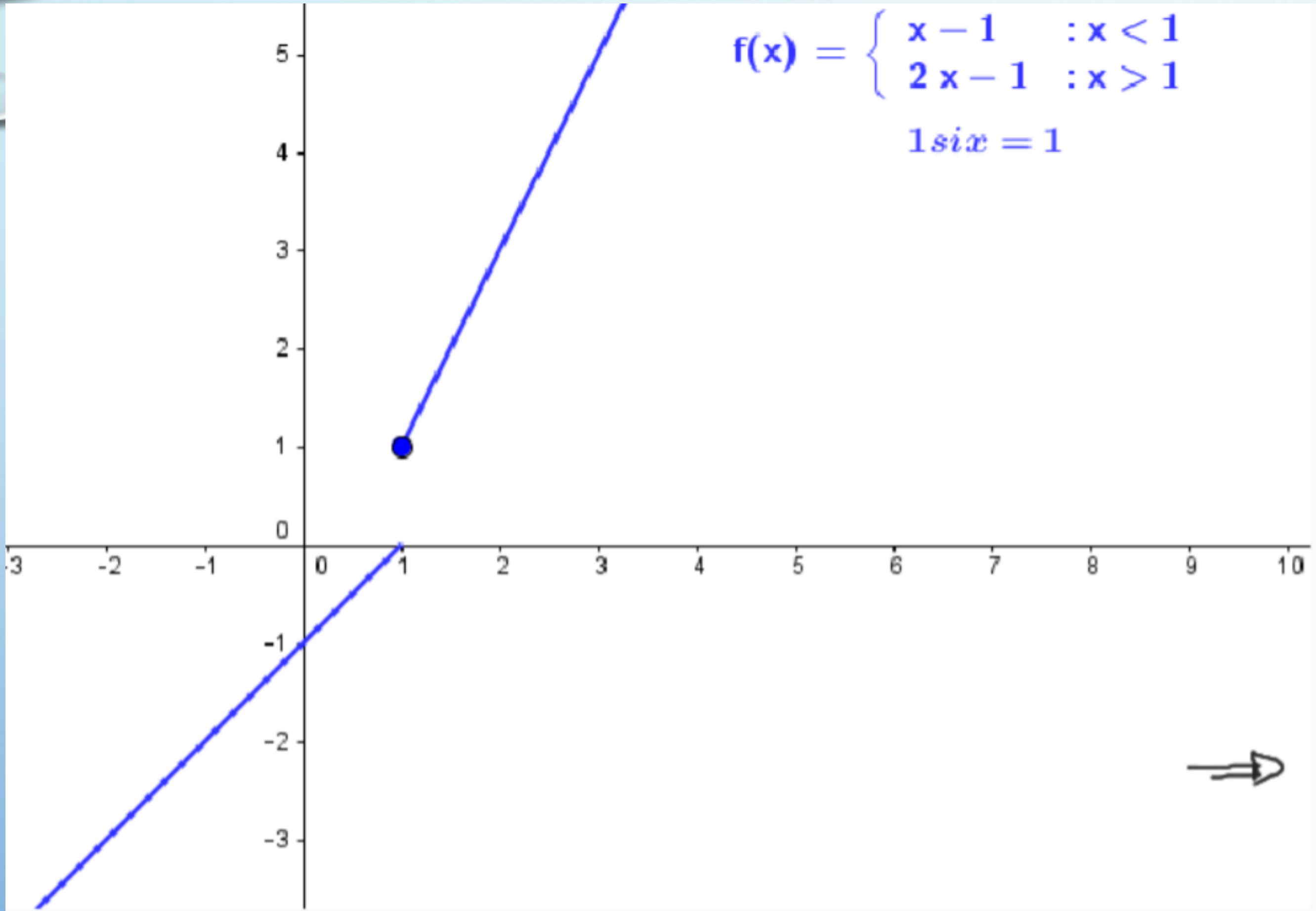
$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

Por lo que la función es discontinua en $x=2$.

