

UNE INTRODUCTION ANALYTIQUE AUX CORPS ULTRAMÉTRIQUES

MARTIN DEBAISIEUX

ABSTRACT. Ces notes sont tirées d'une série de présentations dans le cadre du cours d'analyse de M1 de l'auteur et dédiées à l'exposition des valeurs absolues ultramétriques (non archimédiennes). À partir d'une situation singulière, nous explorons la géométrie et la topologie qu'elles induisent. Nous les classifions pour les corps finis et pour \mathbf{Q} . Nous terminons en construisant le corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques, un objet central en arithmétique, via des outils analytiques classiques.

TABLE DES MATIÈRES

1. Valeurs absolues et ultramétrie.	2
2. Classification sur certains corps.	4
3. La géométrie ultramétrique.	6
4. La topologie ultramétrique.	7
5. Une construction analytique de \mathbf{Q}_p .	9
Documentation.	11

1. VALEURS ABSOLUES ET ULTRAMÉTRICITÉ

La géométrie euclidienne repose notamment sur l'axiome d'Archimède dont l'idée est que tout segment d'une ligne droite peut être recouvert par l'addition successive de plus petits segments. Dans le corps des nombres réels, cela peut se traduire par la situation suivante : Un petit chat se trouvant en un point A souhaite rejoindre un point B distant de $d > 0$. Si à chaque instant il parcourt une distance de $0 < \varepsilon \leq d$, peut-il atteindre B en un temps fini ?

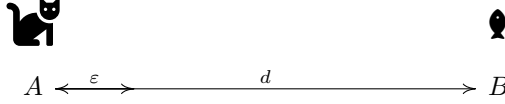


FIGURE 1. La quête du petit chat.

Notre bon sens y répond affirmativement : il atteindra B en un temps fini (mais potentiellement long). C'est l'axiome d'Archimède dans \mathbf{R} . Le monde ultramétrique, aussi appelé non-archimédien, prend place lorsque l'on abandonne cet axiome. Nous allons construire de tels corps et discuter des conséquences de cet abandon sur la géométrie ambiante. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin de formaliser la notion de valeur absolue, dont une instance archimédienne est connue de tout lecteur.

Définition 1.1. Une valeur absolue sur un corps K est un morphisme de groupes sous-additif $|\cdot| : K^\times \rightarrow \mathbf{R}^{>0}$ étendu en 0 par $0 \mapsto 0$. La paire $(K, |\cdot|)$ est un corps valué.

Exemple 1.2. L'existence systématique d'un morphisme entre deux groupes quelconques permet de définir une valeur absolue, dite triviale, sur n'importe quel corps K via

$$|x|_0 := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in K.$$

Exemple 1.3. La valeur absolue usuelle que nous désignons à partir de maintenant valeur absolue archimédienne est une valeur absolue sur \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}). Pour rappel, elle est donnée par

$$|x|_\infty := \max\{x, -x\} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{Q} \text{ (resp. } \mathbf{R}).$$

Proposition 1.4. Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué. Alors $|\cdot|$ est invariante par passage à l'opposé additif et satisfait $||x| - |y||_\infty \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in K$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $|-1| = 1$ pour la première assertion, ce qui est vrai car l'unique racine carrée de 1 dans $\mathbf{R}^{>0}$ est 1. La deuxième assertion est un simple exercice de manipulation laissé au lecteur. \square

Ces propriétés, jointes à celles de la définition de valeur absolue, seront utilisées intensivement et tacitement tout au long de ce document. On remarque également que toute valeur absolue $|\cdot|$ sur un corps K lui induit une métrique, simplement en posant

$$d(x, y) := |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in K.$$

Les corps valués sont des cas particuliers d'espaces métriques, et même plus exactement d'espaces normés, et l'étude de leur topologie fait sens.

Définition 1.5. Une valeur absolue $|\cdot|$ sur un corps K est ultramétrique si elle satisfait l'inégalité $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ pour tous $x, y \in K$. Un corps ultramétrique est un corps valué par une valeur absolue ultramétrique.

L'inégalité ultramétrique, parfois appelée inégalité triangulaire renforcée, impose une condition plus stricte sur les distances que la simple sous-additivité, connue elle sous le nom d'inégalité triangulaire. Nous verrons par la suite comment elle rigidifie la géométrie ambiante.

Exemple 1.6. Un premier exemple de corps ultramétrique est donné par n'importe quel corps trivialement valué.

Exemple 1.7. Soient A un anneau intègre et $\rho > 1$ un réel. Nous définissons sur l'anneau $A[X]$ (qui n'est pas un corps, nous corrigerons cela) une valeur absolue en posant

$$\|f(X)\| := \begin{cases} 0 & \text{si } f(X) = 0 \\ \rho^{\deg(f)} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } f(X) \in A[X].$$

En oubliant (pour l'instant) que $A[X]$ n'est pas un corps, il est facile de constater que les propriétés liées au degré d'un polynôme et le choix de ρ permettent à $\|\cdot\|$ de se comporter comme une valeur absolue ultramétrique sur $A[X]$. En passant à son corps des fractions $K(X)$ où K est celui de A , nous le munissons d'une valeur absolue via

$$|h(X)| := \frac{\|f(X)\|}{\|g(X)\|} \quad \text{où } h(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \in K(X).$$

Ainsi, le corps des fractions rationnelles sur K muni de cette valeur absolue est un corps ultramétrique.

