925

PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

180 235 **1° Parcial - 29 de abril de 2019** 180

#1						#2					#3			#4			#5				
a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B+	B	B	B	B=	B	B+	B	R

NOMBRE: Fernández José Luis MATRÍCULA: 41690991

Ejercicio #1 (1.8 puntos)

a) Sean X e Y dos variables aleatorias cualesquiera, **obtenga** la expresión de $E[X+Y]$.

b) Sean X e Y dos variables aleatorias cualesquiera, **obtenga** la expresión de σ^2_{X+Y}.

c) Para el caso en que X e Y sean no-correlacionadas, **halle** σ^2_{X+Y}.

d) Si las VAs X e Y del inciso c) son, además, Gaussianas, entonces son ...independientes... **Demuéstrelo.**

e) Si 2 VAs X e Y son no-correlacionadas entonces ...$E[X.Y] = E[X]\,E[Y]$.....

f) Sean X e Y dos variables aleatorias. Si $f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_y(y)$ entonces X e Y son...independientes.

Ejercicio #2 (2.4 puntos)

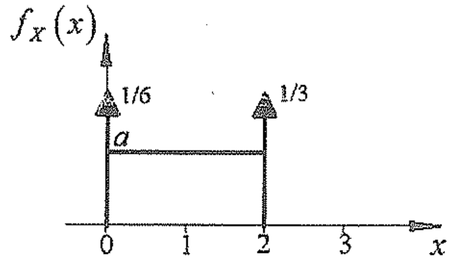


Figura A.

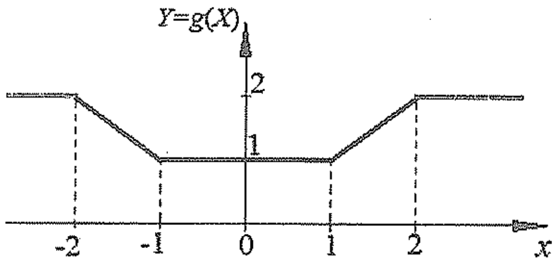


Figura B.

a) **Halle** el valor de la constante *"a"* e **indique** qué tipo de V.A. es X. **Justifique.**

b) **Halle** $E[X]$ y σ^2_X.

c) **Calcule** y **grafique** la función distribución acumulada de probabilidad $F_X(x)$.

d) **Halle** las siguientes probabilidades: $P(X=0)$, $P(-1 \le X < 1)$, $P(X \ge 1)$.

e) Si se define una nueva V.A. $Y = g(X)$ como la que se muestre en la Figura B; **halle** y **grafique** la $f_Y(y)$ para la nueva variable.

Ejercicio #3 (1.5 puntos)

Un grupo de clientes se encargan de evaluar los diseños preliminares de varios productos. El porcentaje de productos que recibieron buenas evaluaciones preliminares es del 95% para aquellos productos que tuvieron mayor éxito en el mercado, 60% para los que obtuvieron éxito moderado y del 10% para aquellos productos con escaso éxito. El 40% de los productos han tenido mucho éxito, el 35% un éxito moderado y el 25% una baja aceptación.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una buena evaluación preliminar por este grupo de clientes?
b) Si un nuevo diseño que fue evaluado preliminarmente por este grupo de clientes es lanzado al mercado, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?
c) Si un producto no obtiene una buena evaluación preliminar, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Ejercicio #4 (1.8 puntos)

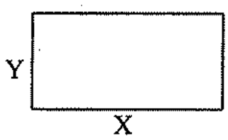
Sea X una V.A. gaussiana.

a) Si se sabe que $\mathrm{P}(X \le 0{,}9) = 0{,}1587$ y $\mathrm{P}(X \le 1) = 0{,}5$. **Determine** μ_X y σ_X.
b) Suponga ahora que la V.A. X está asociada al diámetro de un eje fabricado en una determinada fábrica, siendo μ_X el valor esperado para el diámetro del eje (el valor requerido), expresado en centímetros. Si se sabe que el eje debe descartarse si su valor se aleja en más de *0,15cm* de su valor esperado. ¿Cuál es la probabilidad de que un eje fabricado en esta fábrica deba ser descartado?
c) Si ahora se desea mejorar el proceso de fabricación. Con la tolerancia especificada en el inciso anterior, **halle** el rango de valores para σ_X de modo que más del *90%* de los ejes fabricados cumplan los requerimientos.

