SEMANA 3:

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Geometría Analítica

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Motivación y ecuaciones elementales

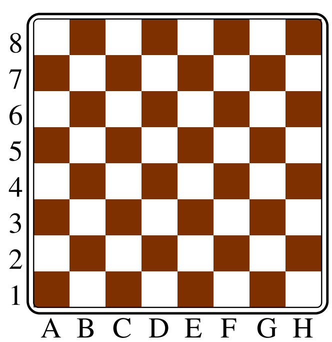
¿Has oído hablar sobre gente que juega ajedrez sin tener que mirar nunca el tablero?. Sí!. Esto es posible, y se debe a la herramienta llamada coordenadas de un punto.

En un tablero de ajedrez, se usan las letras de la A a la H para identificar las columnas del tablero y los números del 1 al 8 para identificar sus filas.

Observa la figura de la abajo, allí aparece el típico tablero de ajedrez, con sus columnas y filas rotuladas según la regla enunciada anteriormente.

Así por ejemplo, la torre blanca comienza ubicandose en la coordenada $(1, A)$ del tablero.

Con esta técnica, los jugadores pueden anotar sus jugadas, en los partidos, o simplemente comunicarle a su adversario las coordenadas de la pieza que piensa mover y este sabe exactamente cual será la nueva configuración del tablero



Esta idea puede usarse en otras situaciones, como por ejemplo un clásico juego de batallas navales donde los jugadores intentan destruir el barco adversario dando coordenadas a su bombardeos.

Un ejemplo muy importante es el Plano Geométrico.

En este caso, la idea para ubicar un punto cualquiera es trazar arbitrariamente dos rectas perpendiculares, que se cortan un punto llamado origen O.

Normalmente una de las rectas es horizontal y se denota por OX y la otra es vertical y se denota por OY.

Con esta construcción, un punto P se ubica en el plano midiendo su distancia a cada una de las rectas.

Para diferenciar los diferentes lados, a estas distancias se le asignan signos positivo o negativo, del modo siguiente:

- La distancia de P a la recta OY se denota por la letra x.

  $x > 0$ si P está a la derecha de OY, si no x será negativo al otro lado.

- La distancia de P a la recta OX se denota por la letra y.

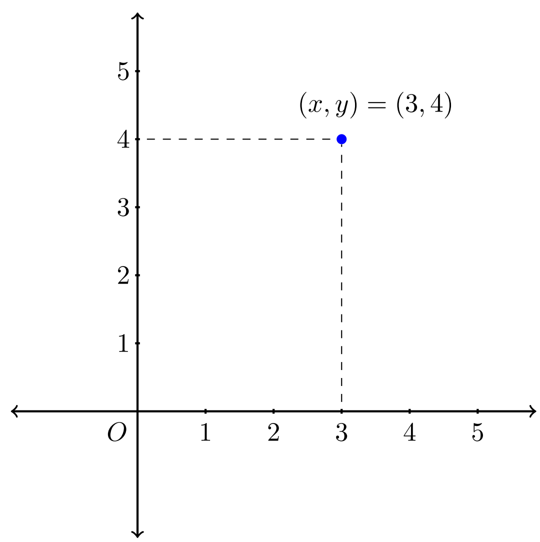
  $y > 0$ si P esta arriba de la recta OX, abajo se usa $y < 0$.

Este conjunto de rectas y la forma en que se ubican los puntos en base a ellas, constituyen el Famoso Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Se suele denotar este sistema por el símbolo $\{OXY\}$ para recordar sus elementos gestores.

Observa a la derecha como se ha dibujado el punto P que dista $x = 3$ del eje OY y dista $y = 4$ del eje horizontal OX.

Los números 3 y 4 se llaman las coordenadas del punto P. Esto se anota $P = (3, 4)$.



Un poco más de nomenclatura:

La recta horizontal OX se suele llamar eje de las x, o eje de las abscisas. La recta vertical OY se llama o eje de las y, o eje de las ordenadas.

Si $P = (x, y)$, entonces se dice que x es la abscisa de P y que y es la ordenada de P.

