



Números Reales

1.1 Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} , es un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto.

En \mathbb{R} existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales.

Estas últimas propiedades están ligadas al llamado axioma del supremo, el cual hace a \mathbb{R} único.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de \mathbb{R} sería dar un largo listado de “todas ellas” de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: “sí, corresponde a la propiedad 1743” (por ejemplo). Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Estos postulados básicos elementales se llaman axiomas y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de \mathbb{R} serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante un razonamiento lógico-matemático, a partir de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface \mathbb{R} , suele decirse, en pocas palabras que \mathbb{R} es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

1.2 Axiomas de Cuerpo de los Reales

Los axiomas de \mathbb{R} sobre la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en un total de 5, de los cuales los dos primeros son los siguientes:

Axioma 1. (Conmutatividad)

- a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real y es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x.$$

- b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden en que se haga el producto, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2. (Asociatividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo esta última igualdad es cierta, gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores. En efecto:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y) && \text{Por el axioma 1} \\ &= (x + z) + y. && \text{Por el axioma 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma, sin alterar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

Ejercicios 1.1: Demostrar las siguientes igualdades, usando solo los axiomas 1 y 2.

1. $(a + b) + c = (a + c) + b = (b + a) + c = (b + c) + a = (c + a) + b = (c + b) + a.$

Aquí se han escrito todos los ordenamientos posibles de los reales a, b y c .

2. $(x + y) + (z + w) = (x + w) + (z + y) = (w + y) + (x + z).$

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3. (Distributividad)

- a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ x(y + z) = xy + xz$
- b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ (x + y)z = xz + yz$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la propiedad (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Los axiomas 4 y 5 entregan la existencia de ciertos elementos especiales en \mathbb{R} . Una consecuencia directa de ellos es que el conjunto de los números reales es no vacío. Sin embargo, como veremos más adelante, con estos axiomas el conjunto de los números reales todavía podría tener muy pocos elementos.

Axioma 4a. (Existencia de elemento neutro para la suma)

En \mathbb{R} existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ x + e = x.$$

Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Notemos que este axioma sólo garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma y no nos dice cuantos hay.

Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de \mathbb{R} , recordaremos que hay sólo un neutro. Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema 1.1. *El elemento neutro para la suma es único.*

Observación: Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos “cero” y lo denotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

DEMOSTRACIÓN. Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1 . Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ x + e_1 = x. \tag{1.1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2 , pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ x + e_2 = x \quad (1.2)$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1.1) y e_1 en la igualdad (1.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar estas dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

□

A continuación enunciamos el axioma 4 correspondiente al producto.

Axioma 4b. (Existencia de elemento neutro para el producto)

En \mathbb{R} existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ x \cdot e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elemento neutro para el producto. En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que el neutro multiplicativo es único, es decir:

Teorema 1.2. *El elemento neutro para el producto es único.*

Observación:

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y por lo tanto se propone como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo denotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axioma 5. (Existencia de elementos inversos)

- a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x , que se llaman opuestos o inversos aditivos de x , que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

- b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x , que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 1.3.

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.
 2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.
-

DEMOSTRACIÓN. Sean p_1 y p_2 inversos aditivos del mismo real arbitrario x , luego ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{1.3}$$

$$x + p_2 = 0. \tag{1.4}$$

Debemos probar que $p_1 = p_2$. En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$p_1 = p_1 + 0$	aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,
$= p_1 + (x + p_2)$	aquí hemos usado la ecuación (1.4)
$= (p_1 + x) + p_2$	aquí hemos usado el axioma de Asociatividad
$= (x + p_1) + p_2$	aquí hemos usado el axioma de Conmutatividad
$= 0 + p_2$	hemos usado la ecuación (1.3)
$= p_2 + 0$	hemos usado el axioma de Conmutatividad,
$= p_2$	hemos usado el axioma del Neutro aditivo.

