Chap III. LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Martin Debaisieux

1 L'espace projectif

Définition 1.1. Étant donné un espace vectoriel E sur un corps K, l'*espace projectif* $\mathbf{P}(E)$ *de* E est l'ensemble $(E - \{0\})/\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(K)$ des classes d'équivalence des vecteurs non nuls de E sous l'équivalence induite par l'action usuelle de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(K)$ sur $E - \{0\}$:

$$u \sim v \quad \text{ssi} \quad v = \lambda u, \text{ pour un certain } \lambda \in K^{\times}.$$

Nota Bene 1.2. La projection canonique $p : (E - \{0\}) \twoheadrightarrow \mathbf{P}(E)$ est l'application associant à $u \neq 0$ sa classe d'équivalence $[u]$ modulo $\sim$. La *dimension* $\dim(\mathbf{P}(E))$ de $\mathbf{P}(E)$ est définie comme suit : si E est de dimension infinie alors $\dim(\mathbf{P}(E)) = \dim(E)$, et si E est de dimension finie $n \geq 1$ alors $\dim(\mathbf{P}(E)) = n - 1$.

Remarque 1.3. La philosophie de la géométrie projective est de voir une classe d'équivalence $[u]$ comme un objet atomique, en omettant la structure interne de celle-ci. Pour cette raison, il est coutume d'appeler une classe d'équivalence $[u]$ un *point* de $\mathbf{P}(E)$.

Notation 1.4. Lorsque nous souhaiterons être plus explicite, nous noterons $(x_0 : \ldots : x_n)$ la classe d'équivalence comprenant le point $(x_0, \ldots, x_n)$. Le cas particulier où $E = \mathbf{A}^{n+1}(K) = K^{n+1}$ se note $\mathbf{P}^n(K)$ à la place de $\mathbf{P}(\mathbf{A}^{n+1}(K))$.

Remarque 1.5. Il est possible d'injecter $\mathbf{A}^n(K)$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$, par exemple via :

$$(x_0, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto (x_0 : \ldots : x_{n-1} : 1). \tag{1.1}$$

Il est facile de voir que cette application est injective (non canonique), et donc nous pouvons interpréter $\mathbf{A}^n(K)$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n(K)$ via cette injection. L'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ comprend ainsi plus de points que l'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$; nous allons tout d'abord investiguer sur cela.

Exemple 1.6 (La droite projective)**.** Soit K un corps ; considérons la droite affine $\mathbf{A}^1(K)$. Son image dans $\mathbf{P}^1(K)$ est constituée des points $(x : 1)$ pour $x \in K$. Tout point $(x : y) \in \mathbf{P}^1(K)$ pour lequel $y \neq 0$ est de cette forme, puisque $(x : y) = (\frac{x}{y} : 1)$ dans ce cas. Les points de $\mathbf{P}^1(K)$ à ne pas l'être sont les points $(x : 0)$ pour lequel $x \in K^{\times}$. Mais si $x \neq 0$ alors $(x : 0) = (1 : 0)$. Par conséquent, la droite projective est composée de la droite affine et d'un point supplémentaire $(1 : 0)$ à l'infini. Bien sûr, en venant placer le 1 en première composante dans (1.1), cela fournit un autre modèle de $\mathbf{P}^1(K)$.

Exemple 1.7 (Le plan projectif)**.** Soit K un corps ; le plan projectif $\mathbf{P}^2(K)$ est constituée des points $(x : y : z)$ avec $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Les points $(x : y : z)$ pour lesquels $z = 1$ peuvent être identifiés au plan affine $\mathbf{A}^2(K)$. Les points ne provenant pas du plan affine doivent donc satisfaire $z = 0$. L'ensemble de ces points est appelé la droite à l'infini de $\mathbf{P}^2(K)$; elle est constituée des points $(x : 1 : 0)$ pour $x \in K$ et de $(1 : 0 : 0)$.

Définition 1.8. Étant donné un espace vectoriel E sur un corps K, un *sous-espace projectif* $\mathbf{P}(F)$ de $\mathbf{P}(E)$ est un sous-ensemble de $\mathbf{P}(E)$ de la forme $p(F - \{0\})$ dans lequel F est un sous-K-espace vectoriel non nul de E.

Lemme 1.9. *Soit E un espace vectoriel sur un corps K de dimension $n+1$ et soient $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(W)$ deux sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(E)$ de dimension respective r et s ; alors $\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{P}(W)$ est vide ou $\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{P}(W)$ est un sous-espace projectif de dimension au moins $r+s-n$.*

Preuve. Au vu des notations, V et W sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension respective $r+1$ et $s+1$. Noter que

$$\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{P}(W) = p(V - \{0\}) \cap p(W - \{0\}) = p((V \cap W) - \{0\}) = \mathbf{P}(V \cap W).$$

L'égalité centrale découle du fait que si $[x] \in p(V - \{0\})$ et si $[y] \in p(W - \{0\})$ sont tels que $[x] = [y]$, alors $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in K^\times$ et comme V et W sont deux sous-espaces vectoriels de E, x et $y \in (V \cap W) - \{0\}$.

Supposons que $\mathbf{P}(V \cap W)$ soit non vide (dit autrement, $V \cap W \neq \{0\}$) et notons $d+1$ la dimension de $V \cap W$. Par la formule de Grassmann :

$$\dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = \dim(V + W) \leq n+1.$$

En remplaçant, $r+s-d+1 \leq n+1$ et ceci revient à dire que $r+s-n \leq d = \dim(\mathbf{P}(V \cap W))$. $\square$

Corollaire 1.10. *Une fois que $\dim(\mathbf{P}(V)) + \dim(\mathbf{P}(W)) \geq \dim(\mathbf{P}(E))$, alors $\mathbf{P}(V \cap W)$ est non vide. En particulier :*

- **(a)** *Dans le plan projectif, deux droites (sep de dimension 1) se rencontrent toujours.*
- **(b)** *L'intersection de n hyperplans dans $\mathbf{P}^n(K)$ est non vide.*
- **(c)** *Plus généralement, n hypersurfaces dans $\mathbf{P}^n(K)$ se rencontrent toujours.*

Remarque 1.11. Les bonnes propriétés d'intersection dans $\mathbf{P}^n(K)$ sont l'une des motivations fondamentales de sa construction. Une autre de ces motivation est la suivante. Soit K un corps topologique localement compact (par ex. $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{Q}_p$) ; alors $K^{n+1} - \{0\}$ peut être muni de la topologie induite par la topologie produit et donc $\mathbf{P}^n(K)$ peut être muni de la topologie quotient. Nous pouvons montrer que $\mathbf{P}^n(K)$ est alors compact et connexe. Par exemple, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à la sphère de Riemann.

2 Les hyperplans à l'infini

Il est (souvent) commode de s'imaginer $\mathbf{P}^n(K)$ comme $\mathbf{A}^n(K)$ avec un hyperplan ajouté "à l'infini". Plus précisément, nous identifions l'ensemble $U_0 = \{(1 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n(K) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n(K)\}$ à $\mathbf{A}^n(K)$ via la bijection

$$u_0 \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{A}^n(K) & \longrightarrow & U_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (1 : x_1 : \ldots : x_n) \end{array} \right.$$

d'inverse $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_1}{x_0})$ avec $x_0 \neq 0$. Le complémentaire de U_0 dans $\mathbf{P}^n(K)$ est l'ensemble $H_{\infty,0} = \{(0 : x_1 : \ldots : x_n) \; ; \; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n(K) - \{0\}\}$. En laissant tomber la première coordonnée, l'ensemble $H_{\infty,0}$ s'identifie à $\mathbf{P}^{n-1}(K)$ et est ainsi appelé l'hyperplan à l'infini. Dès lors, nous obtenons une première décomposition de $\mathbf{P}^n(K)$:

$$\boxed{\mathbf{P}^n(K) = U_0 \sqcup H_{\infty,0} \simeq \mathbf{A}^n(K) \sqcup \mathbf{P}^{n-1}(K).}$$

Évidemment, nous pouvons choisir n'importe quel U_i avec $i \in \{0, \ldots, n\}$ et son complémentaire $H_{\infty,i}$ afin de réaliser cette décomposition. Noter que peu importe le choix de $i \in \{0, \ldots, n\}$, nous aboutissons toujours à un morceau affin de dimension n et à un hyperplan à l'infini.

Exemple 2.1. Soit K un corps ; ainsi $\mathbf{P}^1(K) \simeq \mathbf{A}^1(K) \sqcup H_\infty$ avec H_∞ composé d'un seul point (comme observé lors de l'exemple 1.6) et $\mathbf{P}^2(K) \simeq \mathbf{A}^2(K) \sqcup H_\infty$ avec H_∞ une droite projective (conformément à l'exemple 1.7).

3 Exemple : les droites projectives

Considérons la décomposition de $\mathbf{P}^2(K)$ en $U_2 \sqcup H_{\infty,2}$ dans laquelle $U_2 = \{(x:y:1)\ ;\ x,y \in K\}$ et $H_{\infty,2} = \{(x:y:0)\ ;\ (x,y) \in K^2 - \{0\}\}$ est son complémentaire.