Conjuntos destacados:

El sistema de Coordenadas cartesianas también sirve para representar conjuntos de puntos. En general, estos conjuntos se anotan por expresiones del tipo

$$A = \{\text{todos los puntos de coordenadas } (x, y) \text{ tales que pertenecen a} C\},$$

donde la letra C denota alguna condición que satisfacen dichas coordenadas.

Ejemplo 3.1.
Por ejemplo, los ejes de coordenadas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} OX &= \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y = 0\} \\ OY &= \{(x,y) : x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Los siguientes conjuntos se llaman Cuadrantes del sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{1er. Cuadrante} &= \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\} \\ \text{2do. Cuadrante} &= \{(x,y) : x < 0,\ y > 0\} \\ \text{3er. Cuadrante} &= \{(x,y) : x < 0,\ y < 0\} \\ \text{4to. Cuadrante} &= \{(x,y) : x > 0,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

Otras ecuaciones elementales

Veamos algunos conjuntos elementales del plano descritos usando ecuaciones algebraicas.

1. $\{(x,y) : xy = 0\} = \{(x,y) : x = 0 \vee y = 0\}$ corresponde a la unión de dos ejes.
2. $\{(x,y) : y > 0\}$ corresponde al semiplano de los puntos ubicados sobre el eje OX.
3. $\{(x,y) : x = a\}$ donde a fijo, corresponde a una recta vertical que pasa por el punto $(a,0)$.
4. $\{(x,y) : y = b\}$ donde b fijo, corresponde a una recta horizontal que pasa por el punto $(0,b)$.

Lugares Geométricos

DEFINICIÓN (LUGAR GEOMÉTRICO) En este contexto, a los conjuntos de puntos del plano que satisfacen alguna condición geométrica o algebraica, los llamaremos *Lugares Geométricos.*

Observación: En geometría se han estudiado muchos lugares geométricos importantes, tales como las rectas, circunferencias, etc., dándose sus características mediante el lenguaje de la geometría.

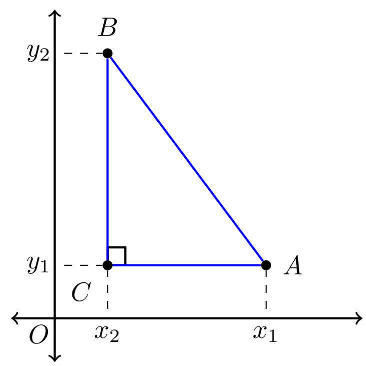
Nuestro objetivo será estudiar dichos lugares geométricos, escribiendo sus definiciones mediante ecuaciones algebraicas que los identifiquen plenamente. Normalmente en nuestros problemas tendremos que encontrar dichas ecuaciones e identificar el concepto geométrico que ellas representan.

3.2 Distancia entre dos puntos y pitágoras

Dados dos puntos del plano $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Sea C el punto de coordenadas (x_2, y_1). Entonces el ΔACB es rectángulo en C. Por teorema de Pitágoras se cumple que:

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(C, B)^2.$$

De la figura, vemos claro que la distancia entre A y C, y la distancia entre C y B están



dadas por

$$d(A, C) = |x_2 - x_1|$$
$$d(C, B) = |y_2 - y_1|,$$

reemplazando y sacando raíz cuadrada, la distancia $d(A, B)$ vale:

Definición (Distancia entre dos puntos)

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

3.2 Teorema de Pitágoras

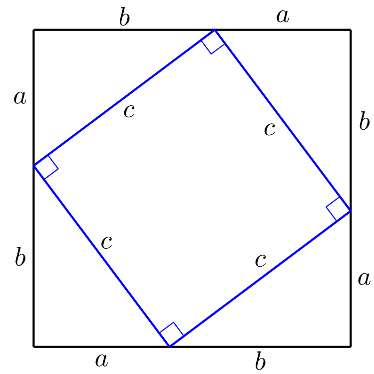
Veamos una demostración del famoso teorema de Pitágoras, con la ayuda de la siguiente figura.

