布雷森漢姆直線演算法

维基百科，自由的百科全书

布雷森漢姆直線演算法（英语：Bresenham's line algorithm）是用來描繪由兩點所決定的直線的演算法，它會算出一條線段在n維點陣圖上最接近的點。這個演算法只會用到較為快速的整數加法、減法和位元移位，常用於繪製電腦畫面中的直線。是計算機圖形學中最先發展出來的演算法。

經過少量的延伸之後，原本用來畫直線的演算法也可用來畫圓。且同樣可用較簡單的算術運算來完成，避免了計算二次方程式或三角函數，或遞歸地分解為較簡單的步驟。

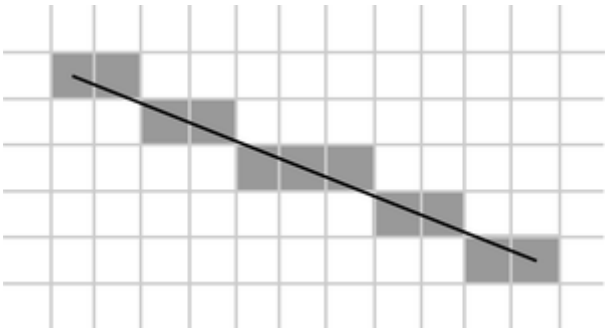
以上特性使其仍是一種重要的演算法，並且用在繪圖儀、繪圖卡中的繪圖晶片，以及各種圖形程式庫。這個演算法非常的精簡，使它被實作於各種裝置的韌體，以及繪圖晶片的硬體之中。

「Bresenham」至今仍經常作為一整個演算法家族的名稱，即使家族中絕大部份演算法的實際開發者是其他人。該家族的演算法繼承了Bresenham的基本方法並加以發展，詳見參考資料。

目录

演算方法

假設我們需要由(x_0, y_0)這一點，繪畫一直線至右下角的另一點(x_1, y_1)，x,y分別代表其水平及垂直坐标，并且$x_1 - x_0 > y_1 - y_0$。在此我們使用電腦系統常用的坐標系，即x坐標值沿x軸向右增長，y坐標值沿y軸向下增長。



Bresenham直線演算法描繪的直線。

因此x及y之值分別向右及向下增加，而兩點之水平距離為$x_1 - x_0$且垂直距離為$y_1 - y_0$。由此得之，該線的斜率必定介乎於1至0之間。而此算法之目的，就是找出在x_0與x_1之間，第x行相對應的第y列，從而得出一像素點，使得該像素點的位置最接近原本的線。

對於由(x_0, y_0)及(x_1, y_1)兩點所組成之直線，公式如下：

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

因此，對於每一點的x，其y的值是

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

因為x及y皆為整數，但並非每一點x所對應的y皆為整數，故此沒有必要去計算每一點x所對應之y值。反之由於此線之斜率介乎於1至0之間，故此我們只需要找出當x到達那一個數值時，會使y上升1，若x尚未到此值，則y不變。至於如何找出相關的x值，則需依靠斜率。斜率之計算方法為$m = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$。由於此值不變，故可於運算前預先計算，減少運算次數。

要實行此算法，我們需計算每一像素點與該線之間的誤差。於上述例子中，誤差應為每一點x中，其相對的像素點之y值與該線實際之y值的差距。每當x的值增加1，誤差的值就會增加m。每當誤差的值超出0.5，線就會比較靠近下一個映像點，因此y的值便會加1，且誤差減1。

下列偽代碼是這算法的簡單表達（其中的`plot(x,y)`繪畫該點，`abs`返回的是絕對值）。雖然用了代價較高的浮点运算，但很容易就可以改用整數運算（詳見最佳化一節）：

```
function line(x0, x1, y0, y1)
    int deltax := x1 - x0
    int deltay := y1 - y0
    real error := 0
    real deltaerr := deltay / deltax    //  假設deltax != 0（非垂直線），
          // 注意：需保留除法運算結果的小數部份
    int y := y0
    for x from x0 to x1
        plot(x,y)
        error := error + deltaerr
        if abs (error) ≥ 0.5 then
            y := y + 1
            error := error - 1.0
```

