Chap II. ESPACE TANGENT ET LISSITÉ

Martin Debaisieux

1 Les différentielles et les espaces tangents

Considérons dans un premier temps un corps K non nécessairement algébriquement clos. Étant donné un polynôme $f \in K[X_1, \dots, X_n]$, son développement de Taylor au point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n(K)$ est de la forme

$$f(X_1, \dots, X_n) = f(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{x}}^{(1)}(X_1, \dots, X_n) + \cdots + f_{\mathbf{x}}^{(d)}(X_1, \dots, X_n)$$

avec d le degré de f et où les $f_{\mathbf{x}}^{(i)}$ sont des polynômes homogènes de degré i en les $(X_j - x_j)$, ou bien :

$$f(\mathbf{X} - \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + f^{(1)}(\mathbf{X} - \mathbf{x}) + \cdots + f^{(d)}(\mathbf{X} - \mathbf{x})$$

avec $\mathbf{X} - \mathbf{x} = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$. Dans l'expression précédente, nous posons $(\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f)(X_1, \dots, X_n)$ la partie $f^{(1)}(\mathbf{X} - \mathbf{x})$; il s'agit d'un polynôme homogène de degré 1. Plus exactement,

$$(\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f)(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{x}).(X_i - x_i). \tag{1.1}$$

Ceci donne lieu à une application $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} \colon K[\mathbf{X}] \to K[\mathbf{X}] \colon f \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$ additive et vérifiant la règle de Leibniz : $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(fg) = f(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g) + g(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$. En particulier, pour $\lambda \in K$ un polynôme constant, l'égalité (1.1) implique que $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\lambda) = 0$. Ainsi $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} \colon K[\mathbf{X}] \to K[\mathbf{X}]$ est une application K-linéaire, appelée *différentielle en* $\mathbf{x}$.

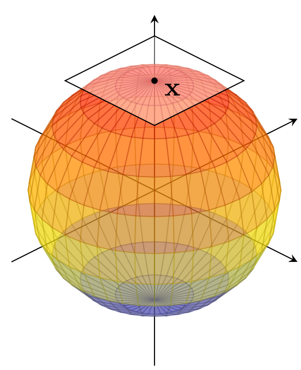
Définition 1.1. Soit K un corps ; l'*espace tangent d*'un sous-ensemble algébrique $V = V(f_1, \dots, f_m)$ de $\mathbf{A}^n(K)$ *en un point* $\mathbf{x} \in V$ est le lieu d'annulation $T_{\mathbf{x}}(V)$ des différentielles des f_i en $\mathbf{x}$:

$$T_{\mathbf{x}}(V) := V(\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1, \dots, \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_m).$$

Remarque 1.2. Noter que $T_{\mathbf{x}}(V)$ est non vide (il comprend $\mathbf{x}$). En réalité, $T_{\mathbf{x}}(V)$ est un sous-espace affine de $\mathbf{A}^n(K)$; il s'agit donc du translaté d'un sous-espace vectoriel E de K^n par $\mathbf{x}$: $T_{\mathbf{x}}(V) = \mathbf{x} + E$.

Exemple 1.3. Soit K un corps ; $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}^n(K)) = V(\mathrm{d}_{\mathbf{x}} 0) = V(0) = \mathbf{A}^n(K)$ en tout point $\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n(K)$.

Nota Bene 1.4. Si $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'espace tangent de V en $\mathbf{x}$ coïncide avec celui de la géométrie différentielle : (esquisse dans un cas lisse)



Remarque 1.5. L'espace tangent de $V = V(f_1, \dots, f_m)$ en un point $\mathbf{x} \in V$ s'obtient en intersectant chacun des $T_{\mathbf{x}}(V(f_i))$:

$$T_{\mathbf{x}}(V) = T_{\mathbf{x}}(V(f_1)) \cap \cdots \cap T_{\mathbf{x}}(V(f_m)).$$

L'espace $T_{\mathbf{x}}(V(f)) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbf{A}^n(K) \;\middle|\; \sum_{i=1}^n \partial_{X_i} f(\mathbf{x}).(y_i - x_i) = 0\right\}$ est un hyperplan affine de $\mathbf{A}^n(K)$ si et seulement si $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Exemple 1.6. Soit K un corps et considérons le polynôme $f(X,Y) = Y^2 - X^3 \in K[X,Y]$. Ses dérivées partielles sont $\partial_X f(X,Y) = -3X^2$ et $\partial_Y f(X,Y) = 2Y$.