Vemos que el área del cuadrado de lado $a + b$ es igual al área del cuadrado inclinado de lado c más el área de los triángulos de los extremos, es decir:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{(ab)}{2}.$$

Desarrollando el cuadrado del binomio a la izquierda y ordenando términos a la derecha se obtiene:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$



Finalmente, se simplifican los términos $2ab$ y resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3.3 Circunferencia

Ecuación de la circunferencia

Sean $A = (a, b)$ un punto fijo conocido del plano y r un número real conocido mayor que 0. Una *circunferencia con centro en el punto A y radio r*, es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano tales que su distancia al punto A vale r, es decir:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : d(P, A) = r\},$$

usando la ecuación 3.1, obtenemos:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\},$$

luego elevando al cuadrado:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

Por lo tanto la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (a, b) y de radio r será:

> **Definición (Ecuación de la circunferencia)**
>
> $$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Es decir, al dibujar en el plano los puntos que satisfacen esta ecuación se formará una circunferencia.

Ejemplos:

- $x^2+y^2=8^2$, es decir :$(x-0)^2+(y-0)^2=64$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen $(0,0)$ y de radio 8.
- $\mathcal{C}: x^2+y^2-2x=0$

Completetación de cuadrados perfectos

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x=0$$

Para poder ver que efectivamente este último ejemplo se trata de una circunferencia, es necesario detenernos para aprender el método de completación de cuadrados.

Luego la ecuación del ejemplo $\mathcal{C}: x^2+y^2-2x=0$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x=0 &\iff x^2-2x+y^2=0 \\ &\iff (x^2-2x+1)-1+y^2=0 \\ &\iff (x-1)^2+y^2=1. \end{aligned}$$

Es decir corresponde a una circunferencia con centro en $(1,0)$ y de radio $r=1$.

Observación:

1. Si $\mathcal{C}$ es una circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ entonces su ecuación puede escribirse

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 &\iff x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \\ &\iff x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0, \end{aligned}$$

es decir, si definimos: $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$, la ecuación de la circunferencia también se escribirá de la forma:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

2. Recíprocamente, utilizaremos el método de completación de cuadrados. Consideremos el conjunto $M=\{(x,y): x^2+y^2+Ax+By+C=0\}$, donde A,B,C son constantes dadas. La ecuación del conjunto M puede escribirse:

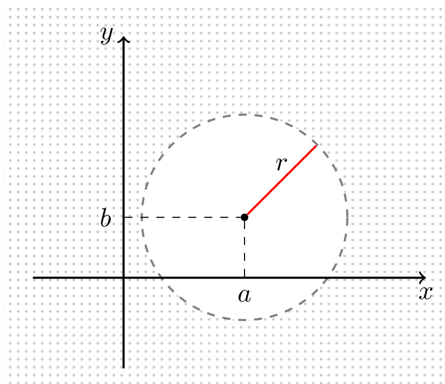
$$\begin{aligned} & x^2+y^2+Ax+By+C=0 \\ \iff & x^2+Ax+y^2+By+C=0 \\ \iff & x^2+2\left(\tfrac{A}{2}\right)x+y^2+2\left(\tfrac{B}{2}\right)y+C=0 \\ \iff & x^2+2\left(\tfrac{A}{2}\right)x+\left(\tfrac{A}{2}\right)^2-\left(\tfrac{A}{2}\right)^2+ \\ & +y^2+2\left(\tfrac{B}{2}\right)y+\left(\tfrac{B}{2}\right)^2-\left(\tfrac{B}{2}\right)^2+C=0 \\ \iff & \left(x+\tfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{B}{2}\right)^2+C-\tfrac{A^2}{4}-\tfrac{B^2}{4}+C=0 \\ \iff & \left(x+\tfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{B}{2}\right)^2=\tfrac{A^2+B^2-4C}{4} \end{aligned}$$

De donde vemos que M corresponde a una circunferencia de centro $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ y radio $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ cuando $A^2+B^2-4C \geq 0$.

Si por el contrario, los datos A, B y C fueran tales que $A^2+B^2-4C < 0$ entonces observamos que no existirían valores de x e y que satisfagan la ecuación de M, luego M corresponde al conjunto vacío, ya que no podemos crear una circunferencia de radio negativo.

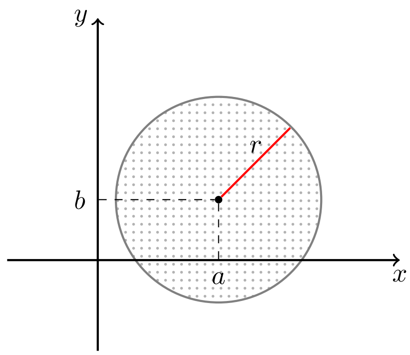
Ejemplo 3.2.

- $\{(x,y) : (x-a)^2+(y-b)^2 > r^2\}$ representa a la zona exterior a la circunferencia de centro en (a,b) y radio r.



Ejemplo 3.3.

- $\{(x,y) : (x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2\}$ Representa a la zona interior a la circunferencia de centro en (a,b) y radio r.



3.4 Recta

Ecuación de la recta

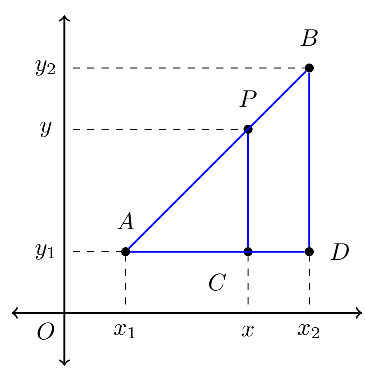
Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano tales que $A \neq B$. Queremos encontrar la ecuación de la única recta que pasa por los puntos A y B.

En los casos $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$ que corresponden a rectas vertical y horizontal respectivamente, la ecuación es evidentemente $x = x_1$ o $y = y_1$ respectivamente.

En el caso $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ podemos ver que un punto cualquiera $P = (x, y)$ del plano pertenece a la recta que pasa por A y B, sí y solamente sí alguna de las siguientes condiciones se cumple:

1. $P = A$
2. $P = B$
3. P está en el segmento $\overline{AB}$
4. B está en el segmento $\overline{AP}$
5. A está en el segmento $\overline{PB}$

Supongamos que estamos en el caso (3). Sean $C = (x, y_1)$ y D=(x_2, y_1). Gráficamente tenemos:



De la figura podemos ver que los triángulos ΔACP y ΔADB son semejantes. La condición de semejanza la escribimos:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$
$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Queda como ejercicio ver que las condiciones (4) y (5) son equivalentes a la misma ecuación.

Con esto podemos ver que la condición necesaria y suficiente para que un punto $P = (x, y)$ esté sobre la recta L que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es

$$P = (x, y) \in \mathcal{L} \iff (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Ejemplo 3.4.
Dados los puntos $A = (-2, 3)$ y $B = (5, 0)$, la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por A y B es:

$$(x + 2)(0 - 3) = (y - 3)(5 + 2).$$

Sin embargo, simplificando esta ecuación también se escribe:

$$\mathcal{L} : \; 3x + 7y - 15 = 0.$$

Ecuación general de la recta.

Sea $\mathcal{L}$ la recta de ecuación $(x-x_1)(y_2-y_1) = (y-y_1)(x_2-x_1)$. Igual que en el ejemplo, podemos escribir esta ecuación en forma simplificada:

$$\begin{aligned}
& (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \\
\iff & (x - x_1)y_2 - (x - x_1)y_1 = (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 \\
\iff & xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = yx_2 - yx_1 - x_2y_1 + x_1y_1 \\
\iff & (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, si escribimos $a = (y_2 - y_1)$, $b = -(x_2 - x_1)$, $c = (x_2y_1 - x_1y_2)$, la ecuación de cualquier recta puede escribirse de la forma:

Definición (Ecuación general de la recta)

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0.$$

Analicemos cuales son los puntos (x, y) que satisfacen esta ecuación para distintos valores de a, b, c. Es decir, cual es el conjunto solución de esta ecuación.