Lemme 1.8. Les assertions suivantes sur un corps valué $(K, |\cdot|)$ sont équivalentes :

- (1) La valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique.
- (2) Pour tout $x \in K$, si $|x| \leq 1$ alors $|1+x| \leq 1$.

Démonstration. Il est évident que (1) implique (2). Pour la réciproque, on se donne $x, y \in K$ où l'on suppose y non nul et sans perte de généralité que $|x| \leq |y|$. Dès lors $|xy^{-1}| \leq 1$ et par (2) on a $|1+xy^{-1}| \leq 1$. Donc $|x+y| \leq |y| = \max\{|x|, |y|\}$. \square

Définition 1.9. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier. Tout rationnel $x \in \mathbf{Q}$ non nul s'écrit de façon unique sous

$$x = p^{v_p(x)} \frac{a}{b}$$

où $v_p(x)$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = 1$ et p ne divise pas ab . La valuation p -adique de x est la quantité $v_p(x)$, étendue en 0 en posant $v_p(0) = +\infty$.

La valuation p -adique d'un nombre rationnel est la plus grande puissance entière de p qu'il est possible de lui extraire quand il est mis sous sa forme irréductible. Le concept de valuation est aussi important que celui de valeur absolue ultramétrique car il ne s'agit pas moins que de sa contrepartie arithmétique. On montre facilement que l'application $v_p: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ est additive et satisfait

$$v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{Q}$. Plus arithmétiquement, la valuation p -adique d'un entier $x \in \mathbf{Z}$ non nul retourne la plus grande puissance n telle que $x \in p^n \mathbf{Z}$.

Définition 1.10. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier, la valeur absolue p -adique sur \mathbf{Q} est définie par $|x|_p = \rho^{v_p(x)}$ pour tout $x \in \mathbf{Q}$ et pour un réel fixé $0 < \rho < 1$.

Vérification. Seul son caractère ultramétrique nécessite une justification. Pour cela, nous utilisons le Lemme 1.8. Soit $x \in \mathbf{Q}^\times$ tel que $|x|_p \leq 1$, alors x s'écrit sous la forme $x = c/d$ avec $(c, d) = 1$ et p ne divisant pas d . Donc $1+x = (d+c)/d$ est de valuation p -adique positive, autrement dit $|1+x|_p \leq 1$. \triangle

Remarque 1.11. Dans la suite, nous ferons référence à la valeur absolue p -adique pour un p fixé bien que celle-ci dépende de ρ . La raison est qu'elles sont équivalentes pour un certain sens raisonnable défini ultérieurement (2.5).

Exemple 1.12. La paire $(\mathbf{Q}, |\cdot|_p)$ est un corps ultramétrique pour tout nombre premier p , et cela indépendamment de ρ .

Terminons cette section là où nous l'avons commencé, c'est-à-dire avec l'axiome d'Archimède. Un corps valué $(K, |\cdot|)$ est archimédien si pour tout $x \in K$, il existe un entier N tel que $N > |x|$. Alternativement, cela revient à demander que la copie de \mathbf{Z} dans K n'est pas bornée. Toutefois, si la valeur absolue est ultramétrique, le n -ième itéré de 1 dans K satisfait

$$|n| = |1 + \cdots + 1| \leq \max\{|1|, \dots, |1|\} = 1 \quad \text{pris } n \text{ fois,}$$

montrant que cette copie est bornée. Il s'agit là du caractère non-archimédien des corps ultramétriques et de la raison pour laquelle nous considérons de tels corps. La réciproque est également vraie et fait l'objet du résultat suivant.

Proposition 1.13. *Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué. Il existe un $d > 0$ tel que $|m| \leq d$ pour tout $m \in \{n \cdot 1 \in K ; n \in \mathbf{Z}\}$ si et seulement si $|\cdot|$ est ultramétrique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $|\cdot|$ satisfait l'inégalité ultramétrique. Soient $x, y \in K$ et soit $N \in \mathbf{Z}$ un entier strictement positif. On a que

$$|x + y|^N \leq \sum_{i=0}^N \left| \binom{N}{i} \right| |x|^{N-i} |y|^i \leq (N+1)d \max\{|x|, |y|\}^N.$$

En prenant la racine N -ième réelle de chaque côté de l'inégalité et en faisant tendre N vers l'infini, il s'ensuit que $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$. \square

Remarque 1.14. Certaines références utilisent la terminologie de “valeur absolue non-archimédienne” et de “corps non-archimédien” afin de désigner respectivement une valeur absolue ultramétrique et un corps ultramétrique ; ce qui fait sens au vu de la précédente discussion.

2. CLASSIFICATION SUR CERTAINS CORPS

2.1. En caractéristique première. La situation en caractéristique première est relativement simple, surtout en ce qui concerne les corps finis. Ces notes constituant une initiation en le sujet, nous ne discutons pas ici de l'état de faits de corps tels que $\mathbf{F}_q(X)$ ou bien $\mathbf{F}_q((X))$.