Ejemplo 2:

Estudiar la continuidad de la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \\ 2x - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$



$f_{(1)} = 1$

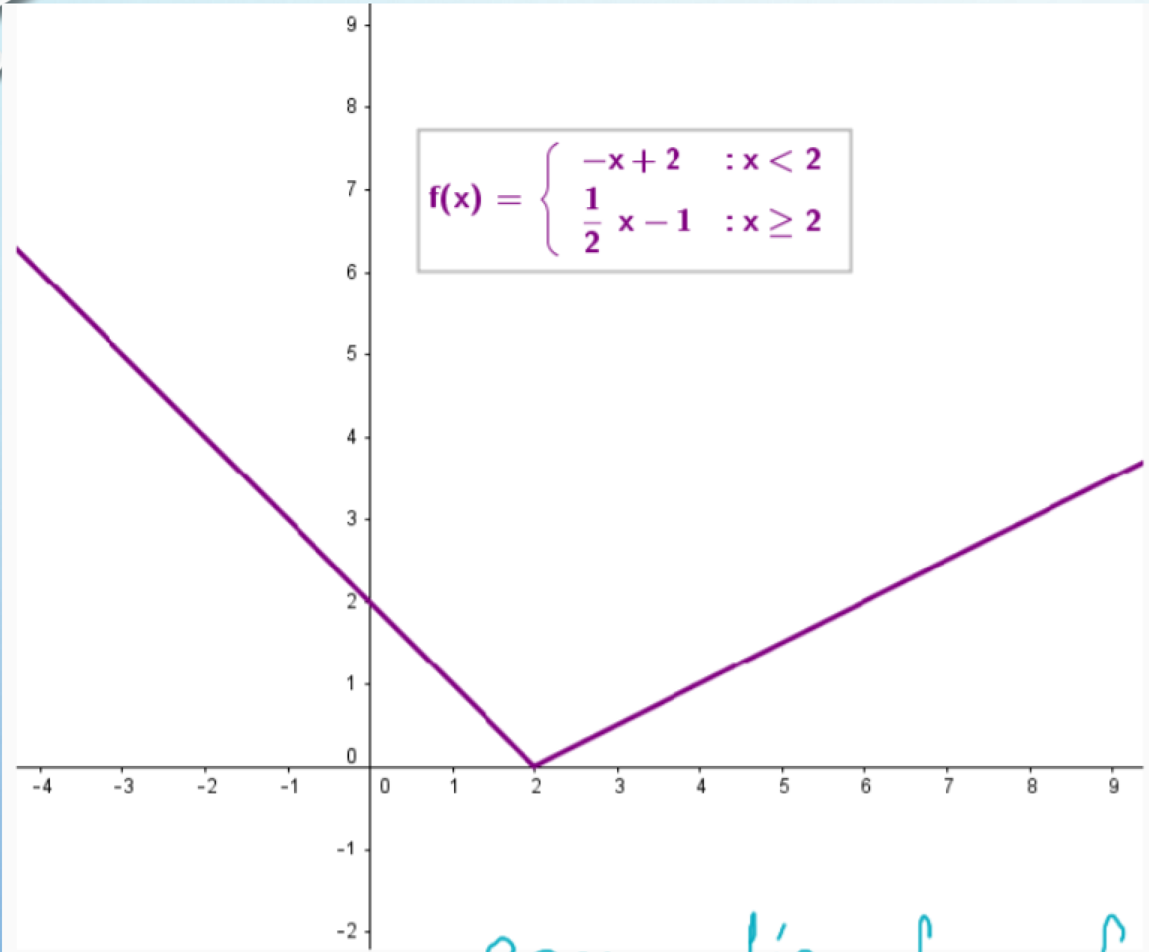
$\lim_{x \to 1^-} f_{(x)} = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f_{(x)} = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f_{(x)}$ y por lo tanto la función es discontinua en $x=1$.

Ejemplo 3:

Ídem si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -x + 2 & si\ x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$



$f_{(2)} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f_{(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f_{(x)}$$

y es $\lim\limits_{x \to 2} f_{(x)} = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 2} f_{(x)} = f_{(2)} \Rightarrow$ la función es continua en $x = 2$

Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado

En esta sección veremos propiedades muy importantes que cumplen las funciones continuas en un intervalo cerrado. Antes de enunciar estas propiedades debemos definir continuidad en un intervalo cerrado.

Para ello debemos definir continuidad a derecha y a izquierda.

