208

Ej. 1	Ej. 2			Ej. 3								Ej. 4			Ej. 5		Ej. 6
	a	b	c	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	c	a	b	
14	6	6	6	2	4	2	2	4	2	2	2	6	3	8	6	7	4
14	6	6	6	2	4	2	2	4	2	2	2	6	6	8	8	8	12

Primer Parcial Estadística Básica 21-10-2023

Apellido y Nombres: Szapowalo Joan .... **Legajo:** 18302 ..... 86/100

1. La ciudad A es afectada por 2 tipos de contaminación: aire y agua, mientras que la ciudad B sólo presenta contaminación del aire. Se ha puesto en marcha un plan para controlar estas fuentes de contaminación.
Se estima que la probabilidad de que la contaminación del aire sea controlada en la ciudad A, es el cuádruple de dicha probabilidad en la ciudad B, y que, si la contaminación del aire es controlada en la ciudad B, la contaminación del aire en la ciudad A será controlada con probabilidad igual a 0,9. En la ciudad A, el control de la contaminación del agua es independiente del control de la contaminación del aire. Además, la probabilidad de que la contaminación sea controlada por ambas fuentes en la ciudad A, es de 0,32 y controlar la contaminación del agua en la ciudad A es sólo la mitad de probable que hacerlo con la contaminación del aire en esa misma ciudad. Determinar la probabilidad de que la contaminación del aire sea controlada en ambas ciudades.

2. Una importante empresa de fabricación de tubos sin costura se encuentra junto a su equipo de análisis de fallas tratando de elaborar un manual de uso para sus empleados. A partir de la experiencia del equipo, se llega a la conclusión de que el proceso de fabricación produce tubos con 2 fallas en promedio por cada 50 metros. En esta situación:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 fallas en 50 metros de tubo?
   b) Si se evalúan 100 metros de tubo ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos 4 fallas?
   c) ¿Cuántas fallas en promedio debería haber para que la probabilidad de que en 25 metros no haya fallas sea 0,9?

3. En una ciudad se analiza la temperatura máxima diaria durante los meses de enero y febrero, a partir de los datos de frecuencias acumuladas indicados:

Rango de temperaturas	[26;28)	[28;30)	[30;32)	[32;34)	[34;36)	[36;38)	[38;40)
Frec. acumulada	6	20	39	47	53	58	59

   a) Definir y clasificar la variable bajo estudio.
   b) Obtener la tabla de frecuencias absolutas y realizar el gráfico correspondiente.
   c) ¿Cuál es la temperatura máxima promedio en la ciudad en enero y febrero? Justificar.
   d) ¿Cuál es la temperatura que se supera el 50% de los días? Justificar
   e) ¿Cuál es la temperatura máxima más frecuente en esos meses? Calcular y relacionar con los conceptos estudiados.
   f) ¿Resulta alguna de las medidas previamente calculadas una medida representativa? Justificar
   g) ¿Qué temperatura no se supera el 25% de los días?
   h) ¿Cuál es la mayor temperatura máxima que se alcanzará el 80% de los días? ¿A qué medida de posición corresponde este valor?

4. El moldeo por inyección de plásticos es el proceso de fundir gránulos de plástico (polímeros termoestables o termoplásticos) que, cuando están lo suficientemente fundidos, se inyectan a presión en la cavidad de un molde. El tiempo, en segundos, que tarda en fundir y plastificar el plástico por medio de calor y fricción para luego inyectarlo es una variable aleatoria asociada a un proceso que presenta la siguiente fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{7} \, si \; 3 < x < 4 \\ \frac{1}{2} \, si \; 4 < x < 5 \\ 0 \; x \notin (3,5) \end{cases}$$

El proceso se considera aceptable cuando la variable es de al menos 3,6 segundos y muy satisfactorio cuando el valor de la variable supera 4,5 segundos.
   a) Determine cuál es el valor esperado de la variable bajo estudio e interprete.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un proceso sea aceptable?
   c) Si se realizan tres procesos independientes de la variable, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea muy satisfactoria?

5. El motor de un automóvil consta de 300 componentes individuales. Cada uno de estos es entregado independientemente por un proveedor diferente. Los 300 proveedores garantizan que la probabilidad de entregar un componente defectuoso es a lo sumo, 0,01. Se considera aceptable el motor solo cuando tiene a lo sumo 5 componentes defectuosos.
   a) Calcular la probabilidad de que el motor sea aceptable.
   b) ¿Qué nivel de calidad debe exigirse a cada proveedor (es decir, que probabilidad de componente defectuoso) si se desea que al menos el 95% de los motores armados sea aceptable?