Proposition 2.1. *Toute valeur absolue sur un corps de caractéristique p première est ultramétrique.*

Démonstration. Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué de caractéristique $p > 0$. Nous utilisons la Proposition 1.13. Soit $m \in \{n \cdot 1 ; n \in \mathbf{Z}\} \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, alors m satisfait $m^p = m$ car le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est d'ordre $p-1$. Si $m = 0$ alors $|0| = 0$, sinon $|m| = |m^p| = |m|^p$ et donc $|m| = 1$. Dès lors $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est borné. \square

Cette preuve, bien que trop longue, a l'avantage d'également montrer que l'unique valeur absolue sur $\mathbf{F}_p := \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est la triviale. Plus généralement, le même argument peut être utilisé pour montrer que la seule valeur absolue sur \mathbf{F}_q est la triviale, où q est une puissance naturelle de p . Pour rappel, il s'agit du corps de décomposition de $X^q - X$. Un argument alternatif immédiat aurait pu être utilisé : comme \mathbf{F}_p est fini, son image par $|\cdot|$ est un sous-ensemble borné de \mathbf{R} . Cette discussion démontre la classification suivante.

Théorème 2.2. *Soit $q \neq 1$ une puissance naturelle d'un nombre premier. L'unique valeur absolue sur \mathbf{F}_q est la triviale.*

2.2. Le corps des nombres rationnels. Nous avons déjà croisé plusieurs exemples de valeurs absolues sur \mathbf{Q} , à savoir la triviale, l'archimédienne (l'usuelle) et les p -adiques. Dans un certain sens, il n'y en a pas d'autres.

Théorème 2.3 (Ostrowski, 1). *Les seules valeurs absolues sur \mathbf{Q} sont la triviale, les p -adiques et les puissances $0 < \alpha \leq 1$ de l'archimédienne.*

Démonstration. Soient n et m deux entiers strictement supérieurs à 1. En écrivant m en base n l'on a $m = a_0 + a_1n + \cdots + a_jn^j$ où $0 \leq a_i < n$ et $n^j \leq m$. Si $|\cdot|$ est une valeur absolue sur \mathbf{Q} , on a nécessairement $|a_i| \leq |a_i|1| = a_i < n$ pour tout i et donc

$$|m| \leq n(1 + |n| + \cdots + |n|^j) \leq n(L+1) \max\{1, |n|\}^L$$

avec $L = \ln m / \ln n \geq j$. Étant donné que ces inégalités sont valables pour n'importe quel choix d'entiers n et m , en remplaçant m par m^N avec $N \geq 1$ entier et en passant à la limite quand N tend vers l'infini, il en résulte que

$$(2.1) \quad |m| \leq \max\{1, |n|\}^{\ln m / \ln n}.$$

S'il existe un $n > 1$ pour lequel $|n| \leq 1$, alors (2.1) implique que $|m| \leq 1$ et cela pour tout $m \in \mathbf{Z}$. La valeur absolue que nous considérons est alors ultramétrique par la Proposition 1.13. Si elle n'est pas triviale, l'ensemble $S := \{m \in \mathbf{Z} \mid |m| < 1\}$ n'est pas vide et $S \cap \mathbf{N}$ admet un minimum, que l'on note p . Par un argument de minimalité, p est un nombre premier. En utilisant la division euclidienne et encore de la minimalité, nous montrons que $S = p\mathbf{Z}$. Soit maintenant $x \in \mathbf{Q}$ non nul que l'on écrit sous la forme

$$x = p^{v_p(x)} \frac{a}{b}$$

avec $a, b \in \mathbf{Z}$ coprimiers et p ne divisant pas ab , on a alors que $|x| = |p|^{v_p(x)}$. En posant $\rho = |p|$, il s'agit d'un réel strictement compris entre 0 et 1, et par conséquent nous retrouvons la valeur absolue p -adique.

Si non $|n| > 1$ quel que soit le $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. En échangeant les rôles de n et m dans (2.1) on a que la quantité $|m|^{1/\ln m}$ ne varie pas selon $m > 1$. Notons cette constante $c > 1$, ou bien encore $c = e^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Nous en déduisons que

$$|m| = e^{\alpha \ln m} = m^\alpha = |m|_\infty^\alpha$$

pour tout entier $m > 1$ et également que $\alpha \leq 1$. On a alors que $|m| = |m|_\infty^\alpha$ quel que soit l'entier $m \in \mathbf{Z}$ et cette égalité s'étend naturellement à \mathbf{Q} . Nous retrouvons une puissance $0 < \alpha \leq 1$ de la valeur absolue archimédienne. \square

Ce théorème établit la liste des valeurs absolues sur \mathbf{Q} . Néanmoins, cette liste est redondante au sens que certaines d'entre-elles induisent la même topologie sur \mathbf{Q} et peuvent donc être considérées comme équivalentes. La fin de cette section est consacrée à l'optimisation de cette liste.