- Le plan tangent de V en $(1,1)$ est $T_{(1,1)}(V) = V(-3(X-1)+2(Y-1)) = V(-3X+2Y+1)$ et il s'agit d'un hyperplan affine de $\mathbf{A}^2(K)$ étant donné que $\nabla f(1,1) = (-3,2) \neq (0,0)$ peu importe la caractéristique de K.
- Le plan tangent de V en $(0,0)$ est $T_{(0,0)}(V) = V(0) = \mathbf{A}^2(K)$ et cette fois la dimension du sev correspondant est $\dim_K T_{(0,0)}(V) = 2$.

2 Les différentielles et les espaces cotangents

Nous travaillons sur un corps algébriquement clos K. Considérons $V = V(f_1, \dots, f_m)$ un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbf{A}^n(K)$ tel que $(f_1, \dots, f_m)$ est un idéal radical (ssi $I(V) = (f_1, \dots, f_m)$). Si un polynôme g s'annule sur V alors il existe des $g_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ pour lesquels $g = g_1 f_1 + \cdots + g_m f_m$. Dès lors, en tout point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V$:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g) = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g_i f_i) = \sum_{i=1}^m (g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_i) + f_i(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g_i)) = \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_i).$$

Nous en déduisons que si $g \in I(V)$ alors $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} g \in (\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1, \dots, \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_m) = I(T_{\mathbf{x}}(V))$; cette dernière égalité est due au Nullstellensatz et au fait que chaque $\deg(\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_i) = 1$. Par conséquent, l'application K-linéaire ϕ se factorise en une application K-linéaire encore notée $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}$:

$$\begin{tikzcd}
K[X_1, \dots, X_n] \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}"] \arrow[d] \arrow[dr, "\phi"] & K[X_1, \dots, X_n] \arrow[d] \\
K[V] \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}"] & K[T_{\mathbf{x}}(V)]
\end{tikzcd}$$

donnée par $(f\colon V \to K) \mapsto (\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\colon T_{\mathbf{x}}(V) \to K)$: polynomiale et homogène de degré 1 en les $(X_j - x_j)$. Nous regardons alors plutôt cette application K-linéaire comme

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon \left\{ \begin{array}{ccl} K[V] & \longrightarrow & T_{\mathbf{x}}(V)^* := \mathrm{Hom}_K(T_{\mathbf{x}}(V), K) \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} T_{\mathbf{x}}(V) & \longrightarrow & K \\ \mathbf{x}+\mathbf{t} & \longmapsto & \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \partial_{X_i} f(\mathbf{x}).t_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $T_{\mathbf{x}}(V)$ est vu comme le K-ev d'origine $\mathbf{x}$. D'autre part, $\mathfrak{m}_{\mathbf{x}} = \{f \in K[V] \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$ est un idéal maximal de $K[V]$: il provient de l'idéal maximal $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ de $K[X_1, \dots, X_n]$. Dès lors $K[V]/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \to K\colon f + \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \mapsto f(\mathbf{x})$ est un isomorphisme et $K \rightarrowtail K[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow K[V]$ est un monomorphisme dans la catégorie des K-algèbres : injective ssi $K \cap I(V) = 0$ ssi $K \cap I(V) \neq K$ ssi $1 \notin I(V)$ ssi $I(V) \neq K[X_1, \dots, X_n]$ ssi V est non vide.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses précédentes $K[V] = K \oplus \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}$ en tant que K-espaces vectoriels.*

