

# TPE-95874

June 22, 2019

## 1 Trabajo Práctico Especial - Señales y Sistemas (66.74)

*Martín Cura (95874) - Junio 2019*

```
[1]: import numpy as np
import scipy.signal as sp_signal
import scipy.fftpack as sp_fft
import scipy.io as sp_io
import scipy.ndimage as sc_ndimage
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.gridspec as gridspec
import matplotlib.cm as cm

[2]: # Parámetros
nu      = 108 # m/s      (velocidad de la plataforma)
f_s     = 50 # MHz       (frecuencia de muestreo en rango)
prf     = 125 # Hz       (pulse repetition frequency)
f_p     = 1300 # MHz     (frecuencia de la portadora)
T_rg    = 10 # us        (longitud del chirp emitido)
bw_rg   = 38 # MHz       (ancho de banda del chirp emitido)
lamb    = 0.23 # m       (longitud de onda)
r_0     = 7545 # m       (rango central)
eta_az = 0.107 # rad     (apertura angular de la antena en acimut)
```

### 1.1 Ejercicio 1

Tenemos un *chirp* cuya frecuencia aumenta de  $-BW_{rg}/2$  a  $BW_{rg}/2$  entre 0 y  $T = T_{rg}$ . Por la derivada dada sabemos que

$$f_{inst}(t) = 2k_1 t + k_2$$

y reemplazando obtenemos

$$f_{inst}(0) = k_2 = -BW_{rg}/2$$

y

$$f_{inst}(T_{rg}) = 2k_1 T_{rg} - BW_{rg}/2 = BW_{rg}/2 \implies k_1 = \frac{BW_{rg}}{2T_{rg}}$$

con lo que solo nos falta usar los valores provistos en el apéndice.

```
[3]: k_2 = -bw_rg / 2
k_1 = bw_rg / (2 * T_rg)
```

Con lo que tenemos:

Con lo que tenemos:  $k_1 = 1.9 \text{ MHz}^2$ ,  $k_2 = -19 \text{ MHz}$ ,  $T_{rg} = 10 \mu\text{s}$ .

## 1.2 Ejercicio 2

Generamos el dominio discreto donde existen las muestras:

```
[5]: t = np.linspace(0, T_rg, f_s * T_rg, endpoint=False)
t.shape
```

```
[5]: (500,)
```

Para calcular cada parte compleja del *chirp* aprovechamos la función en el paquete `scipy.signal`.

```
[6]: chirp_re = sp_signal.chirp(t, f0=-bw_rg/2, f1=bw_rg/2, t1=T_rg)
chirp_im = 1j * sp_signal.chirp(t, f0=-bw_rg/2, f1=bw_rg/2, t1=T_rg, phi=-90)
chirp = chirp_re + chirp_im
chirp_ph = lambda x: k_1 * x**2 + k_2 * x + phi_0
```

No hay condiciones sobre  $\phi_0$  por lo que tomaremos 0 como valor arbitrario:

```
[7]: phi_0 = 0
```

Graficamos:

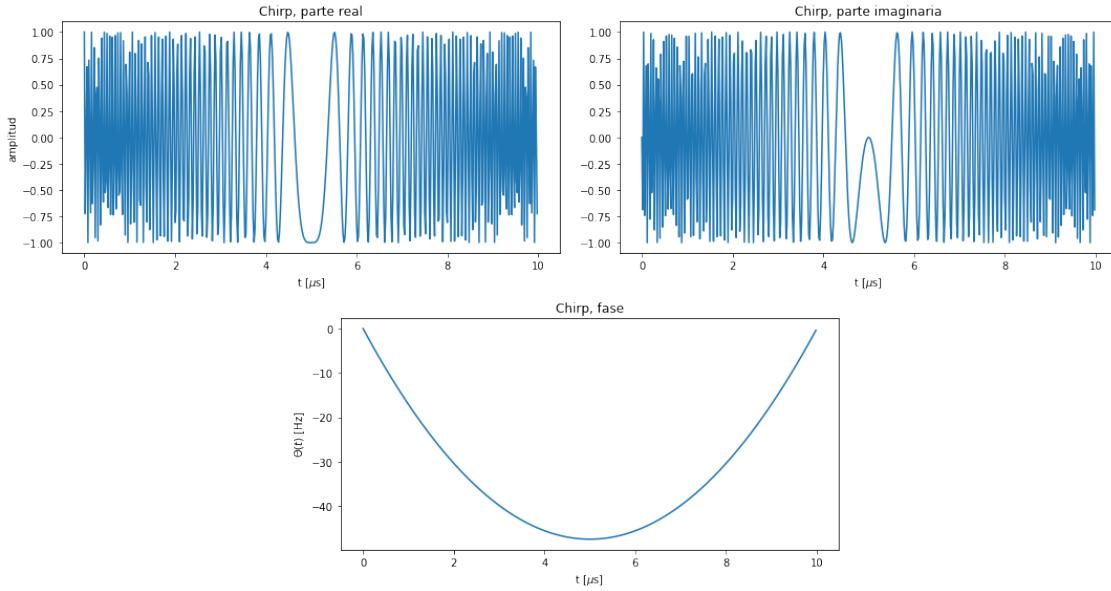
```
[8]: gs = gridspec.GridSpec(2, 4)
fig = plt.figure(figsize=(15,8))

plt.subplot(gs[0, :2], )
plt.plot(t, chirp_re)
plt.title("Chirp, parte real")
plt.xlabel("t [$\mu\text{s}]")
plt.ylabel("amplitud")

plt.subplot(gs[0, 2:])
plt.plot(t, np.imag(chirp_im))
plt.title("Chirp, parte imaginaria")
plt.xlabel("t [$\mu\text{s}]")

plt.subplot(gs[1, 1:3])
plt.plot(t, [chirp_ph(x) for x in t])
plt.title("Chirp, fase")
plt.xlabel("t [$\mu\text{s}]")
plt.ylabel("$\Theta(t)$ [Hz]")

fig.tight_layout()
```

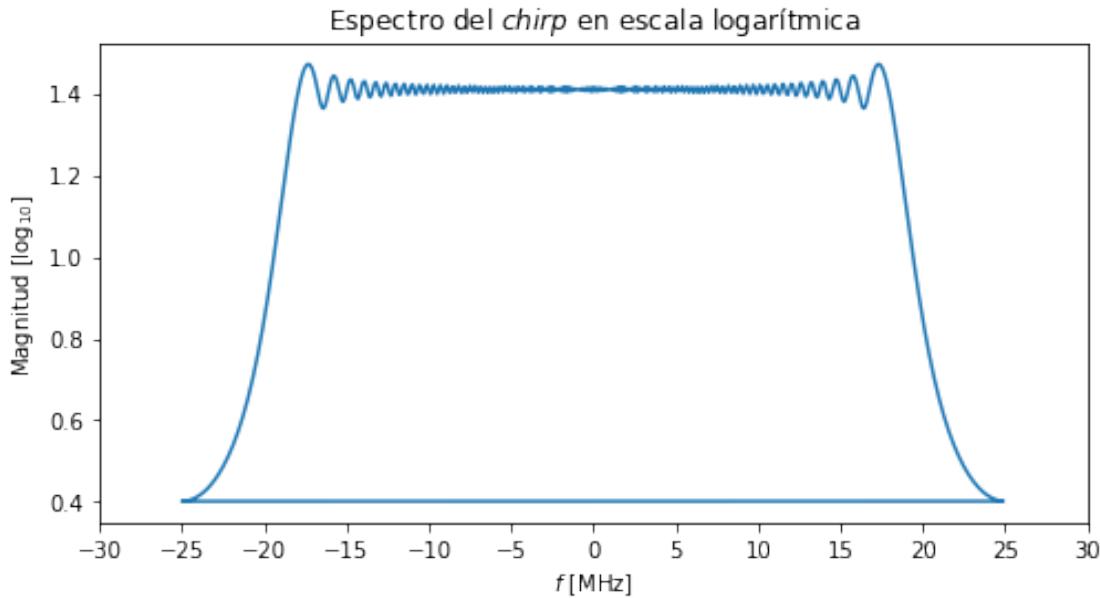


Para calcular la DFT usamos las funciones de `scipy.fftpack`:

```
[9]: spect = sp_fft.fft(chirp)
freqs = sp_fft.fftfreq(len(spect), 1 / f_s)
```

