Pauta de corrección Control 1

P1. (a) **(2.0 puntos)** Usando los axiomas de cuerpo de los números Reales, los teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos y la propiedad $x \cdot 0 = 0$, demostrar que:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (-a)a^{-1} = -1.$$

Solución: Hay que demostrar que el opuesto de 1 vale $(-a)a^{-1}$. Es decir:

$$PDQ : 1 + (-a)a^{-1} = 0.$$

0.5 pto.

Esto es cierto ya que:

$$\begin{aligned}
1 + (-a)a^{-1} &= a \cdot a^{-1} + (-a)a^{-1} && \text{; por Axioma E.I multiplicativo} \quad \text{0.3 pto} \\
&= [a + (-a)] \cdot a^{-1} && \text{; por Axioma Distributividad} \quad \text{0.3 pto} \\
&= 0 \cdot a^{-1} && \text{; por Axioma E.I. aditivo} \quad \text{0.3 pto} \\
&= a^{-1} \cdot 0 && \text{; por Axioma Conmutatividad} \quad \text{0.3 pto} \\
&= 0 && \text{; por propiedad } x \cdot 0 = 0 \quad \text{0.3 pto}
\end{aligned}$$

(b) **(2.0 puntos)** Determine cual(es) de las siguientes dos implicancias son ciertas para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} & x^2 < x \implies x^3 < x^2 \\
\text{ii)} & x^3 < x^2 \implies x^2 < x
\end{array}$$

Justifíque su respuesta.

Solución: Caso (i): Con el dato $x^2 < x$ y la propiedad permitida $x^2 \geq 0$, se deduce que $x > 0$, por lo tanto se puede multiplicar por x (segunda propiedad permitida), de donde se deduce $x^2 \cdot .x < x \cdot x$.
Por lo anterior, la implicación (i) es verdadera.

1 pto.

Caso (ii): La desigualdad $x^3 < x^2$ es equivalente a: $x^2(1-x) > 0$ la cual es cierta para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Pero los reales negativos no satisfacen $x^2 < x$.
Por lo tanto la implicación (ii) es falsa.
Método alternativo: Se puede ver que, por ejemplo, $x = -1$ satisface la desigualdad de la izquierda $(-1)^3 < (-1)^2$ es verdadera, pero no la de la derecha $(-1)^2 < (-1)$ es falsa. Por lo tanto la implicación (ii) es falsa

1 pto.

(c) **(2.0 puntos)** Resuelva la inecuación

$$\frac{x+1}{|x-2|} \geq 2$$

Solución: El módulo tiene como punto de corte $x = 2$. Por lo tanto se resuelven dos inecuaciones por separado.

Caso 1: $x \in (-\infty, 2)$:

Aquí la inecuación es equivalente a

$$\frac{x+1}{2-x} \geq 2 \iff \frac{x+1}{2-x} - 2\frac{2-x}{2-x} \geq 0 \iff \frac{3x-3}{2-x} \geq 0 \iff x \geq 1$$

Luego: Solucion 1: $x \in [1, 2)$

1 pto.

Caso 2: $x \in [2, \infty)$:

Aquí la inecuación es equivalente a

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2 \iff \frac{x+1}{x-2} - 2\frac{x-2}{x-2} \geq 0 \iff \frac{x-5}{x-2} \leq 0$$

Luego: Solucion 2: $x \in (2, 5]$

1 pto.

Por lo tanto: Solución Total: $x \in [1, 2) \cup (2, 5]$

Solución alternativa:

Descartar desde el principio $x = 2$, con esto, en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ la inecuación es equivalente a

$$2|x-2| \leq x+1$$

Esta inecuación se puede resolver usando los puntos de corte de arriba, o usando las propiedades de módulo. En el último caso, la inecuación es equivalente a:

$$\iff \quad 2x - 4 \leq x + 1 \quad \wedge \quad 2x - 4 \geq -x - 1$$

1 pto.

$$\iff \quad x \leq 5 \quad \wedge \quad 3x \geq 3$$
$$\iff \quad x \in [1, 5] \setminus 2$$

1 pto.

P2. (a) **(3.0 puntos)**) Determinar el Lugar Geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(5,0)$ **es la mitad** de su distancia al punto $(-1,3)$.

Solución: $P(x,y) \in L.G$ ssi se cumple:

$$d(P,(5,0)) = \frac{1}{2}d(P,(-1,3)) \iff \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

0.5 pto

$$\iff 4[x^2-10x+25+y^2] = x^2+2x+1+y^2-6y+9$$
$$\iff 3x^2-42x+3y^2+6y+90=0$$
$$\iff x^2-14x+y^2+2y+30=0$$

1 pto

$$\iff (x^2-2\cdot 7x+7^2+y^2+2y+1 = 49+1-30=20$$
$$\iff (x-7)^2+(y+1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

1 pto

El L.G es una circunferencia con centro en $(7,-1)$ y radio $2\sqrt{5}$.

0.5 pto

(b) Considere los puntos $A(3,0)$ y $B(0,2)$. Considere un punto móvil $P(\alpha,0)$ sobre el eje OX, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro indeterminado.

i) **(1.0 punto)** Determine la ecuación de la recta L_1 paralela al trazo AB que pasa por P en términos del parámetro α.

Solución: L_1 pasa por $P(\alpha,0)$ con pendiente $m_1 = m_{AB} = -\frac{2}{3}$ 0.5 pto

Ecuación

$$L_1 : y = -\frac{2}{3}(x-\alpha).$$

0.5 pto

ii) **(1.0 punto)** Determine la ecuación de la recta L_2 perpendicular al trazo AB que pasa por el punto simétrico de P respecto al origen (o sea, pasa por $P'(-\alpha,0)$), también en términos de α.

Solución:
L_2 pasa por $P'(-\alpha,0)$ con pendiente $m_2 = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{2}$. 0.5 pto

Ecuación

$$L_2 : y = \frac{3}{2}(x+\alpha).$$

0.5 pto

iii) **(1.0 punto)** Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de L_1 con L_2.

Observación: En iii) debe establecer la intersección de L_1 con L_2 y luego eliminar el parámetro indeterminado α.

Solución: $(x,y) \in L_1 \cap L_2$ ssi $y = -\frac{2}{3}(x-\alpha) = \frac{3}{2}(x+\alpha)$. Es decir $\alpha = \frac{3}{2}y + x = \frac{2}{3}y - x$. 0.5 pto

O sea la ecuación del L.G es:

$$\frac{3}{2}y + x = \frac{2}{3}y - x \iff y = -\frac{12}{5}x$$

que es una recta por el origen de pendiente $m = -\frac{12}{5}$. 0.5 pto

Tiempo de trabajo: 2 horas.