Preuve. Il est facile de montrer que $K \cap \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} = 0$. Soit $f\colon V \to K$ une fonction régulière ; alors pour tout $\mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})]$ et l'application $g\colon \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$ est telle que $g \in \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}$. Ainsi f se décompose en $f = f(\mathbf{x}) + g$. $\square$

Conséquence 2.2. Dès lors $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon K \oplus \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$. Cette application K-linéaire s'annule sur K et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{d}_{\mathbf{x}}) = \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(K[V]) = \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\mathfrak{m}_{\mathbf{x}})$. Ceci nous amène une nouvelle fois à considérer une application K-linéaire, encore notée $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}$:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} & \longrightarrow & T_{\mathbf{x}}(V)^* \\ f & \longmapsto & \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f. \end{array} \right.$$

Remarque 2.3. Le K-sev de $\mathfrak{m}_P$ et idéal $\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2 = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)^2/I(V)$ est contenu dans le noyau de cette application : $\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2 = \langle fg \mid f, g \in \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \rangle_{K\text{-ev}}$ et $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(fg) = f(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g) + g(\mathbf{x})\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}$ se factorise en une application K-linéaire $\delta_{\mathbf{x}}\colon \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2 \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}"] \arrow[d] & T_{\mathbf{x}}(V)^* \\ \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2 \arrow[ur, "\delta_{\mathbf{x}}"] & \end{tikzcd}$$

Il s'avère que $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$ est surjective et que son noyau est exactement $\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$; pour cette raison, $\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$ est appelé l'*espace cotangent de V en $\mathbf{x} \in V$* (puisqu'il est isomorphe à $T_{\mathbf{x}}(V)^*$).

Proposition 2.4. *L'application $\delta_{\mathbf{x}}\colon \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2 \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$ est un isomorphisme K-linéaire.*

Preuve. L'application $\delta_{\mathbf{x}}$ est surjective : considérons la base standard $(e_1, \ldots, e_n)$ de K^n. Dès lors

$$T_{\mathbf{x}}(V)^* = \left\{ \xi_{\mathbf{a}}\colon \mathbf{y} \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n a_i(y_i - x_i) \;\middle|\; \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n \right\}.$$

Pour un $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, posons $f_{\mathbf{a}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i(X_i - x_i) \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Ce polynôme est tel que $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_{\mathbf{a}} \bmod I(V)) = \xi_{\mathbf{a}}$. Ainsi $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon K[V] \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$ est surjective et nous concluons étant donné que $\mathrm{Im}(\delta_{\mathbf{x}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}_{\mathbf{x}})$.

L'application $\delta_{\mathbf{x}}$ est injective : pour se faire, nous étudions le noyau de $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\colon \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \to T_{\mathbf{x}}(V)^*$. Remarquons que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\mathbf{x}}) = \{f \bmod I(V) \in \mathfrak{m}_{\mathbf{x}} \mid \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f) \in I(T_{\mathbf{x}}(V))\}$$

et $I(T_{\mathbf{x}}(V)) = (\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1, \ldots, \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_m)$. Soit $f \bmod I(V) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\mathbf{x}}) \subseteq \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}$; nous montrons $f \bmod I(V) \in \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$. Étant donné que $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f) \in I(T_{\mathbf{x}}(V))$, il existe des $\lambda_i \in K$ tels que $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f) = \lambda_1 \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_1) + \cdots + \lambda_m \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_m)$. Également, $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f)$ est homogène de degré 1. Soit $g = f - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$; par construction $g \equiv f \bmod I(V)$ et

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(g) = \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(f_i) = 0.$$

Le développement de Taylor de g en $\mathbf{x}$ à l'ordre 1 est de la forme

$$g(X_1, \ldots, X_n) = g(\mathbf{x}) + (\mathrm{d}_{\mathbf{x}} g)(X_1, \ldots, X_n) + h(X_1, \ldots, X_n) = h(X_1, \ldots, X_n)$$

avec $h \in (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)^2$. Ainsi $f \bmod I(V) = g \bmod I(V) \in \mathfrak{m}_P^2$ et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\mathbf{x}}) = \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$. □