Proposition 2.4. *Les assertions suivantes sur deux valeurs absolues non triviales $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ définies sur un corps K sont équivalentes :*

- (1) *Les valeurs absolues $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ induisent la même topologie sur K .*
- (2) *Toute suite de K qui converge vers 0 pour $|\cdot|_1$ converge vers 0 pour $|\cdot|_2$.*
- (3) *Pour tout $x \in K$, si $|x|_1 < 1$ alors $|x|_2 < 2$.*
- (4) *Il existe un réel $\gamma > 0$ tel que $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^\gamma$.*

Démonstration. Il est évident que (1) entraîne (2). Pour (2) implique (3) supposons que $|x|_1 < 1$, alors x est topologiquement nilpotent pour $|\cdot|_1$. En effet, la suite de réels $(|x^n|_1)_n$ est strictement décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $a \geq 0$. Il en est de même pour $(|x^{n+1}|_1)_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un moment à partir duquel $|x^{n+1} - xa|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $n \gg 0$. Par unicité de la limite, $xa = a$ et donc $a = 0$. Dans ce cas x est topologiquement nilpotent pour $|\cdot|_2$ et

nécessairement $|x|_2 < 1$. Pour (3) implique (4), considérons $y \in K$ tel que $|y|_1 > 1$. Un tel élément existe par non trivialité des valeurs absolues. Soit x un élément de K non nul, on a alors que

$$|x|_1 = |y|_1^\alpha \quad \text{avec } \alpha := \frac{\ln |x|_1}{\ln |y|_1}.$$

En approchant α par des rationnels lui étant strictement supérieurs, puis strictement inférieurs et en utilisant (3) on a que $|x|_2 = |y|_2^\alpha$. En posant $\gamma = \ln |y|_2 / \ln |y|_1$, nous obtenons que $\ln |x|_2 = \gamma \ln |x|_1$ et $\gamma > 0$ est indépendant de x . Pour finir (4) entraîne (1) car les deux topologies ont les mêmes boules ouvertes. \square

Définition 2.5. Deux valeurs absolues non triviales $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ sur un corps K sont équivalentes si elles satisfont l'une des assertions de la Proposition 2.4.

Exemple 2.6. Les puissances $0 < \alpha \leq 1$ de la valeur absolue archimédienne sur \mathbf{Q} sont dans la même classe d'équivalence.

Exemple 2.7. Soit $p \in \mathbf{Z}$, les valeurs absolues p -adiques sur \mathbf{Q} pour des $0 < \rho < 1$ différents sont équivalentes. En effet, être de valeur absolue strictement inférieure à 1 ne dépend que de la valuation p -adique.

Nous obtenons une reformulation du théorème d'Ostrowski, en termes de classes d'équivalence de valeurs absolues.

Théorème 2.8 (Ostrowski, 2). *Toute valeur absolue sur \mathbf{Q} est soit la valeur absolue triviale, soit équivalente à une valeur absolue p -adique ou à la valeur absolue archimédienne.*

Remarque 2.9. Certaines références définissent directement la valeur absolue p -adique avec un $\rho = p^{-1}$ fixé. On parle alors de la forme normalisée. Ici, nous avons choisi de la définir avec un paramètre ρ flottant afin de simplifier la démonstration du Théorème d'Ostrowski 2.3. Noter qu'avec la forme normalisée, on a une relation entre toutes les valeurs absolues sur \mathbf{Q} :

$$\prod_{s \in \{0, \infty, \text{premiers}\}} |x|_s = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{Q}^\times$$

qui est un invariant pour les corps de nombres. Cette relation est appelée Formule du produit. On laisse le soin au lecteur de la démontrer.

3. LA GÉOMÉTRIE ULTRAMÉTRIQUE

La géométrie non-archimédienne est un domaine fascinant remettant en question notre conception de l'espace : tout triangle est isocèle et le centre d'un disque n'est pas unique. Ce qui peut sembler être une bizarrerie de prime abord, offre cependant des applications concrètes.

Lemme 3.1. *Soit $(K, |\cdot|)$ un corps ultramétrique et soient $x, y \in K$. Si $|x| \neq |y|$, alors on a l'égalité $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.*

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $|x| > |y|$, de sorte que l'on ait $|x| \leq \max\{|x + y|, |y|\} = |x + y| \leq |x|$. Ces inégalités sont alors des égalités et on en déduit l'assertion. \square

Il s'agit là d'un résultat élémentaire mais ô combien fondamental. L'une de ses premières conséquences directes est la proposition suivante, rigidifiant la structure des triangles.

Proposition 3.2. *Étant donné une triade de points dans un corps ultramétrique, au moins deux paires de points sont séparés par la même distance, et il s'agit des plus grandes distances parmi les trois.*

Démonstration. Soit $(K, |\cdot|)$ un corps ultramétrique et considérons un triangle dans K formé par les points distincts x, y et $z \in K$. Si ce triangle n'est pas équilatéral, alors quitte à renommer les sommets on a $|x - y| \neq |y - z|$. Le lemme 3.1 implique que $|x - z| = \max\{|x - y|, |y - z|\}$ et donc que ce triangle est isocèle en ses grands côtés. \square

Un autre fait fascinant découlant directement de l'inégalité ultramétrique est que tout point d'un disque en est un centre. Étant donné $(K, |\cdot|)$ un corps valué, nous notons $D(x, r)$ le disque ouvert centré en $x \in K$ de rayon $r > 0$ et $D[x, r]$ le disque fermé centré en x de rayon r .

