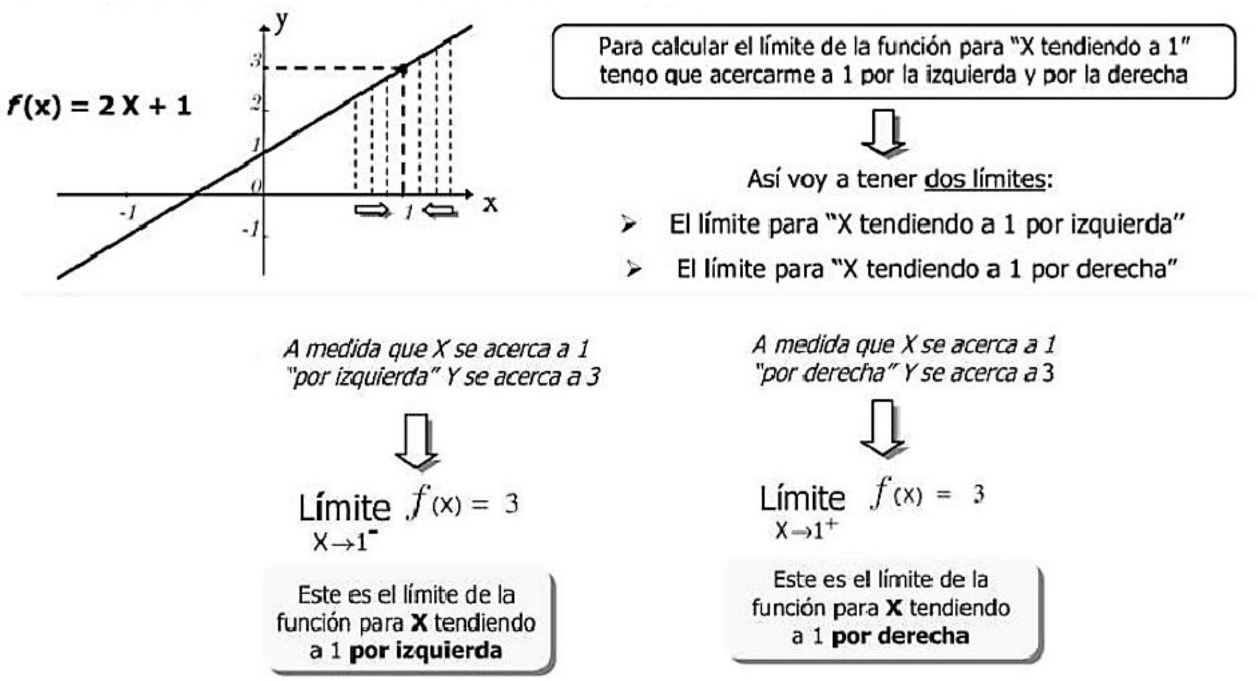
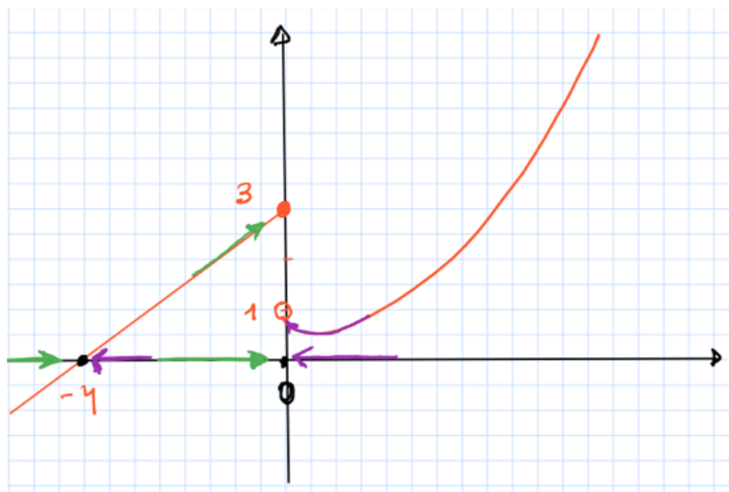
Límite y Continuidad

