1998 年 第 1 期
工程图学学报
JOURNAL OF ENGINEERING GRAPHICS
1998 No. 1

简单多边形顶点凸凹性的快速确定算法

北京航空航天大学制造工程系
中科院计算所 CAD 开放研究实验室 金文华 唐卫清 唐荣锡

摘 要 本文深入剖析了平面简单多边形方向（逆时针或顺时针）与顶点凸凹性的内在本质联系，提出了确定顶点凸凹性的快速算法，并解决了根据凸点确定多边形方向的基本问题。本文方法已应用于工厂设计软件 PDSOFT 的工厂模型消隐和平剖图消隐中。实践证明效果很好。

关键词 简单多边形，多边形方向，顶点凸凹性，平剖图

0 引 言

在有关平面任意简单多边形的许多算法（如凹多边形的凸分解、多面体消隐等）中，往往会涉及以下两个基本问题：

（1）已知多边形顶点以逆时针或顺时针方向串连起来，如何确定其中任一顶点的凸凹性。

（2）已知多边形中的某个顶点为凸点或凹点，如何确定多边形顶点是以逆时针方向还是以顺时针方向串连起来。

对于第一个基本问题，文献 [1] 提出了一种比较独特的算法，利用“多边形凸包上的顶点必为凸点”的基本常理，采用分层求凸包的方法交替地筛选出凸点和凹点。该算法的基础为凸包算法，而凸包算法本身就是一个较为复杂的问题，这就导致了文献 [1] 算法的复杂性，该算法的时间复杂度为 O（$n^2\log n$）次乘法和 O（n^2）次比较。

文献 [2] 针对文献 [1] 复杂的算法，提出了 O（n）复杂度的简单算法。但是该算法的缺陷在于：必须先确定一个凸顶点（在具有最大 y 坐标值的点中寻找具有最大 x 坐标值的顶点，该点必为凸点）；对于每一个顶点，必须进行角度计算，由于三角函数计算量大而使得算法计算速度较慢。文献 [3] 只能选取多边形矩形 *BOX* 上的凸点，而不能确定多边形任一顶点的凸凹性。

本文于 1997 年 9 月收到
本文得到国家自然科学基金资助

对于第二个基本问题，传统方法是利用简单多边形的有向面积来确定多边形的顺时针或逆时针方向性[4]。设 XY 平面内简单多边形顶点为：$V_i=(x_i, y_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$，则有向面积定义为：

$$sp=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\overline{(V_1V_K)}\times\overline{(V_1V_{K+1})}\right)_z$$

的复

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\left\{(x_k-x_1)(y_{k+1}-y_1)-(x_{k+1}-x_1)(y_k-y_1)\right\}$$

如果 $sp>0$，则多边形顶点以逆时针方向串连起来；如果 $sp<0$，则多边形顶点以顺时针方向串连起来；如果 $sp=0$，则多边形所有顶点共线，这与简单多边形的定义相矛盾，因此可不予考虑。文献 [3] 提出的方法甚为简单，可利用凸点的“顶点矢量积”来确定多边形的顺时针或逆时针方向性。

本文在这些文献的基础上，提出了多边形方向和顶点方向的概念，阐述了这两个基本问题的内在本质联系，并由此提出了解决问题的新方法。

1　基本概念与相关定理

首先，本文沿用文献 [1] 和文献 [2] 中有关凸点和凹点的定义以及凸多边形和任意多边形的定义。对于平面内的任意简单多边形，其顶点要么以逆时针方向串连起来，要么以顺时针方向串连起来。多边形的所有边均可看作有向边，边的方向与顶点的串连方向相一致。

引理 1　当沿着简单多边形的顶点串连方向走过所有有向边时，如果多边形的顶点以逆时针方向串连起来，则我们的左侧始终在多边形的内部；反之，如果多边形的顶点以顺时针方向串连起来，则我们的右侧始终在多边形的内部。

引理 2　当沿着简单多边形的任一条有向边从起点走向终点时，如果我们的左侧始终在多边形的内部，则多边形的顶点以逆时针方向串连起来；反之，如果我们的右侧始终在多边形的内部，则多边形的顶点以顺时针方向串连起来。

引理 1 和引理 2 作为平面内任意简单多边形的基本性质，其正确性是显而易见的。

定义 1　如果多边形的顶点以逆时针方向串连起来，则称此多边形的方向为 Z 轴正向（简称正向）；如果多边形的顶点以顺时针方向串连起来，则称此多边形的方向为 Z 轴负向（简称负向）。如图 1 所示。

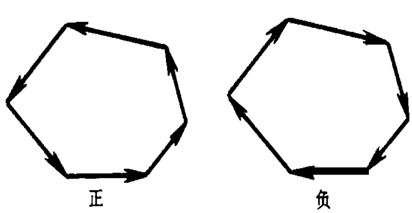


图 1　简单多边形的方向

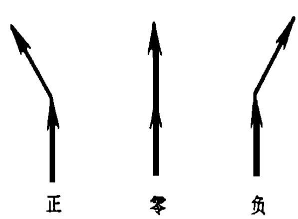


图 2　顶点的方向

定义 2　简单多边形任意顶点前后两个相邻边矢量的叉积在 Z 轴上的投影如果为正，则称此顶点的方向为正向；如果为负，则称此顶点的方向为负向；如果为零。则称此顶点的方向为零。对于投影不为零的顶点，要么为凸点，要么为凹点。如果投影为零，则该顶点与其前后相邻顶点共线，可称为中性点。如图 2 所示。

定义 3　在简单多边形任意顶点前后两个边矢量形成的两个角度中，位于多边形内的角度称为该顶点的内角，位于多边形外的角度称为该顶点的外角。

由凸凹点的定义可知，凸点的内角小于 π，外角大于 π；凹点的内角大于 π，外角小于 π；而中性点的内外角均为 π。

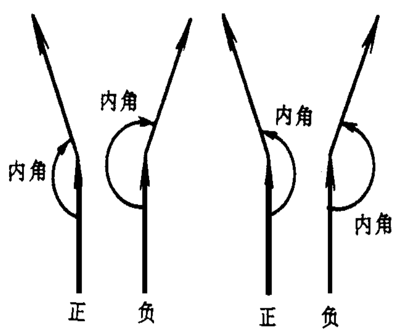
定理 *1*　对于方向为正的任意简单多边形，其方向为正的顶点是凸点，方向为负的顶点是凹点；对于方向为负的任意简单多边形，其方向为负的顶点是凸点，方向为正的顶点是凹点。

证明　此定理证明的关键是确定顶点相邻两边所夹角度中哪一个是内角，哪一个是外角。

假设任意简单多边形方向为正，即多边形以逆时针方向串连起来。根据引理 1 可知，多边形边矢量的左侧在多边形内部，因此顶点相邻两边矢量左侧所夹的角度为顶点的内角。如图 3（a）所示，当顶点方向为正时，顶点内角小于π，顶点为凸点；当顶点方向为负时，顶点内角大于π，顶点为凹点。

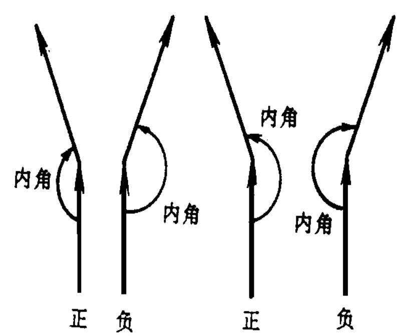
假设任意简单多边形方向为负，即多边形以顺时针方向串连起来。根据引理 1 可知，多边形边矢量的右侧在多边形内部，因此顶点相邻两边矢量右侧所夹的角度为顶点的内角。如图 3（b）所示，当顶点方向为正时，顶点内角大于π，顶点为凹点；当顶点方向为负时，顶点内角小于π，顶点为凸点。

证毕。



（a）逆时针多边形　　（b）顺时针多边形

图 3　由多边形方向确定顶点方向



（a）凸顶点　　（b）凹顶点

图 4　由顶点方向确定多边形方向

定理 2　多边形中如果凸点的方向为正（或负），则多边形的方向为正（或负）；如果凹点的方向为正（或负），则多边形的方向为负（或正）。

证明　对于凸顶点，其内角小于π，如图 4（a）所示，当凸点方向为正时，内角在两边矢量的左侧，也即沿其中任一条边从起点走向终点时，我们的左侧始终在多边形内部，根据引理 2，可知多边形以逆时针方向串连起来，即多边形的方向为正；当凸点方向为负时，内角在两边矢量的右侧，也即沿其中任一条边从起点走向终点时，我们的右侧始终在