一般化

雖然以上的演算法只能繪畫由左下至右上，且斜率小於或等於1的直線，但我們可以擴展此演算法，使之可繪畫任何的直線。第一個擴展是繪畫反方向，即由右上至左下的直線。這可以簡單地透過在`x0 > x1`時交換起點和終點來做到。第二個擴展是繪畫斜率為負的直線。可以檢查$y_0 \geq y_1$是否成立；若該不等式成立，誤差超出0.5時*y*的值改為加-1。最後，我們還需要擴展該演算法，使之可以繪畫斜率絕對值大於1的直線。要做到這點，我們可以利用大斜率直線對直線*y*=*x*的反射是一條小斜率直線的事實，在整個計算過程中交換*x* 和 *y*，並一併將*plot*的參數順序交換。擴展後的偽代碼如下：

```
function line(x0, x1, y0, y1)
    boolean steep := abs(y1 - y0) > abs(x1 - x0)
    if steep then
        swap(x0, y0)
        swap(x1, y1)
    if x0 > x1 then
        swap(x0, x1)
        swap(y0, y1)
    int deltax := x1 - x0
    int deltay := abs(y1 - y0)
    real error := 0
    real deltaerr := deltay / deltax
    int ystep
    int y := y0
    if y0 < y1 then ystep := 1 else ystep := -1
    for x from x0 to x1
        if steep then plot(y,x) else plot(x,y)
        error := error + deltaerr
        if error ≥ 0.5 then
            y := y + ystep
            error := error - 1.0
```

以上的程序可以處理任何的直線，實作了完整的Bresenham直線演算法。

最佳化

以上的程序有一個問題：電腦處理浮点运算的速度比較慢，而error與deltaerr的計算是浮點運算。此外，error的值經過多次浮點數加法之後，可能有累積誤差。使用整數運算可令演算法更快、更準確。只要將所有以上的分數數值乘以deltax，我們就可以用整數來表示它們。唯一的問題是程序中的常數0.5—我們可以透過改變error的初始方法，以及將error的計算由遞增改為遞減來解決。新的程序如下：

```
function line(x0, x1, y0, y1)
    boolean steep := abs(y1 - y0) > abs(x1 - x0)
    if steep then
        swap(x0, y0)
        swap(x1, y1)
    if x0 > x1 then
        swap(x0, x1)
        swap(y0, y1)
    int deltax := x1 - x0
    int deltay := abs(y1 - y0)
    int error := deltax / 2
    int ystep
    int y := y0
    if y0 < y1 then ystep := 1 else ystep := -1
    for x from x0 to x1
        if steep then plot(y,x) else plot(x,y)
        error := error - deltay
        if error < 0 then
            y := y + ystep
            error := error + deltax
```

歷史

Jack E. Bresenham於1962年在IBM發明了此演算法。據他本人表示，他於1963年在丹佛舉行的美国计算机协会全國大會上發表了該演算法，論文則登載於1965年的《IBM系統期刊》（IBM Systems Journal）之中。[1]Bresenham直線演算法其後被修改為能夠畫圓，修改後的演算法有時被稱為「Bresenham畫圓演算法」或中點畫圓演算法。

參考資料

- "The Bresenham Line-Drawing Algorithm," by Colin Flanagan

1. Paul E. Black. *Dictionary of Algorithms and Data Structures*. 美國國家標準與技術研究院. http://www.nist.gov/dads/HTML/bresenham.html

參閱

- Patrick-Gilles Maillot's Thesis an extension of the Bresenham line drawing algorithm to perform 3D hidden lines removal; also published in MICAD '87 proceedings on CAD/CAM and Computer Graphics, page 591. ISBN 2-86601-084-1.
- 數字微分分析儀演算法，描畫直線和三角形的一種簡單通用方法。
- 吳小林直線演算法，以同樣快速的方法繪製反鋸齒線。
- 中點畫圓演算法，以類似的方法繪畫圓。

外部連結

- Analyze Bresenham's line algorithm in an online Javascript IDE
- *The Bresenham Line-Drawing Algorithm* by Colin Flanagan
- National Institute of Standards and Technology page on Bresenham's algorithm
- Calcomp 563 Incremental Plotter Information
- Bresenham's Original Paper
- An implementation in Java at the Code Codex