Límites laterales



Ejemplo 2:



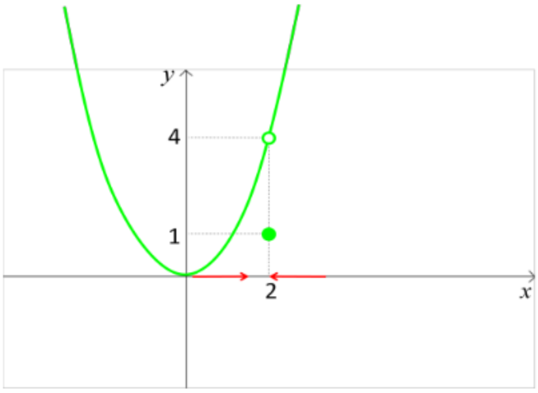
$\lim_{x\to -4^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$

Decimos que:** $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **si se puede hacer que f(x) esté arbitrariamente cerca de L tomando valores de x suficientemente cerca de "a" (sea por derecha o por izquierda). Se lee "límite de f(x) cuando x tiende a "a"". Es decir, es el valor al cual "se aproxima" una función cuando x "tiende" a un valor determinado.

Para calcular un límite analíticamente, hay que reemplazar "x" en la ecuación de la función por el valor al que quiero que se acerque.

<u>Ejemplo:</u> $\lim_{x\to -2} 2x^2 + 3x - 2 = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0$



Veamos que, en este ejemplo el valor del límite no coincide con el valor que toma la función en x_0=2. Es decir, para el límite, no interesa el valor de la función en el punto, sino en sus proximidades.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$
$$f(2) = 4$$

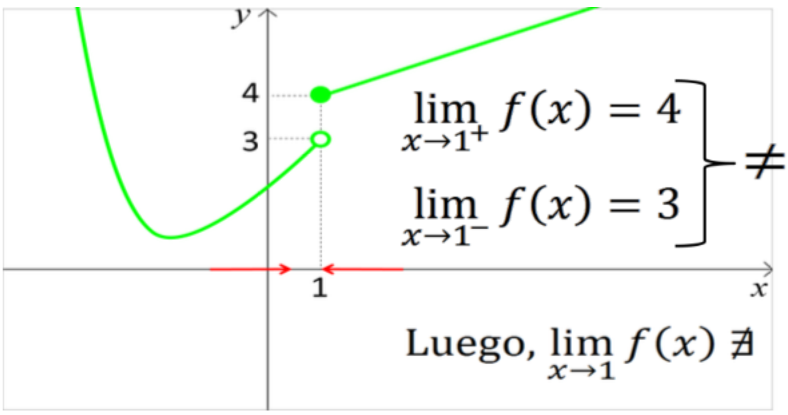
<u>Propiedades del límite:</u>

- Si el límite cuando x tiende a “a” existe, entonces es único.
- Si los límites laterales coinciden, existe el límite de la función:
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$
- Si los límites laterales no coinciden, el límite entonces NO existe. $\nexists$

En el ejemplo 2: $\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -4} f(x) = 0$ mientras que cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Otro ejemplo:



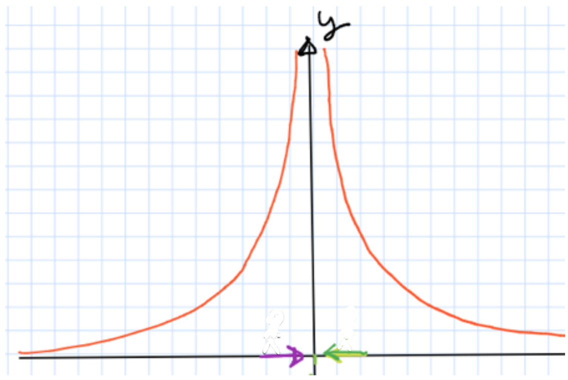
<u>Límites infinitos:</u>

Si el límite da ±∞ se considera que no existe el límite (finito) pero debemos indicar igual el infinito y su signo para entender el comportamiento de la función.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$



Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ decimos que f(x) se hace arbitrariamente grande al tomar valores de x lo suficientemente cerca de "a", cuando esto sucede en x = a hay una <u>asíntota vertical</u>.