Corollaire 2.5. *Par dualité, l'application $\delta_{\mathbf{x}}^*\colon T_{\mathbf{x}}(V) \to (\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2)^*$ est un isomorphisme K-linéaire.*

3 Fonctorialité

Soit $\phi\colon V \to W$ une application régulière sur un corps algébriquement clos K. Considérons un point $\mathbf{x} \in V$ et notons $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ son image dans W. Alors l'application $\phi^\star\colon K[W] \to K[V]$ est telle que $\phi^\star(\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}) \subseteq \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}$. En effet, si $g\colon W \to K$ s'annule en $\mathbf{y}$ alors

$$(\phi^\star(g))(\mathbf{x}) = g(\phi(\mathbf{x})) = g(\mathbf{y}) = 0.$$

De plus, $\phi^\star$ est en particulier un morphisme d'anneau et donc $\phi^\star(\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}^2) \subseteq \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$. Cette discussion donne lieu à un morphisme K-linéaire $\overline{\phi^\star}\colon \mathfrak{m}_{\mathbf{y}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}^2 \to \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2$.

Définition 3.1. La *différentielle* d'une application régulière $\phi\colon V \to W$ sur un corps algébriquement clos K en $\mathbf{x} \in V$ est l'application K-linéaire $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi\colon T_{\mathbf{x}}(V) \to T_{\phi(\mathbf{x})}(W)$ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathbf{x}}(V) \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi"] \arrow[d, "\delta^*_{\mathbf{x}}", "\wr"'] & T_{\phi(\mathbf{x})}(W) \\
(\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2)^* \arrow[r, "(\overline{\phi^\star})^*"] & (\mathfrak{m}_{\phi(\mathbf{x})}/\mathfrak{m}_{\phi(\mathbf{x})}^2)^* \arrow[u, "(\delta^*_{\phi(\mathbf{x})})^{-1}"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.2. Si nous considérons deux applications régulières $\phi\colon V \to W$ et $\psi\colon W \to U$ et un point $\mathbf{x} \in V$ dont l'image dans W est $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ et dont l'image dans U est $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{y})$, nous obtenons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{m}_{\mathbf{y}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}^2 \arrow[dr, "\overline{\phi^\star}"] & \\
\mathfrak{m}_{\mathbf{z}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{z}}^2 \arrow[ur, "\overline{\psi^\star}"] \arrow[rr, "\overline{\phi^\star}\circ\overline{\psi^\star}"] & & \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2
\end{tikzcd}$$

et les égalités suivantes sont satisfaites : $\overline{\phi^\star} \circ \overline{\psi^\star} = \overline{\phi^\star \circ \psi^\star} = \overline{(\psi \circ \phi)^\star}$. En passant aux duaux, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& T_{\mathbf{y}}(W) \arrow[dr, "\mathrm{d}_{\mathbf{y}}\psi"] \arrow[dd] & \\
T_{\mathbf{x}}(V) \arrow[ur, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi"] \arrow[rr, "\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\psi\circ\phi)"] \arrow[dd, "\delta^*_{\mathbf{x}}", "\wr"'] & & T_{\mathbf{z}}(U) \arrow[dd, "\delta^*_{\mathbf{z}}", "\wr"'] \\
& (\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{y}}^2)^* \arrow[dr, "(\overline{\psi^\star})^*"] & \\
(\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^2)^* \arrow[ur, "(\overline{\phi^\star})^*"] \arrow[rr, "(\overline{(\psi\circ\phi)^\star})^*"] & & (\mathfrak{m}_{\mathbf{z}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{z}}^2)^*
\end{tikzcd}$$

Conséquence 3.3. Nous obtenons de la commutativité du précédent diagramme la Chain Rule en tout point $\mathbf{x} \in V$:

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\psi \circ \phi) = \mathrm{d}_{\phi(\mathbf{x})}(\psi) \circ \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\phi).}$$

En supplément, $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{T_{\mathbf{x}}(V)}$ en tout point $\mathbf{x} \in V$.