Les droites projectives sont les sous-espaces projectifs de dimension 1 dans $\mathbf{P}^2(K)$; elles proviennent du noyau des applications linéaires $L_{\alpha,\beta,\gamma}\colon K^3 \to K\colon (x,y,z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$.

Une droite projective $D = \mathbf{P}(\mathrm{Ker}(L_{\alpha,\beta,\gamma}))$ est distincte de $H_{\infty,2}$ si et seulement si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Supposons cela ; alors l'ensemble $D \cap U_2 = \{(x:y:1) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ s'identifie à une droite affine dans $U_2 \simeq \mathbf{A}^2(K)$. En l'infini, $D \cap H_{\infty,2} = \{(x:y:0) \mid \alpha x + \beta y = 0\} = \{(\beta : -\alpha : 0)\}$ est réduit en un point donnant la direction de D, à savoir $(\beta : -\alpha)$.

Conséquence 3.1. Deux droites projectives D_1 et D_2 dans $\mathbf{P}^2(K)$ sont parallèles si et seulement si $D_1 \cap H_\infty = D_2 \cap H_\infty$ (autrement dit, ssi elles ont la même direction ☺).

4 Exemple : les coniques

Remarque 4.1. Le groupe $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ agit sur $\mathbf{P}^n(K)$. Son centre est exactement le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_{n+1}(K) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^n(K))$ associé à l'action. Explicitement :

$$Z(\mathrm{GL}_{n+1}(K)) = \{a.\mathbb{1}_{n+1} \mid a \in K^\times\} \simeq K^\times.$$

Par conséquent le quotient $\mathrm{PGL}_{n+1}(K) := \mathrm{GL}_{n+1}(K)/K^\times$ agit fidèlement sur $\mathbf{P}^n(K)$. Autrement dit, le morphisme $\mathrm{PGL}_{n+1}(K) \rightarrowtail \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^n(K))$ est injectif. Ce quotient est appelé le groupe projectif linéaire. En fait, c'est l'ensemble des automorphismes de $\mathbf{P}^n(K)$ (voir §5.1-5.2 de [Sko03]).

Soit à présent $U = \{(x,y,z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid x+y = 1\} = \{(x : 1-x : z)\ ;\ x,z \in K\}$. Au même titre que U_0 et U_2, l'ensemble U fournit un modèle (une décomposition) de $\mathbf{P}^2(K)$, dont l'ensemble complémentaire est $H_\infty = \{(x:y:z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid x+y = 0\} = \{(x : -x : z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid (x,z) \neq (0,0)\}$.

Partons de $\tilde{V} = \{(x,y,1) \in \mathbf{A}^3(K) \mid xy - 1 = 0\}$ et remarquons que $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}_2 := \{(x,y,1) \in \mathbf{A}^3(K)\}$ l'espace vectoriel sous-jacent à U_2. Soit $\tilde{V}^{\mathrm{h}} = \{(x,y,z) \in \mathbf{A}^3(K) \mid xy - z^2 = 0\}$ l'ensemble algébrique résultant de l'homogénéisation de $XY - 1$ dans $K[X,Y,Z]$. Cet ensemble est par définition compatible avec la relation $\sim$: si $P \in \tilde{V}^{\mathrm{h}}$ est non nul, alors $\lambda P \in \tilde{V}^{\mathrm{h}}$ et est non nul quel que soit $\lambda \in K^\times$. Nous définissons

$$V = \{(x:y:z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid (x,y,z) \in \tilde{V}^{\mathrm{h}} - \{0\}\}$$

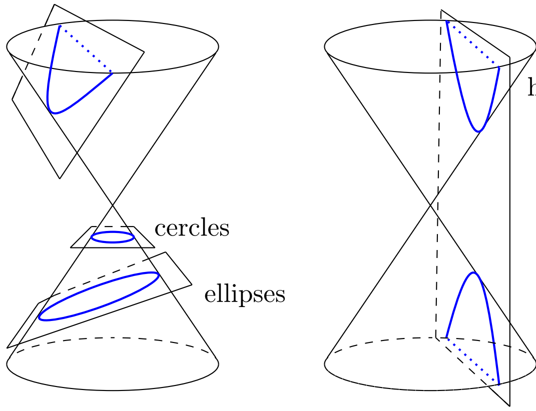
la conique de $\mathbf{P}^2(K)$ donnée par le polynôme homogène $XY - Z^2 \in K[X,Y,Z]$.

Nous retrouvons les différentes sections du cône ; celles-ci correspondent aux différents choix du plan à l'infini :

- **(H)** $V \cap U_2 = \{(x:y:1) \in \mathbf{P}^2(K) \mid xy - 1 = 0\}$ est en bijection avec l'hyperbole $V(XY-1)$ et $V \cap H_{\infty,2} = \{(x:y:0) \in \mathbf{P}^2(K) \mid xy = 0\} = \{(1:0:0),(0:1:0)\}$ est en bijection avec les deux directions des tangentes de l'hyperbole.
- **(P)** $V \cap U_0 = \{(1:y:z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid y - z^2 = 0\}$ est en bijection avec la parabole $V(Y - Z^2)$ et $V \cap H_{\infty,0} = \{(0:y:z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid z^2 = 0\} = \{(0:1:0)\}$ est en bijection avec le point (double) à l'infini, donnant les directions asymptotiques.
- **(E)** $V \cap U = \{(x : 1-x : z) \mid z^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ est en bij. avec l'ellipse $V(Z^2 + (X-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4})$ et $V \cap H = \{(x : -x : z) \in \mathbf{P}^2(K) \mid x^2 + z^2 = 0\} = \varnothing$ si X^2+1 n'admet pas de racines dans K, $\{(1:-1:i),(1:-1:-i)\}$ sinon.

Maintenant prenons K un corps admettant les racines de X^2+1 (par ex. $K = \mathbf{C}$) et notons $i \in K$ l'une d'elle. L'automorphisme $\mathbf{A}^3(K) \to \mathbf{A}^3(K)\colon (x,y,z) \mapsto (x+iy, x-iy, z)$ induit un isomorphisme au niveau des ensembles algébriques : $V(XY - Z^2) \simeq V(X^2 + Y^2 - Z^2)$.

Passons à $K = \mathbf{R}$ afin de dessiner $V(X^2 + Y^2 - Z^2)$:



Noter que sur un corps algébriquement clos, les formes quadratiques sont classifiées par leur rang ; sur $\mathbf{R}$ par leur rang et leur signature.

Conséquence 4.2. Lorsque K est algébriquement clos, toutes les coniques (*i.e.* les sep issus des zéros de formes quadratiques de rang $n+1$) sont les mêmes dans $\mathbf{P}^n(K)$, à isomorphisme de $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ près. C'est encore une motivation fondamentale pour travailler dans $\mathbf{P}^n(K)$.

5 L'espace projectif est une variété algébrique

Il est possible de munir $\mathbf{P}^n(K)$ d'une topologie en s'inspirant de ce qui a été fait sur $\mathbf{A}^n(K)$: via les lieux d'annulation de polynômes. Une manière plus naturelle d'y arriver (toutefois équivalente) est en observant que

$$\mathbf{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

avec $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n(K) \mid x_i \neq 0\}$. Noter que cette union recouvre bel et bien tout l'espace mais n'est pas disjointe. En chaque i, nous avons une bijection $u_i \colon \mathbf{A}^n(K) \to U_i$ envoyant $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $(x_1 : \ldots : 1 : \ldots : x_n)$ avec 1 en i-ième position. Si nous demandons que cette bijection soit un homéomorphisme, nous pouvons définir une topologie sur U_i par : $W \subseteq U_i$ est ouvert (resp. fermé) ssi $u_i^{-1}(W)$ est ouvert (resp. fermé). L'idée est alors de recoller chaque morceau (chaque U_i) en tenant compte de la topologie de chacun afin de reconstruire $\mathbf{P}^n(K)$. Pour y parvenir, il faut s'assurer que la topologie de chacun soit compatible au niveau des intersections :

Soient $0 \leq j < i \leq n$, nous posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Via les bijections u_i et u_j, nous construisons une bijection $u_j^{-1} \circ u_i \colon u_i^{-1}(U_{ij}) \to u_j^{-1}(U_{ij})$ entre deux sous-ensembles de $\mathbf{A}^n(K)$. Plus précisément

— $u_i^{-1}(U_{ij}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n(K) \mid a_{j+1} \neq 0\} = \mathbf{A}^n(K) - V(X_{j+1}) = D(X_{j+1})$

— $u_j^{-1}(U_{ij}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n(K) \mid a_i \neq 0\} = \mathbf{A}^n(K) - V(X_i) = D(X_i)$

sont deux ouverts de $\mathbf{A}^n(K)$ et l'application $D(X_{j+1}) \to D(X_i)$ envoie $(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'élément dont les composantes sont détaillées au tableau suivant :

valeur	$\frac{x_1}{x_{j+1}}$	$\cdots$	$\frac{x_j}{x_{j+1}}$	$\frac{x_{j+2}}{x_{j+1}}$	$\cdots$	$\frac{x_i}{x_{j+1}}$	$\frac{1}{x_{j+1}}$	$\frac{x_{i+1}}{x_{j+1}}$	$\cdots$	$\frac{x_n}{x_{j+1}}$
position	1	$\cdots$	j	$j+1$	$\cdots$	$i-1$	i	$i+1$	$\cdots$	n

Cette application est un isomorphisme d'ensembles algébriques quasi-affines (et donc en particulier un homéomorphisme).

Conclusion 5.1. L'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ est obtenu en recollant $n+1$ copies de $\mathbf{A}^n(K)$ via les isomorphismes d'ensembles algébriques quasi-affines $u_j^{-1} \circ u_i \colon D(X_{j+1}) \to D(X_i)$ pour $0 \leq j < i \leq n$.

Exemple 5.2 (La droite projective)**.** Soit K un corps ; la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$ s'obtient via le quotient de $\mathbf{A}^1(K)\times\mathbf{A}^1(K)$ par l'isomorphisme d'ens. algébriques quasi-affines $D(X) \to D(X)\colon x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exemple 5.3 (Le plan projectif)**.** Soit K un corps ; le plan projectif $\mathbf{P}^2(K)$ s'obtient via le quotient de $\mathbf{A}^1(K) \times \mathbf{A}^1(K) \times \mathbf{A}^1(K)$ par les isomorphisme d'ensembles algébriques quasi-affines :

— $u_0^{-1} \circ u_1 \colon D(X_1) \to D(X_1) \colon (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$.

— $u_0^{-1} \circ u_2 \colon D(X_1) \to D(X_2) \colon (x, y) \mapsto (\frac{y}{x}, \frac{1}{x})$.

— $u_1^{-1} \circ u_2 \colon D(X_2) \to D(X_2) \colon (x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$.

6 Les algèbres graduées et les idéaux homogènes

Définition 6.1. Une *algèbre* $\mathbf{N}$*-graduée* (ou plus simplement *algèbre graduée*) sur un corps K est une K-algèbre A dont l'espace vectoriel sous-jacent se décompose en une somme directe de sous-espaces vectoriels $A = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} A_i$ tel que le produit envoie $A_i \times A_j \to A_{i+j}$.

Terminologie 6.2. Un élément f d'une algèbre graduée s'écrit de façon unique $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$ où les $f_i \in A_i$ sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'entre-eux. Ces termes non nuls sont appelés les *composantes homogènes* de f. Les éléments de A_i sont dit *homogènes de degré* i.

Exemple 6.3. Soit K un corps ; l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$ est une K-algèbre graduée : les éléments homogènes de degré i sont les polynômes homogènes de degré i. Tout au long de ce document, nous ferons allusion à cette graduation en notant $K[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} R_i$.

Nota Bene 6.4. Toute algèbre (non graduée) A peut être dotée d'une graduation en posant $A_0 = A$ et $A_i = 0$ pour $i > 0$; cette structure est appelée graduation triviale de A.

Définition 6.5. Un idéal *homogène* d'une algèbre graduée est un idéal comprenant chacune des composantes homogènes de ses éléments.

Remarque 6.6. De la définition survient une reformulation immédiate : un idéal $\mathfrak{a}$ de $A = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} A_i$ est homogène si et seulement si $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}}(A_i \cap \mathfrak{a})$.

Proposition 6.7. *Un idéal* $\mathfrak{a}$ *d'une algèbre graduée* A *est homogène si et seulement s'il est engendré par des éléments homogènes (ceci nous permettra plus tard de procéder comme en affine).*

Preuve. Clairement, tout idéal engendré par des éléments homogènes est homogène. Réciproquement, posons $\mathfrak{b}$ l'idéal engendré par toutes les composantes homogènes des éléments présents dans $\mathfrak{a}$; il s'agit alors d'un idéal homogène contenu dans $\mathfrak{a}$. Soit $f \in \mathfrak{a}$, alors $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$ et chaque $f_i \in \mathfrak{b}$. Dès lors, $f \in \mathfrak{b}$ et donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. □

Remarque 6.8. Si A est de plus noethérien, alors tout idéal homogène est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes ; c'est en particulier le cas de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Proposition 6.9. *Un idéal homogène* $\mathfrak{p}$ *d'une algèbre graduée* A *est premier si et seulement s'il vérifie la condition de primalité sur les éléments homogènes de* A *(si* f, $g \in A$ *sont homogènes tels que* $fg \in \mathfrak{p}$, *alors* $f \in \mathfrak{p}$ *ou* $g \in \mathfrak{p}$*).*

Preuve. Supposons au contraire qu'il existe des éléments f, $g \in A$ dont seul le produit est dans $\mathfrak{p}$. Prenons fg minimal au sens du degré : $\deg(fg) = \deg(f)+\deg(g)$. Puisque $\mathfrak{p}$ est homogène, il comprend chacune des composantes homogènes de fg ; en particulier $f_d f_s$ où f_d et f_s sont respectivement les composantes homogènes de plus haut degré de f et g. Dès lors, l'un d'eux est dans $\mathfrak{p}$: disons $f_d \in \mathfrak{p}$. L'élément $(f - f_d)g \in \mathfrak{p}$ et pourtant ni $(f - f_d)$, ni g appartient à $\mathfrak{p}$, venant ainsi contredire l'hypothèse de minimalité sur fg. □

Remarque 6.10. Un simple exercice de vérification permet de montrer que la somme, le produit, l'intersection et le quotient (lorsque celui-ci a un sens) de deux idéaux homogènes est homogène et que le radical d'un idéal homogène est homogène.

7 Les objets de la géométrie projective

Nous allons à présent copier le cas affine : nous définissions sur l'espace projectif une topologie (la même que précédemment) dont les fermés sont donnés par les lieux d'annulation de polynômes.

Définition 7.1. Soit K un corps ; un point $[x]$ de $\mathbf{P}^n(K)$ est un *zéro* d'un polynôme $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ lorsque $f(\lambda x) = 0$ quel que soit le $\lambda \in K^\times$. Il nous arrivera d'écrire que $[x]$ est un zéro de f si $f([x]) = 0$.

Remarque 7.2. Si f est homogène de degré $d \geq 0$ alors $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ pour tout $\lambda \in K^\times$. Ainsi, $f(x) = 0$ si et seulement si $f([x]) = 0$. Dans le cas général, $f = f_0 + \cdots + f_d$ avec f_i la composante homogène de degré i de f et d son degré (cf. algèbre graduée). Alors $f(\lambda x) = f_0(x) + \cdots + \lambda^d f_d(x)$ et donc

$$\boxed{\text{Si } K \text{ est infini : } \quad f([x]) = 0 \quad \text{ssi} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, d\},\ f_i(x) = 0.}$$

Pour cette raison, **nous travaillons désormais exclusivement avec des corps infinis**. Pour rappel, tout corps algébriquement clos (toute caractéristique confondue) est infini.

Définition 7.3. Soit K un corps ; un *sous-ensemble algébrique (projectif)* $V(S)$ de $\mathbf{P}^n(K)$ est l'ensemble des zéros communs à un ensemble de polynôme S de $K[X_0, \dots, X_n]$:

$$V(S) = \{[x] \in \mathbf{P}^n(K) \mid f([x]) = 0 \text{ pour tout } f \in S\}.$$

Remarque 7.4. Comme lors du cas affine, il est aisé de constater V est décroissant : si $S \subseteq S'$ alors $V(S) \supseteq V(S')$. De même, si $\mathfrak{a}$ désigne l'idéal engendré par S dans $K[X_0, \dots, X_n]$ alors $V(S) = V(\mathfrak{a})$. Dans les faits, si $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ désigne l'ensemble algébrique affine correspondant alors :

$$V(\mathfrak{a}) = (V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a}) - \{0\})/\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(K).$$

Remarque 7.5. Soit $\mathfrak{a}$ est un idéal de $K[X_0, \dots, X_n]$; alors $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$ pour certains polynômes $f_i \in K[X_0, \dots, X_m]$ puisque cet anneau est noethérien. En notant $h_1, \dots, h_s$ les composantes homogènes de tous les f_i, il survient par définition même de V que

$$V(\mathfrak{a}) = V(f_1, \dots, f_m) = V(h_1, \dots, h_s).$$

Exemple 7.6. Soit K un corps. L'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ est un ensemble algébrique projectif ; il s'agit du lieu d'annulation de 0. Par opposition, tout polynôme constant non nul ne possède pas de racine et donc l'ensemble vide est algébrique projectif. En particulier, $V(K[X_0, \dots, X_n])$ est vide. Noter également que $V(X_0, \dots, X_n)$ est vide mais ne rentre pas dans la situation précédente.

Exemple 7.7. Soit K un corps ; considérons un point $[x] = (x_0 : \dots : x_n)$ de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$.

— $V(x_j X_i - x_i X_j \mid 0 \leq i < j \leq n) = \{[x]\}$, mais aussi

— $V(X_0 - \frac{x_0}{x_j} X_j, \dots, X_n - \frac{x_n}{x_j} X_j) = \{[x]\}$ où x_j est une composante non nulle de $[x]$.

Remarque 7.8. Les sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}^n(K)$ sont les sous-ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n(K)$ des formes linéaires définissant les sev sous-jacents de K^{n+1}.

Proposition 7.9. *Soit K un corps ; les sous-ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n(K)$ satisfont :*

(a) $V(0) = \mathbf{P}^n(K)$ *et* $V(K[X_0, \dots, X_n]) = \varnothing$.

(b) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ *pour tous idéaux homogènes* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in K[X_0, \dots, X_n]$.

(c) $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$ *pour toute famille d'idéaux* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *homogènes de* $K[X_0, \dots, X_n]$.

Remarque 7.10. La proposition précédente montre que les sous-ensembles algébriques projectifs de $\mathbf{P}^n(K)$ satisfont les axiomes pour être les fermés d'une topologie sur $\mathbf{P}^n(K)$. Cette topologie est à nouveau appelée *topologie de Zariski* sur $\mathbf{P}^n(K)$. La topologie induite sur un sous-ensemble V de $\mathbf{P}^n(K)$ est la *topologie de Zariski* sur V.

Exemple 7.11 (La droite projective)**.** La topologie de Zariski sur la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$ est la topologie cofinie. En particulier (sous l'hypothèse que K est infini), la droite affine $\mathbf{A}^1(K)$ et la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$ sont homéomorphes.

Exemple 7.12. Soit K un corps ; les ensembles $D^+(X_i) := U_i$ sont ouverts dans $\mathbf{P}^n(K)$ pour la topologie de Zariski. De plus, les applications $u_i \colon \mathbf{A}^n(K) \to D^+(X_i)$ sont des homéomorphismes (cf. l'espace projectif est une variété algébrique).

Remarque 7.13. Les ensembles $D^+(f) := \mathbf{P}^n(K) - V(f)$ construits à partir d'un polynôme homogène f de $K[X_0, \ldots, X_n]$ forment une base d'ouverts de $\mathbf{P}^n(K)$.

Remarque 7.14. Soit V un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}^n(K)$; V est alors muni de la topologie induite et la même notion d'irréductibilité qu'en affine (avec le même théorème de décomposition) s'applique au cas projectif. En particulier $\mathbf{P}^n(K)$ est irréductible (car K est infini).

8 Le Nullstellensatz projectif

Définition 8.1. Soit K un corps ; l'*idéal rattaché* à un ensemble de points W de $\mathbf{P}^n(K)$ est l'ensemble $I(W)$ des polynômes de $K[X_0, \ldots, X_n]$ s'annulant en tout point de W :

$$I(W) = \{f \in K[X_0, \ldots, X_n] \mid f([x]) = 0 \text{ pour tout } [x] \in W\}.$$

Remarque 8.2. De par la remarque 7.2, nous nous assurons que $I(W)$ est un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$. Précisément : $I(W)$ est l'idéal engendré par les polynômes homogènes de $K[X_0, \ldots, X_n]$ s'annulant en tout point de W. Similairement au cas affine, $I(W)$ est un idéal radical. De plus, I est décroissant : si $V \subseteq W$ alors $I(V) \supseteq I(W)$.

Proposition 8.3. *Soit K un corps ; les idéaux rattachés de $K[X_1, \ldots, X_n]$ satisfont :*

- **(a)** $I(\varnothing) = K[X_0, \ldots, X_n]$ *et* $I(\mathbf{P}^n(K)) = (0)$.
- **(b)** $I(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcap_{i \in I} I(W_i)$ *pour toute famille* $(W_i)_{i\in I}$ *de sous-ensembles de* $\mathbf{P}^n(K)$.

Proposition 8.4. *Soit K un corps et soit W un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n(K)$; alors $VI(W)$ est le plus petit sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}^n(K)$ contenant W. En particulier, $VI(W) = W$ si W est un ensemble algébrique projectif.*

Remarque 8.5. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$ alors $\mathfrak{a} \subseteq IV(\mathfrak{a})$. L'égalité survient (sur un corps algébriquement clos) lorsque $\mathfrak{a}$ est radical et que $V(\mathfrak{a})$ est non vide : c'est la version projective du Nullstellensatz. Pour le prouver, nous allons nous ramener en affine avec l'aide des cônes.

Définition 8.6. Soit K un corps ; le *cône* $C(V)$ d'un sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$ dans $\mathbf{A}^{n+1}(K)$ est donné par

$$C(V) = p^{-1}(V) \cup \{0\}.$$

Nota Bene 8.7. Le cône d'un sous-ensemble algébrique est un cône au sens usuel : pour n'importe quel point de $C(V)$, le cône $C(V)$ contient la droite passant par ce point et l'origine.

Remarque 8.8. Afin de les distinguer, nous indiçons les ensembles algébriques selon qu'ils sont projectifs ou affines. Soit $V = V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$. On remarque que $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ est lui-aussi un cône car $\mathfrak{a}$ est homogène. Par construction :

$$C(V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})) = V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad p(V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a}) - \{0\}) = V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}).$$

Nous avons donc un moyen de basculer entre le cas projectif et le cas affine : tantôt en utilisant les cônes, tantôt en projetant. Noter également que

$$I_{\mathrm{p}}(V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})) = I_{\mathrm{a}}(C(V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}))).$$

Nous pouvons désormais passer au Nullstellensatz projectif ; noter qu'il est bon de prendre connaissance de la remarque (technique) 8.10 avant la preuve.

Théorème 8.9 (Nullstellensatz projectif)**.** *Soit K un corps algébriquement clos. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$; alors :*

(a) *$V(\mathfrak{a})$ est vide si et seulement si $(X_0, \ldots, X_n) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.*

(b) *Si $V(\mathfrak{a})$ est non vide alors $IV(\mathfrak{a}) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.*

PREUVE. **(a)** Nous tirons de notre précédente discussion que $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ est vide si et seulement si $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ est vide ou vaut $\{0\}$. Or, le Nullstellensatz affine nous apprend que $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ est vide si et seulement si $\mathfrak{a} = K[X_0, \ldots, X_n] = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$, et que $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a}) = \{0\}$ si et seulement si $(X_0, \ldots, X_n) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$. Dans les deux situations, $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ est vide si et seulement si $(X_0, \ldots, X_n) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.

(b) Supposons $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ non vide. Nous savons déjà que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}) \subseteq I_{\mathrm{p}}V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ étant donné que $I_{\mathrm{p}}V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ est radical. Pour l'inclusion réciproque, considérons $f \in I_{\mathrm{p}}V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ et posons $f = f_0 + \cdots + f_d$ ses composantes homogènes. Ainsi, $f([x]) = 0$ en tout $[x] \in V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ ssi $f_i(x) = 0$ en tout $[x] \in V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a})$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$; ou encore ssi $f_i(x) = 0$ en tout $x \in V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$; ou encore (Nullstellensatz affine) ssi il existe un $s_i > 0$ tel que $f_i^{s_i} \in \mathfrak{a}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$. En prenant $m = 2\mathrm{Max}(2^d s_0, 2^{d-1} s_1, \ldots, s_d)$, nous pouvons montrer que $f^m \in \mathfrak{a}$ et donc que $f \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$. □

Remarque 8.10. Soit K un corps ; rappelons que l'idéal $(X_0, \ldots, X_n) = \bigoplus_{i \geq 1} R_i$ est maximal dans $K[X_0, \ldots, X_n]$; son quotient est $K = R_0$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$.

(a) Si $\mathfrak{a}$ diffère de $K[X_0, \ldots, X_n]$ alors $\mathfrak{a}$ est contenu dans $(X_0, \ldots, X_n) = \bigoplus_{i \geq 1} R_i$.

(b) Il existe un $j \geq 1$ tel que $R_j \subseteq \mathfrak{a}$ si et seulement si $\bigoplus_{i \geq 1} R_i \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$, ou encore si et seulement si $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}) = (X_0, \ldots, X_n)$ ou $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}) = K[X_0, \ldots, X_n]$.

Corollaire 8.11 (Correspondance)**.** *Soit K algébriquement clos ; l'application $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ définit une correspondance entre les idéaux homogènes radicaux de $K[X_0, \ldots, X_n]$ ne contenant pas $(X_0, \ldots, X_n)$ et les sous-ensembles algébriques projectifs non vides de $\mathbf{P}^n(K)$, d'inverse I.*

Remarque 8.12. Sous cette correspondance, les idéaux premiers correspondents aux ensembles algébriques irréductibles (comme en affine), par contre les idéaux maximaux ne correspondent plus aux points : $(X_0 - a_0, \ldots, X_n - a_n)$ est homogène ssi $(a_0, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$. Dans l'espace projectif, cette correspondance est :

$$\{(x_0 : \ldots : x_n)\} \subseteq \mathbf{P}^n(K) \quad \leftrightarrow \quad (x_j X_i - x_i X_j \mid 0 \leq i < j \leq n) \subseteq K[X_0, \ldots, X_n].$$

Définition 8.13. Soit K un corps algébriquement clos et soit V un sous-ensemble algébrique projectif non vide de $\mathbf{P}^n(K)$; l'*anneau des coordonnées homogènes de V* est

$$K_{\mathrm{h}}[V] := K[X_0, \ldots, X_n]/I(V).$$

Nota Bene 8.14. Puisque l'idéal $I(V)$ est homogène, nous pouvons réécrire $I(V) = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}}(R_i \cap I(V))$ et par conséquent :

$$K_{\mathrm{h}}[V] = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} (R_i/(R_i \cap I(V))).$$

Il s'agit d'une K-algèbre de type fini, réduite et graduée. Cependant, et nous le verrons par la suite, $K_{\mathrm{h}}[V]$ n'est pas l'anneau des fonctions polynômiales $V \to K$.

Définition 8.15. Un *ensemble algébrique quasi-projectif* sur un corps K est l'intersection entre un ensemble algébrique projectif et un ouvert du même espace projectif sur K.

Remarque 8.16. Considérons la décomposition de $\mathbf{P}^n(K)$ en $\bigcup_{i=0}^n U_i$ avec les ouverts $U_i = D^+(X_i)$ homéomorphes à $\mathbf{A}^n(K)$. Tout sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$ se décompose à son tour en $V = \bigcup_{i=0}^n (U_i \cap V)$ où les $V_i := U_i \cap V$ sont homéomorphes à des fermés de $\mathbf{A}^n(K)$ (*i.e.* à des ensembles algébriques affines) et s'obtient donc en recollant les $n+1$ ensembles algébriques affines V_i via les $u_j \circ u_i^{-1}$ restreints aux $V_i \cap V_j = V \cap U_{ij}$.

Conséquence 8.17. Pour toutes les questions locales en point P d'un ensemble algébrique projectif V (par exemple le plan tangent, la lissité), nous nous plaçons sur un V_i comprenant P et nous travaillons en affine (les résultats sont indépendants du choix de V_i grâce aux isomorphismes $u_j \circ u_i^{-1}$).

Remarque 8.18. Soit $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a}) = V_{\mathrm{a}}(f_1, \dots, f_m)$ un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbf{A}^n(K)$. Pour tout $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ avec $f = f_0 + \cdots + f_d$ ses composantes homogènes, nous posons

$$f^{\mathrm{h}}(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f_0(X_1, \dots, X_n) + X_0^{d-1} f_1(X_1, \dots, X_n) + \cdots + f_d(X_1, \dots, X_n)$$

l'homogénéisé de f (c'est donc un polynôme homogène de degré d). Alors $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{h}}) := V_{\mathrm{p}}(f_1^{\mathrm{h}}, \dots, f_m^{\mathrm{h}})$ est un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}^n(K)$ satisfaisant $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{h}}) \cap U_0 \simeq V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$. Cet ensemble est appelé la *clôture projective de* $V_{\mathrm{a}}(\mathfrak{a})$ *relativement à* U_0.

9 Les morphismes en projectif

En projectif, la situation est très différente de celle en affine. Par exemple, les applications $\mathbf{P}^n(K) \to K$ sont constantes, ce qui rend leur étude très pauvre. Les deux paragraphes faisant suite viennent le motiver (voir corollaire 14.7 pour une preuve).

Étant donné un polynôme $f \in K[X_0, \dots, X_n]$, l'application $f \colon \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\} \to K \colon x \mapsto f(x)$ se factorise pour la relation $\sim$ si $[f(x) = f(y)$ lorsque $x \sim y]$. Sous cette volonté, notons $f = f_0 + \cdots + f_d$ son écriture en composantes homogènes. Dès lors $f(\lambda x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\}$ si et seulement si

$$f_d(x)\lambda^d + \cdots + f_1(x)\lambda - (f_1(x) + \cdots + f_d(x)) = 0$$

pour tout $x \in \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\}$. Comme K est supposé infini, si f se factorise pour $\sim$ alors chaque composante f_i est nulle pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et donc $f = f_0$ est constante.

Considérons la décomposition $\mathbf{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ où chaque U_i est homéomorphe à $\mathbf{A}^n(K)$. Un morphisme $\phi \colon \mathbf{P}^n(K) \to K$ doit alors induire un morphisme $f_i \colon \mathbf{A}^n(K) \to K$ pour chaque $\phi_i := \phi\,|_{U_i}$ et doit être compatible au niveau des intersections : $\phi_i\,|_{U_{ij}} = \phi_j\,|_{U_{ij}}$. Pour des raisons de clarté, prenons $n = 1$ (similaire sinon). Dès lors $\phi_0 = u_0^{-1} \circ f_0$ et $\phi_1 = u_1^{-1} \circ f_1$. Ces applications coïncident sur U_{01} si et seulement si

$$f_0(\tfrac{x_1}{x_0}) = f_1(\tfrac{x_0}{x_1}) \quad \text{en tout point } (x_0 : x_1) \in U_{01}.$$

Autrement dit, ces applications coïncident ssi $f_0(\lambda) = f_1(\frac{1}{\lambda})$ pour tout $\lambda \in K^\times$. Sous cette hypothèse, $f_0(X) = f_1(\frac{1}{X})$ dans $K(X)$ et donc $f_0 = f_1$ sont constants.

Conclusion 9.1. Soit K un corps ; les morphismes $\mathbf{P}^n(K) \to K$ sont constants. En particulier, l'anneau $K[\mathbf{P}^n(K)] = \{\text{applications constantes}\}$ est distinct de $K_{\mathrm{h}}[\mathbf{P}^n(K)]$.

Remarque 9.2 (Analogie analytique)**.** Selon le théorème de Liouville, toute application $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ holomorphe (automatiquement bornée) est constante.

Donnons-nous un peu plus de chance d'obtenir des flèches plus intéressantes en considérant les applications $\mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^m(K)$. Soit $\phi \colon \mathbf{A}^{n+1}(K) \to \mathbf{A}^{m+1}(K) \colon x \mapsto (\phi_0(x), \dots, \phi_m(x))$; afin d'induire une application $\mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^m(K)$ il faut au préalable s'assurer que

$$(\phi_0(x), \dots, \phi_m(x)) = (0, \dots, 0) \implies x = (0, \dots, 0). \tag{9.1}$$

Dès lors $p \circ \phi \colon \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\} \to \mathbf{A}^{m+1}(K) - \{0\} \twoheadrightarrow \mathbf{P}^m(K) \colon x \mapsto (\phi_0(x) : \dots : \phi_m(x))$ se factorise à travers la relation $\sim$ dans $\mathbf{A}^{n+1}(K)$ si et seulement si

$$(\phi_0(x), \dots, \phi_m(x)) = (\phi_0(\lambda x), \dots, \phi_m(\lambda x)) \quad \text{pour tous } x \in \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\} \text{ et } \lambda \in K^\times. \tag{9.2}$$

À nouveau simplifions les notations en prenant $m = 1$ (le cas général s'obtient en considérant une généralisation du déterminant via le wedge). Alors (9.2) revient à demander que

$$\begin{vmatrix} \phi_0(x) & \phi_0(\lambda x) \\ \phi_1(x) & \phi_1(\lambda x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour tous } x \in \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\} \text{ et } \lambda \in K^\times.$$

En notant $\phi_0 = f_0 + \cdots + f_r$ et $\phi_1 = g_0 + \cdots + g_s$ leur écriture en composantes homogènes, nous pouvons montrer que (9.2) revient à demander que $r = s$ et que chaque $f_i(x)g(x) = g_i(x)f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\}$. Dit autrement (moyennant (9.1)), ceci revient à demander que

$$\frac{\phi_0(X_0, \ldots, X_n)}{\phi_1(X_0, \ldots, X_n)} = \frac{f(X_0, \ldots, X_n)}{g(X_0, \ldots, X_n)}$$

avec f, g deux polynômes homogènes de même degré dans $K[X_0, \ldots, X_n]$. En somme, nous obtenons une application $\mathbf{A}^{n+1}(K) - \{0\} \to \mathbf{P}^1(K)$ donnée par $x \mapsto (f(x) : g(x))$ et se factorisant à travers $\sim$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^n(K) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(K) \\ [x] & \longmapsto & (f(x) : g(x)). \end{array}$$

Puisqu'en effet, $(f(\lambda x) : g(\lambda x)) = (\lambda^s f(x) : \lambda^s g(x)) = (f(x) : g(x))$ si s désigne le degré de f et g. Noter que par ailleurs, deux tels couples (f_1, g_1) et (f_2, g_2) définissent la même application $\mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^1(K)$ si $f_1 g_2 - g_1 f_2 = 0$.

Définition 9.3. Soit K un corps ; étant donné un sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$, une application $\phi\colon V \dashrightarrow K$ est *rationnelle* si elle est de la forme $\phi = \frac{f}{g}$ avec f, g deux polynômes homogènes de même degré dans $K[X_0, \ldots, X_n]$ et g ne s'annulant pas partout sur V (*i.e.* $g \notin I(V)$).

Exemple 9.4. Soit K un corps ; l'application $\phi\colon \mathbf{P}^n(K) \dashrightarrow K\colon (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto \frac{x_0}{x_n}$ est rationnelle mais attention elle n'est pas partout définie.

Définition 9.5. Soit K un corps ; étant donné un sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$, une application rationnelle $\phi\colon V \dashrightarrow K$ est *régulière en un point* $x \in V$ si $g(x)$ est non nul. Elle est dite *régulière* lorsqu'elle est régulière en tout point de V.

Exemple 9.6. L'application rationnelle de l'exemple 9.4 est régulière sur U_n (venant justifier le fait qu'elle ne soit pas partout définie).

Définition 9.7. Soit K un corps ; étant donné un sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$, une application $\phi\colon V \dashrightarrow \mathbf{P}^m(K)$ est *rationnelle* si elle est de la forme $\phi = (\frac{f_0}{g_0}, \ldots, \frac{f_m}{g_m})$ où les composantes sont des applications rationnelles sur V non toutes nulles.

Exemple 9.8. Soit K un corps ; l'application $\mathrm{Id}\colon \mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^m(K)\colon (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0 : \ldots : x_n)$ est rationnelle et partout définie. Elle s'écrit localement comme $\mathrm{Id}\,|_{U_i}\colon (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i})$. L'application $\mathbf{P}^2(K) \dashrightarrow \mathbf{P}^1(K)\colon (x : y : z) \mapsto (x : y)$ est également rationnelle mais n'est pas partout définie : $(0 : 0 : 1)$ n'a pas d'image.

Définition 9.9. Soit K un corps ; étant donné un sous-ensemble algébrique projectif V de $\mathbf{P}^n(K)$, une application rationnelle $\phi\colon V \dashrightarrow \mathbf{P}^m(K)$ est *régulière en un point* $x \in V$ s'il existe un représentant $\big(\frac{f_0}{g_0}, \ldots, \frac{f_m}{g_m}\big)$ tel que $\big(\frac{f_0(x)}{g_0(x)}, \ldots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)}\big) \neq (0, \ldots, 0)$ et où toutes les $\frac{f_i}{g_i}$ sont régulières en x. Elle est appelée *morphisme* lorsqu'elle est régulière sur tout V.

Exemple 9.10. L'application identité de l'exemple 9.8 est un morphisme ; par contre, l'autre application n'en est pas un (elle n'est pas régulière en $(0 : 0 : 1)$).

Exemple 9.11. Soit K un corps ; l'application $\mathrm{PGL}_{n+1}(K) \rightarrowtail \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^n(K))$ de la remarque 4.1 est un morphisme et il s'agit même d'un isomorphisme (voir §5.1-5.2 de [Sko03]).

Exemple 9.12. Soit K un corps et soient $n \leq m$; le monomorphisme (plongement) d'ensembles algébriques affines $\mathbf{A}^{n+1}(K) \rightarrowtail \mathbf{A}^{m+1}(K) \colon (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ induit un plongement d'ensembles algébriques projectifs

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}^n(K) & \rightarrowtail & \mathbf{P}^m(K) \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (x_0 : \ldots : x_n : 0 : \ldots : 0). \end{array}$$

Bien évidemment, cet exemple se généralise à n'importe quelle application linéaire injective.

Exemple 9.13. Soit K un corps et soit E un sep de $\mathbf{P}^n(K)$ de dimension d. Alors E peut s'obtenir via l'ensemble des zéros de $f_1, \dots, f_{n-d}$ de polynômes homogènes de degré 1 et linéairement indépendants. La fonction $\pi \colon \mathbf{P}^n(K) \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-d-1}(K)$ donnée par $x \mapsto (f_1(x) : \ldots : f_n(x))$ est rationnelle et régulière sur $\mathbf{P}^n(K) - E$. En prenant V un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}^n(K)$ disjoint de E, la restriction de π à V est une application régulière $V \to \mathbf{P}^{n-d-1}(K)$.

Exemple 9.14. Soit K un corps. Pour tout $n \geq 1$ posons $f_n \colon \mathbf{P}^1(K) \to \mathbf{P}^n(K)$ le morphisme donné par $(x : y) \mapsto (x^n : x^{n-1}y : \ldots : xy^{n-1} : y^n)$ dont l'image $C_n = V(X_0X_2 - X_1^2, \dots, X_{n-2}X_n - X_{n-1}^2)$ est ce qu'on appelle une *courbe normale rationnelle* dans $\mathbf{P}^n(K)$. Alors $f_n \colon \mathbf{P}^1(K) \to C_n$ est un isomorphisme, d'inverse donnée par $f_n((x : y)) = (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0 : x_1) = \cdots = (x_{n-1} : x_n)$ si xy est non nul, sinon $(1 : 0 : \ldots : 0) \mapsto (1 : 0)$ et $(0 : \ldots : 0 : 1) \mapsto (0 : 1)$.

Conséquence 9.15. En particularisant à $n = 2$; $C_2 = V(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbf{P}^2(K)$ est une conique pour laquelle f_2 fournit une paramétrisation rationnelle. En conclusion, toutes les coniques (de rang maximal) dans $\mathbf{P}^2(K)$ sont isomorphes à $\mathbf{P}^1(K)$.

10 Exemple : le plongement de Veronese

Il s'agit d'une généralisation de l'exemple 9.14 (prendre $n = 1$ et m arbitraire) dans laquelle nous considérons tous les monômes de degré d (rangés dans l'ordre lexicographique). Ceci définit un isomorphisme entre $\mathbf{P}^n(K)$ et un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}^m(K)$ avec $m = \binom{n+d}{n} - 1$. Explicitement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}^n(K) & \rightarrowtail & \mathbf{P}^m(K) \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (y_1 : \ldots : y_m) \end{array}$$

avec $y_i = x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}$ où $s_0 + \cdots + s_n = d$ et pour $i = \text{Lexico}(s_0, \dots, s_n)$.

Exemple 10.1. En prenant $n = d = 2$, le plongement de Veronese correspondant est le monomorphisme $\mathbf{P}^2(K) \rightarrowtail \mathbf{P}^5(K)$ donné par $(x_0 : x_1; x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$.

11 Exemple : le plongement de Segre

Ce plongement est obtenu par produit tensoriel des vecteurs. Explicitement, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}^{n+1}(K) \times \mathbf{A}^{m+1}(K) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{n+1}(K) \otimes_K \mathbf{A}^{m+1}(K) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longmapsto & \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \end{array}$$

pour laquelle nous identifions $\mathbf{A}^{n+1}(K) \otimes_K \mathbf{A}^{m+1}(K)$ à $\mathbf{A}^{(n+1)(m+1)}(K)$ en tant que K-ev (via l'ordre lexicographique), se factorise à travers la relation $\sim$: $(\lambda\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) \mapsto \lambda\mathbf{x} \otimes \mu\mathbf{y} = \lambda\mu(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$. Nous en déduisons un monomorphisme $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^m(K) \rightarrowtail \mathbf{P}^{nm+n+m}(K)$ du nom de plongement de Segre.

Remarque 11.1. Le plongement de Segre s'utilise afin de définir la structure d'un ensemble algébrique projectif $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^m(K)$: nous réalisons le produit de deux ensembles algébriques projectifs comme un sous-ensemble fermé d'un espace projectif.

Exemple 11.2. En prenant $n = 2$ et $m = 1$, le plongement de Segre correspondant est le monomorphisme $\mathbf{P}^2(K) \times \mathbf{P}^1(K) \rightarrowtail \mathbf{P}^5(K) \colon ((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1)$.

12 Exemple : les courbes elliptiques

Travaillons sur un corps algébriquement clos K et soient a, b deux éléments de K. Le sous-ensemble algébrique projectif

$$E = V(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^2)$$

de $\mathbf{P}^2(K)$ est ce que l'on appelle une courbe cubique plane projective. Noter que E est lisse ssi l'ensemble $V_a(Y^2 - X^3 - aX - b)$ est lisse, ou encore ssi $27b^2 + 4a^3 \neq 0$ (autrement dit, ssi $X^3 + aX + b$ admet trois racines distinctes dans K). Sous cette hypothèse, E est une *courbe elliptique* dans $\mathbf{P}^2(K)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x:y:z) & \longmapsto & (x:-y:z) \end{array}$$

est un automorphisme non-trivial de E admettant (au moins) quatre points fixes ; à savoir $(\alpha_1 : 0 : 1)$, $(\alpha_2 : 0 : 1)$, $(\alpha_3 : 0 : 1)$ et $(0 : 1 : 0)$ avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in K$ les trois racines distinctes de $X^3 + aX + b$ dans K.

Conséquence 12.1. La courbe E ne peut pas être isomorphe (en tant qu'ensembles algébriques projectifs) à $\mathbf{P}^1(K)$. Si c'était le cas, alors $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(K)) \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$. Or, un élément de $\mathrm{PGL}_2(K)$ fixant trois points distincts de $\mathbf{P}^1(K)$ est nécessairement l'identité. En particulier, toute courbe elliptique dans $\mathbf{P}^2(K)$ n'est pas une courbe rationnelle.

13 Les morphismes en quasi-projectifs

Définition 13.1. Soit K un corps et soit V un sous-ensemble algébrique quasi-projectif de $\mathbf{P}^n(K)$; une application $\phi\colon V \dashrightarrow K$ est *rationnelle* si elle est de la forme $\phi = \frac{f}{g}$ avec f, g deux polynômes homogènes de même degré dans $K[X_0, \ldots, X_n]$ et g ne s'annulant pas partout sur V.

Définition 13.2. Soit K un corps et soit V un sous-ensemble algébrique quasi-projectif de $\mathbf{P}^n(K)$; une application rationnelle $\phi\colon V \dashrightarrow K$ est *régulière en un point* $x \in V$ si $g(x)$ est non nul. Elle est dite *régulière* lorsqu'elle est régulière en tout point de V.

Remarque 13.3. Soit $K[V]$ la K-algèbre des applications régulières de V. Si V est un ensemble algébrique affine, alors nous avons vu que $K[V]$ est une K-algèbre de type fini. Si V est un ensemble algébrique projectif, alors $K[V]$ est la K-algèbre des fonctions constantes de V et est donc de type fini. Par contre, il existe des ensembles algébriques quasi-projectifs V pour lesquels $K[V]$ n'est pas de type fini (construit par Nagata-Rees).

Définition 13.4. Lorsque V et W sont tous deux des ensembles algébriques quasi-projectifs, nous définissons de façon similaire à 9.7 et 9.9 les applications rationnelles (régulières) $V \dashrightarrow W$.

Définition 13.5. Soit K un corps ; un *morphisme* $V \to W$ entre deux ensembles algébriques quasi-projectifs sur K est une application rationnelle partout régulière.

Nota Bene 13.6 (catégorique)**.** Bien sûr, tout morphisme $\phi\colon V \to W$ en induit un au niveau des K-algèbres : $\phi^\star\colon K[W] \to K[V] \colon f \mapsto f \circ \phi$. Mais cette fois il n'y a pas d'(anti-)équivalence de catégories.

Exemple 13.7. Soit K un corps et soit V un ensemble algébrique projectif sur K. Considérons une application régulière ϕ sur V et notons $V_\phi = \{x \in V \mid \phi(x) \neq 0\}$; alors :

$$K[V_\phi] = (K[V])[\tfrac{1}{\phi}].$$

L'inclusion dans le sens contraire à la lecture est facile. Réciproquement, considérons $f \in K[V_\phi]$. Soit l'idéal des dénominateurs de f :

$$\mathfrak{a}_f = \{0\} \cup \left\{ h \in K[V] \;\middle|\; V_h \subseteq V_\phi \text{ et } f = \frac{g}{h} \text{ sur } V_h \right\}.$$

Pour tout $x \in V_\phi$, $f(x)$ existe et donc $h(x) \neq 0$; ainsi $x \notin V(\mathfrak{a}_f)$. Dès lors $V(\mathfrak{a}_f) \subseteq V(\phi)$ et par le Nullstellensatz nous obtenons que $\phi^n \in \mathfrak{a}_f$ pour un certain $n \geq 1$. Donc $f = \frac{g}{\phi^n}$ sur $V_{\phi^n} = V_\phi$.

Remarque 13.8. En prenant V irréductible, deux applications rationnelles $\phi_1 = \frac{f_1}{g_1}$ et $\phi_2 = \frac{f_2}{g_2}$ sur V sont égales si et seulement si V est contenu dans $V(f_1g_2 - f_2g_1)$.

Notation 13.9. Posons $K(V)$ l'ensemble des applications rationnelles de V. Contrairement à précédemment, il n'est pas vrai que $K(V)$ est le corps des fractions de $K[V]$: en général, nous ne pouvons compter que sur l'inclusion $\operatorname{Frac} K[V] \subseteq K(V)$.

Définition 13.10. Soit K un corps ; étant donné $V \subseteq \mathbf{P}^n(K)$ et $W \subseteq \mathbf{P}^m(K)$ deux ensembles algébriques irréductibles quasi-projectifs, une application $\phi\colon V \to W$ est un *morphisme* si elle est de la forme $\phi = (f_1 : \ldots : f_m)$ avec les f_i des polynômes homogènes de même degré dans $K[X_0, \ldots, X_n]$ et ne s'annulant pas simultanément sur V. Deux représentants $(f_1 : \ldots : f_m)$, $(g_1 : \ldots : g_m)$ sont égaux si et seulement si V est contenu dans chaque $V(f_ig_j - f_jg_i)$ pour $0 \leq i < j \leq m$.

Nota Bene 13.11. Cette définition, quoi qu'un peu surprenante, n'est pas déraisonnable. En effet, nous nous attendions à ce que ϕ soit de la forme $\phi = (\frac{f_1}{g_1} : \ldots : \frac{f_m}{g_m})$ avec f_i, g_i deux polynômes homogènes de même degré. En posant g le produit des g_i (ou par exemple leur ppcm) ; alors :

$$\phi = (g \cdot \tfrac{f_1}{g_1} : \ldots : g \cdot \tfrac{f_m}{g_m}) = (\textstyle\prod_{i \neq 0} g_i \cdot f_1 : \ldots : \prod_{i \neq m} g_i \cdot f_m)$$

et les $g \cdot \frac{f_i}{g_i}$ sont tous homogènes de même degré puisque $\deg(f_i) = \deg(g_i)$ en chaque i.

Conséquence 13.12. Nous obtenons une notion d'isomorphisme d'ensembles algébriques irréductibles quasi-projectifs : il s'agit d'un morphisme bijectif dont l'inverse est un morphisme.

Exemple 13.13. Soit K un corps ; un ensemble algébrique quasi-projectif sur K est dit *affine* s'il existe un ensemble algébrique affine sur K qui lui est isomorphe (il faut travailler avec des isomorphismes si l'on veut une notion convenable). Considérons par exemple $V = \mathbf{A}^1(K) - \{0\}$:

— V est un ensemble algébrique quasi-projectif et est également un ouvert non fermé de $\mathbf{A}^1(K)$. Ce n'est donc pas à proprement parler un ensemble algébrique affine.

— En revanche, V est isomorphe à $V_{\mathrm{a}}(XY - 1) \subseteq \mathbf{A}^2(K)$ par $x \mapsto (x, x^{-1})$ et d'inverse $(x, y) \mapsto x$.

Donc, contrairement aux apparences, $\mathbf{A}^1(K) - \{0\}$ est un ensemble algébrique quasi-projectif affine.

14 L'image des morphismes en projectif est fermée

Soit $\phi\colon V \to W$ un morphisme entre deux ensembles algébriques quasi-projectifs affines. En identifiant V et W à leur image dans $\mathbf{A}^n(K)$ et $\mathbf{A}^m(K)$ respectivement, nous obtenons un morphisme au sens affine.

L'image d'un morphisme affine n'est en général pas fermée : le morphisme donné lors de l'exemple 13.13 a pour image $\mathbf{A}^1(K) - \{0\}$ qui n'est pas un fermé de Zariski dans $\mathbf{A}^1(K)$. La situation est différente et bien plus favorable en projectif : l'image par un morphisme d'un sous-ensemble algébrique projectif est fermée. Noter l'analogie topologique : l'image par une application continue d'un compact est compacte.

Pour prouver ce résultat, nous travaillons avec des produits $V \times W$ d'ensembles algébriques quasi-projectifs, avec $V \subseteq \mathbf{P}^n(K)$ et $W \subseteq \mathbf{P}^m(K)$. Nous allons être amenés à considérer des fermés dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^m(K)$ (que nous pouvons voir comme des fermés dans $\mathbf{P}^{nm+n+m}(K)$ via le plongement de Segre) et aussi dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K)$ (que nous pouvons voir comme des fermés dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^m(K)$ via l'isomorphisme $\mathbf{A}^m(K) \simeq D^+(X_i) \subseteq \mathbf{P}^m(K)$).

Proposition 14.1. *Soit K un corps ; un sous-ensemble $V \subseteq \mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^m(K)$ est fermé si et seulement s'il est donné par un nombre fini de polynômes*

$$g_i(X_0, \ldots, X_n; Y_0, \ldots, Y_m) \in K[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m]$$

homogènes en chaque systèmes d'indéterminées $\{X_0, \ldots, X_n\}$ et $\{Y_0, \ldots, Y_m\}$ séparément.

Proposition 14.2. *Soit K un corps ; un sous-ensemble $V \subseteq \mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K)$ est fermé si et seulement s'il donné par un nombre fini de polynômes*

$$g_i(X_0, \ldots, X_n; Y_0, \ldots, Y_m) \in K[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m]$$

homogènes en le système d'indéterminées $\{X_0, \ldots, X_n\}$.

Preuve. Les deux propositions précédentes font l'objet du théorème 1 au §5.1 de [Sha13]. $\square$

Remarque 14.3. Ce résultat se généralise à $\mathbf{P}^{n_1}(K) \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_r}(K) \times \mathbf{A}^{m_1}(K) \times \cdots \times \mathbf{A}^{m_s}(K)$.

Lemme 14.4. *Le graphe de tout morphisme $V \to W$ entre deux ensembles algébriques quasi-projectifs est fermé dans $V \times W$.*

Preuve. Soit $\phi \colon V \to W$ un morphisme entre deux ensembles algébriques quasi-projectifs. Si W est contenu dans $\mathbf{P}^m(K)$ alors nous pouvons supposer que $W = \mathbf{P}^m(K)$. En effet, $V \times W$ est contenu dans $V \times \mathbf{P}^m(K)$ et ϕ induit une application $\tilde{\phi} \colon V \to \mathbf{P}^n(K)$ telle que $\mathrm{Graph}(\phi) = \mathrm{Graph}(\tilde{\phi}) \cap (V \times W)$.

Posons ψ le morphisme $(\phi, \mathrm{Id}) : V \times \mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^n(K)$. La proposition 14.1 nous apprend que la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^n(K)\}$ de $\mathbf{P}^n(K)$ est fermée dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{P}^n(K)$ étant donné qu'elle s'exprime comme

$$\Delta = V(Y_i X_j - Y_j X_i \mid 0 \le i, j \le n).$$

Puisque $\mathrm{Graph}(\phi) = \psi^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in V \times \mathbf{P}^n(K) \mid \psi(x, y) = (\phi(x), y) \in \Delta\}$ et que ψ est un morphisme, le graphe de ϕ est fermé. $\square$

Théorème 14.5. *Soient K un corps algébriquement clos, V un ensemble algébrique projectif sur K et W un ensemble algébrique quasi-projectif sur K ; le morphisme de projection sur W*

$$\pi \colon V \times W \twoheadrightarrow W$$

est une application fermée.

Preuve. Si $V \subseteq \mathbf{P}^n(K)$, nous pouvons supposer que $V = \mathbf{P}^n(K)$ car $V \times W$ est fermé dans $\mathbf{P}^n(K) \times W$ et donc : un ensemble est fermé dans $V \times W$ ssi il est fermé dans $\mathbf{P}^n(K) \times W$.

Nous pouvons supposer que W est un ensemble algébrique affine puisque le fait d'être fermé est une notion locale : si $W \subseteq \mathbf{P}^m(K)$, il suffit alors de recouvrir W par des ouverts affines W_i et de prouver le résultat sur chaque W_i (cf. [Sha13], Ch.I, §4.2).

Nous pouvons supposer que $W = \mathbf{A}^m(K)$ puisque si W est fermé dans $\mathbf{A}^m(K)$ alors $\mathbf{P}^n(K) \times W$ est fermé dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K)$ et donc : un ensemble est fermé dans $\mathbf{P}^n(K) \times W$ ssi il est fermé dans $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K)$.

Sous les précédentes hypothèses, nous souhaitons finalement prouver que le morphisme de projection sur $\mathbf{A}^m(K)$

$$\pi \colon \mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K) \twoheadrightarrow \mathbf{A}^m(K)$$

est fermé. De la proposition 14.2, un fermé Z de $\mathbf{P}^n(K) \times \mathbf{A}^m(K)$ est l'ensemble des zéros communs à un système de $s \ge 1$ polynômes $g_i \in K[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m] =: K[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ homogènes en les indéterminées $X_0, \ldots, X_n$. Nous montrons alors que $\mathbf{A}^m(K) - \pi(Z)$ est ouvert dans $\mathbf{A}^m(K)$.

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K)$, nous posons $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}$ l'idéal de $K[\mathbf{X}]$ engendré par les s polynômes $g_i(X_0, \ldots, X_n; \mathbf{y})$. Puisque ceux-ci sont homogènes dans $K[\mathbf{X}]$ et que leurs coefficients sont des expressions polynômiales en $\mathbf{y}$, l'idéal $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}$ est homogène. Posons $U = \mathbf{A}^m(K) - \pi(Z)$ et remarquons que :

$$U = \{\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K) \mid V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}) = \varnothing\}.$$

Du Nullstellensatz projectif : $V_{\mathrm{p}}(\mathfrak{a}_{\mathbf{y}})$ est vide ssi $(X_0, \ldots, X_n) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{a}_{\mathbf{y}})$ ssi il existe un $r \geq 1$ pour lequel $\mathfrak{b}_r := \bigoplus_{i \geq r} R_i$ est contenu dans $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}$. Pour $r \geq 1$, posons $U_r = \{\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K) \mid \mathfrak{b}_r \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbf{y}}\}$. Nous obtenons un recouvrement de U via $\bigcup_{r \geq 1} U_r$. Il suffit donc de montrer que chaque U_r est ouvert (il se peut que certains soient vides).

Notons que

$$U_r = \{\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K) \mid \mathfrak{b}_r \subseteq (g_i(X_0, \ldots, X_n; \mathbf{y}) \; ; \; i = 1, \ldots, s)\}.$$

Dès lors, un point $\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K)$ appartient à U_r ssi pour tout $X_0^{r_0} \cdots X_n^{r_n}$ avec $r_0 + \cdots + r_n = r$, il existe des $f_i \in K[\mathbf{X}]$ tels que $X_0^{r_0} \cdots X_n^{r_n} = \sum_{i=1}^{s} f_i(X_0, \ldots, X_n) g_i(X_0, \ldots, X_n; \mathbf{y})$. Le polynôme du membre de gauche étant homogène de degré r et les g_i étant homogènes de degré d_i, nous pouvons supposer que les f_i sont homogènes de degré $r - d_i$ lorsque $r \geq d_i$, sinon $f_i = 0$. Par conséquent, un point $\mathbf{y} \in \mathbf{A}^m(K)$ appartient à U_r ssi les $g_i(X_0, \ldots, X_n; \mathbf{y}) \cdot X_0^{t_0} \cdots X_n^{t_n}$ avec $t_0 + \cdots + t_n = r - d_i \geq 0$ engendrent le K-espace vectoriel R_r. Ceci équivaut à la non-annulation (simultanée) des déterminants des sous-matrices carrées de taille maximale associées à ces vecteurs (en prenant une K-base de $K[\mathbf{X}]$) et donc U_r est ouvert. □

Corollaire 14.6. *Soient K un corps algébriquement clos ; l'image de tout morphisme d'un ensemble algébrique projectif sur K vers un ensemble algébrique quasi-projectif sur K est fermée.*

Preuve. Soit $\phi \colon V \to W$ un tel morphisme. Le lemme 14.4 nous apprend que le graphe de ϕ est fermé dans $V \times W$. Puisque l'image de ϕ est $\mathrm{Im}(\phi) = \pi(\mathrm{Graph}(\phi))$ avec $\pi \colon V \times W \twoheadrightarrow W$ la projection sur W, nous savons du théorème 14.5 qu'elle est à son tour fermée. □

Corollaire 14.7. *Étant donné un ensemble algébrique irréductible projectif V sur un corps algébriquement clos K ; toute application régulière $V \to K$ est constante. En particulier, tout morphisme de V dans un ensemble algébrique affine est constant.*

Preuve. Un morphisme de V dans un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbf{A}^m(K)$ est donné par un morphisme $V \to \mathbf{A}^m(K)$, lui même déterminé par des m applications régulières $V \to K$. Ceci vient justifier la partie *en particulier* du résultat.

Soit $\phi \colon V \to K$ une application régulière ; alors ϕ induit un morphisme $V \to \mathbf{P}^1(K)$ dont l'image ne comprend pas le point à l'infini et donc $\mathrm{Im}(\phi) \neq \mathbf{P}^1(K)$. Puisque $\mathrm{Im}(\phi)$ est fermée (via le corollaire précédent) et distincte de $\mathbf{P}^1(K)$, l'image de ϕ est une réunion finie de points (cf. topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^1(K)$) et comme V est supposé irréductible, l'image de ϕ est réduite en un point. □

Références

[Sko03] Alexei Skorobogatov. *Algebraic Geometry.* 2003. URL : https://www.ma.imperial.ac.uk/~anskor/AG.PDF.

[Vol07] Maja Volkov. « Géométrie algébrique : géométrie projective ». US-M1-SCMATH-003-M, Projet en géométrie algébrique. 2007.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry ; 3rd ed.* Berlin : Springer, 2013. DOI : 10.1007/978-3-642-37956-7. URL : https://cds.cern.ch/record/1596976.

[Mil17] James S. Milne. *Algebraic Geometry (v6.02).* 2017. URL : https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf.

[Ste20] Jan Stevens. « MMA320 : Introduction to Algebraic Geometry ». University of Gothenburg, Sweden. 2020. URL : http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMA320/S14/alggeom1.pdf.