6. Un ingeniero está diseñando un sistema de detección para un robot que identifica piezas defectuosas. El robot detecta correctamente una pieza defectuosa el 97% de las veces. Sin embargo, también indica defectuosa una pieza buena en un 5% de las ocasiones (falso positivo). Se estima que el 2% de las piezas producidas en la línea son defectuosas. Si el robot detecta una pieza como defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?

Szapowalo Joan
45923367 (1)

HOJA N°

FECHA

1) Ciudad A $\begin{cases} \nearrow \text{Cont. por aire} \\ \searrow \text{Cont. por agua} \end{cases}$

Ciudad B $\longrightarrow$ Cont. por aire

A_1: Controlar la contaminacion del aire en la ciudad A

A_2: Controlar la cont. del agua en la ciudad A

B: Controlar la cont. del aire en la ciudad B

$P(A_1) = 4P(B)$; $P(A_1/B) = 0,9$

A_1 y A_2 son sucesos independientes:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = 0,32$ (Prob. de controlar la cont. por ambas fuentes)

$P(A_2) = P(A_1)/2$

Determinar la prob. de que la cont. del aire sea controlada en ambas ciudades

$\begin{cases} P(A_1).P(A_2) = 0,32 \\ P(A_2) = P(A_1)/2 \end{cases} \Rightarrow P(A_1).\frac{P(A_1)}{2} = 0,32$

$P(A_1)^2 = 0,64 \Rightarrow \boxed{P(A_1) = 0,8}$ $\boxed{P(A_2) = 0,4}$

$P(B) = P(A_1)/4 \Rightarrow P(B) = \frac{0,8}{4} \Rightarrow \boxed{P(B) = 0,2}$

$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$

P(contaminacion del aire sea controlada en ambas ciud) = $P(A_1 \cap B)$

$P(A_1 \cap B) = P(A_1/B).P(B)$

$P(A_1 \cap B) = 0,9 . 0,2 = \boxed{0,18}$

Entonces, la probabilidad de que la contaminacion del aire sea controlada en ambas ciudades es $\boxed{0,18}$

NOTA

...de contaminación ... es el cuádruple de ... inación del aire

Szapowalo Joan
45923367 (2)

2 - Empresa de fabricacion de tubos sin costura
Se concluye que el proceso de fabricacion produce tubos con dos fallas en promedio cada 50 m

X: Cantidad de fallas en los tubos cada 50 m

$E(X) = 2. \quad X \sim P_o(\lambda)$

$\lambda = E(X) = 2 \Rightarrow X \sim P_o(2)$

a) Cual es la prob. de encontrar 3 fallas en 50 m del tubo?

$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!}$

$¿P(X=3)? = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \boxed{0,18044}$

0,18044 es la p. de encontrar 3 fallas en el tubo

b) Si se evaluan 100 m. de tubo, ¿cual es la prob. de encontrar al menos 4 fallas?

Y: Cantidad de fallas en 100 m. de tubo

$50\ m \longrightarrow \lambda = 2$

$100\ m \longrightarrow \lambda = 4$

$Y \sim P_o(4)$

a	b	c
6	6	6

$P(Y=k) = \frac{e^{-4} \cdot 4^k}{k!}$

$P(\text{encontrar al menos 4 fallas}) = P(Y \geq 4) = 1 - P(X < 4)$

$1 - P(Y < 4) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(X=3)] =$

$= 1 - \left[\frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!}\right] = 1 - 0,43347 = \boxed{0,56653}$

0,56653 es la p. de encontrar al menos 4 fallas en los 100 m de tubo

c) Cuantas fallas en p. deberia haber para que la prob de que en 25 m no haya fallas sea 0,9.

F: Cant fallas en 25 metros de tubo.