Definición:

Una función es continua a la derecha de un número a si: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

y es continua a la izquierda de $a$si: $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Definición: Se dice que f(x) es continua en $[a; b]$ sí y sólo sí:

a) $f(x)$ es continua en $(a; b)$

b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (continua a la derecha de a)

c) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ (continua a la izquierda de b)

Función acotada:

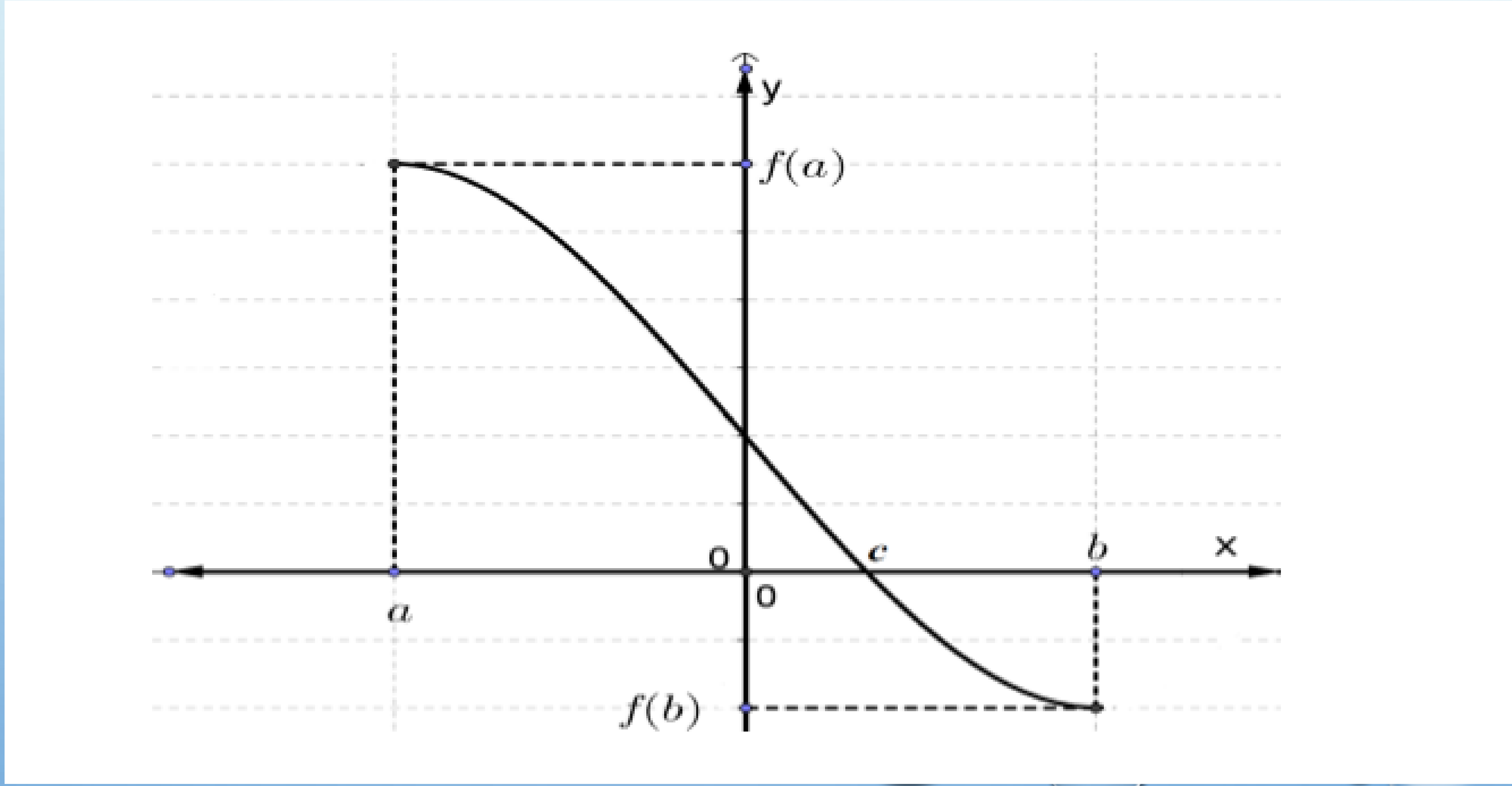
Diremos que una función $f: A \to \mathbb{R}, con\ A \subset \mathbb{R}$, es acotada si existe números reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in A$. Equivalentemente, una función es acotada si el conjunto imagen de la misma es un conjunto acotado. Recordemos que un conjunto acotado, es aquel que está acotado superior e inferiormente.

Teorema 1.2

Una función continua en un intervalo cerrado [a,b] alcanza un máximo y un mínimo en [a,b].