Obtenemos el módulo del espectro en escala logarítmica mediante  $\log_{10}|DFT|$  y lo graficamos:

```
[10]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(freqs, np.log10(np.abs(spect)))
plt.title("Espectro del $chirp$ en escala logarítmica")
plt.xticks(np.linspace(-30, 30, 60 // 5 + 1))
plt.xlabel("$f$ [MHz]")
plt.ylabel("Magnitud [log${}_{10}$]");
```



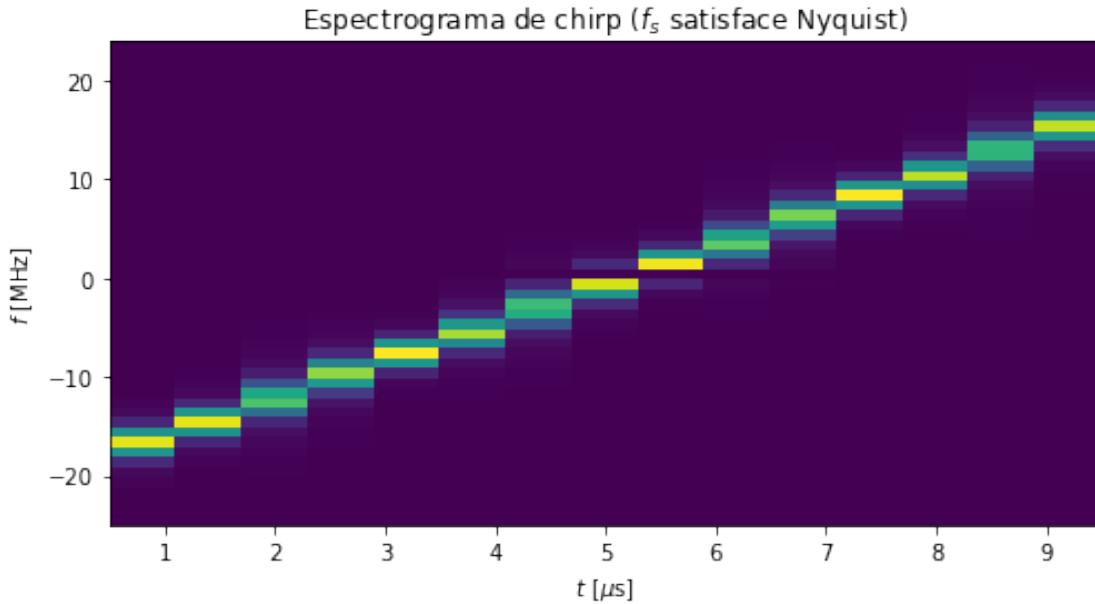
### 1.3 Ejercicio 3

Por el teorema de muestreo, sabemos que el límite de Nyquist, punto mínimo teórico donde empieza a haber aliasing, es  $\omega_s = 2\omega_M$  (donde  $\omega_M$  es la frecuencia de corte de la señal de banda limitada), con lo que aquí será:  $2\omega_M = BW_{rg} = 38 \text{ MHz}$ .

Para el espectrograma nuevamente aprovechamos lo provisto por `scipy.signal`. Primero lo hacemos con la señal ya generada, cuya frecuencia de muestreo es mayor al límite de Nyquist:

```
[11]: freqs, times, spect = sp_signal.spectrogram(chirp, fs=f_s, nperseg=50, nooverlap=20, window='boxcar', return_onesided=False)
freqs = sp_fft.fftshift(freqs)
spect = sp_fft.fftshift(spect, axes=0)
```

```
[12]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.pcolormesh(times, freqs, spect)
plt.title('Espectrograma de chirp ($f_s$ satisface Nyquist)')
plt.xlabel('$t$ [$\mu s$]')
plt.ylabel('$f$ [MHz]');
```