Proposition 3.3. *Dans un corps ultramétrique, tout point d'un disque (ouvert ou fermé) est un centre de ce disque.*

Démonstration. Travaillons dans un corps ultramétrique $(K, |\cdot|)$ et considérons $D(x, r)$ un disque ouvert de K . Étant donné un point $y \in D(x, r)$, nous montrons que $D(y, r) = D(x, r)$. Soit $z \in D(y, r)$, alors $|z - x| \leq \max\{|z - y|, |y - x|\} < r$. La réciproque se montre de la même manière et le cas d'une boule fermée en adaptant les notations. \square

Corollaire 3.4. *Dans un corps ultramétrique, deux disques (tous ouverts ou tous fermés) sont nécessairement disjoints ou comparables pour l'inclusion.*

Démonstration. Soient $D(x, r_1)$ et $D(y, r_2)$ deux disques ouverts non disjoints d'un corps ultramétrique $(K, |\cdot|)$ et supposons $r_1 \leq r_2$. Il existe alors un $z \in K$ compris dans ces deux disques. Par la Proposition 3.3, on obtient que $D(x, r_1) \subseteq D(y, r_2)$. Ces deux disques sont alors comparables pour l'inclusion. L'assertion sur les disques fermés s'obtient en adaptant les notations. \square

Remarque 3.5. Le résultat précédent permet de formaliser le comportement de deux gouttes de mercure posées sur une surface lisse. Des principes ultramétriques sont aussi utilisés dans des modèles de machine learning.

4. LA TOPOLOGIE ULTRAMÉTRIQUE

Les principes géométriques non-archimédiens ne sont pas sans conséquences sur la topologie ambiante. D'une certaine manière, ils sont même caractéristiques d'une telle situation.

Corollaire 4.1. *Dans un corps ultramétrique, tout disque (ouvert ou fermé) est une partie ouverte et fermée.*

Démonstration. Soit $D[x, r]$ un disque fermé d'un corps ultramétrique $(K, |\cdot|)$ et soit $y \in D[x, r]$. La Proposition 3.3 implique que $D(y, r) \subseteq D[x, r]$ et cela montre qu'il est ouvert. Tout disque $D(x, r)$ est fermé car tout point $y \in K$ en dehors de $D(x, r)$ est tel que $D(y, r)$ ne rencontre pas $D(x, r)$ par le Corollaire 3.4. \square

Remarque 4.2. Cela ne veut pas dire que les disques $D(x, r)$ et $D[x, r]$ sont égaux, ni que tout ouvert est fermé et réciproquement. Par exemple, dans l'espace $(\mathbf{Q}, |\cdot|_p)$ le singleton $\{0\}$ est fermé mais n'est pas ouvert.

Proposition 4.3 (Debaisieux, 2021). *Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué. Tout disque de K est une partie ouverte et fermée si et seulement si la paire est ultramétrique.*

Démonstration. La nécessité est établie. Réciproquement, soit K est de caractéristique $p > 0$ première et nécessairement la paire est ultramétrique par la Proposition 2.1, soit K est de caractéristique nulle et donc \mathbf{Q} se plonge dans K dans la catégorie des corps. Notons $\iota: \mathbf{Q} \hookrightarrow K$ ce plongement. La restriction de $|\cdot|$ à $\iota(\mathbf{Q})$ induit sur \mathbf{Q} une valeur absolue en posant $|\cdot|' := |\iota(\cdot)|$ et fait de ι un monomorphisme de la

catégorie des corps valués. Toutefois, le disque $D(0, 1)$ de K est une partie ouverte et fermée, donnant lieu à un ouvert-fermé pour la topologie induite sur $\iota(\mathbf{Q})$. Mais si $|\cdot|'$ était équivalente à l'archimédienne, alors

$$\iota(\{x \in \mathbf{Q} \mid |x|_\infty < 1\}) = \{x \in \iota(\mathbf{Q}) \mid |x| < 1\} = D(0, 1) \cap \iota(\mathbf{Q})$$

ne serait pas fermé par continuité de ι . Nous en déduisons par le Théorème 2.8 et la Proposition 1.13 l'assertion. \square

Une deuxième spécificité du monde non-archimédien concerne la convergence des séries. En analyse classique (réelle ou complexe), une série converge dans un espace complet seulement si la suite de ses termes tend vers 0. La réciproque est toutefois fautive comme l'exprime la série harmonique. Dans le monde non-archimédien, cette condition nécessaire devient suffisante pour peu que l'on travaille dans un espace complet.

