Celoštevilski Linearni Program za maksimizacijo geodetskega števila:

Naj bo $G \in \mathcal{G}(V,E)$ neusmerjen neutežen povezan enostaven označen graf nad n-timi vozlišči. Označimo $V(G) = \{1, \dots n\}$ in $E(G) \subseteq \{e_{ij} \mid \forall\, i,j \in V(G) : e_{ij} = (i,j)\}$. Najti želimo graf z največjim geodetskim številom.

ciljna funkcija: $max\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)$

kjer :

1. definiramo vse matrike sosednosti za enostavne in povezane grafe
   - $\forall\, i,j \in \{1, \dots n\}: \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \ e_{ij} \in E(G) \\ 0 & ; \ sicer \end{cases}$ (sestavimo matriko)
   - $\sum_{i<j} x_{ij} \geq n-1$ (graf je povezan)
   - $\forall\, i,j \in \{1, \dots, n\} : x_{ij} = x_{ji}$ (graf je neusmerjen)
   - $\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_{ii} = 0$ (brez zank)
   - $\forall\, i,j \in \{1, \dots, n\} : x_{ij} \in \{0,1\}$ (brez večkratnih povezav)
2. definiramo funkcijsko odvisno spremenljivko od matrike sosednosti
   - $\forall\, i,j \in \{1, \dots, n\}: \ y_{ij} = \{$število najkrajših poti med vozliščema i in j $\}$
   - $\forall i,j \in \{1, \dots n\}, i < j : y_{ij} = 0$ (vsako pot štejemo le enkrat)
   - $\forall i \in \{1, \dots n\} : y_{ii} = 1$ (trivialne poti)
   - $\forall\, i,j \in \{1, \dots, n\}: \ y_{ij} \in \mathbb{N}$

Če je podan CLP dopusten za izbrano število vozlišč n in je $(x^*_{ij})^n_{i,j=1}$ optimalna resitev, ki predstavlja graf G^*, je potem to rešitev problema. Pri tem je potrebno omeniti, da lahko za dani n obstaja več neizomorfnih grafov, ki dosežejo optimum.

Primer za $n = 3$:
(morda dodamo se plote kasneje vseh 8 možnosti, ali pa samo neizormorna grafa)
Obstajata le dve dopustni matriki sosednosti:

$$X_{P_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X_{K_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ter izpeljana matriki najkrajših poti:

$$Y_{P_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Y_{K_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in je zato

$$gpn(P_3) = gpn(K_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} y_{ij} = 6$$

Primer za n = 4 :
(dodam grafe ce je prav CLP)
Obstaja 6 dopustih matrik sosednosti za neizomorne grafe:

$$X_{P_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{S_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{C_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{\text{diamant}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{K_4^-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{K_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ter izpeljana matriki najkrajših poti:

$$Y_{P_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{S_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{C_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{diamant}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{K_4^-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_{K_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in so nato objektivne funkcije enake:

$$gpn(P_4) = gpn(S_4) = gpn(K_{\text{diamant}}) = gpn(K_4) = 10, \quad gpn(K_4^-) = 11, \quad gpn(K_4) = 12$$

(enako kot za drevesa moremo se dokazat)

Trditev **Geodetsko število polnih grafov**

Naj bo $K_n \in \mathcal{G}(V, E)$ poln graf z n-timi vozlišči, potem velja:

$$gpn(K_n) = n + \binom{n}{2}$$