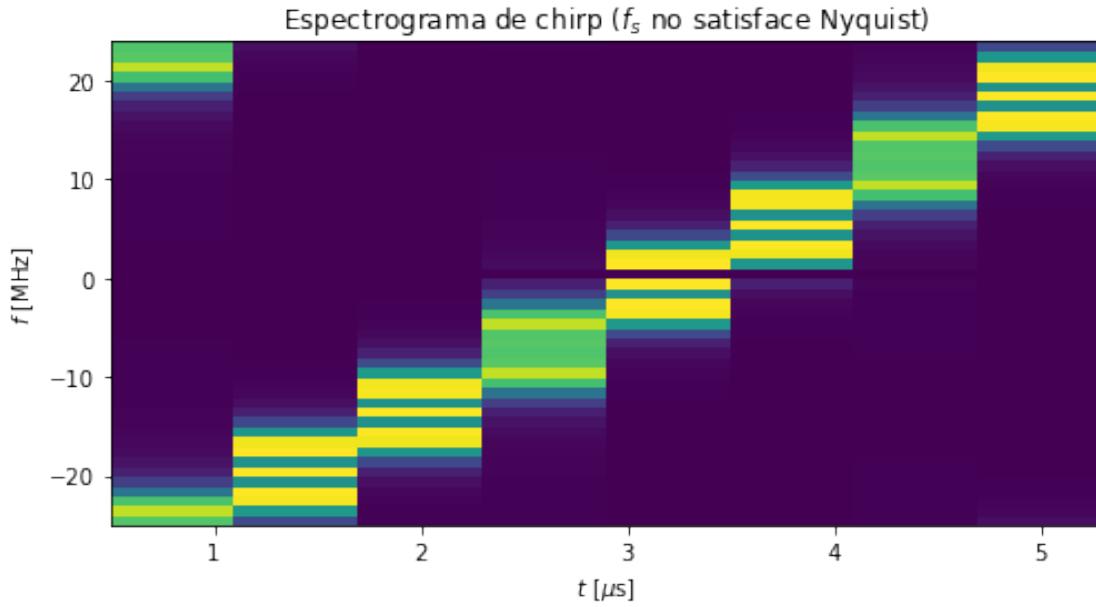


Ahora volvemos a crear un *chirp* pero esta vez con una frecuencia de muestreo menor al límite de Nyquist.

```
[13]: f_s_sN = 30 # frecuencia "subNyquist"
t_sN = np.linspace(0, T_rg, f_s_sN * T_rg, endpoint=False)
chirp_re_sN = sp_signal.chirp(t_sN, f0=-bw_rg/2, f1=bw_rg/2, t1=T_rg)
chirp_im_sN = 1j * sp_signal.chirp(t_sN, f0=-bw_rg/2, f1=bw_rg/2, t1=T_rg, phi=-90)
chirp_sN = chirp_re_sN + chirp_im_sN

[14]: freqs_sN, times_sN, spect_sN = sp_signal.spectrogram(chirp_sN, fs=f_s, nperseg=50, noverlap=20, window='boxcar', return_onesided=False)
freqs_sN = sp_fft.fftshift(freqs_sN)
spect_sN = sp_fft.fftshift(spect_sN, axes=0)

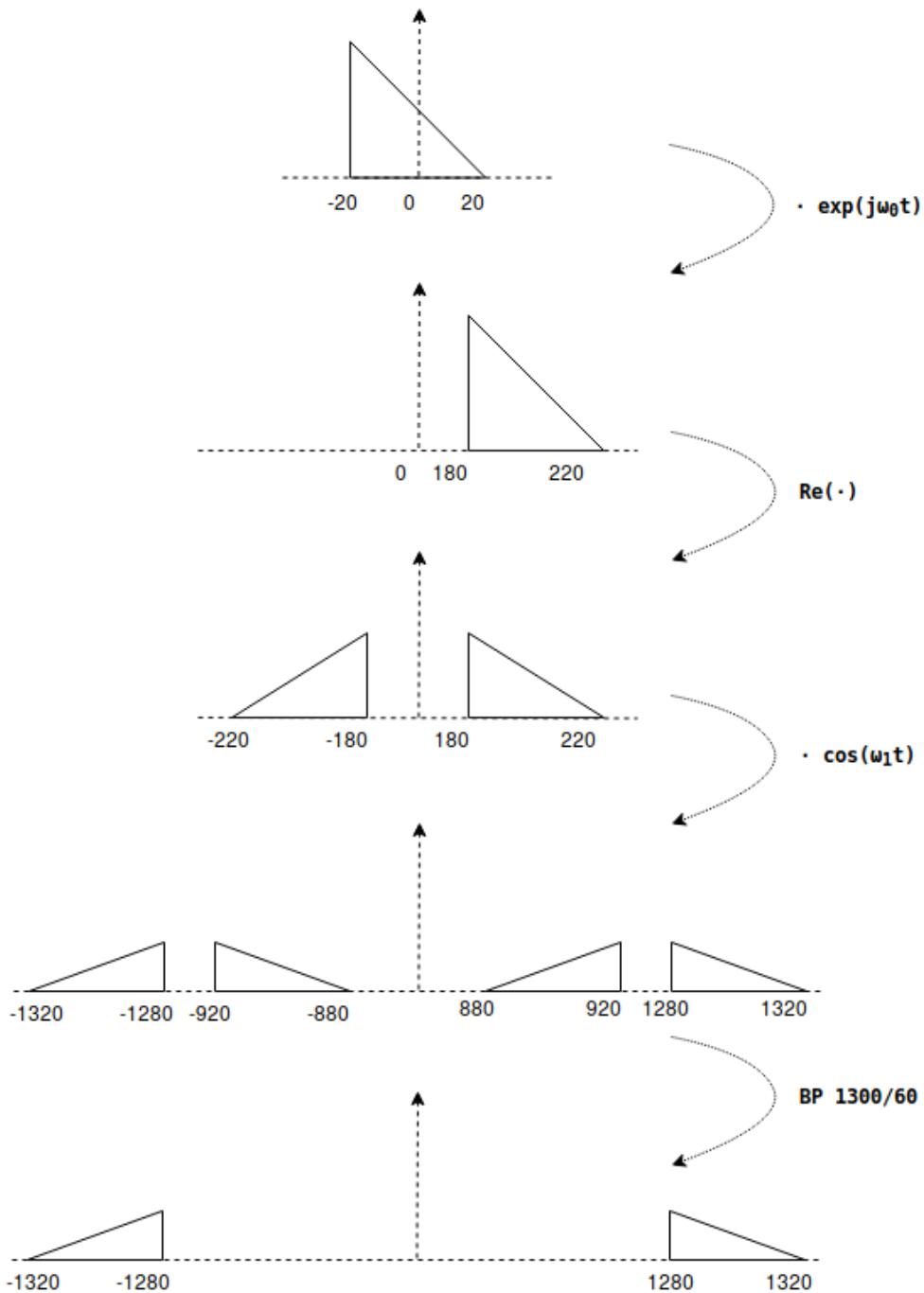
[15]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.pcolormesh(times_sN, freqs_sN, spect_sN)
plt.title('Espectrograma de chirp ($f_s$ no satisface Nyquist)')
plt.xlabel('$t$ [$\mu s$]')
plt.ylabel('$f$ [MHz]');
```



Al graficar nuevamente el espectrograma es notable el efecto de *aliasing* observando la superposición entre las muestras contiguas.

#### 1.4 Ejercicio 4

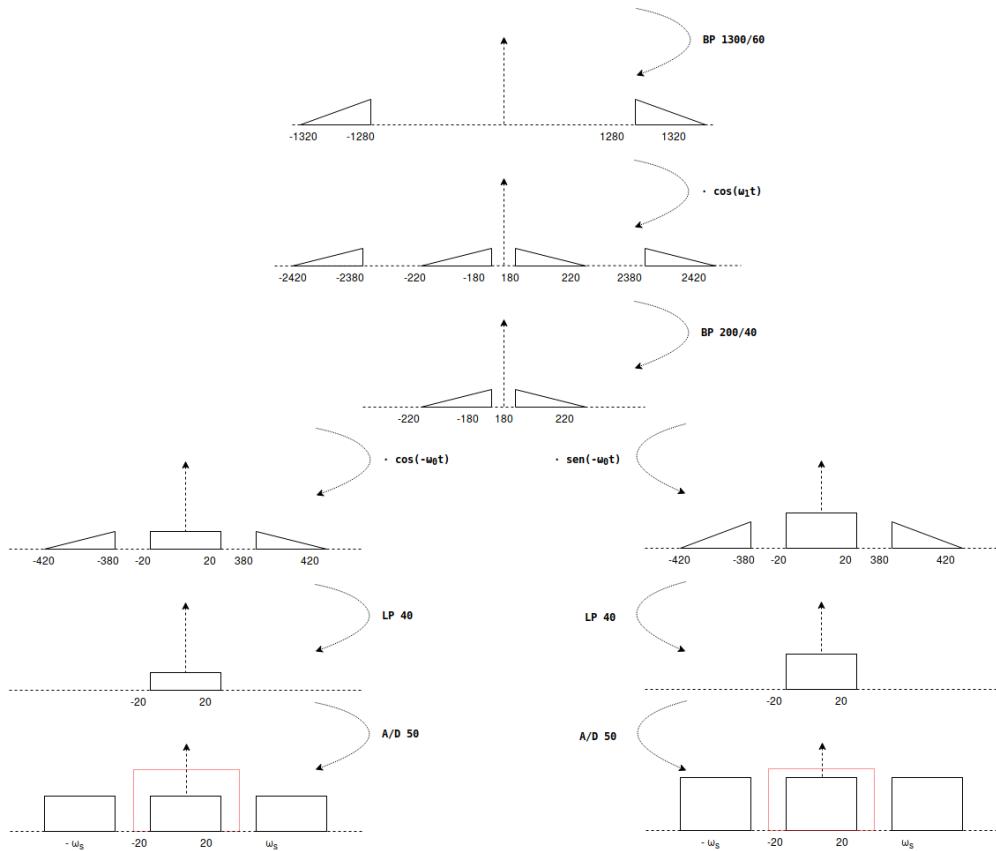
Representando la atenuación de forma lineal, se puede esquematizar cada paso entre transformaciones como en el siguiente diagrama:



TPE-ej4.png

## 1.5 Ejercicio 5

Realizamos algo similar al ejercicio anterior pero con el proceso de recepción de los ecos (ignorando el ruido que pueda llegar al sensor):