Corollaire 3.4. *Si $\phi\colon V \to W$ un isomorphisme entre deux ensembles algébriques sur K alors en tout point $\mathbf{x} \in V$ l'application $d_{\mathbf{x}}\phi\colon T_{\mathbf{x}}(V) \to T_{\phi(\mathbf{x})}(W)$ est un isomorphisme K-linéaire.*

Preuve. Puisque $\mathrm{Id}_V = \phi^{-1} \circ \phi$, en tout point $\mathbf{x} \in V$ les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathrm{Id}_{T_{\mathbf{x}}(V)} = \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\phi^{-1} \circ \phi) = \mathrm{d}_{\phi(\mathbf{x})}(\phi^{-1}) \circ \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\phi).$$

Comme il s'agit d'une application K-linéaire en dimension finie, $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\phi)^{-1} = \mathrm{d}_{\phi(\mathbf{x})}(\phi^{-1})$. □

4 La jacobienne d'un morphisme

Définition 4.1. Soient $V \subseteq \mathbf{A}^n(K)$ et $W \subseteq \mathbf{A}^m(K)$ deux ensembles algébriques sur un corps algébriquement clos K ; la *jacobienne* d'une application régulière $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)\colon V \to W$ est donnée par la matrice

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial X_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K[X_1, \ldots, X_n]).$$

Remarque 4.2. En tout point $\mathbf{x} \in V$, nous obtenons une application K-linéaire $J(\phi)(\mathbf{x})\colon K^n \to K^m$ définie par

$$(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial X_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial X_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \partial_{X_i} \phi_1(\mathbf{x}).t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \partial_{X_i} \phi_m(\mathbf{x}).t_i \end{pmatrix}.$$

Lemme 4.3. *La différentielle d'une application régulière $\phi\colon V \to W$ en un point $\mathbf{x} \in V$ est donnée par $T_{\mathbf{x}}(V) \to T_{\phi(\mathbf{x})}(W)\colon \mathbf{x} + \mathbf{t} \mapsto \phi(\mathbf{x}) + J(\phi)(\mathbf{x}).\mathbf{t}^{\mathsf{T}}$.*

Preuve. Notons $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ avec chaque $\phi_i\colon V \to K$. Dès lors la différentielle de chaque ϕ_i en $\mathbf{x} \in V$ est donnée par

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi_i\colon \left\{ \begin{array}{ccc} T_{\mathbf{x}}(V) & \longrightarrow & T_{\phi_i(\mathbf{x})}(\mathbf{A}^1(K)) = \mathbf{A}^1(K) \\ \mathbf{x} + \mathbf{t} & \longmapsto & \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \partial_{X_j} \phi_i(\mathbf{x}).t_j. \end{array} \right.$$

Posons $\gamma_i\colon \mathbf{A}^1(K) \rightarrowtail \mathbf{A}^m(K)$ les monomorphismes $\alpha \mapsto (0, \ldots, \alpha, \ldots, 0)$ en i-ième position pour tout $i = 1, \ldots, m$. Alors $\phi = \gamma_1 \circ \phi_1 + \cdots + \gamma_m \circ \phi_m$ et donc

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\gamma_i \circ \phi_i) = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_{\phi_i(\mathbf{x})}\gamma_i \circ \mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi_i.$$

Puisque $\mathrm{d}_\alpha \gamma_i = \gamma_i$ via $T_\alpha(\mathbf{A}^1(K)) = \mathbf{A}^1(K)$ et $T_{\gamma_i(\alpha)}(\mathbf{A}^m(K)) = \mathbf{A}^m(K)$, nous obtenons au final que

$$(\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{x} + \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m (\mathrm{d}_{\phi_i(\mathbf{x})}\gamma_i) \left(\phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial X_j}(\mathbf{x}).t_j \right) = \phi(\mathbf{x}) + J(\phi)(\mathbf{x}).\mathbf{t}^{\mathsf{T}}.$$