□

Observación:

- La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y por lo tanto se propone como ejercicio.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1} , respectivamente.
- Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, se dice que \mathbb{R} con las operaciones $+$ y \cdot forma un Cuerpo, que denotaremos como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

1.3 Propiedades en \mathbb{R} relacionadas con la igualdad

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos piensan que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.

Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ se cumple } a \cdot 0 = 0.$$

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$. Osea, la tabla de uno es un axioma (¿recuerda cual?). Pero la tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en \mathbb{R} .

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + a \cdot 0 = x \tag{1.5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (1.5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Observación: Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a . Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (1.5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned}x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)] && \text{aquí apareció la suma conocida} \\&= x + [(-a) + a] \\&= x + [a + (-a)] \\&= x + 0 = x\end{aligned}$$

□

Consecuencia: Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que
NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debería cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

1.4 Otras Propiedades en \mathbb{R}

Propiedad 2. En \mathbb{R} , las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{aligned}
 a + x &= b && \text{como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\
 (-a) + (a + x) &= (-a) + b && \text{asociando} \\
 [(-a) + a] + x &= (-a) + b && \text{pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\
 0 + x &= (-a) + b && \text{pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\
 x &= (-a) + b.
 \end{aligned}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación. En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

Ahora veamos que esta solución es única. Para ello, supongamos que hemos encontrado los reales x_1 y x_2 , los que son soluciones de $a + x = b$. La unicidad quedará demostrada, si con sólo esta hipótesis, se concluye que $x_1 = x_2$.

Veamos si $a + x_1 = b$ y además $a + x_2 = b$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a + x_1 &= a + x_2 \\
 (-a) + [a + x_1] &= (-a) + [a + x_2] \\
 [(-a) + a] + x_1 &= [(-a) + a] + x_2 \\
 0 + x_1 &= 0 + x_2 \\
 x_1 &= x_2.
 \end{aligned}$$

Con esto se concluye la demostración de la unicidad de soluciones. □

1.5 Definiciones importantes

La unicidad que nos da la Propiedad anterior motiva las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN (DIFERENCIA Y CUOCIENTE)

- Llamaremos diferencia entre a y b al real $x = b + (-a)$ y se denota por $x = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en

$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

- El resultado de la ecuación (b) $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cuociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cuociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:

$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Observación: De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

En efecto, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a + x = a + c$. Como la solución de esta ecuación es única, entonces $b = c$.

2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

En efecto, análogamente al caso anterior, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a \cdot x = a \cdot c$.

3. Resolución de la ecuación lineal general

$$a \cdot x + b = 0, \quad \text{donde } a \neq 0.$$

Combinando las dos partes de la proposición anterior, se obtiene que, primero (usando la parte de la suma)

$$a \cdot x = -b$$

y por otro para el producto

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Propiedad 3 (Regla de los inversos).

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$ $-(-a) = a$

ii) Para todo $a \in \mathbb{R}^*$ $(a^{-1})^{-1} = a$, donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

DEMOSTRACIÓN. En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a . Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir,

$$(-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla. En efecto, se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. \square

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de “contar los signos”. Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

$$i) \ a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$$

$$ii) \ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$iii) \ -(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$$

$$iv) \ Si \ a, b \neq 0 \ entonces \ (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$v) \ a - (b + c) = a - b - c$$

$$vi) \ a - (b - c) = a - b + c$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$. Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$(a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i).

Observación: Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 3 igualdades anteriores.