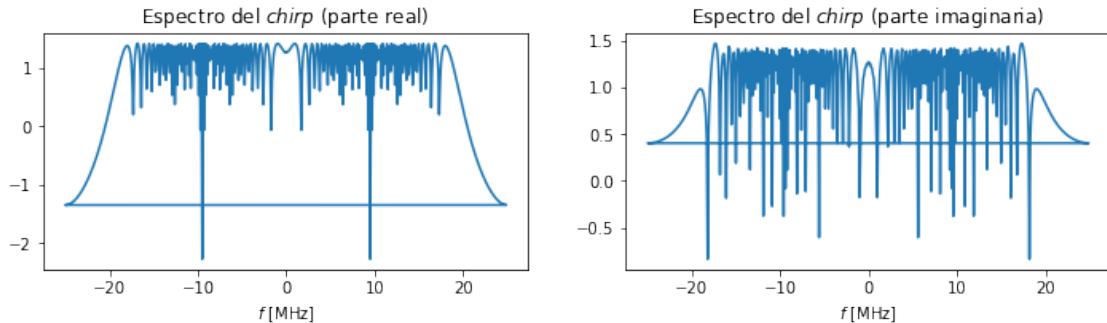
TPE-ej5.png

## 1.6 Ejercicio 6

Para ver la relación, graficamos los espectros de la parte real y de la parte imaginaria del *chirp*:

```
[16]: spect_re = sp_fft.fft(np.real(chirp))
spect_im = sp_fft.fft(np.imag(chirp))
freqs_re = sp_fft.fftfreq(len(spect_re), 1 / f_s)
freqs_im = sp_fft.fftfreq(len(spect_im), 1 / f_s)
```

```
[17]: fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
fig.add_subplot(221)
plt.plot(freqs_re, np.log10(np.abs(spect_re)))
plt.xlabel('$f$ [MHz]')
plt.title("Espectro del $chirp$ (parte real)");
fig.add_subplot(222)
plt.plot(freqs_im, np.log10(np.abs(spect_im)))
plt.xlabel('$f$ [MHz]')
plt.title("Espectro del $chirp$ (parte imaginaria)");
```



Descontando las oscilaciones y picos muy rápidos que se generan por el fenómeno de Gibbs, se puede reconocer  $I(n)$  y  $Q(n)$  (del ejercicio anterior) en las figuras.

## 1.7 Ejercicio 7

La operación de correlación se ve muy similar a la de convolución. Desarrollando la expresión dada:

$$C_{xy}(n) = x(n) \star y(n) = \sum_k x(k)y^*(k+n) = [x(n)] * [y^*(-n)] \neq C_{yx}(n)$$

Con esto vemos que la operación no es commutativa. Esto último también nos permite expresar la correlación en términos de transformadas de Fourier:

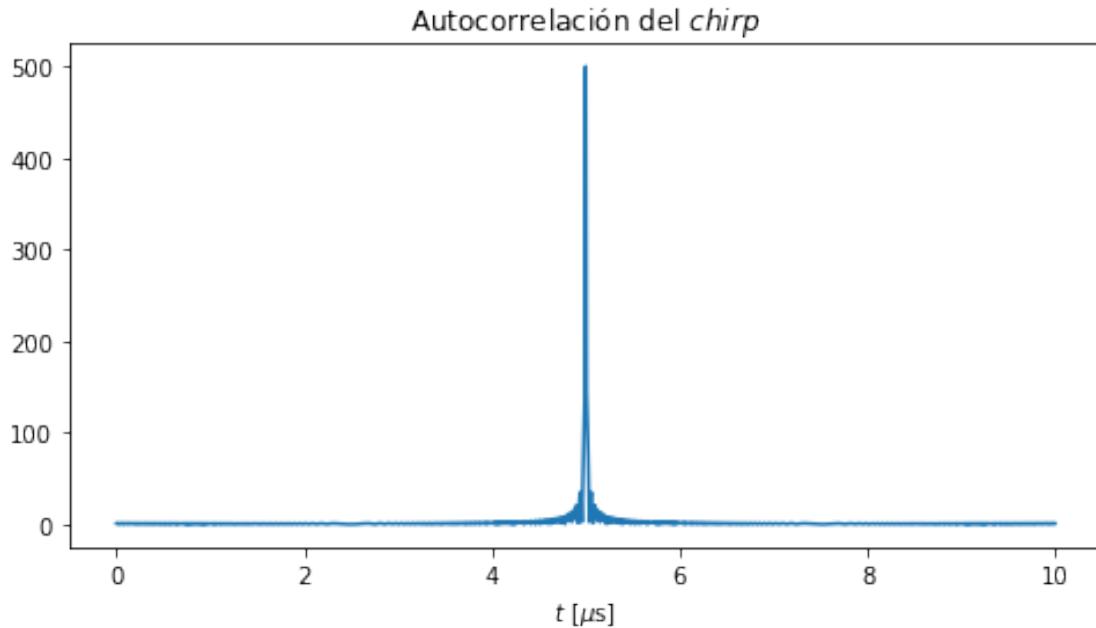
$$C_{xy} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[x]\mathcal{F}^*[y]]$$

## 1.8 Ejercicio 8

Calculamos la autocorrelación del *chirp* usando la expresión del ejercicio anterior y graficamos:

```
[18]: chirp_autocorr = np.convolve(np.conj(chirp[::-1]), chirp)

[19]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(np.linspace(0, T_rg, chirp_autocorr.size), np.abs(chirp_autocorr))
plt.title("Autocorrelación del $chirp$")
plt.xlabel('$t$ [$\mu s]$');
```



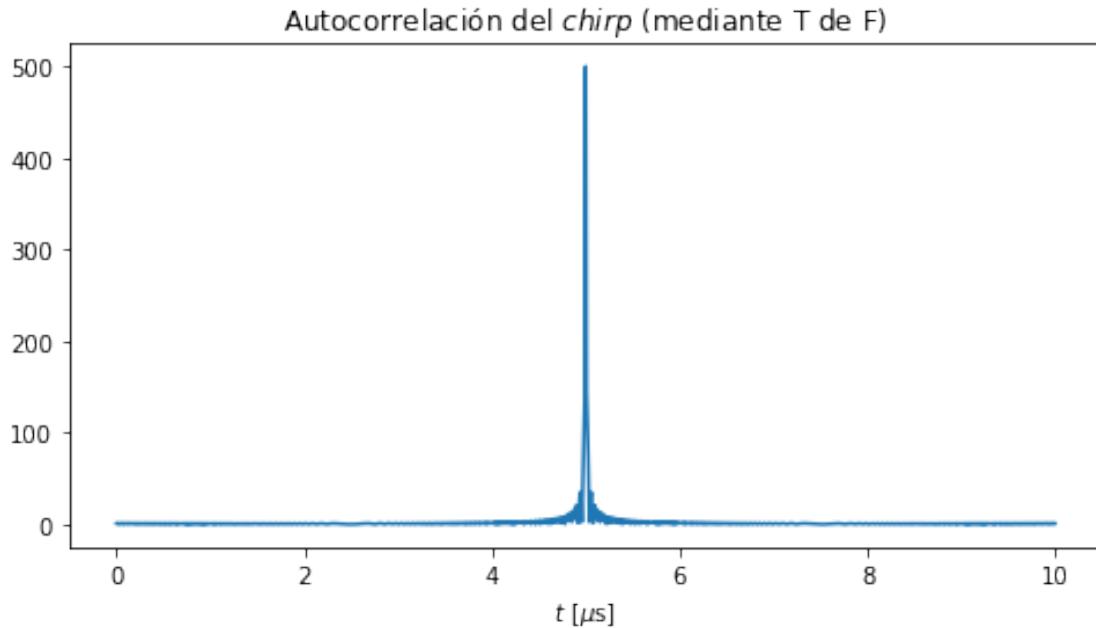
El factor de compresión es aproximadamente de  $T \cdot BW = 380$  MHz.