$F \sim Po(\lambda)$

$$P(F=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{0}}{0!} = 0,9$$

$$e^{-\lambda} = 0,9$$

$$\ln e^{-\lambda} = \ln(0,9)$$

$$-\lambda \ln e = \ln(0,9)$$

$$\lambda = -\ln(0,9)$$

$$\lambda = 0,1$$

0,1 fallas en promedio cada 25 m

0,2 fallas en promedio cada 50 m

Deberia haber 0,2 fallas en promedio cada 50 m, o lo que es igual, 1 falla promedio cada 250 metros

Szapowalo Joan
45923367 (3)

2 4 2 2 4 2 2 2

HOJA N° 20

FECHA

3 - Temp. max. diaria durante enero y feb

Rango de t.	[26,28)	[28,30)	[30,32)	[32,34)	[34,36)	[36,38)	[38,40)
Frec acum.	6	20	39	47	53	58	59
Frec absoluta	6	14	19	8	6	5	1

a) Variable bajo estudio

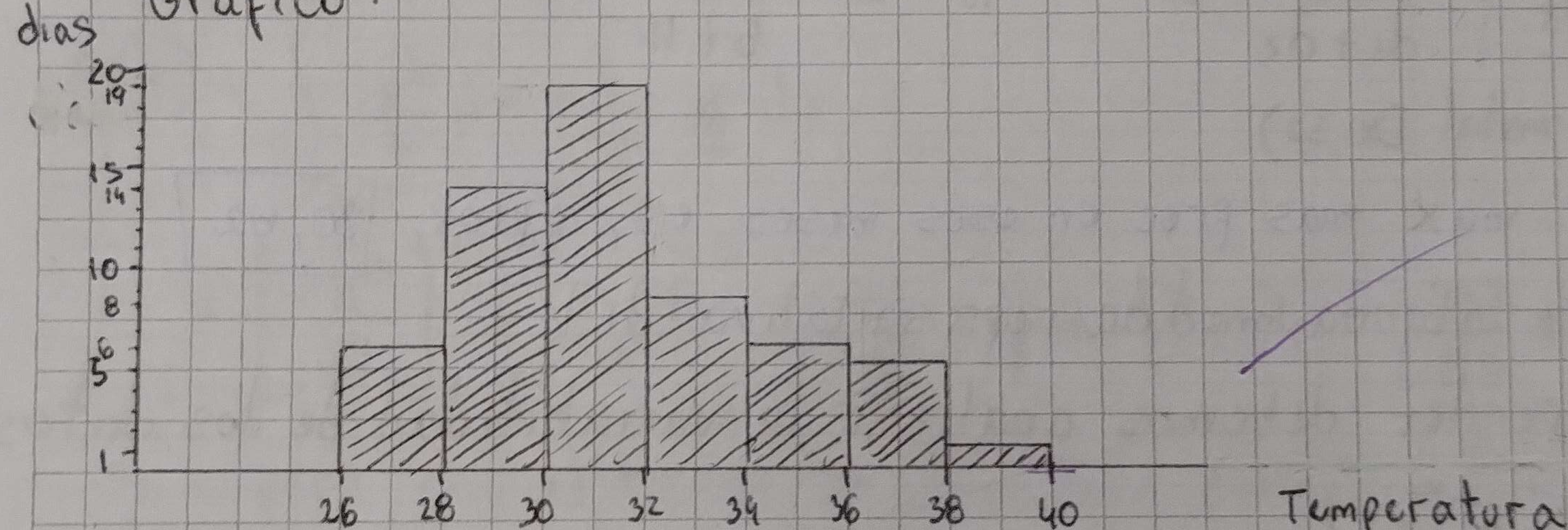
X: Temperatura máxima por dia durante los meses de enero y febrero en una ciudad

Se trata de una variable cuantitativa continua

b) Tabla de frec absolutas y grafico.

Tabla (arriba)

Grafico:



c) Temp maxima promedio?

Para ello calculemos la media aritmética, la cual nos indicará el promedio del total de datos

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_{mi} f_i / n$ (donde x_{mi} es el punto medio, (representante de cada subintervalo) $n = 59$ (total de dias)

$\bar{x} = (27.6 + 29.14 + 31.19 + 33.8 + 35.6 + 37.5 + 39.1)/59$

$\bar{x} = 31{,}44$

La temp max promedio es de 31,44

NOTA

d) Cual es la t que se supera el 50 % de los dias

Calculemos entonces la minima temperatura dentro del 50 % de los dias

$$P_{50} = L_{inf} + \frac{\frac{J \cdot n}{100} - F_{aa}}{f_i} \cdot a$$

$$P_{50} = 30 + \frac{\frac{50 \cdot 59}{100} - 20}{19} \cdot 2 = \boxed{31}$$ corresponde a la mediana

$\boxed{31°}$ es la temperatura que se supera el 50 % de los dias

e) T. maxima mas frec en esos meses.