□

Remarque 4.4. À nouveau, en considérant deux applications régulières $\phi\colon V \to W$ et $\psi\colon W \to U$, nous retrouvons la Chain Rule en tout point $\mathbf{x} \in V$:

$$\boxed{J(\psi \circ \phi)(\mathbf{x}) = J(\psi)(\phi(\mathbf{x}))\,.\,J(\phi)(\mathbf{x})}$$

et également $J(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{K^n}$ pour tout ensemble algébrique $V \subseteq \mathbf{A}^n(K)$. En particulier, si ϕ est un isomorphisme d'ensembles algébriques alors $J(\phi)(\mathbf{x})$ est un isomorphisme K-linéaire en tout $\mathbf{x} \in V$.

Exemple 4.5. Soit V un ensemble algébrique sur un corps algébriquement clos K et considérons un point $\mathbf{x} \in V$ dont $\dim_K T_{\mathbf{x}}(V) = n$. Alors V ne peut pas être isomorphe à un sous-ensemble algébrique W de $\mathbf{A}^m(K)$ avec $m < n$. Autrement dit, si $V \simeq W$ alors $m \geq n$. En effet, un isomorphisme $\phi\colon V \to W$ d'ensembles algébriques induit un isomorphisme K-linéaire $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\phi)\colon T_{\mathbf{x}}(V) \to T_{\phi(\mathbf{x})}(W)$ et donc $J(\phi)(\mathbf{x})\colon K^n \rightarrowtail K^m$ (ainsi $n \leq m$).

Lemme 4.6. *Soit V un ensemble algébrique sur un corps algébriquement clos K ; l'application $V \to \mathbf{N}$ donnée par $\mathbf{x} \mapsto \dim_K T_{\mathbf{x}}(V)$ est semi-continue supérieurement (i.e. $\{\mathbf{x} \in V \mid \dim_K T_{\mathbf{x}}(V) \geq r\}$ est fermé dans V pour tout $r \geq 0$).*

Preuve. Soit $V = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbf{A}^n(K)$ et considérons la jacobienne de V au point $\mathbf{x}$:

$$J_V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K).$$

D'après le théorème du rang : $\dim T_{\mathbf{x}}(V) = n - \mathrm{rg}\, J_V(\mathbf{x})$. Dès lors, $\dim T_{\mathbf{x}}(V) \geq r$ ssi $\mathrm{rg}\, J_V(\mathbf{x}) \leq n-r$ ssi $\Lambda^{n-r+1} J_V(\mathbf{x}) = 0$ (où $\Lambda^{n-r+1} J_V(\mathbf{x})$ est la matrice obtenue en prenant $(\pm)$ le déterminant des mineurs d'ordre $n-r+1$ de $J_V(\mathbf{x})$). Les coefficients de $\Lambda^{n-r+1} J_V(\mathbf{x})$ étant polynomiaux en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, nous obtenons le résultat. □

Conséquence 4.7. Soit $d = \mathrm{Min}\{\dim_K T_{\mathbf{x}}(V) \mid \mathbf{x} \in V\}$; l'ensemble $V_\ell = \{\mathbf{x} \in V \mid \dim_K T_{\mathbf{x}}(V) = d\}$ est alors ouvert dans V (puisqu'il s'agit du complémentaire d'un fermé) et est non vide. Si V est supposé irréductible alors V_ℓ est dense dans V.

Définition 4.8. Un ensemble algébrique V sur un corps algébriquement clos K est *lisse* (ou *non-singulier*) *en* un point $\mathbf{x} \in V$ si $\dim_K T_{\mathbf{x}}(V) = \dim_{\mathrm{top}} V$. Un ensemble algébrique lisse en tout point est dit *lisse.*

Fait 4.9. *Soit V un ensemble algébrique sur un corps algébriquement clos K ; si V est irréductible alors* $\dim_{top} V = \mathrm{Min}\{\dim_K T_{\mathbf{x}}(V) \mid \mathbf{x} \in V\}$.