## 1.9 Ejercicio 9

Repetimos la autocorrelación pero mediante DFT. Antes de realizar la cuenta nos aseguramos de que el resultado salga como queremos agregando *padding* de cada lado en las copias del *chirp*.

```
[20]: chirp_a = np.pad(chirp, (0, len(chirp) - 1), mode='constant')
chirp_b = np.pad(chirp, (len(chirp) - 1, 0), mode='constant')
# Ver ecuación en el Ejercicio 7
chirp_autocorr_2 = sp_fft.ifft(np.conj(sp_fft.fft(chirp_a)) * sp_fft.
→fft(chirp_b))

[21]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(np.linspace(0, T_rg, chirp_autocorr_2.size), np.abs(chirp_autocorr_2))
# plt.plot(np.abs(chirp_autocorr_2))
plt.title("Autocorrelación del $chirp$ (mediante T de F)")
plt.xlabel('$t$ [$\mu s]$');
```

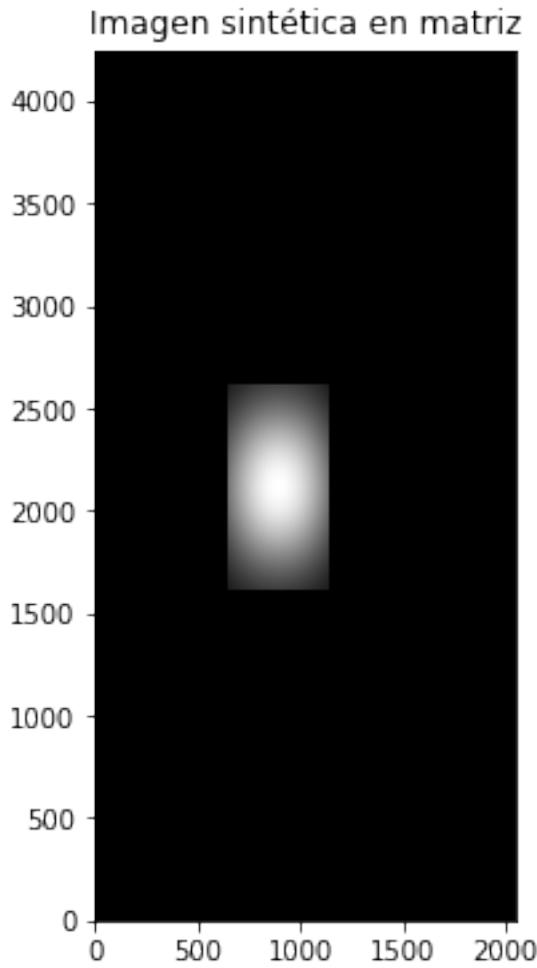


## 1.10 Ejercicio 10

Cargamos la matriz de la imagen sintética desde el archivo provisto:

```
[22]: sint_mat = sp.io.loadmat('SAR_data_sint.mat')['data_sint']
```

```
[23]: plt.rcParams["figure.figsize"]る = 6
plt.figure().add_subplot(111).set_aspect('equal', 'box')
plt.pcolormesh(abs(sint_mat), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen sintética en matriz");
```



Ahora aplicamos el enfocado en rango, realizando la correlación de cada fila de la matriz con el *chirp* emitido:

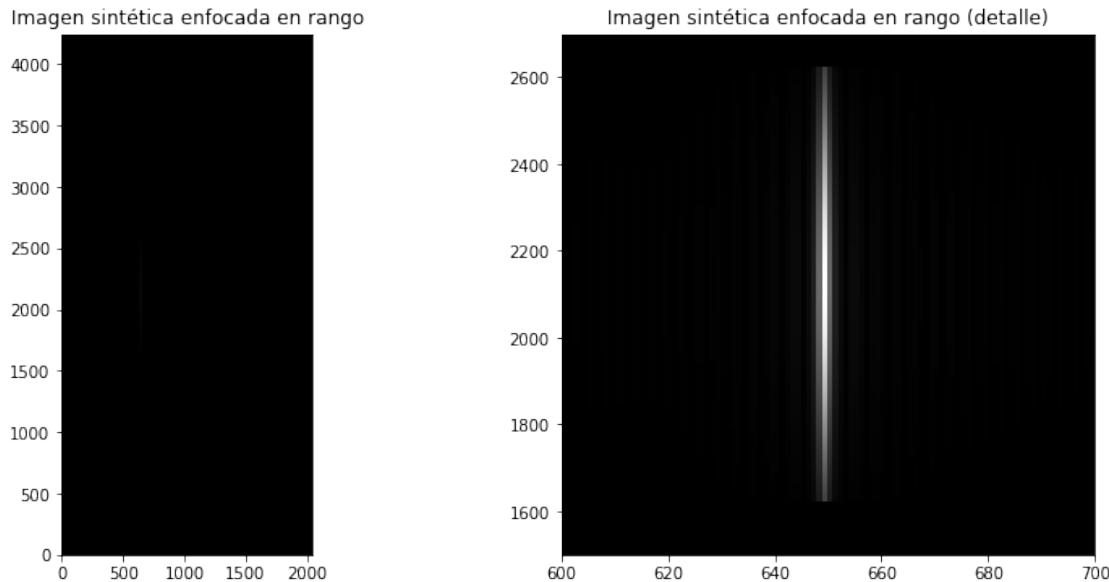
```
[24]: def correlation(x, y):
        x = np.pad(x, (0, len(y) - len(x)), mode='constant')
        return sp_fft.ifft(np.conj(sp_fft.fft(x)) * sp_fft.fft(y))

def range_compression(mat, chirp_signal):
    return np.array([correlation(chirp_signal, row) for row in mat])

[25]: sint_range_compressed = range_compression(sint_mat, chirp)

[26]: fig = plt.figure(figsize=(13,13))
fig.add_subplot(221).set_aspect('equal', 'box')
plt.pcolormesh(abs(sint_range_compressed), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen sintética enfocada en rango");
ax = fig.add_subplot(222)
plt.axis([600, 700, 1500, 2700])
plt.pcolormesh(abs(sint_range_compressed), cmap=cm.gray)
```

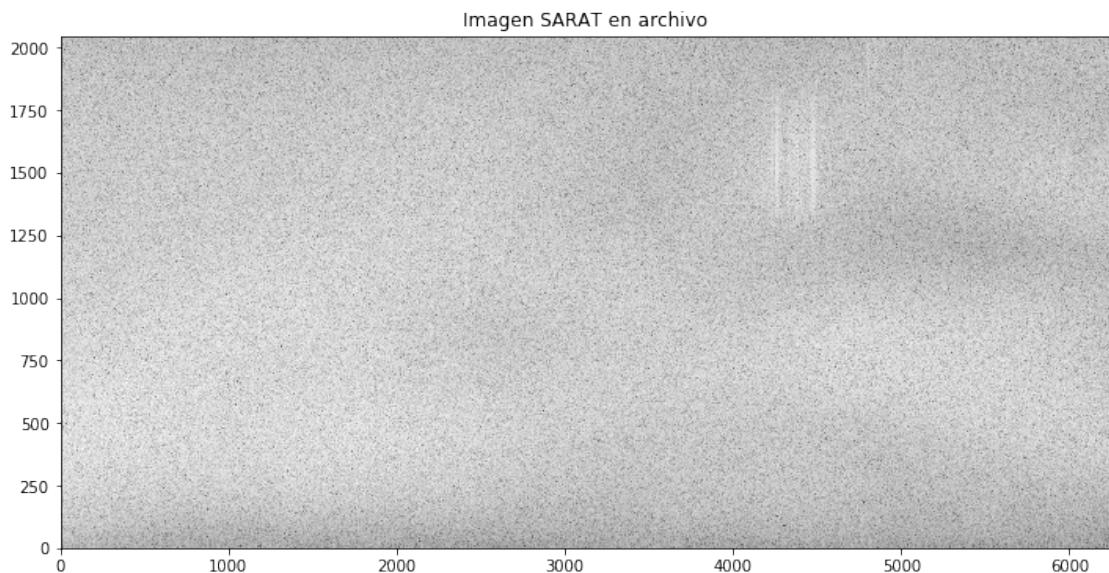
```
plt.title("Imagen sintética enfocada en rango (detalle)");
```



