

# Število geodetskih podpoti: ekstremalni grafi

Kratko poročilo projekta pri predmetu Finančni praktikum

Nina Smole, Martin Čadež

9. november 2025

## 1 Uvod in definicije pojmov

Cilj projekta je preučiti ekstremalne grafe glede na število geodetskih podpoti v različnih razredih grafov. Specifično nas zanima, kateri grafi dosežejo največjo možno vrednost  $\text{gpn}(G)$  v naslednjih razredih povezanih grafov na  $n$  vozliščih:

- Dvodelni grafi
- Grafi brez trikotnikov
- Kubični grafi
- Vsi grafi

Za lažje nadaljevanje, najprej definiramo osnovne pojme in koncepte uporabljene za reševanje problema.

**Definicija 1** Za povezan graf  $G$  definiramo število podpoti kot število vseh poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0. Tu definiramo pot v grafu  $G$  dolžine  $\ell$  kot zaporedje vozlišč  $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$  brez ponovitev (tj.  $v_i \neq v_j$  za vse  $0 \leq i < j \leq \ell$ ) tako, da je vsak par zaporednih vozlišč povezan z povezavo grafa  $G$  (tj.  $v_{i-1}v_i$  je povezava grafa  $G$  za vse  $1 \leq i \leq \ell$ ).

**Definicija 2** Število geodetskih podpoti  $\text{gpn}(G)$  definiramo s štetjem le geodetskih poti. Torej, za povezan graf  $G$  definiramo  $\text{gpn}(G)$  kot število vseh najkrajših poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0.

Invarianta  $\text{gpn}(G)$  je definirana za povezane grafe. Opazimo, da doseže svoj minimum pri drevesih. Posebaj za vsako drevo  $T$  na  $n$  vozliščih velja:

$$\text{gpn}(T) = \binom{n}{2}.$$

**Definicija 3** Graf  $G$  je ekstremalen glede na dano lastnost  $P$  in razred grafov  $\mathcal{C}$ , če med vsemi grafi iz razreda  $\mathcal{C}$  doseže največjo ali najmanjšo možno vrednost lastnosti  $P$ .

V našem primeru se sprašujemo po ekstremalnih grafih ki maksimizirajo lastnost števila geodetskih podpoti  $g_{pn}(G)$  v različnih razredih povezanih grafov na  $n$  vozliščih.

**Definicija 4** *Graf  $G = (V, E)$  je dvodelen, če obstaja particija množice vozlišč  $V = A \cup B$ , kjer  $A \cap B = \emptyset$ , tako da za vsako povezano  $uv \in E$  velja  $(u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in B \wedge v \in A)$ .*

**Definicija 5** *Graf  $G$  je brez trikotnikov, če ne vsebuje nobenega cikla dolžine 3 kot podgrafa.*

**Definicija 6** *Kubični graf je graf, v katerem je vsako vozlišče stopnje tri. Kubični graf je 3-regularen graf.*

## 2 Načrt dela

Reševanja problema se bomo lotili na naslednji način:

V prvem koraku bomo izvedli analizo grafov vseh navedenih razredov za majhna ( $< 10$ ) števila vozlišč  $n$ . To nam bo omogočilo boljši vpogled v obnašanje grafov. V drugem koraku bomo na podlagi prejšnje analize postavili hipotezo o tem, kateri grafi so optimalni za poljubno število vozlišč  $n$ . V tretjem koraku bomo hipoteze preverili z uporabo stohastičnih metod, kot je simulirano žarjenje, za večja števila vozlišč.

Ta pristop nam bo omogočil, da sistematično preučimo lastnosti števila geodetskih podpoti in identificiramo grafe, ki maksimizirajo to invarianto v različnih strukturnih razredih.