Calculemos entonces la moda en el intervalo de clases, su valor representará la temperatura maxima más popular durante los meses de enero y feb.

$$M_o = L_{inf} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot a \qquad M_o = 30 + \frac{5}{5+11} \cdot 2 = 30,62$$

inf. modal $[30,32)$

La temp. max mas frec en esos meses es, aprox, $\boxed{30,62}$

f) Resulta alguna medida representativa?

Para responder debemos analizar la variabilidad de los datos

$$S^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i / n-1$$

$$S^2 = [(27-31,44)^2 \cdot 6 + (29-31,44)^2 14 + (31-31,44)^2 \cdot 19 + (33-31,44)^2 8 + (35-31,44)^2 \cdot 5 + (37-31,44)^2 5 + (39-31,44)^2 \cdot 1] / 58$$

$$S^2 = 8,837 \Rightarrow S = \sqrt{S^2} = 2,972$$

$$CV\% = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% = 9,45\% < 30\% \Rightarrow$$ una med. es representativa

Analisis de la forma

$$A_s = \frac{\bar{x} - m_e}{S} = \frac{31,44 - 31}{2,972} = 0,148$$

Como es levemente asimetrica, la mediana (31) es representativa

g) $P_{25} = Q_1 = 28 + \frac{\frac{1}{4} - 6}{14} \cdot 2 = 27,17$

27,17 no se supera el 25 % de los dias

h) al P_{80} corresponde

$$P_{80} = 34 + \frac{\left(\frac{80 \cdot 59}{100}\right) - 47}{6} \cdot 2$$

$P_{80} = 34.06$ no se superara el 80% de los dias

Szapowalo Joan
45923367 (4)

a b c
6 3 8

4 - tiempo (en seg) que tarda en fundir y plastificar el plast para luego inyectarlo es una v.a. asociada dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{7} & \text{si } 3 < x < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 4 < x < 5 \\ 0 & \text{si } x \notin (3,5) \end{cases}$$

a) ¿Cual es el valor esperado de la var.? e interprete.

Para v.a.c: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).x\,dx$

En este caso

$$E(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{3} 0 x\,dx}^{\,0} + \int_{3}^{4} \frac{x}{7} x\,dx + \int_{4}^{5} \frac{1}{2} x\,dx + \cancel{\int_{5}^{\infty} 0 x\,dx}^{\,0}$$

$$E(x) = \int_{3}^{4} \frac{x^2}{7} dx + \int_{4}^{5} \frac{x}{2} dx =$$

✓

$$= \left[\frac{x^3}{21}\right]_3^4 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_4^5 = \frac{64}{21} - \frac{9}{7} + \frac{25}{4} - 4 = \frac{337}{84} \cong 4{,}012$$

Se espera que el tiempo de duracion del proceso sea de $\boxed{4 \text{ segundos}}$ aproximadamente

b) ¿Cual es la prob. de que un proceso sea aceptable?

Es aceptable cuando la variable es de al menos 3,6 segundos. $(x > 3{,}6)$ pero si $x > 4{,}5$ el proceso es muy satisfactorio. Entonces, para que sea aceptable $(3{,}6 < x < 4{,}5)$

Mal interpretado. Se pide $P(x \geq 3{,}6)$

$$P(3{,}6 < x < 4{,}5) = \int_{3{,}6}^{4{,}5} f(x)\,dx$$

$$= \int_{3{,}6}^{4} \frac{x}{7} dx + \int_{4}^{4{,}5} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{x^2}{14}\right]_{3{,}6}^{4} + \left[\frac{x}{2}\right]_{4}^{4{,}5} =$$

$$= \frac{16}{14} - \frac{162}{175} + \frac{9}{4} - 2 = \frac{327}{700} \cong \boxed{0{,}4671}$$

coherente

NOTA

Prob de que el proceso sea aceptable = 0,4671

c) Si se realizan 3. ¿Cual es la prob. de que al menos una de ellas sea muy satisfactoria?