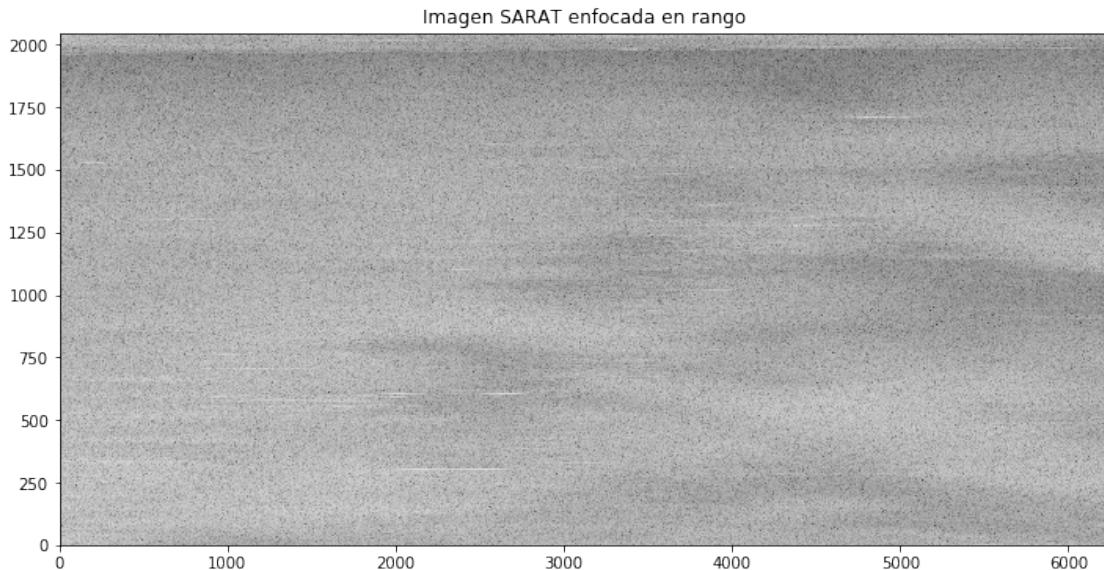
Es bastante tenue pero se puede apreciar una línea borroneada por la columna 650. Ahora hacemos un proceso similar para la imagen captada por SARAT. Para graficar usamos el logaritmo y transponemos por comodidad.

```
[27]: sarat_mat = sp_io.loadmat('SAR_data_sarat.mat')['data']
```

```
[28]: plt.figure(figsize=(12, 6)).add_subplot(111)
plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(np.transpose(sarat_mat))), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen SARAT en archivo");
```



```
[29]: sarat_range_compressed = range_compression(sarat_mat, chirp)
[30]: plt.figure(figsize=(12, 6)).add_subplot(111)
      plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(np.transpose(sarat_range_compressed))), cmap=cm.gray)
      plt.title("Imagen SARAT enfocada en rango");
```



Se empieza a apreciar formas en la imagen, pero todavía quedará enfocar en el eje de acimut.

## 1.11 Ejercicio 11

Usamos las ecuaciones y constantes dadas para calcular la duración temporal del nuevo *chirp*:

```
[ ]: T_az = eta_az * r_0 / nu
```

Con lo que tenemos  $T_{az} = 7.4751\mu s$ .

Para el ancho de banda, tal como hicimos al principio del trabajo, derivamos la fase y aplicamos entre  $-T_{az}/2$  y  $T_{az}/2$ :

$$f_{az}(t) = -2 \frac{\nu^2}{\lambda r_0} t$$

```
[ ]: freq_az = lambda x: -2 * nu**2 * x / (lamb * r_0)
      bw_az = abs(freq_az(-T_az/2) - freq_az(T_az/2))
```

Con lo que tenemos  $BW_{az} = 100.487$  Hz.

## 1.12 Ejercicio 12

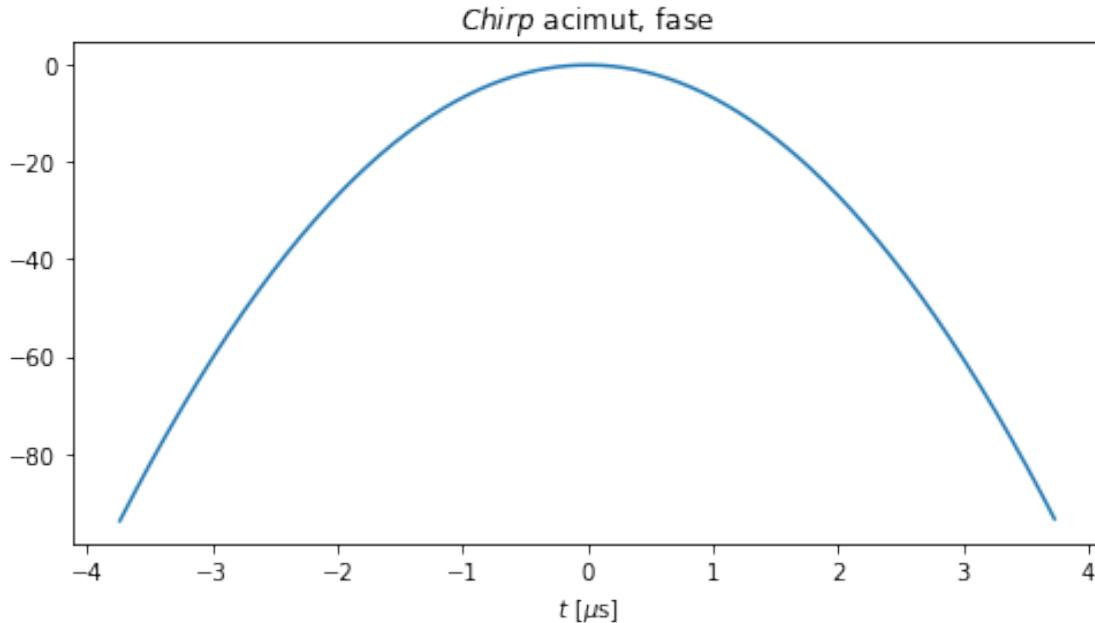
```
[33]: t_az = np.linspace(-T_az/2, T_az/2, int(prf * T_az), endpoint=False)

k_1 = -nu**2 / (lamb * r_0)
k_2 = 0
chirp_az_ph = lambda x: k_1 * x**2 + k_2 * x + phi_0

chirp_az = np.array([np.exp(2j * np.pi * chirp_az_ph(x)) for x in t_az])
## Forma alternativa:
# f0_az = freq_az(-T_az/2)
# f1_az = freq_az(T_az/2)
# chirp_az_re = sp_signal.chirp(t_az, f0=f0_az, f1=f1_az, t1=T_az)
# chirp_az_im = 1j * sp_signal.chirp(t_az, f0=f0_az, f1=f1_az, t1=T_az, phi=-90)
# chirp_az = chirp_az_re + chirp_az_im
```