Lemme 4.4. *Soit $(K, |\cdot|)$ un corps ultramétrique. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K est de Cauchy si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.*

Démonstration. La nécessité étant triviale, nous montrons la suffisance. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier $N \geq 0$ à partir duquel $|x_{n+1} - x_n|$ pour tout $n \geq N$. Soient $m > n \geq N$, alors $|x_m - x_n| \leq \max\{|x_m - x_{m-1}|, \dots, |x_{n+1} - x_n|\} < \varepsilon$. \square

Proposition 4.5. *Soit $(K, |\cdot|)$ un corps ultramétrique complet. Une série sur K converge si et seulement si la suite de ses termes tend vers 0.*

Démonstration. Soit $(s_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles d'une série sur K . Si la série converge dans K , alors $(s_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy et donc la suite de ses termes tend vers 0. Réciproquement, on a que la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy par le Lemme 4.4 et comme K est complet elle converge. \square

Exemple 4.6. Nous verrons par la suite que $(\mathbf{Q}, |\cdot|_p)$ n'est pas complet mais cela ne va pas nous déranger ici. La série $\sum_{n \geq 0} (p-1)p^n$ converge (du moins, dans son complétude) et elle vaut -1 . En effet, on a $-1 = (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^n - p^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Nous allons démontrer un résultat sur les valeurs absolues (non forcément non-archimédiennes) mais dont notre utilisation ne sera que purement non-archimédienne et donc arithmétique.

Théorème 4.7 (de l'approximation). *Soient $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ des valeurs absolues non équivalentes sur un corps K et soient $a_1, \dots, a_n \in K$ des éléments. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in K$ tel que $|x - a_i|_i < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration. Comme $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_n$ ne sont pas équivalentes, il existe simultanément $\alpha \in K$ tel que $|\alpha|_1 < 1$ et $|\alpha|_n \geq 1$ et $\beta \in K$ tel que $|\beta|_1 \geq 1$ et $|\beta|_n < 1$. L'élément $y = \beta/\alpha$ satisfait par construction $|y|_1 > 1$ et $|y|_n < 1$. Basé sur cette constatation, nous montrons par induction sur n qu'il existe $z \in K$ tel que

$$(4.1) \quad |z|_1 > 1 \quad \text{et} \quad |z|_i < 1 \quad \text{pour tout } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Nous venons de montrer le cas où $n = 2$. Supposons maintenant le résultat vrai pour $n - 1$. Nous avons donc un $z \in K$ satisfaisant (4.1) pour $n - 1$. Soit $y \in K$ comme avant. Si $|z|_n \leq 1$, alors $z^m y$ convient pour un $m \gg 0$. Sinon $|z|_n > 1$ et alors on a que $t_m = z^m/(1 + z^m)$ tend vers 1 pour $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_n$, et vers 0 pour les autres à mesure que m s'approche de l'infini. Ainsi $t_m y$ convient pour un $m \gg 0$. Soit $z \in K$ tel qu'en (4.1), la suite $(z^m/(1 + z^m))_m$ converge vers 1 pour $|\cdot|_1$ et vers 0 pour toutes les autres. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on peut dès lors construire un $z_i \in K$ suffisamment proche de 1 pour $|\cdot|_i$ et de 0 pour les autres. L'élément $x = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n \in K$ satisfait donc l'assertion du théorème. \square

Corollaire 4.8 (des restes chinois). *Soient $m_1, \dots, m_n > 1$ des entiers deux-à-deux coprimiers et soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$. Alors, il existe $x \in \mathbf{Z}$ tel que $x \equiv a_i \pmod{m_i \mathbf{Z}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Un tel x est unique modulo $m = m_1 \cdots m_n$.*

Démonstration. L'unicité modulo m de ce système de congruences est triviale. Nous montrons qu'une telle solution existe. Il suffit de montrer l'assertion en supposant que les $m_i = p_i^{e_i}$ sont des puissances de premiers. En appliquant le Théorème 4.7 avec $\varepsilon = \min\{p_1^{-e_1}, \dots, p_n^{-e_n}\}$ on a un $x \in \mathbf{Q}$ tel que $|x - a_i|_i < \varepsilon \leq p_i^{-e_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $x \in \mathbf{Z}$, alors c'est terminé. Pour le montrer, on peut prouver qu'il existe une solution à l'approximation telle que $|x|_\ell \leq 1$ pour tout premier ℓ . C'est ce que l'on appelle la forme forte du théorème de l'approximation. \square

5. UNE CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE \mathbf{Q}_p

Le Théorème d'Ostrowski 2.8 établit la classification des valeurs absolues sur le corps \mathbf{Q} . Il est alors naturel d'étudier les complétés de \mathbf{Q} associés à chacune de ces valeurs absolues, ne serait-ce que pour faire de l'analyse. Son complété archimédien est le corps des nombres réels \mathbf{R} . Quant à la valeur absolue triviale, elle lui induit la topologie discrète et donc il est déjà complet pour celle-ci. Mais que se passe-t-il pour les p -adiques ?

Proposition 5.1. *Soit $p \in \mathbf{Z}$ premier, le corps valué $(\mathbf{Q}, |\cdot|_p)$ n'est pas complet.*

Démonstration. Il suffit bien entendu d'exhiber une suite de Cauchy qui ne converge pas dans \mathbf{Q} . Suivre par exemple ce lien. Pour éviter de distinguer des cas selon les premiers et compte tenu du public analytique, nous donnons un argument utilisant le théorème de Baire. S'il était complet, alors il serait de Baire. Toutefois, il n'existe aucun point isolé p -adiquement dans \mathbf{Q} . En effet, l'ensemble $\mathbf{Q} \setminus \{x\}$ est ouvert et est p -adiquement dense dans \mathbf{Q} pour tout $x \in \mathbf{Q}$. Cela vient contredire le théorème de Baire car $\bigcap_{x \in \mathbf{Q}} \mathbf{Q} \setminus \{x\}$ est vide. \square

Compte tenu de cela, nous établissons le processus de complétion. Étant donné un corps valué $(K, |\cdot|)$, nous fabriquons une paire $(\widehat{K}, |\cdot|)$ où le premier est complet et contient un sous-corps dense isométriquement isomorphe à K et le second étend la valeur absolue de K . Nous montrons ensuite que cette paire est unique au sens d'une propriété universelle.