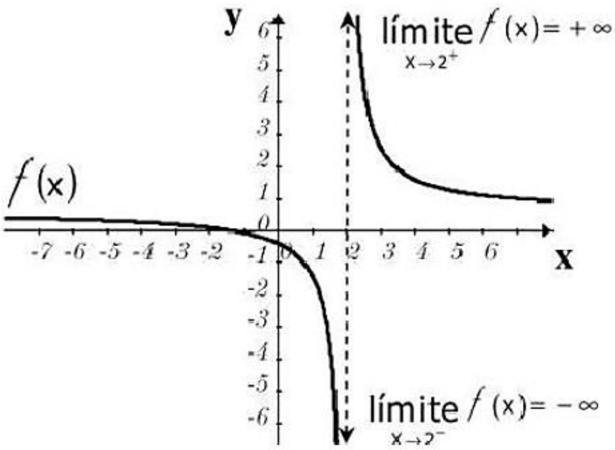
Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x+4}{5x-10} = \frac{3.2+4}{5.2-10} \to \frac{10}{0}$

Al resolverlo analíticamente, sabemos que la división por "0" no existe pero en realidad tenemos que considerar que estamos calculando un límite, es decir el denominador no es 0 sino que "tiende" a 0. Veamos:
Y en x = 2 hay una **asíntota vertical.**

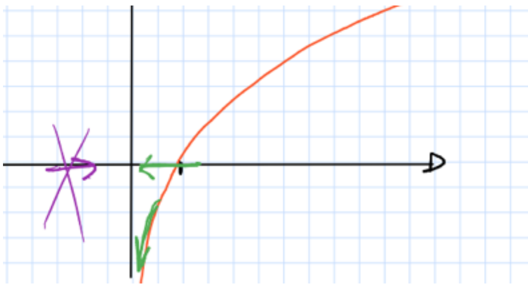
$$\underset{x \to 2^+}{\text{límite}} \frac{3X+4}{5X-10} = \frac{10}{0{,}0000000\ldots1} = +\infty$$

$$\underset{x \to 2^-}{\text{límite}} \frac{3X+4}{5X-10} = \frac{10}{-0{,}0000000\ldots1} = -\infty$$

- Por lo tanto **el límite da infinito**



Ejemplo 3: f(x) = ln(x) Veamos el límite cuando x tiende a 0 *(por la derecha ya que por la izquierda no es posible por no encontrarse en el dominio de la función)*

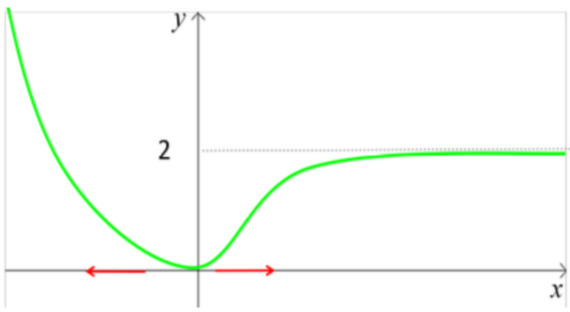


$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

En x = 0 hay una **asíntota vertical**

Límites en el infinito

Decimos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ si f(x) se acerca arbitrariamente a L cuando x es lo suficientemente grande/chico.