Nuevamente podemos graficar la función de fase y verificamos que ahora varía en forma descendente:

```
[34]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(t_az, [chirp_az_ph(x) for x in t_az])
plt.title("$Chirp$ acimut, fase")
plt.xlabel('$t$ [$\mu s$]');
```



Veremos el mismo cambio de sentido al graficar el espectograma para este nuevo *chirp* que usaremos en la línea del acimut:

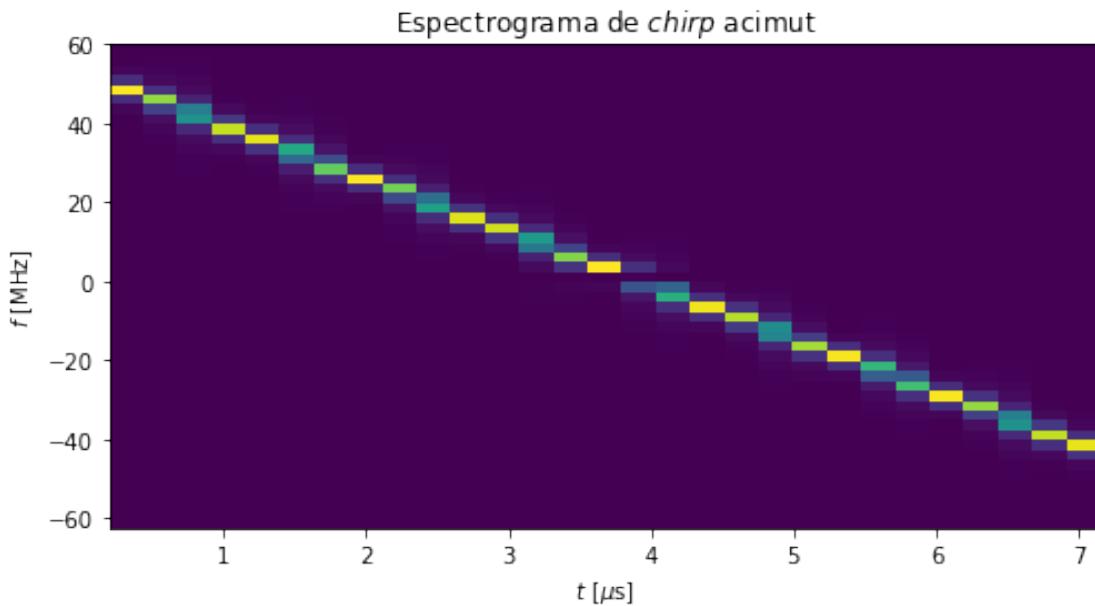
```
[35]: freqs_az, times_az, spect_az = sp_signal.spectrogram(chirp_az, fs=prf,
→nperseg=50, noverlap=20, window='boxcar', return_onesided=False)
```

```

freqs_az = sp_fft.fftshift(freqs_az)
spect_az = sp_fft.fftshift(spect_az, axes=0)

[36]: plt.figure(figsize=(8,4))
plt.pcolormesh(times_az, freqs_az, spect_az)
plt.title('Espectrograma de $chirp$ acimut')
plt.xlabel('$t$ [$\mu s$]')
plt.ylabel('$f$ [MHz]');

```



### 1.13 Ejercicio 13

Ahora enfocamos en acimut, esto es, sobre las imágenes ya comprimidas en sentido del rango volvemos a aplicar el algoritmo de compresión pero en acimut.

```

[37]: def acimut_compression(mat, chirp_signal):
    return np.transpose([correlation(chirp_signal, col) for col in np.
→transpose(mat)])

```

Primero lo hacemos con la imagen sintética:

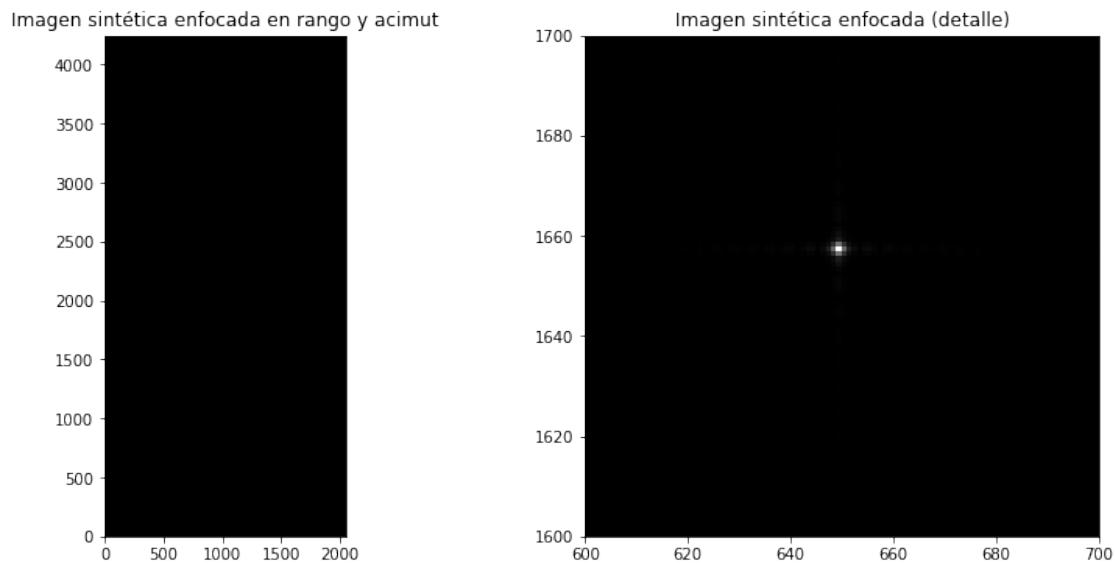
```
[38]: sint_focused = acimut_compression(sint_range_compressed, chirp_az)
```

```

[39]: fig = plt.figure(figsize=(13,13))
fig.add_subplot(221).set_aspect('equal', 'box')
plt.pcolormesh(abs(sint_focused), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen sintética enfocada en rango y acimut");
ax = fig.add_subplot(222)
plt.axis([600, 700, 1600, 1700])
plt.pcolormesh(abs(sint_focused), cmap=cm.gray)

```

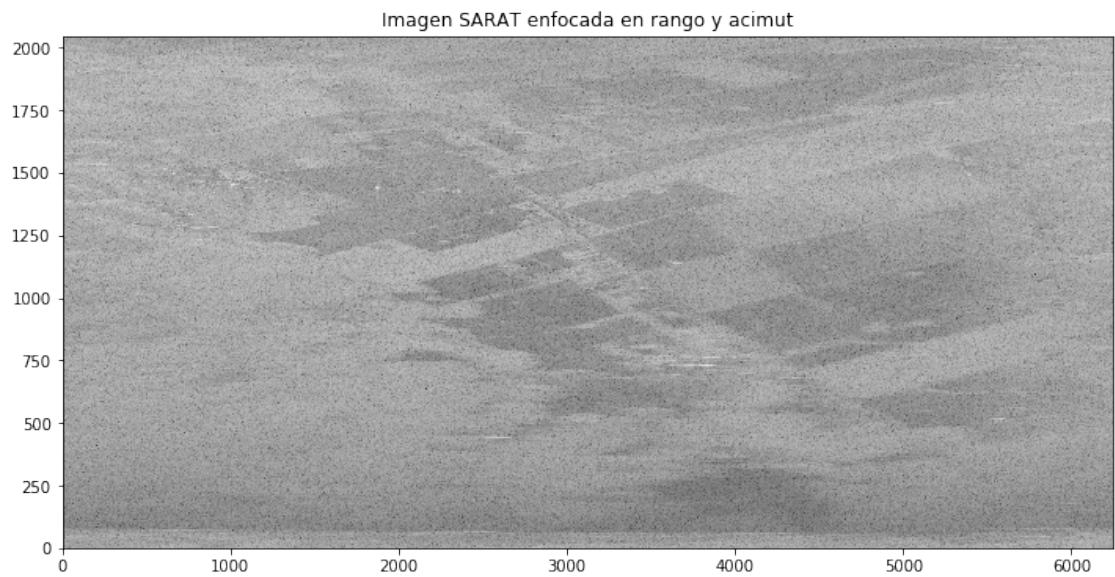
```
plt.title("Imagen sintética enfocada (detalle)");
```