Ejercicio #5 (2.5 puntos)

Los lados del rectángulo de la figura son dos variables aleatorias X e Y cuya *f.d.p.* conjunta es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{28}(x^2 + y) & , \quad 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \textit{otro valor} \end{cases}$$



a) **Encuentre** las *f.d.p* marginales de X y de Y. **Determine** si son variables aleatorias independientes.
b) **Encuentre** la $E[A]$, donde A es el área del rectángulo.
c) **Encuentre** la función de densidad de probabilidad condicional $f(y/x)$.
d) **Encuentre** la $E[Z^2]$, donde Z es la diagonal del rectángulo.
e) **Encuentre** las siguientes probabilidades:
  e_1) La probabilidad de que la altura $Y \le 1$, habiendo sido la base $X > 1$.
  e_2) La probabilidad de que el rectángulo en particular sea un cuadrado.

---

1 a -

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (X+Y)\, f_{XY}(X,Y)\, d x\, y$$

Aplico distributiva y separo la integralel

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X\, f_{XY}(X,Y)\, dy\, dx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Y\, f_{XY}(X,Y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(X,Y)\, dy}_{= f_X(X)}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} Y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(X,Y)\, dx}_{= f_Y(Y)}\, dY$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X\, f_X(X)\, dX}_{E[X]} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} Y\, f_Y(Y)\, dY}_{E[Y]} = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

M

Notas:

b-

$$\sigma_{x+y}^2 = E\left[(X+Y-\bar X-\bar Y)^2\right]$$

$$= E\left[X^2 + YX - X\bar X - X\bar Y + YX + Y^2 - Y\bar X - Y\bar Y - X\bar X - Y\bar X + \bar X^2 + \bar X\bar Y - \bar Y X - Y\bar Y + \bar Y\bar X + \bar Y^2\right]$$

$$= \overbrace{E\left[X^2 - 2X\bar X + \bar X^2\right]}^{\sigma_x^2} + \overbrace{E\left[Y^2 - 2Y\bar Y + \bar Y^2\right]}^{\sigma_y^2} + 2E[YX] + 2E[\bar X\bar Y] - 2E[\bar Y X] - 2E[X\bar Y]$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\overline{YX} \cancel{+ 2\bar X\bar Y} \cancel{- 2\bar Y\bar X} - 2\bar Y\bar X$$

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\overline{YX} - 2\bar Y\bar X$$

B

c- Uso la expresión del anterior inciso

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\overline{XY} - 2\bar X\bar Y$$

Si son no correlacionadas

$$\overline{XY} = \bar X\,\bar Y$$

B

$$\Rightarrow \sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

B

Fernández José Luis | Hoja: | Fecha:

d_

$$f_{XY}(x,y)=\frac{e^{\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}-\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}+\frac{2\rho(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_y\sigma_x}\right]\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

~~Si so~~ Si X e Y son no-correlacionadas $\Rightarrow \rho=0$

$$\Rightarrow f_{XY}(x,y)=\frac{e^{\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right]}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\underbrace{\frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}}_{f_X(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}}_{f_Y(x)}$$

Si $f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ son independientes.

pien

2 –

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\frac{1}{6}\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx + \int_{0^+}^{2^-} a\,dx + \frac{1}{3}\int_{2^-}^{2^+} \delta(x-2)\,dx = 1$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 2a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

p

b –

$$E[X] = \frac{1}{6}\int_{0^-}^{0^+} \cancelto{0}{x\,\delta(x)}\,dx + \frac{1}{4}\int_{0^+}^{2^-} x\,dx + \frac{1}{3}\int_{2^-}^{2^+} x\,\delta(x-2)\,dx$$

$$E[X] = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \quad \checkmark$$

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-k)\,dx = f(k)$$ si k pertenece al intervalo de integración.

c –

$$E[X^2] = \frac{1}{6}\int_{0^-}^{0^+} \cancelto{0}{x^2\,\delta(x)}\,dx + \frac{1}{4}\int_{0^+}^{2^-} x^2\,dx + \frac{1}{3}\int_{2^-}^{2^+} x^2\,\delta(x-2)\,dx$$

$$E[X^2] = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \quad \checkmark$$