Corollaire 4.10. *Ainsi $V_\ell = \{\mathbf{x} \in V \mid V \text{ est lisse en } \mathbf{x}\}$ et est dense dans V. En particulier, ceci donne un sens à la notation.*

Exemple 4.11. Soit $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré au moins 2 ; alors $V(f)$ n'est pas lisse en $\mathbf{x} = (0, \dots, 0)$: au chapitre précédent, nous avons vu que $\dim(V(f)) = n - 1$ alors que $\dim_K T_{\mathbf{x}}(V(f)) = \dim_K \mathbf{A}^n(K) = n$.

Exemple 4.12. Soit K un corps algébriquement clos et soient n, m deux naturels non nuls simultanément ; lors de cet exemple, nous étudions la lissité de $V(X^n + Y^m) \subseteq \mathbf{A}^2(K)$.

(a) Si $n = 0$ et $m > 0$: alors $f(X, Y) = X^n + Y^m = 1 + Y^m$. Par le chapitre I, nous savons que $\dim(V(f)) = 2 - 1 = 1$. Soit à présent $(a, b) \in V(f)$, *i.e.* $b^m = -1$; la remarque 1.5 nous apprend que $\dim T_{(a,b)}(V(f)) = 2 - 1 = 1$ ssi $(0, mb^{m-1}) \neq (0, 0)$, ou encore ssi $mb^{m-1} \neq 0$.

— Si $\mathrm{char}(K) = 0$: alors $V(f)$ est lisse en (a, b) et donc $V(f)$ est lisse.

— Si $\mathrm{char}(K) = p \in \mathbf{Z}$ premier : alors $V(f)$ est lisse en (a, b) ssi p ne divise pas m. Ainsi, $V(f)$ est soit lisse (quand p ne divise m), soit lisse en aucun point (quand p divise m).

(b) Si $n > 0$ et $m > 0$: à nouveau le chapitre I nous apprend que $\dim(V(f)) = 2 - 1 = 1$ avec $f(X, Y) = X^n + Y^m$. Considérons un point $(a, b) \in V(f)$, *i.e.* $a^n = -b^m$; par la remarque 1.5, $\dim T_{(a,b)}(V(f)) = 2 - 1 = 1$ ssi $(na^{n-1}, mb^{m-1}) \neq (0, 0)$.

— Si $\mathrm{char}(K) = 0$: alors $V(f)$ est lisse en $(a, b) \neq (0, 0)$ et donc $V(f)$ est lisse sur $V(f) - \{(0, 0)\}$.

— Si $\mathrm{char}(K) = p \in \mathbf{Z}$ premier : alors $V(f)$ n'est pas lisse en (a, b) ssi $(a, b) = (0, 0)$ ou p divise n et m. Dès lors, $V(f)$ est lisse sur $V(f) - \{(0, 0)\}$ quand p ne divise pas nm et n'est lisse en aucun point sinon.

Proposition 4.13. *Tout groupe algébrique irréductible est lisse.*

Preuve. Soit G un groupe algébrique irréductible ; alors $G_\ell = \{x \in G \mid x \text{ lisse}\}$ est un ouvert non vide et donc est dense dans G. Nous concluons étant donné que les translations $\tau_y \colon G \to G \colon x \mapsto yx$ sont des isomorphismes d'ensembles algébriques. □

Remarque 4.14. Les espaces tangents et la lissité sont des notions locales ; les mêmes définitions s'appliquent aux ensembles algébriques quasi-affines. Par exemple $\mathrm{GL}_n(K)$ est lisse.

Références

[Vol07] Maja Volkov. « Géométrie algébrique : espace tangent - lissité ». US-M1-SCMATH-003-M, Projet en géométrie algébrique. 2007.