UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Martin Dolenc

Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

Poročilo

Ljubljana, 2021

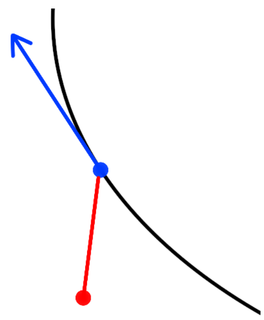
Kazalo

1. Uvodni problem

Otrok se sprehaja po ravnem igrišču na mivki, za seboj pa vleče na vrvico privezano igračo tako, da je vrvica vseskozi napeta. Denimo, da otrokovo gibanje opišemo s parametrično ravninsko krivuljo. Napišite program, ki izračuna sled gibanja igrače po mivki. Izriše naj tudi gibanje otroka in igrače.

2. Pristop

Problem si lahko predstavljamo kot da imamo neko točko, ki se premika po krivulji, za seboj pa vleče neko drugo točko (glej spodnjo skico).



Skica problema.

2.1. Teoretična rešitev.

Podano imamo parametrizirano ravninsko krivuljo (zgoraj označeno z črno), ki predstavlja premikanje otroka. Iz tega da je vrvica vseskozi napeta sledi, da je razdalja med otrokom in igračo konstantna (označeno z rdečo črto) in da se igrača vedno giblje v smeri proti otroku. Zdaj lahko izrazimo hitrost igrače s pomočjo hitrosti otroka (označena z modro puščico) in kota med smerjo gibanja igrače in smerjo gibanja otroka. Tako dobimo diferencialno enačbo prvega reda katere rešitev bo opisovala pot igrače na igrišču.

Za reševanje same diferencialne enačbe bomo izkoristili Matlabovo funkcijo `ode45`, ki nam bo vrnila pot igrače.

3. Reševanje uvodnega problema

Z $x_o(t)$ in $y_o(t)$ označimo parametrizacijo krivulje po kateri se sprehaja otrok, z $x_i(t)$ in $y_i(t)$ pa pot igrače. Vemo da vektor hitrosti igrače vedno kaže proti otroku, to lahko zapišemo kot

$$x_i'(t) = a \cdot (x_o(t) - x_i(t)),$$
$$y_i'(t) = a \cdot (y_o(t) - y_i(t)),$$

za nek $a \in \mathbb{R}$.

Vpeljimo še oznaki

$$x_r(t) = x_o(t) - x_i(t) \quad \text{in} \quad y_r(t) = y_o(t) - y_i(t)$$

za lažji zapis.

Vektor smeri igrače normiramo, ga pomnožimo z normo hitrosti otroka in to označimo z $v(t)$.

$$v(t) = \frac{\begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \right\|} \cdot \left\| \begin{bmatrix} x'_o(t) \\ y'_o(t) \end{bmatrix} \right\| \tag{1}$$

Seveda $v(t)$ še ni končni rezultat, zgornja enačba velja samo v primeru ko se otrok giblje po premici in mu igrača sledi za petami. Če želimo enačbo ki bo veljala za vse primere, moramo upoštevati še kot med smerjo gibanja igrače in smerjo gibanja otroka, zato pa bomo uporabili formulo za kosinus kota med tema dvema vektorjema.

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{\begin{bmatrix} x'_o(t) & y'_o(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} x'_o(t) \\ y'_o(t) \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \right\|} \tag{2}$$

kjer je $\alpha(t)$ kot med vektorjema, ki predstavljata smeri gibanj otroka in igrače. Zdaj lahko z $v(t)$ in $\alpha(t)$ zapišemo hitrost igrače

$$\begin{bmatrix} x'_i(t) \\ y'_i(t) \end{bmatrix} = \cos(\alpha(t)) \cdot v(t)$$

in zdaj namesto $\cos(\alpha(t))$ in $v(t)$ vstavimo to kar smo zapisali pri (1) in (2) in dobimo

$$\begin{bmatrix} x'_i(t) \\ y'_i(t) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x'_o(t) & y'_o(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \right\|^2}.$$

Če zdaj v enačbi zamenjamo $x_r(t)$ in $y_r(t)$, dobimo

$$\begin{bmatrix} x'_i(t) \\ y'_i(t) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x_o(t) - x_i(t)) \\ y_o(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x'_o(t) & y'_o(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_o(t) - x_i(t) \\ y_o(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x_o(t) - x_i(t) \\ y_o(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|^2}.$$

Kar je diferencialna enačba za $x_i(t)$ in $y_i(t)$. Začetni problem je pa določen z $x_i(0) = x_0$ in $y_i(0) = y_0$, kjer sta x_0 in y_0 začetni koordinati igrače.

