Pauta de corrección Control 1

P1. (a) **(3 pts.)** Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos, demostrar que: $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a(b^{-1}) = \left(a^{-1}b\right)^{-1}$

Solución: PDQ: El recíproco de $a^{-1}b$ vale $a(b^{-1})$
Es decir, PDQ: $(a^{-1}b) \cdot \left[a(b^{-1})\right] = 1$

1.0

En efecto:

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}b\right) \cdot \left[a(b^{-1})\right] &= a^{-1}\left(b \cdot \left[a(b^{-1})\right]\right) && \text{; Ax. Asoc.} \\
&= a^{-1}\left(b \cdot \left[b^{-1}a\right]\right) && \text{; Ax. Conm.} \\
&= a^{-1}\left(\left[b \cdot b^{-1}\right]a\right) && \text{; Ax. Asoc.} \\
&= a^{-1}\left(1 \cdot a\right) && \text{; Ax. EInv.} \\
&= a^{-1}\left(a \cdot 1\right) && \text{; } \cancel{\text{Ax. Conm.}}^{*} \\
&= a^{-1} \cdot a && \text{; Ax. ENeutro.} \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{; Ax. Conm.} \\
&= 1 && \text{; Ax. EInv.}
\end{aligned}$$

[±0.3 cada axioma no redundante, con máximo 2.0. La conm. * no se exige y no tiene puntaje]

2.0

(b) **(3 pts.)** Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $2|a| - |a^2| \leq 1$.

Solución: PDQ: $1 - 2|a| + |a^2| \geq 0$

1.0

Esto es cierto ya que:

$$1 - 2|a| + |a^2| = 1 - 2|a| + |a|^2 \quad \text{; Propiedad de módulo}$$

1.0

$$\begin{aligned}
&= (1 - |a|)^2 \\
&\geq 0 && \text{; Todo cuadrado es } \geq 0
\end{aligned}$$

1.0

P2. (a) **(3 pts.)** Resolver la inecuación $\left|x(x^2-1)\right| > x$.

Solución: **Método1:(base para la evaluación)** Separamos $\mathbb{R}$ usando los puntos críticos $0, 1, -1$.

Caso 1: Si $x \in (-\infty, -1)$, la inecuación queda: $-x(x^2-1) > x$ o sea $x^3 < 0$, cuya solución es todo el intervalo $(-\infty, -1)$. 0.6

Caso 2: Si $x \in [-1, 0)$, la inecuación queda: $x(x^2-1) > x$ o sea $x(x^2-2) > 0$, cuya solución es todo el intervalo $[-1, 0)$ 0.6

Caso 3: Si $x \in [0, 1)$, queda: $x(1-x^2) > x$ o sea $x^3 < 0$, cuya solución aquí es vacío. 0.6

Caso 4: Si $x \in [1, \infty)$, queda: $x(x^2-1) > x$ o sea $x(x^2-2) > 0$, cuya solución es $(\sqrt{2}, \infty)$. 0.6

Así, la solución total es: $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

También se aceptan las notaciones $]-\infty, 0[\cup]\sqrt{2}, \infty[$ y $\mathbb{R} \setminus [0, \sqrt{2}]$. 0.6

Métodos alternativos: Como $|x(x^2-1)| \geq 0$, todos los reales $x < 0$ satisfacen la inecuación. Así se ahorran los casos 1 y 2, obteniendo los 1.2 ptos.

(b) **(3 pts.)** De todas las circunferencias que tienen su radio igual al radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + x + y^2 = 3y$ y que pasan por el punto $\left(1, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, escriba la ecuación de **una de ellas**.

Solución: **Parte 1:** Obtención el radio vía completación de cuadrados perfectos:
Claramente

$$\begin{aligned}
x^2 + x + y^2 = 3y &\iff x^2 + x + y^2 - 3y = 0 \\
&\iff x^2 + 2(\tfrac{1}{2})x + (\tfrac{1}{2})^2 + y^2 - 2(\tfrac{3}{2})y + (\tfrac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\
&\iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}
\end{aligned}$$

Luego el radio vale $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 1.5

Parte 2: **Alternativa 1:** Para que la circunferencia buscada pase por el punto $(1, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2})$, su centro debe estar a la distancia $\frac{\sqrt{10}}{2}$ de dicho punto. Muchos centros cumplen esa condición. Algunos son

$$\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(1, 2 + 2\frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(1, 2\right)$$

1.0

Por ejemplo, usando el último de ellos, la ecuación buscada es:

$$\left(x - 1\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = \frac{10}{4}$$

0.5

Parte 2: Alternativa 2:
Conocido el radio, la circunferencia pedida debe tener una ecuación del tipo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{10}{4}, \qquad \text{para algún } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

0.5

Como además debe pasar por el punto $(1, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2})$, se debe cumplir que

$$(1 - x_0)^2 + \left(2 + \tfrac{\sqrt{10}}{2} - y_0\right)^2 = \frac{10}{4},$$

que es una ecuación con 2 incógnitas.

0.5

Podemos escoger por ejemplo $y_0 = 2$ (u otro razonable, también podemos escoger un valor para x_0), y obtenemos la siguiente ecuación para x_0:

$$(1 - x_0)^2 = 0$$

Cuya solución es $x_0 = 1$. Así, una circunferencia que cumple las condiciones es la de ecuación:

$$\left(x - 1\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = \frac{10}{4}$$

0.5