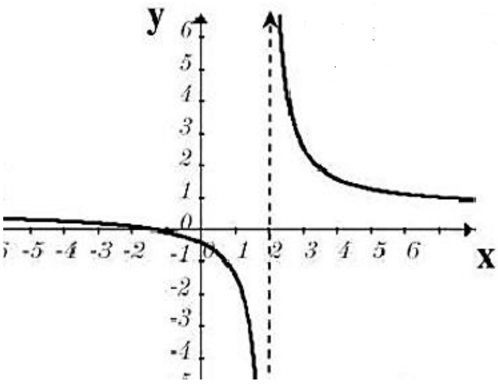


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

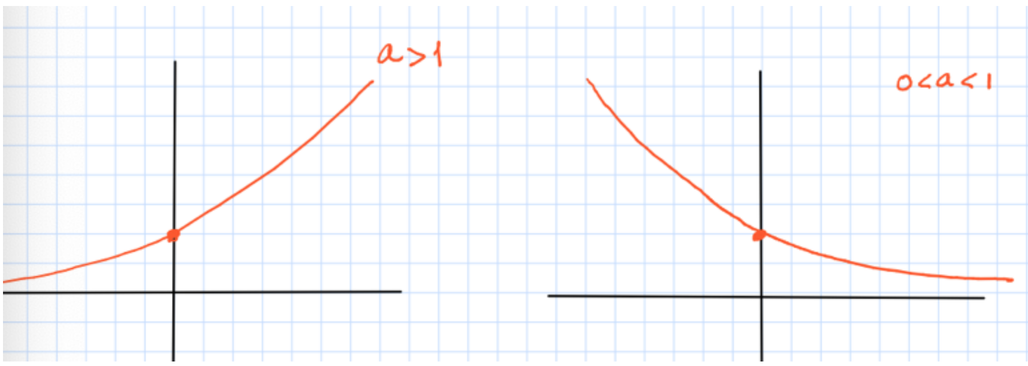


Vimos anteriormente que si algún límite en x = a da ±∞ entonces hay una ***asíntota vertical*** en x=a. Ahora a partir del límite en el infinito vamos a decir que si al calcular el limite en ±∞ obtengo un número "b" entonces en y=b hay una ***asíntota horizontal*** a derecha, izquierda o en ambas direcciones.

Por ejemplo, en el primer ejemplo hay una asíntota horizontal en y = 3 a derecha pero no hay AH a izquierda. En el segundo, directamente podemos decir que hay una AH en y = 1.

Casos particulares:

1)



Siguiendo con los límites en el infinito, veamos el caso de una función exponencial

Si a > 1 entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
Si a < 1 entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ mientras que $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x \to 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

Límites indeterminados

Caso 0/0:

Hay varias maneras de "salvar" la indeterminación

- Una es **factorear** el numerador y el denominador para poder simplificar el factor que genera la indeterminación.
- Si no, pueden **dividir al numerador y al denominador** del límite, **por el binomio "que lo hace cero"**
- Hay veces que lo más fácil es **multiplicar al numerador y al denominador por "el conjugado"** de alguno de ellos (generalmente por el conjugado del que tenga una resta).

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} indeterminado$

Vamos a factorear el numerador: $\Rightarrow$ **5º Caso: "Diferencia de Cuadrados"** $\Rightarrow$ $\text{límite}_{X \to 1} \frac{X^2-1}{X-1} = \text{límite}_{X \to 1} \frac{(X+1)\cdot(X-1)}{X-1}$

Simplificamos $\Rightarrow$ $\text{límite}_{X \to 1} \frac{(X+1)\cdot\cancel{(X-1)}}{\cancel{X-1}} = \text{límite}_{X \to 1} (X+1) = \boxed{2}$

Como ya se fue la indeterminación: Reemplazo la "X" por 1

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{x+7}}{2-x} = \frac{0}{0} indeterminado$

--> multipliquemos a ambos por el conjugado del numerador

$$\text{límite}_{X \to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} = \text{límite}_{X \to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}}$$

Fíjense que multiplicamos, arriba y abajo por **lo mismo**, de otra manera no se hubiera mantenido la igualdad.