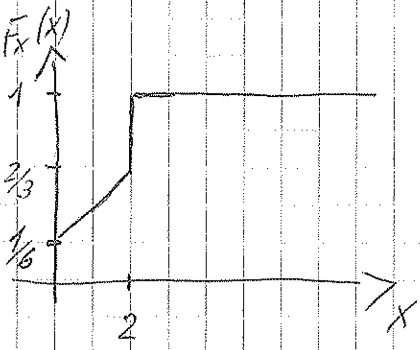
$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \frac{23}{36} \quad \checkmark$$

c_

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{x}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{4} = \frac{2}{3}$$



d_

$$P(X=0) = 1/6$$

$$P(-1 \leq X < 1) = F_X(1) - \cancel{F_X(-1)}^{=0} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - F_X(1) = \frac{7}{12}$$

e

e- Las deltas:

I - $\frac{1}{6}\delta(x)$ pasa con el mismo peso a $Y = 1$

II - $\frac{1}{3}\delta(x-2)$ pasa con el mismo peso a $Y = 2$

En $Y = 1$

$$f_Y(Y) = P_1\,\delta(Y-1) + \text{I}$$

$$\Rightarrow f_Y(Y) = \left(P_1 + \frac{1}{6}\right)\delta(Y-1) = \frac{5}{12}\,\delta(Y-1)$$

Con $P_1 = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}$

En $Y = 2$

$$f_Y(Y) = P_2\,\delta(Y-2) + \text{II}$$

$$\Rightarrow f_Y(Y) = \left(P_2 + \frac{1}{3}\right)\delta(Y-2) = \frac{1}{3}\,\delta(Y-2)$$

Con $P_2 = \int_{2^+}^{\infty} f_X(X)\,dx = 0$

En $1 < Y < 2$

$$Y = X$$

$$Y' = 1$$

$$f_Y(Y) = \frac{f_X(x^{-1})}{|dY/dx|}$$

$$f_X(x^{-1}) = \frac{1}{4}$$

$$f_Y(Y) = \frac{1}{4}$$

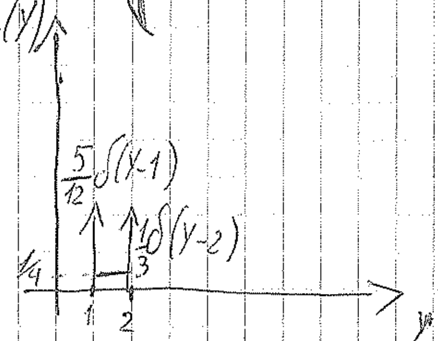
Fernández José Luis

4/6

Hoja:

Fecha:

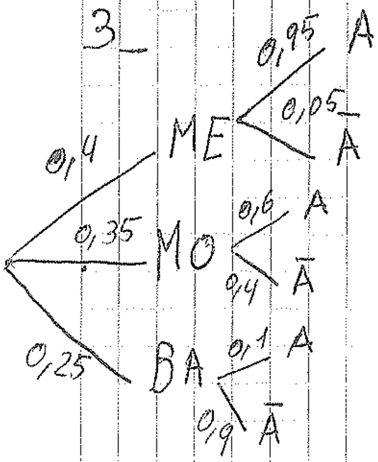
$\cancel{f_Y(y) = \frac{5}{12}\delta(y-1) + P}$



$$f_Y(y) = \frac{5}{12}\delta(y-1) + \frac{1}{4}P_1\left(y-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}\delta(y-2)$$

bien

3_



a_

$$P(A) = P(ME)\,P(A/ME) + P(MO)\,P(A/MO) + P(BA)\,P(A/BA)$$

$$P(A) = 0,615$$

b_

$$P(ME/A) = \frac{P(A/ME)\;P(ME)}{P(A)} = 0,617886$$

c_

$$P(ME/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}/ME)\;P(ME)}{P(\bar{A})} = 0,519$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,385$$

0,052

[illegible] en cuenta

Notas:

4 –

a – $P(X \leq 0{,}9) = 0{,}1587$

$P(X \leq 1) = 0{,}5$

$\frac{1 - \mu_x}{\sigma_x} = 0$ Como se que una gaussiana tiene $P(\mu_x) = 0{,}5$