Proposition 5.2. *L'ensemble des suites de Cauchy de K est un anneau commutatif A où l'addition et la multiplication sont héritées de K et s'effectuent composante par composante, de neutre respectif $(0)_n$ et $(1)_n$. La partie des suites convergentes vers 0 est un idéal \mathfrak{m} de A .*

Démonstration. Simple vérification utilisant l'argument que toute suite de Cauchy est bornée. \square

Lemme 5.3. *Si une suite de Cauchy $(x_n)_n$ de K ne converge pas vers 0, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 0$ tels que $|x_n| \geq \varepsilon$ pour tout $n > N$.*

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, nous montrons que $(x_n)_n$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un $N \geq 0$ tel que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pour $n, m \geq N$. Par l'absurde on a aussi un $n^* > N$ tel que $|x_{n^*}| < \varepsilon$. Mais alors $|x_n| \leq |x_{n^*}| + |x_n - x_{n^*}| < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq 0$. \square

Lemme 5.4. *Soit $(x_n)_n$ et $N \geq 0$ comme avant. La suite $(y_n)_n$ définie par $y_n = 0$ si $n \geq N$ et $y_n = x_n^{-1}$ sinon est de Cauchy.*

Démonstration. En effet, on a $|y_m - y_n| \leq |x_n - x_m|/\varepsilon^2$ pour tous $n, m \geq N$ par le Lemme 5.3. Le résultat s'ensuit puisque la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. \square

Proposition 5.5. *Le quotient de l'anneau A par l'idéal \mathfrak{m} est un corps, noté \widehat{K} .*

Démonstration. Nous montrons que \mathfrak{m} est un idéal maximal de A . Si I est un idéal de A tel que $\mathfrak{m} \subset I$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ appartenant à I qui ne converge pas vers 0 et le Lemme 5.4 fournit l'existence d'une suite de Cauchy $(y_n)_n \in A$ tel qu'est vérifié

$$(x_n)_n(y_n)_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ fois}}, 1, 1, \dots) = (1)_n - (\underbrace{1, \dots, 1}_{N \text{ fois}}, 0, 0, \dots) \in I.$$

Cependant, la suite $(1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ appartient aussi à I et donc $I = A$. Ainsi on a que l'idéal \mathfrak{m} de A est maximal. \square

Proposition 5.6. *Pour tout $(x_n)_n + \mathfrak{m} \in \widehat{K}$, la suite de réels $(|x_n|)_n$ converge et est indépendante du choix du représentant de la classe. Cette flèche est une valeur absolue $|\cdot|$ sur \widehat{K} .*

Démonstration. Cette limite existe toujours car la suite en question est de Cauchy dans \mathbf{R} via l'inégalité triangulaire renversée. Elle est indépendante du représentant car si $(x_n)_n \equiv (y_n)_n \pmod{\mathfrak{m}}$, alors la suite $(x_n)_n - (y_n)_n$ converge vers 0 et dès lors leur limite sont égales, à nouveau via l'inégalité triangulaire renversée. Finalement, cela définit bien une valeur absolue car $|(x_n)_n + \mathfrak{m}| = 0$ si et seulement si $(x_n)_n + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ qui est le zéro de A/\mathfrak{m} . La multiplicativité et la sous-additivité découle de celle sur K . \square

Proposition 5.7. *L'application canonique $K \rightarrow \{(a)_n + \mathfrak{m}; a \in K\}$ est un isomorphisme de corps isométrique, où l'on induit sur le second la structure de \widehat{K} .*

Démonstration. Notons-là ϕ . On montre sans peine que ϕ est un isomorphisme de corps. Finalement, on a $|\phi(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| = |x|$ pour tout $x \in K$ ce qui est en fait une isométrie. \square

Proposition 5.8. *Le sous-corps $K' = \{(a)_n + \mathfrak{m}; a \in K\}$ est dense dans \widehat{K} pour la topologie induite par $|\cdot|$.*

Démonstration. Soient $(x_n)_n + \mathfrak{m} \in \widehat{K}$ et $\varepsilon > 0$. On sait que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pour tous $n, m \gg 0$. Dès lors, pour un $m \gg 0$ l'élément $(x_m)_n + \mathfrak{m}$ de K' est ε -proche de $(x_n)_n + \mathfrak{m}$. \square