$\Rightarrow$ Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador, me queda:

$$\text{límite}_{X \to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}} = \text{límite}_{X \to 2} \frac{(3)^2-(\sqrt{X+7})^2}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})}$$

$$\Rightarrow \text{límite}_{X \to 2} \frac{9-(X+7)}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X \to 2} \frac{9-X-7}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X \to 2} \frac{\cancel{2-X}}{\cancel{(2-X)}\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X \to 2} \frac{1}{3+\sqrt{X+7}} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Simplifico el factor que me genera la indeterminación.

Observación: El conjugado de $\sqrt{n}+a$ es $\sqrt{n}-a$ y viceversa.

Ejercicio: Calcular: $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

<u>Caso ∞/∞:</u> Para salvar la indeterminación saco factor común el de mayor grado en el numerador y denominador, y simplifico.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+1}{2x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\,indeterminado$

$$\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\frac{3X^2+2X+1}{2X^2-1}=\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\frac{\frac{3X^2+2X+1}{X^2}}{\frac{2X^2-1}{X^2}}=\xrightarrow[\text{del "X}^2\text{"}]{\text{Distributiva}}\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\frac{\frac{3X^2}{X^2}+\frac{2X}{X^2}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2X^2}{X^2}-\frac{1}{X^2}}=\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\frac{\frac{3\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}+\frac{2\cancel{X}}{X^{\cancel{2}}}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}-\frac{1}{X^2}}$$

Simplifico...

Y por último reemplazo las "X"

$$\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\frac{3+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}}=\frac{3+0+0}{2-0}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Y llegué al resultado final del límite.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3-4}=\frac{\infty}{\infty}\,indeterminado$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3.\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^3.\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^3}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Tener en cuenta que el resto de las fracciones tienden a 0

Asíntotas

<u>Asíntota horizontal:</u> Calculo los límites en el infinito de la función

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\mathrm{b}\to\quad AH: y=b$

Si no diera un número (±∞ o ∄), no tiene AH.

<u>Asíntota vertical:</u> Busco los puntos donde la función no está definida. Para cada uno de esos valores "a" calculo los límites laterales y si dan ±∞ entonces x = a es AV

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty\to\quad AV: x=a$

Continuidad

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio y para que sea continua en un punto se tienen que cumplir tres condiciones:

- Tiene que **existir el límite** de la función en ese punto
- Tiene que **existir la función** en ese punto
- El Valor de la función en el punto y el del límite, en ese punto: **DEBEN SER IGUALES**

Cuándo una función no cumple una de estas tres condiciones (cualquiera de ellas), la función es discontinua en el punto que no cumple la condición.

☆ **Clasificación de las discontinuidades:**

☆ Discontinuidades evitables:

- **Existe el límite y no está definida la función** en el punto → ①
- **Existen el límite y está definida la función, pero ambos valores NO COINCIDEN** → ②

