Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2023-1

Pauta de corrección Control 1

P1. (a) **(3 pts)** Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$, demuestre que: $\forall a \neq 0, \quad \big(-(a^{-1})+1\big)\cdot a = a+(-1)$. Si necesita alguna propiedad adicional, **debe demostrarla**.

Solución: Claramente:

$$\begin{aligned}
\big(-(a^{-1})+1\big)\cdot a &= \big(-(a^{-1})\big)\cdot a + 1\cdot a && \text{; Ax. Distrib.} && \boxed{0.3}\\
&= -(a^{-1}\cdot a) + 1\cdot a && \text{; Prop *(abajo)} && \boxed{0.3}\\
&= -(a\cdot a^{-1}) + a\cdot 1 && \text{; Ax. Conmut. (2 veces)} && \boxed{0.4}\\
&= -1 + a && \text{; Axs. EI}\cdot \text{ y EN}\cdot && \boxed{0.6}\\
&= a + (-1). && \text{; Ax. Conmut.} && \boxed{0.3}
\end{aligned}$$

Falta demostrar la propiedad *. PDQ: $(-a)b = -(ab)$.

O sea hay que probar que el opuesto de ab vale $(-a)b$. $\boxed{0.2}$

Es decir, PDQ: $ab + (-a)b = 0$. $\boxed{0.1}$

En efecto,

$$\begin{aligned}
ab + (-a)b &= [a + (-a)]\cdot b && \text{; Ax. Distrib.} && \boxed{0.2}\\
&= 0 \cdot b && \text{; Ax. EI+.} && \boxed{0.2}\\
&= b \cdot 0 && \text{; Ax. Conmut.} && \boxed{0.2}\\
&= 0. && \text{; Prop. } a\cdot 0 = 0 && \boxed{0.2}
\end{aligned}$$

(b) **(3 pts)** Dado $a > 0$, se definen los conjuntos solución de las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned}
A &= \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x^{200} + a^2 - x^2 > 0 \,\},\\
B &= \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; a^2 - x^2 > 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Resuelva la inecuación que define al conjunto B, demuestre que $B \subseteq A$ y encuentre algún $x > 0$ que sea solución de la inecuación que define al conjunto A (sin resolverla!!).

Solución: Solución de B:

$$\begin{aligned}
x \in B &\iff a^2 - x^2 > 0\\
&\iff (x-a)(x+a) < 0\\
&\iff x \in (-a, a). && \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

Además, si $x \in B$, sabiendo que $x^{200} \geq 0$ resulta que $x^{200} + a^2 - x^2 \geq a^2 - x^2 > 0$ y por lo tanto $x \in A$. O sea $B \subseteq A$. $\boxed{1.0}$

Para encontrar algún $x > 0$ en A, basta tomar alguno de $B = (-a, a)$ que sea > 0. Por ejemplo $x = a/5$. $\boxed{1.0}$

P2. (a) **(2.5 pts)** Demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, si $x \neq y$ se cumple que $(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) - 4 > 0$.

Solución: Claramente:

$$\begin{aligned}(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) - 4 &= \frac{x^2+y^2+2xy}{xy} - 4 \qquad \text{(desarrollar)} \quad \boxed{0.5}\\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} \qquad \text{(factorizar)} \quad \boxed{1.0}\\ &= \frac{(x-y)^2}{xy} > 0. \qquad \text{(concluir)} \quad \boxed{1.0}\end{aligned}$$

(b) **(3.5 pts)** Resuelva la inecuación

$$|x| - 1 \leq \frac{|x-1|}{x}$$

Solución: Puntos de corte de los módulos: 0 y 1. $\boxed{0.5}$

Caso 1 de 3: Consideremos el caso $x \in (-\infty, 0)$. La inecuación se transforma en:

$$\begin{aligned}|x| - 1 \leq \frac{|x-1|}{x} &\iff -x-1 \leq \frac{-x+1}{x}\\ &\iff 0 \leq \frac{-x+1+x^2+x}{x}\\ &\iff 0 \leq \frac{1+x^2}{x} \iff x > 0.\end{aligned}$$

En este caso la solución es $S_1 = \emptyset$. $\boxed{1.0}$

Caso 2 de 3: Consideremos el caso $x \in [0, 1)$. La inecuación se transforma en:

$$\begin{aligned}|x| - 1 \leq \frac{|x-1|}{x} &\iff x-1 \leq \frac{-x+1}{x}\\ &\iff 0 \leq \frac{-x+1-x^2+x}{x}\\ &\iff 0 \geq \frac{x^2-1}{x}\\ &\iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0.\end{aligned}$$

En este caso la solución es $S_2 = (0, 1)$. $\boxed{1.0}$

Caso 3 de 3: Consideremos el caso $x \in [1, \infty)$. La inecuación se transforma en:

$$\begin{aligned}|x| - 1 \leq \frac{|x-1|}{x} &\iff x-1 \leq \frac{x-1}{x}\\ &\iff 0 \leq \frac{x-1-x^2+x}{x}\\ &\iff 0 \geq \frac{x^2-2x+1}{x}\\ &\iff (x-1)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

En este caso la solución es $S_3 = \{1\}$. $\boxed{1.0}$

La solución total es $(0, 1]$.