Para demostrar la propiedad (ii) usamos la propiedad (i) dos veces en forma sucesiva. En efecto

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -[(-a) \cdot b] \\ &= -[b \cdot (-a)] \\ &= -[-(b \cdot a)] \\ &= ab. \end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (iii) debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a) + (-b)$. Es decir, debemos probar que

$$(a+b) + [(-a) + (-b)] = 0.$$

Esto efectivamente es cierto ya que

$$\begin{aligned}(a+b) + [(-a) + (-b)] &= [(a+b) + (-a)] + (-b) \\ &= [(b+a) + (-a)] + (-b) \\ &= [b + (a + (-a))] + (-b) \\ &= [b + 0] + (-b) \\ &= b + (-b) = 0.\end{aligned}$$

La propiedad (iv) es análoga a la (iii), cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades, deben combinarse las propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad (v). La propiedad (vi) se propone como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho. Veamos:

$$\begin{aligned}a - (b + c) &= a + [-(b + c)] \\ &= a + [(-b) + (-c)] \\ &= a + (-b) + (-c) \\ &= (a - b) - c.\end{aligned}$$

□

Propiedad 5. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0).$$

DEMOSTRACIÓN. La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Entonces sabemos que $x \cdot y = 0$ y debemos demostrar que:

$$x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida. Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0,$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}). Haciendo esto se concluye que $y = 0$.

Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$. Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. □

Propiedades adicionales

1. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \forall a, b, c, \in \mathbb{R}, \text{ con } b, c \neq 0$
2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, d \neq 0$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, d \neq 0$
4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, c, d \neq 0$
5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
7. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
8. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Observación: En estas propiedades se han usado las notaciones siguientes

$$\begin{aligned} ab &= a \cdot b & 1 + 1 &= 2, & 2 + 1 &= 3, & 3 + 1 &= 4, & \text{etc.} \\ a \cdot a &= a^2, & a^2 \cdot a &= a^3, & a^3 \cdot a &= a^4, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Además, el símbolo \pm representa el que la propiedad es cierta si se reemplazan todas las apariciones de \pm por $+$, o si se reemplazan todas por $-$.

DEMOSTRACIÓN.

1.

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bc} &= ac(bc)^{-1} \\ &= ac(b^{-1}c^{-1}) \\ &= ac(c^{-1}b^{-1}) \\ &= a(cc^{-1})b^{-1} \\ &= a \cdot 1 \cdot b^{-1} \\ &= ab^{-1} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= ab^{-1} \pm cd^{-1} \\ &= ab^{-1}dd^{-1} \pm cbb^{-1}d^{-1} \\ &= ad(bd)^{-1} \pm bc(bd)^{-1} \\ &= (ad \pm bc)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ad \pm bc}{bd} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= ab^{-1}cd^{-1} \\ &= ac(bd)^{-1} \\ &= \frac{ac}{bd}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= ab^{-1} : cd^{-1} \\ &= ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1} \\ &= ab^{-1} \cdot (c^{-1}d) \\ &= ad(bc)^{-1} \\ &= \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Reflexión Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas y propiedades usados en cada una de las igualdades anteriores.

La demostración de las propiedades restantes debe hacerse como ejercicio.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto formado por dos elementos siguiente:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

\circ	\heartsuit	\triangle
\heartsuit	\heartsuit	\triangle
\triangle	\triangle	\heartsuit

$*$	\heartsuit	\triangle
\heartsuit	\heartsuit	\heartsuit
\triangle	\heartsuit	\triangle

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a \circ con la suma, $*$ con la multiplicación, a \heartsuit con 0 y a \triangle con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto \mathbb{R} que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que \mathbb{R} .

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. ☐ Existen dos números distintos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x + y = x$ y $y + x = y$.
2. ☐ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y = y + x$.
3. ☐ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y = x$.
4. ☐ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \cdot y = y \cdot x$.
5. ☐ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) + z = (x + z) + (y + z)$.
6. ☐ En una serie de sumas de números reales, el orden en que éstas se realizan es de suma importancia.
7. ☐ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) + z = x + (y + z)$.
8. ☐ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x - y) \cdot z = x \cdot (-z) + y \cdot (-z)$.
9. ☐ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) \cdot z = y \cdot z + x \cdot z$.
10. ☐ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) \cdot z = (x + z) \cdot (y + z)$.
11. ☐ Existe un número real que sumado a cualquier otro da como resultado este último.
12. ☐ Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la ecuación $a - x = a$ no tiene solución en \mathbb{R} .
13. ☐ Si un número $x \in \mathbb{R}$ es neutro para la suma, entonces su inverso aditivo también lo es.
14. ☐ El elemento neutro en los reales para la suma es único. Se le denota 0.
15. ☐ Si un número $x \in \mathbb{R}$ es neutro para la suma, entonces su inverso multiplicativo también lo es.
16. ☐ Existe un número real, distinto de 0, que multiplicado con cualquier otro da como resultado este último.
17. ☐ Si un número real x es neutro para la multiplicación, entonces su inverso aditivo también lo es.
18. ☐ Si un número real x es neutro para la multiplicación, entonces su inverso multiplicativo también lo es.
19. ☐ Dado $a \in \mathbb{R}$ la ecuación $a \cdot x = a$ siempre tiene solución en \mathbb{R} .
20. ☐ El elemento neutro en los reales para la multiplicación es único. Se le denota 1.

21. ☐ Dado un número real cualquiera x , existe otro que al sumarlo con x resulta 0.
22. ☐ Dado $x \in \mathbb{R}$ la ecuación $x + y = 0$ tiene más de una solución $y \in \mathbb{R}$.
23. ☐ El inverso aditivo de cualquier número real x es único. Se denota $-x$.
24. ☐ Existe un número $x \in \mathbb{R}$ que es inverso aditivo de más de un número real.
25. ☐ Existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ todos distintos entre sí, tales que x_1 es el inverso aditivo de x_2 y x_2 es el inverso aditivo de x_3 .
26. ☐ Dado un número real cualquiera x con $x \neq 0$, existe otro que al multiplicarlo por x resulta 1.
27. ☐ Existe un número $x \in \mathbb{R}$ que es inverso multiplicativo de más de un número real.
28. ☐ El inverso multiplicativo de cualquier número real x , distinto de 0, es único. Se denota x^{-1} .
29. ☐ Dado $x \in \mathbb{R}$ la ecuación $x \cdot y = 1$ siempre tiene una solución $y \in \mathbb{R}$.
30. ☐ No existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x = x + x = 0$.
31. ☐ Existe un número real que multiplicado por cualquier otro resulta en él mismo.
32. ☐ El 0 no posee inverso aditivo.
33. ☐ El 0 posee un inverso multiplicativo, pero no es único.
34. ☐ El 0 no posee inverso multiplicativo.
35. ☐ El 1 posee inverso multiplicativo.
36. ☐ Existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ todos distintos entre sí, tales que x_1 es el inverso multiplicativo de x_2 y x_2 es el inverso multiplicativo de x_3 .
37. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación $a + x = b$ siempre pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
38. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $a + x = b$ tiene una única solución en \mathbb{R} .
39. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene una única solución en \mathbb{R} .
40. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $a \cdot x = b$ puede tener más de una solución en \mathbb{R} .
41. ☐ Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces necesariamente $b = c$.
42. ☐ Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \cdot b = a \cdot c$, entonces necesariamente $b = c$.
43. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, se tiene que 0 es siempre solución de la ecuación $a \cdot x + b = 0$.

44. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la solución de la ecuación $a \cdot x + b = 0$ es $x = -\frac{b}{a}$.
45. ☐ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x + y = 0$, entonces necesariamente $x = 0$ ó $y = 0$.
46. ☐ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x \cdot y = 0$, entonces necesariamente $x = 0$ ó $y = 0$.
47. ☐ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x + y = 1$, entonces necesariamente $x = 0$ ó $y = 0$.

Guía de Ejercicios

1. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales, propuestas en la tutoría:

- (a) El elemento neutro para el producto es único.
- (b) El inverso multiplicativo de un número real es único.
- (c) La ecuación $ax = b$, con $a \neq 0$, tiene una única solución en \mathbb{R} . Está dada por $x = ba^{-1}$.
- (d) Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Cada una de las siguientes igualdades es verdadera en el sistema de los números reales. Indique la razón de su veracidad, respecto de los axiomas y propiedades vistos.

- (a) $2 + (3 + 5) = (2 + 5) + 3$.
- (b) $0 + 5 = 5$.
- (c) $(x + y) + z = z + (y + x)$.
- (d) $(x + 2) \cdot y = y \cdot x + 2 \cdot y$.
- (e) $(4^{-1} \cdot 4) - 1 = 0$.

3. En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$ y $6 = 5 + 1$. Usando sólo los axiomas de los números reales y el hecho que $2 \neq 0$, pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada uno de ellos:

- (a) $3 + 2 = 5$.
- (b) $3 \cdot 2 = 6$.
- (c) $4 \cdot 2^{-1} = 2$.
- (d) $5 - 3 = 2$.
- (e) $(4 \cdot 3) \cdot 2^{-1} - 2 = 4$.

4. Dadas las siguientes secuencias de igualdades, determine los axiomas y las propiedades que las hacen correctas:

- (a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(ab) + (a(-b)) &= a \cdot (b + (-b)) \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(1-x)y + yx &= (1 \cdot y + (-x)y) + yx \\ &= (y + -(xy)) + yx \\ &= y + (-xy + yx) \\ &= y + (-xy + xy) \\ &= y + 0 \\ &= y\end{aligned}$$

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

(d) Dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}a + 0 \cdot a &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a(1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a\end{aligned}$$

(e) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} \\ &= (ab^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot 1)d^{-1} \\ &= (ab^{-1})(dd^{-1}) + (c(bb^{-1}))d^{-1} \\ &= (ab^{-1})(d^{-1}d) + cb(b^{-1}d^{-1}) \\ &= ad(b^{-1}d^{-1}) + cb(b^{-1}d^{-1}) \\ &= ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} \\ &= (ad + bc)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ad + bc}{bd}\end{aligned}$$

5. Demuestre las siguientes igualdades de números reales, indicando claramente los axiomas o propiedades usados:

(a) $a + a = 2 \cdot a$.

(b) $a - (b - c) = a + (-b) + c$

(c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(d) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(e) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

(f) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(g) $(x + \frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2 = x^2 + bx + c$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones (x es la incógnita).

(a) $2x + 3 = 0$.

(b) $3x + a = 2(x + a)$ (deje su resultado en términos de a).

(c) $(x + 1)^2 = (x + 2)(x - 4)$.

(d) $(x + a)(x - a) = x^2 - ax$ (deje su resultado en términos de a).

(e) $x(-x + 2) - 3(x - 6) = -x(x - 1) - (-(x + 2) - 7)$.

(f) $(2x - 7)^2 - x(3 - x) = 3(x + 1)^2 + 2(1 - x)^2$.

(g) $ax = 0$, para $a \neq 0$.

(h) $(x - 2)^2 = 0$.

(i) $(x + 2)(x - 3) = 0$.

7. Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $2 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $3 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

(a) $9 \in C$.

(b) $1 \notin C$.

(c) Si $5 \in C$, entonces $22 \in C$.

(d) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$.

(e) Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella una hora antes de la clase de trabajo dirigido, que resuelva sus dudas en la clase de trabajo dirigido y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$

(b) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

(c) (20 min.) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0, ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

(d) (20 min.) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \implies a = 0$

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**)

(a) (15 min.) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) (25 min.) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a + b)d] + [-(c + d)b] = 0.$$

(c) (15 min.) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

P3. (20 min.) Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}, w \neq 0, z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda w, y = \lambda z.$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto último implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $3 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

- (a) (5 min.) $1 \notin C$.
- (b) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$
- (c) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$.
- (d) (5 min.) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C)$.
- (e) (5 min.) No existe $x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$.