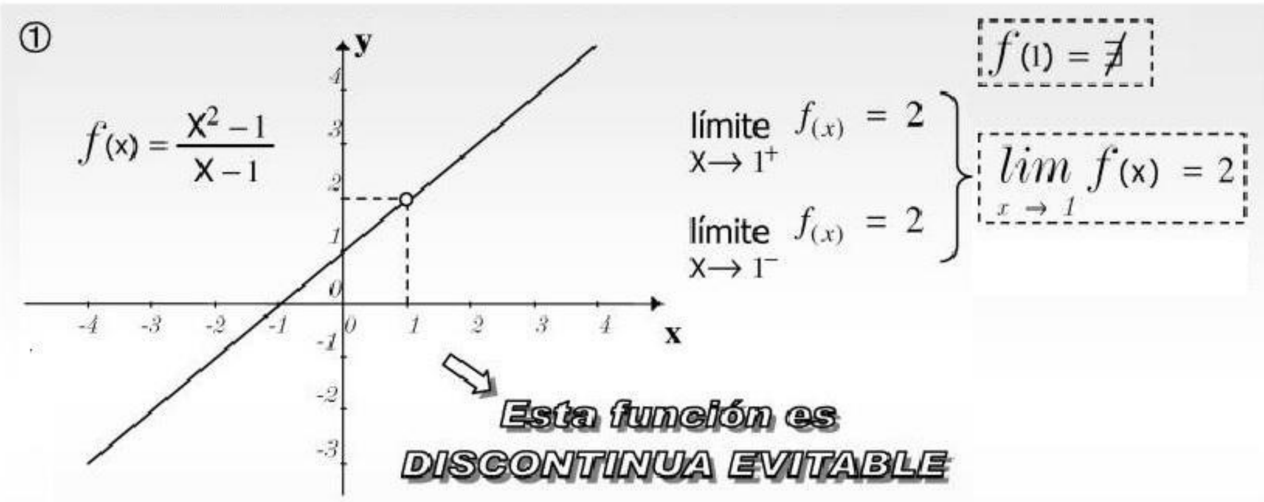
☆ Discontinuidades **NO** evitables

- **La función está definida, pero no existe el límite** (los límites laterales son distintos) → ③
- **La función no está definida, ni existe el límite** en el punto (o el límite es infinito) → ④

A su vez las funciones discontinuas No evitables se pueden clasificar en:

- Discontinuas no evitables de salto finito.
- Discontinuas no evitables de salto infinito.

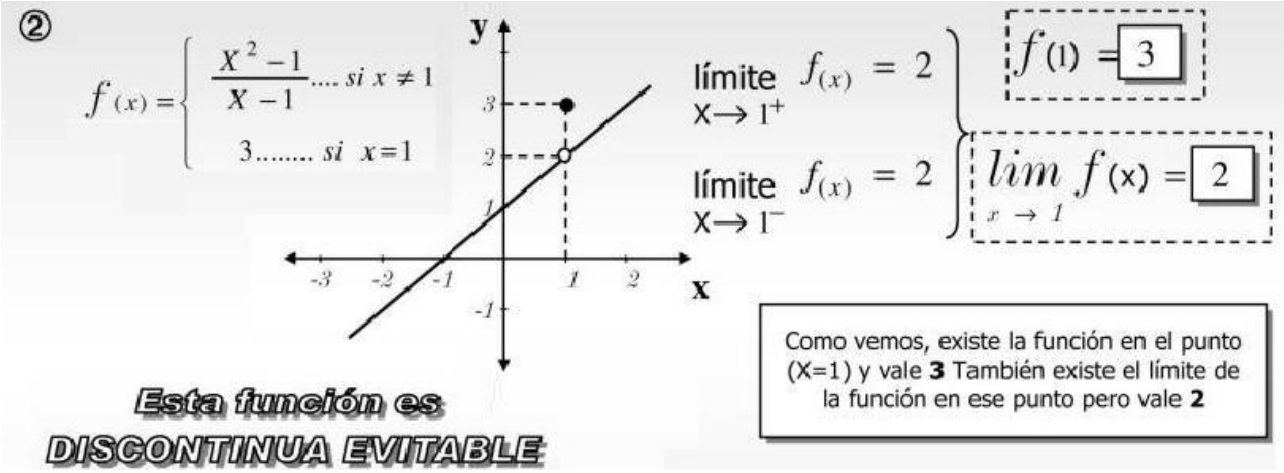
Veamos ahora un ejemplo de cada tipo de discontinuidad en un gráfico:



- En este ejemplo se ve claramente que la función no está definida en x = 1, ya que con ese valor el denominador es 0, por lo tanto el punto no es parte de su dominio.

- El límite **sí** existe en x = 1, ya que los límites laterales existen y son iguales.

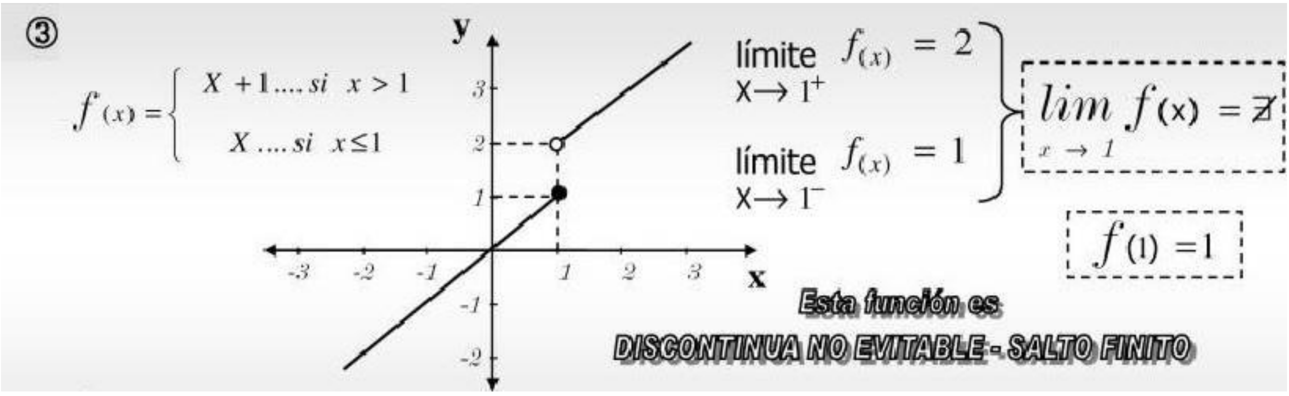
Por lo tanto la discontinuidad es EVITABLE.



- La función está definida en x = 1, y por definición de f(x), f(1) vale 3.

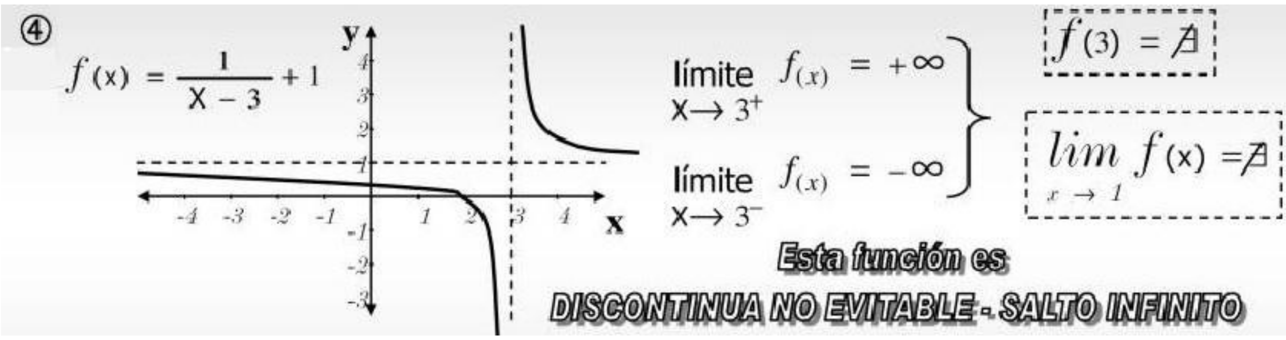
- El límite **sí** existe en x = 1, ya que los límites laterales existen y son iguales. Sin embargo la función es discontinua porque los valores del límite y la función en x = 1 **no** coinciden.

Por lo tanto la discontinuidad es <u>EVITABLE.</u>



- La función está definida en x = 1, y por definición, f(1) = 3.

- El límite **no** existe en x = 1, ya que los límites laterales son distintos. Por lo tanto la discontinuidad es <u>NO EVITABLE</u>. Salto **finito**



- La función no está definida en x = 3, ya que el punto no es parte del dominio de f(x).

- El límite **no** existe en x = 3.
  Por lo tanto la discontinuidad es <u>NO EVITABLE</u>. Salto **infinito**