多边形内部，根据引理 2，可知多边形以顺时针方向串连起来，即多边形的方向为负。

类似可证明凹顶点的情况，如图 4（b）所示。

由定理 1 和定理 2 很自然可得到下述结论：

结论　平面内任意简单多边形与其中的凸顶点具有相同的方向；与其中的凹顶点具有相反的方向。

2　算法描述

对于第一个基本问题，其实质是：已知多边形方向，确定多边形中任一顶点的方向。根据定理 1，可确定算法一如下：

如果简单多边形顶点以逆时针方向串连起来，即多边形方向为正，计算所有顶点前后两个相邻边矢量的叉积，以确定顶点的方向。如果顶点方向为正，则顶点为凸点；如果顶点方向为零，则顶点为中性点；如果顶点方向为负，则顶点为凹点。

如果简单多边形顶点以顺时针方向串连起来，即多边形方向为负，计算所有顶点前后两个相邻边矢量的叉积，以确定顶点的方向。如果顶点方向为正，则顶点为凹点；如果顶点方向为零，则顶点为中性点；如果顶点方向为负，则顶点为凸点。

对于第二个问题，其实质是：已知多边形中某一顶点的方向，确定多边形的方向。根据定理 2，可确定算法二如下：

由于多边形中凹点的确定很困难，因此一般用凸点来确定多边形的方向。首先寻找多边形中 X 坐标值最小的顶点，如果有多个顶点满足此条件，则以其中 Y 坐标值最小的顶点为判定基准点。此顶点必为凸点，计算其前后两个相邻边矢量的叉积，确定其方向，如果方向为正，则多边形顶点以逆时针方向串连起来；如果方向为负，则多边形顶点以顺时针方向串连起来。

假如在未知多边形方向的情况下，需要确定多边形中任一顶点的方向。此时把上述两个算法结合起来，便可很方便地解决这个问题。对于算法一，由于每个顶点只需进行两次乘法，五次减法，便可确定顶点的方向及其凸凹性，因此速度明显优于文献 [2] 的方法。算法一的时间复杂度也为 $O(n)$。对于算法二，由于确定凸点需要遍历所有顶点，故时间复杂度也为 $O(n)$。

3　结束语

本文在提出多边形方向和顶点方向的基础上，剖析了平面简单多边形逆时针或顺时针的方向性与顶点凸凹性的内在本质联系，并进而提出了极其简单的方法解决有关平面简单多边形的两个基本问题。本文方法已应用于工厂设计软件 PDSOFT 的工厂模型消隐和平剖图消隐中。在工厂模型消隐时，需要确定平面单多边形逆时针或顺时针的方向性；在平剖图消隐时，管道元件轮廓在进行凹多边形的凸分解时，需要确定平面简单多边形中任一顶点的凸凹性，实践证明本文方法效果很好。

参 考 文 献

1 周培德. 确定任意多边形凸凹顶点的算法. 软件学报, 1995. 6 (5): 276~279

2 许如初, 张智平. 确定任意多边形顶点凸凹性的快速算法. 华中理工大学学报, 1997, 25 (1): 103~104

3 郑建华. 选择凹多边形中凸角的算法. 发展中的中国计算机图形学——Chinagraph' 96 论文集, 北京: 电子工业出版社, 1996, 561~569

4 唐荣锡, 汪嘉业, 彭群生等编著. 计算机图形学教程. 北京: 科学出版社, 1990, 234~235

A FAST ALGORITHM FOR DETERMINING THE CONVEXITY-CONCAVITY OF VERTICES OF SIMPLE POLYGON

Jin Wenhua Tang Weiqing Tang Rongxi

Department of Manufacturing Engineering, Beijing University of Aeronautics Astronautics

CAD Lab., Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences

ABSTRACT

The internal relation between the orientation (clockwise or anti—clockwise) of polygon and the convexity—concavity of vertices is analysed. A fast algorithm for determing the convexity—concavity of vertices is proposed. And the basic problem of determing the orientation of polygon according to a convex vertices is simply solved. All the method presented in the paper are implemented in the hiding line removal of plant model and orthographic drawings in the plant design software PDSOFT. The results show that method are Satisfactory.

Key words simple polygon, polygon orientation, convexity—concavity of vertices, orthographic drawing