Teorema 1.3

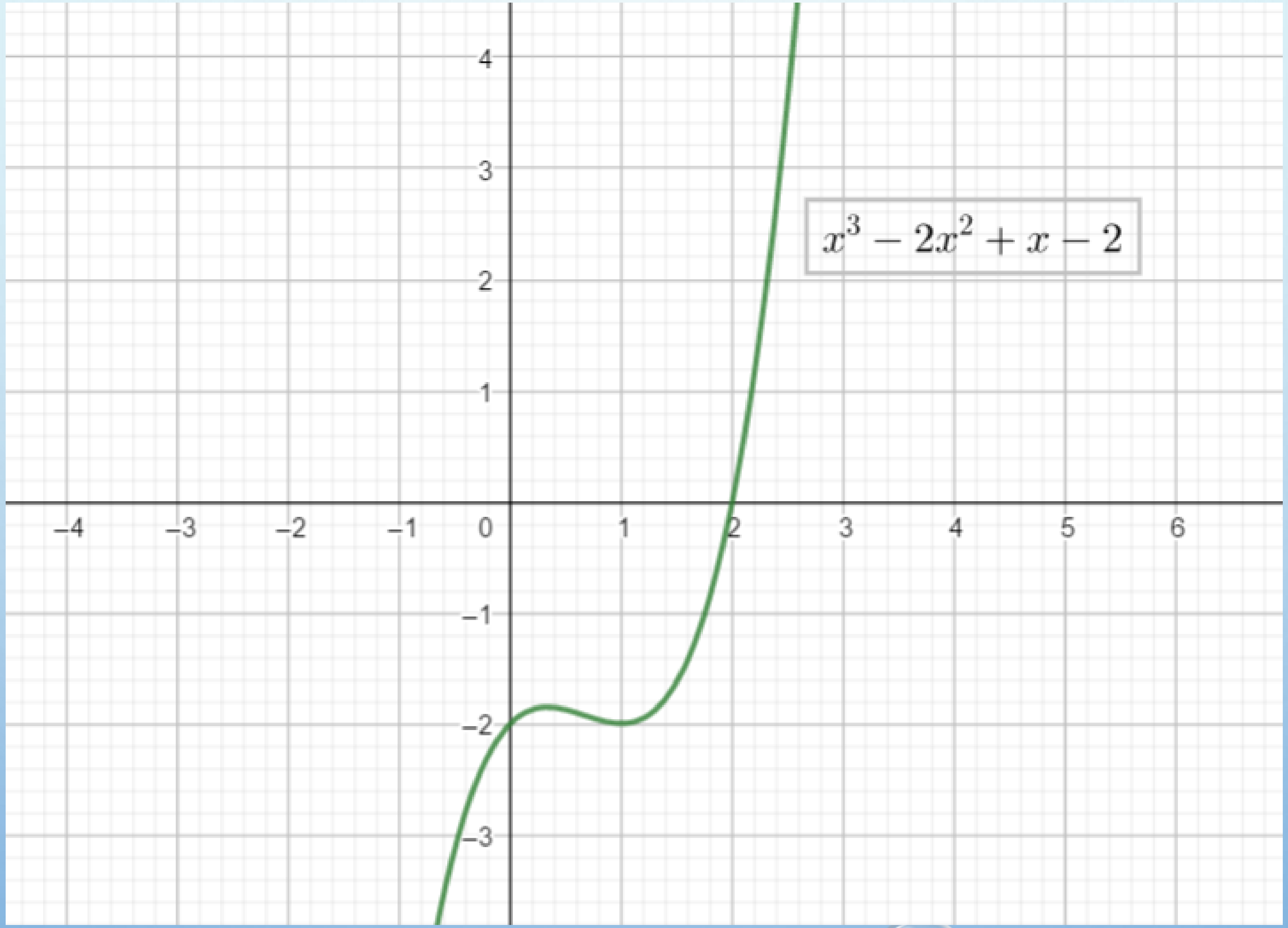
Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b] tal que: $f(a).f(b) < 0$ Entonces, existe $c \in (a;b)$ tal que $f(c) = 0$.



Ejemplo:

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ se puede probar que tiene una raíz real en el intervalo [1,3].

Es una función continua en todo su dominio, por ser una función polinómica y $f(1).f(3) < 0$, luego por el teorema existe c ∈ (1,3) tal que $f(c) = 0$.



$x^3 - 2x^2 + x - 2$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6