Ahora lo que era una línea quedó concentrada en un punto. Probemos con la imagen capturada por SARAT:

```
[40]: sarat_focused = acimut_compression(sarat_range_compressed, chirp_az)
```

```
[41]: plt.figure(figsize=(12, 6)).add_subplot(111)
plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(np.rot90(sarat_focused))), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen SARAT enfocada en rango y acimut");
```



¡Eureka! Enhance...

```
[42]: plt.figure(figsize=(16, 16)).add_subplot(111)
plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(sarat_focused)), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen SARAT enfocada en rango y acimut");
```



## 1.14 Ejercicio 14 (opcional)

Por el bonus, aplicamos un promediador móvil sobre el valor absoluto de la imagen focalizada para intentar reducir el ruido:

```
[43]: moving_average = np.ones((4, 4)) / 16
sarateaveraged = sc_ndimage.convolve(np.abs(sarat_focused), moving_average)
```

```
[44]: plt.figure(figsize=(18, 18)).add_subplot(111)
plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(sarat_averaged)), cmap=cm.gray)
plt.title("Imagen SARAT enfocada y con promediador móvil");
```



## 1.15 Ejercicio 15 (opcional)

Como gran final, rehacemos el focalizador del ejercicio 13 con un  $r_0$  y consecuentemente un *chirp* especializado por columna (acimut), en base a la expresión dada.

```
[45]: def specialized_acimut_compression(mat):
    col_r_0 = lambda j: 7545 + 3 * (j - 650)
    col_k_1 = lambda j: -nu**2 / (lamb * col_r_0(j))
    col_chirp_ph = lambda x, j: col_k_1(j) * x**2 + k_2 * x + phi_0
```

```

    col_chirp = lambda j: np.array([np.exp(2j * np.pi * col_chirp_ph(x, j)) for x in t_az])

    return np.transpose([correlation(col_chirp(j), col) for j, col in
                         enumerate(np.transpose(mat))])

```

[46]: sarat\_focused\_15 = specialized\_acimut\_compression(sarat\_range\_compressed)  
 sarat\_averaged\_15 = sc\_ndimage.convolve(np.abs(sarat\_focused\_15), moving\_average)

Finalmente, obtenemos un hermoso paisaje.

[47]: plt.figure(figsize=(20, 20)).add\_subplot(111)  
 plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(np.rot90(sarat\_averaged\_15))), cmap=cm.gray)  
 plt.title("Imagen SARAT procesada");



**1.16** —

### **1.17 Ejercicio 16 (*yapa*)**

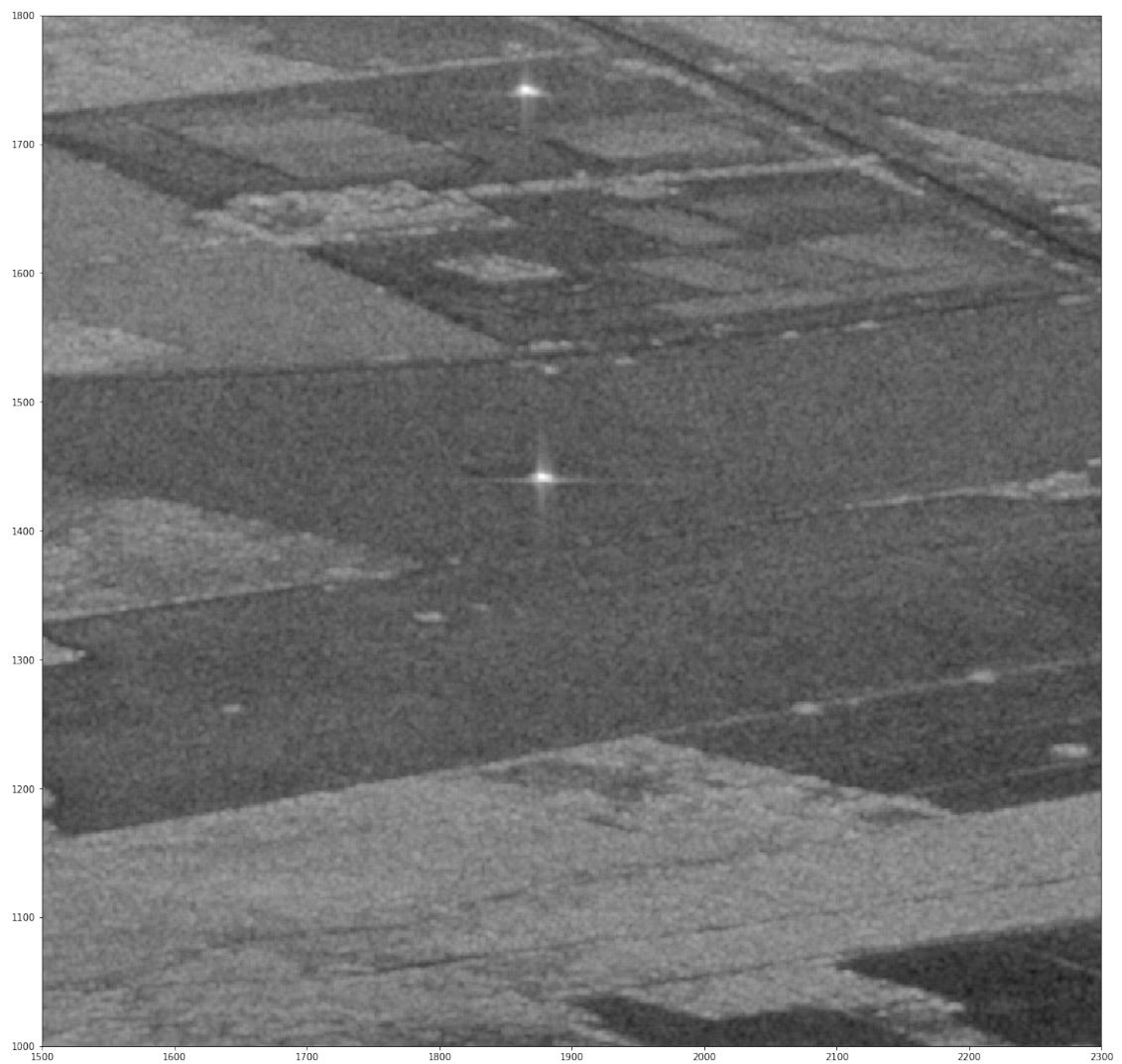
Solo por un tema visual, cerramos procesando un poco más la imagen resultante con un editor de imágenes.



TPE-ej16.png

Esperá, ¿qué era ese punto brillante al final? Hagamos zoom...

```
[48]: plt.figure(figsize=(20, 20)).add_subplot(111)
plt.pcolormesh(np.log10(np.abs(np.rot90(sarat_averaged_15))), cmap=cm.gray)
plt.axis([1500, 2300, 1000, 1800]);
```



## 1.18 ¿Qué es eso??



TPE-ej17.png

**Bendecido sea.**