Para que un proceso sea muy satisf. $(X > 4,5)$

$$P(X > 4,5) = 1 - P(X < 4,5) = 1 - \int_{-\infty}^{4,5} f(x)\,dx$$

$$1 - \left[\int_3^4 \frac{x}{7}\,dx + \int_4^{4,5} \frac{1}{2}\,dx\right] = 1 - \left[\frac{x^2}{14}\right]_3^4 - \left[\frac{x}{2}\right]_4^{4,5}$$

$$= 1 - \frac{16}{14} + \frac{9}{14} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{1}{4}$$

Prob de que un suceso sea m. s = 0,25

Y: Cant de procesos satisfactorios de un total de 3 pruebas. $Y \sim B(3, 0.25)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{3}{0}(0,25)^0(0,75)^3 = 1 - 0,421875$$

$$\Rightarrow P(Y \geq 1) = 0,578125$$

Prob de que al menos un proceso sea m.s: 0,578125

45923367 (5) 6 HOJA N° 7

5- motor (300 componentes)
entregados por 300 proveedores
P. de entregar un comp defectuoso es, a lo sumo, 0,01
Se considera acep. el motor cuando tiene a lo
sumo 5 comp. defectuosos.

a) Prob. de que el motor sea aceptable ?

Por el teorema del limite central, la suma de variables aleatorias converge a una distribucion normal para un n tendiendo a infinito.
En este caso, n = 300 (cant de componentes) es muy grande. aproximemos binomial a normal.

X: Cantidad de componentes defectuosos en 300.

$E(X) = n.p = 300.(0,01) = 3$

$V(X) = n.p.(1-p) = 2,97$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim N(3, 2.97)$

Para que el motor sea aceptable $X \leq 5$

P(motor sea aceptable) = $P(X \leq 5)$

Hacemos una correccion por continuidad.

$P(X < 5,5)$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5,5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z < \frac{5,5-5}{\sqrt{2,97}}\right)$ 3 −3 0,9265

$= P(z < 0,29) = \boxed{0,6141}$ 1,45

P de que el motor sea aceptable = $\boxed{0,6141}$

b) Que nivel de cal debe exigirse a cada p. si se desea que al menos el 95% de los motores sea aceptable?

$P(\text{sea aceptable}) = 0,95$

$P(z < a) = 0,95$

$a = 1,65$

$$a = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \begin{cases} \frac{5,5-\mu}{\sigma} = 1,65 \\ \mu = n.p \\ \sigma^2 = n.p.(1-p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5,5-np}{\sqrt{np(1-p)}} = 1,65 \\ \mu = np \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} \end{cases}$$

$5,5 - np = 1,65\sqrt{np(1-p)}$

$(5,5-np)^2 = 1,65^2[np(1-p)]$

$5,5^2 - 2.5,5.np + (np)^2 = 1,65^2(np - np^2)$

$5,5^2 - 11np + (np)^2 = 1,65^2 np - 1,65 np^2$ 806,88

$5,5^2 - 3300p + 300^2p^2 = 816,75p - 495p^2$

$90495p^2 - 2483,25p + 30,25 = 0$

$\boxed{p = 0,01372}$ Arrastra dos de atrás

La prob. de que cada componente sea def debe ser 0,01372.

* Sé que está mal, la probabilidad debería ser menor que 0,01, para asegurar una mayor P. de que el motor sea aceptable, ya que a 0,01 para la prob de que cada pieza sea defectuosa le correspondía una P. de que el motor sea aceptable de 0,6141, pero no llegué a corregirlo

Correcto

Szapowalo Joan
45923367 (6)

HOJA Nº

FECHA

4

6 - P detectar pieza def = 0,97

P de eq = 0,05

P de def = 0,02

¿Si el robot detecta una pieza def. cual es la prob de que realmente lo sea?

A: El robot det. una pieza def ✓

D: la pieza es def

E: El robot se equivoca

¿P(D/A)? =

Por teorema de Bayes

$$P(D/A) = \frac{P(A/D) \cdot P(D)}{P(A)}$$ ✓

P(A/D) es la prob de detectar una pieza def sabiendo que es defectuosa.

Como el robot se equivoca el 5% de las veces, esta Prob (P(A/D)) vale 0,95. ✗ El robot se equivoca al detectar positivos como negativos

$$P(D/A) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}02}{0{,}97} = 0{,}019$$ ✗

Entonces

P(D/A) = 0,019