4. Opis priloženih datotek

V datoteki `Main.m` se izvaja glavni program, tukaj lahko določimo začetne parametre in potem z zagonom scripte vidimo potovanje otroka in igrače. V programu kličemo funkciji `narisi_pot_otroka.m` in `narisi_pot_igrace.m`, ki izrišesta poti otroka in igrače, s funkcijo `animacija.m` pa animiramo premikanje le teh. Večino računanja pa poteka v funkciji `resi_enacbo_za_igraco.m` kjer rešimo diferencialno enačbo, ki smo jo zapisali v prejšnjem poglavju.

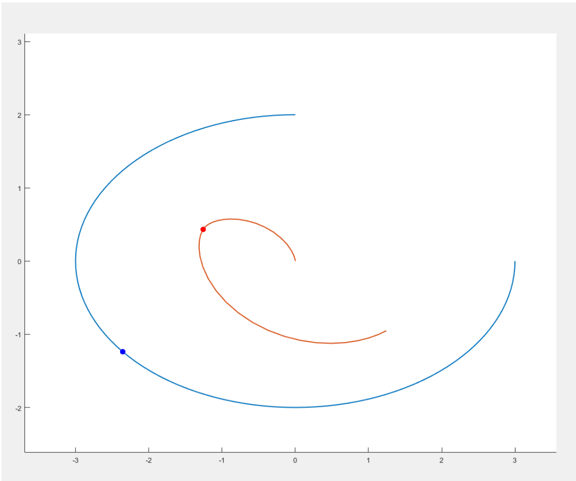
5. Primeri gibanj otroka in igrače

Spodaj je prikazanih nekaj primerov gibanja otroka in igrače. Z modro je označena krivulja po kateri se sprehaja otrok, z rdečo pa sled, ki jo pusti za seboj igrača.

5.1. **Delna elipsa.** Pri temu primeru smo za krivuljo vzeli:

$$x_o(t) = 3\cos(t) \quad \text{in} \quad y_o(t) = 2\sin(t)$$

Začetni čas je $\frac{\pi}{2}$, končni pa 2π. Začetne koordinate igrače pa so $x_0 = 0$ in $y_0 = 0$.

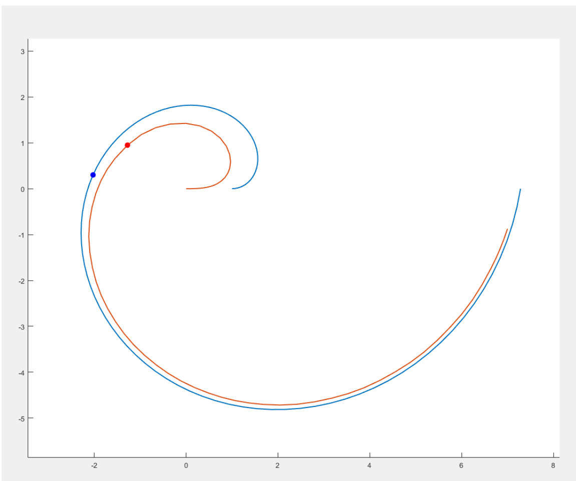


Delna elipsa.

5.2. **Spirala.** Pri temu primeru smo za krivuljo vzeli:

$$x_o(t) = t\cos(t) + 1 \quad \text{in} \quad y_o(t) = t\sin(t)$$

Začetni čas je 0, končni pa 2π. Začetne koordinate igrače pa so $x_0 = 0$ in $y_0 = 0$.

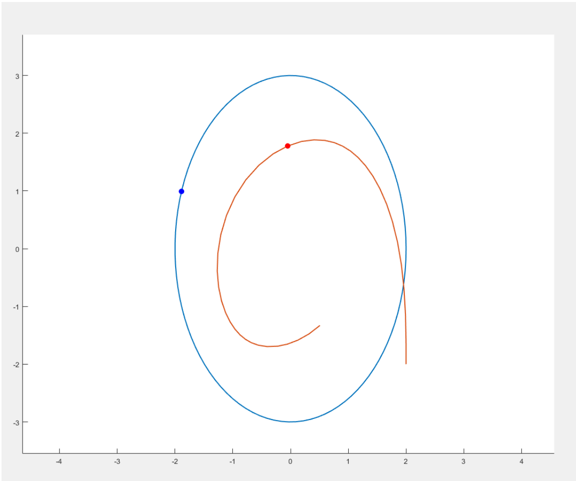


Spirala.

5.3. **Elipsa z zamaknjenim začetkom.** Pri temu primeru smo za krivuljo vzeli:

$$x_o(t) = 2\cos(t) \quad \text{in} \quad y_o(t) = 3\sin(t)$$

Začetni čas je 0, končni pa 2π. Začetne koordinate igrače pa so $x_0 = 2$ in $y_0 = -2$.



Elipsa z zamaknjenim začetkom.

Literatura

[1] F. Forstnerič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, verzija 5. 9. 2021, [ogled 5. 9. 2021], dostopno na `https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/94347/mod_resource/content/0/Skripta.pdf`.