$\mu_x = 1$

$\frac{0{,}9 - 1}{\sigma_x} = -1$

$-0{,}1 = -\sigma_x \Rightarrow \sigma_x = 0{,}1$

b –

Sirve si $1\,cm \pm 0{,}15\,cm$

Sirve si $0{,}85 \leq X \leq 1{,}15 = P(S)$

$\Rightarrow P(\bar{S}) = 1 - P(S)$

$P(S) = 0{,}9332 - 0{,}0668 = 0{,}8664 = P(X \leq 1{,}15) - P(X \leq 0{,}85)$

$\frac{0{,}85 - 1}{0{,}1} = -1{,}5$

$\Rightarrow \underbrace{P(\bar{S}) = 0{,}1336}_{\text{Probabilidad de que se descarte}}$

$\frac{1{,}15 - 1}{0{,}1} = 1{,}5$

5/6

Fernández José Luis | Hoja: | Fecha:

C_

$\cancel{\frac{0,85-1}{\sigma_x} < X < 1,17}$

$\sigma_x \,/\, P(S) \geq 0,9$

~~Es una gaussiana normalizada de para~~ σ

$$\frac{1,15-1}{\sigma_x} > 1,65$$

$$\Rightarrow \sigma_x \leq \frac{1}{11}$$

De 0 a 1,65 el area de una gaussiana normalizada es de $\cong 0,45$ y como es simetrica respecto a su valor medio (0), de $-1,65$ a $1,65$ será aproximadamente 0,9, por eso utilizo 1,65 para calcular σ_x.

5_

a_

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{28}(x^2+y)\,dy = \frac{3}{28}(2x^2+2)$$

falta $0 \leq x \leq 2$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{28}(x^2+y)\,dx = \frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}+2y\right)$$

$0 \leq y \leq 2$

falta

Notas:

Si $f_{XY}(X,Y) = f_X(X) \cdot f_Y(Y)$

$\Rightarrow$ son independientes

$$f_X(X) \cdot f_Y(Y) = \left(\frac{3}{28}\right)^2 \left(2X^2+2\right)\left(\frac{8}{3}+2Y\right)$$

$$= \left(\frac{3}{28}\right)^2 \left(\frac{16}{3}X^2 + 4X^2Y + \frac{16}{3} + 4Y\right) \neq f_{XY}(X,Y)$$

$\Rightarrow$ No son independientes.

b- $$E[A] = E[XY] = \int_0^2 X \int_0^2 Y \frac{3}{28}\left(X^2+Y\right) dY \, dX$$

$$= \frac{3}{28}\int_0^2 X\left(\frac{8}{3}+2X^2\right) dX = \frac{10}{7}$$

c- $$f(Y/X) = \frac{f_{XY}(X,Y)}{f_X(X)}$$

Falta

$$f(Y/X) = \frac{3}{28}\left(X^2+Y\right) \Big/ \frac{3}{28}\left(2X^2+2\right) = \left(X^2+Y\right) \big/ \left(2X^2+2\right)$$

$0 \le x \le 2$
$0 \le y \le 2$

d- $E[Z^2]$ $\quad Z^2 = X^2 + Y^2$ $\quad$ ~~E[...]~~

$$E[Z^2] = \frac{3}{28}\int_0^2 dX \int_0^2 \left(X^2+Y^2\right)\left(X^2+Y\right) dY$$

Fernández José Luis

Hoja:

Fecha:

$$E[Z^2] = \frac{3}{28}\int_0^2 dx \int_0^2 (X^4 + X^2Y + Y^2X^2 + Y^3)\,dy$$

$$E[Z^2] = \frac{3}{28}\int_0^2 \left(2X^4 + X^2(2) + \frac{8}{3}X^2 + 4\right)dX = \frac{374}{105}$$

e-

e1-

$$P\left(Y \le 1 \,/\, X > 1\right) = \frac{\int_1^2 dx \int_0^1 \frac{3}{28}(X^2+Y)\,dY}{\frac{3}{28}\int_1^2 (2X^2+2)\,dx} = \frac{\int_1^2 \left(X^2+\frac{1}{2}\right)dx}{20/3} = \frac{17/6}{20/3}$$

$$P\left(Y \le 1 \,/\, X > 1\right) = \frac{17}{40}$$

e2-

$$\cancel{P\left(Y / X=Y\right) = f\left(Y / X=Y\right)}$$

$$F\left(Y / X=Y\right) = \frac{\int_{-\infty}^{Y} f(x,u)\,du}{f_X(X)}$$

No resuelve

Notas: