Število geodetskih podpoti: ekstremalni grafi

Kratko poročilo projekta pri predmetu Finančni praktikum

Nina Smole, Martin Čadež

9. november 2025

1 Uvod in definicije pojmov

Cilj projekta je preučiti ekstremalne grafe glede na število geodetskih podpoti v različnih razredih grafov. Specifično nas zanima, kateri grafi dosežejo največjo možno vrednost $\mathrm{gpn}(G)$ v naslednjih razredih povezanih grafov na n vozliščih:

- Dvodelni grafi
- Grafi brez trikotnikov
- Kubični grafi
- Vsi grafi

Za lažje nadaljevanje, najprej definiramo osnovne pojme in koncepte uporabljene za reševanje problema.

Definicija 1 *Za povezan graf G definiramo* število podpoti *kot število vseh poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0. Tu definiramo* pot v grafu *G dolžine ℓ kot zaporedje vozlišč $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ brez ponovitev (tj. $v_i \neq v_j$ za vse $0 \leq i < j \leq \ell$) tako, da je vsak par zaporednih vozlišč povezan z povezavo grafa G (tj. $v_{i-1}v_i$ je povezava grafa G za vse $1 \leq i \leq \ell$).*

Definicija 2 Število geodetskih podpoti $\mathrm{gpn}(G)$ *definiramo s štetjem le geodetskih poti. Torej, za povezan graf G definiramo* $\mathrm{gpn}(G)$ *kot število vseh najkrajših poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0.*

Invarianta $\mathrm{gpn}(G)$ je definirana za povezane grafe. Opazimo, da doseže svoj minimum pri drevesih. Posebaj za vsako drevo T na n vozliščih velja:

$$\mathrm{gpn}(T) = \binom{n}{2}.$$

Definicija 3 *Graf G je* ekstremalen *glede na dano lastnost P in razred grafov $\mathcal{C}$, če med vsemi grafi iz razreda $\mathcal{C}$ doseže največjo ali najmanjšo možno vrednost lastnosti P.*

V našem primeru se sprašujemo po ekstremalnih grafih ki maksimizirajo lastnost števila geodetskih podpoti $\mathrm{gpn}(G)$ v različnih razredih povezanih grafov na n vozliščih.

Definicija 4 *Graf $G = (V, E)$ je* dvodelen*, če obstaja particija množice vozlišč $V = A \cup B$, kjer $A \cap B = \emptyset$, tako da za vsako povezavo $uv \in E$ velja $(u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in B \wedge v \in A)$.*

Definicija 5 *Graf G je* brez trikotnikov*, če ne vsebuje nobenega cikla dolžine 3 kot podgrafa.*

Definicija 6 Kubični graf *je graf, v katerem je vsako vozlišče stopnje tri. Kubični graf je 3-regularen graf.*

2 Načrt dela

Reševanja problema se bomo lotili na naslednji način:

V prvem koraku bomo izvedli analizo grafov vseh navedenih razredov za majhna (< 10) števila vozlišč n. To nam bo omogočilo boljši vpogled v obnašanje grafov. V drugem koraku bomo na podlagi prejšnje analize postavili hipotezo o tem, kateri grafi so optimalni za poljubno število vozlišč n. V tretjem koraku bomo hipoteze preverili z uporabo stohastičnih metod, kot je simulirano žarjenje, za večja števila vozlišč.

Za delo z grafi in njihovo reprezentacijo bomo uporabili Python knjižnico *NetworkX*. Za generiranje grafov brez trikotnikov bomo uporabili *SageMath*, ki omogoča delo z bolj kompleksnimi grafi in njihovo analizo.

Ta pristop nam bo omogočil, da sistematično preučimo lastnosti števila geodetskih podpoti in identificiramo grafe, ki maksimizirajo to invarianto v različnih strukturnih razredih.