Proposition 5.9. *Le corps valué $(\widehat{K}, |\cdot|)$ est complet.*

Démonstration. Nous commençons avec une suite d'éléments de K' . Soit $(\xi_n)_n$ une suite de Cauchy de K' où $\xi_n = (x_n)_m + \mathfrak{m}$. Comme $|\xi_n| = |x_n|$ pour tout n , la suite $(x_n)_n$ de K est de Cauchy et sa limite existe et vaut $\xi = (x_n)_n + \mathfrak{m}$. La densité de K' permet de se ramener à ce cas. En effet, étant donné $(\eta_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de \widehat{K} , on a par densité une suite $(\xi_n)_n$ d'éléments de K' tels que

$$|\eta_n - \xi_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout } n.$$

La suite $(\xi_n)_n$ est de Cauchy et converge vers $\xi = (x_n)_n + \mathfrak{m} \in \widehat{K}$. \square

Théorème 5.10. *Soit $V = (K, |\cdot|)$ un corps valué. Alors, il existe une paire valuée $(\widehat{K}, |\cdot|)$ unique à unique isomorphisme de corps isométrique près, appelée complétion de V et où \widehat{K} est complet, contient une copie dense de K et où $|\cdot|$ étend celle de la paire V .*

Démonstration. Il ne nous reste plus qu'à discuter de l'unicité. Pour cela, il nous faut construire un unique isomorphisme de corps isométrique de \widehat{K} dans n'importe quel candidat $(\widehat{K}', |\cdot|')$. Soit $\xi \in \widehat{K}$, par densité de K dans \widehat{K} on se ramène à une

suite $(x_n)_n$ d'éléments de K pointant vers ξ . Cette suite est donc de Cauchy, en la voyant maintenant comme une suite d'éléments de \widehat{K}' , elle converge vers $\xi' \in \widehat{K}'$. Cette gymnastique permet de construire la flèche en question $\xi \mapsto \xi'$. Les lecteurs sont invités à tester leur bonne compréhension en vérifiant que cette application est bien définie, est un isomorphisme de corps isométrique et est unique. \square

Remarque 5.11. Le complété d'un corps ultramétrique l'est aussi puisqu'il contient une copie isométrique de $\{n.1; n \in \mathbf{Z}\}$ du corps initial.

Remarque 5.12. Si $(K, |\cdot|)$ est un corps ultramétrique, alors on a $|K| = |\widehat{K}|$. En effet, l'inclusion dans le sens de lecture n'est pas surprenante puisque le complété contient une copie de K . Pour la réciproque, considérons $\xi \in \widehat{K}$ non nul, alors par densité on peut l'approcher par une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K . Comme la valeur absolue est ultramétrique,

$$|x_n| = |\xi + (x_n - \xi)| = \max\{|\xi|, |x_n - \xi|\} = |\xi|$$

pour un n pris suffisamment grand et via le Lemme 3.1.

Définition 5.13. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un premier, le corps des nombres p -adiques \mathbf{Q}_p est le complété p -adique de \mathbf{Q} .

Nous terminons cette section par quelques états de faits algébriques sur les nombres p -adiques et leurs différences avec les nombres réels.

Proposition 5.14. *Le disque unité fermé d'un corps ultramétrique est un anneau local et son disque unité ouvert est son unique idéal maximal.*

Démonstration. Soient x, y deux éléments d'un corps ultramétrique $(K, |\cdot|)$ appartenant à son disque unité fermé $D[0, 1]$. Leur produit est clairement dans $D[0, 1]$ et leur différence aussi puisque $|x - y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1$. Similairement, on montre que $D(0, 1)$ est un idéal de $D[0, 1]$. Il est maximal car si x est inversible dans $D[0, 1]$, alors $|x| = 1$. Réciproquement, tout x tel que $|x| = 1$ est inversible dans K et son inverse est tel que $|x^{-1}| = |x|^{-1} = 1$ et donc x est inversible dans $D[0, 1]$. \square

On est dès lors bien loin du compte de la situation réelle ou complexe ! Le disque unité fermé de \mathbf{Q}_p est noté \mathbf{Z}_p et est l'anneau des entiers p -adiques. Il s'agit ni plus ni moins que de la fermeture de \mathbf{Z} dans \mathbf{Q}_p . Son unique idéal maximal est $p\mathbf{Z}_p$. Il est à noter que le corps résiduel de ses entiers est $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p \simeq \mathbf{F}_p$. Similairement aux nombres réels, tout élément $\xi \in \mathbf{Q}_p$ s'écrit sous la forme d'une série de Laurent

$$\xi = \sum_{i \geq n} a_i p^i$$

où les $0 \leq a_i < p$ et où $n \in \mathbf{Z}$ est tel que $|\xi|_p = |p|_p^n$. Contrairement à l'écriture des nombres réels où la partie entière comporte un nombre fini de digits et où la partie décimale une infinité, ici la tendance est renversée. On écrit, sous ce paradigme, les naturels en base p et les entiers via l'Exemple 4.6.

DOCUMENTATION

- [1] Yvette Amice – *Les nombres p -adiques*, Presses universitaires de France (1975).
- [2] George Bachman – *Introduction to p -adic numbers and valuation theory*, Academic Press New York (1964).
- [3] Pinnangudi Natarajan – *An introduction to ultrametric summability theory*, Second edition, Forum for Interdisciplinary Mathematics **2**, Springer (2015).
- [4] Jürgen Neukirch – *Algebraic number theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **322**, Springer (1999).
- [5] Wilhelmus Schikhof – *Ultrametric calculus : an introduction to p -adic analysis*, Cambridge University Press (1985).