Teorema 3.1. *El conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ es:*

i) El conjunto vacío si $a = 0, b = 0, c \neq 0$.

ii) Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.

iii) Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.

iv) Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.

v) Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Demostración.

i) No hay punto (x, y) que cumpla la ecuación, por lo tanto el conjunto solución es vacío.

ii) Cualquier punto (x, y) satisface la ecuación. Lo que implica que la solución es todo el plano cartesiano.

iii) Como $b = 0$ y $a \neq 0$ entonces la ecuación queda $x = -c/a$, la cual corresponde a una recta vertical.

iv) Como $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces la ecuación queda $y = -c/b$, la cual corresponde a una recta horizontal.

v) En este caso la demostración la dividiremos en dos etapas:

Etapa 1.

Primero probaremos que el conjunto $R = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ contiene al menos dos puntos distintos. En efecto, si $c \neq 0$ entonces $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ son dos puntos de R y si $c = 0$ entonces $A' = (0, 0)$ y $B' = (-b, a)$ son dos puntos de R. Luego, no importando el valor de c, se tiene que R contiene al menos dos puntos distintos entre sí.

Etapa 2.

Como demostramos que R posee al menos dos puntos distintos entre sí, llamemos a estos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), y sea $P = (x, y)$ un punto arbitrario de R.

Probaremos que P satisface la ecuación $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

En efecto, como (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x, y) son puntos de R, entonces los tres puntos satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$, es decir:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \tag{1}$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0 \tag{2}$$
$$ax + by + c = 0 \tag{3}$$

luego restando $(2) - (1)$ y $(3) - (1)$ se obtiene:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \qquad (2) - (1) = (4)$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \qquad (3) - (1) = (5)$$

luego haciendo $(y - y_1) \cdot (4) - (y_2 - y_1) \cdot (5)$ se obtiene:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Con esto hemos probado que R es una recta.

De la Etapa 1 vimos que si $c \neq 0$ entonces los puntos $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ pertenecen a R y son puntos de abscisas y ordenadas distintas, por lo tanto la recta R que pasa por esos puntos es oblicua, lo mismo pasa para los puntos encontrados con $c = 0$.

$\square$

Observación: Hemos demostrado que la ecuación $ax + by + c = 0$ representa siempre una recta, teniéndose los siguientes casos.

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es horizontal.
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$ entonces la recta es vertical.
- Finalmente, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es inclinada.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{L} : ax+by+c = 0$ una recta donde $b \neq 0$ (es decir, no vertical). Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la recta $\mathcal{L}$, distintos entre sí, entonces el cuociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ es independiente de las coordenadas de los puntos A y B, y vale $\frac{a}{b}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0, \end{aligned}$$

luego restando se obtiene:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

de donde

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

$\square$

DEFINICIÓN (PENDIENTE DE UNA RECTA) Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de $\mathcal{L}$, entonces al real $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se le llama *pendiente de la recta $\mathcal{L}$*.

Con la proposición demostrada anteriormente, se ve que la pendiente de una recta es única, es decir, no depende de los puntos empleados en su cálculo.

Ecuación de la recta, punto-pendiente

La segunda forma de escribir la ecuación de una recta será dada a partir de la pendiente.

Sea $\mathcal{L}$ la recta de pendiente m y que pasa por $A = (x_0, y_0)$.

La ecuación de $\mathcal{L}$ es de la forma $ax + by + c = 0$ con $b \neq 0$, es decir:

$$\mathcal{L} : \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0.$$

Pero $m = -\frac{a}{b}$ luego la ecuación queda:

$$\mathcal{L} : y - mx + \frac{c}{b} = 0.$$

Pero como $A \in \mathcal{L}$ entonces, $y_0 - mx_0 + \frac{c}{b} = 0$, de donde despejamos $\frac{c}{b} = mx_0 - y_0$, con lo cual la ecuación de la recta queda:

$$\mathcal{L} : y - mx - y_0 + mx_0 = 0,$$

es decir:

Definición (Ecuación de la recta, punto pendiente)

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0).$$

Ecuación de la recta dados dos puntos

La tercera forma de escribir la ecuación de una recta será dada a partir de dos puntos.

Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación de $\mathcal{L}$ es $\mathcal{L} : x = x_1$ o bien $\mathcal{L} : x = x_2$

Si $x_1 \neq x_2$ entonces lo más cómodo es calcular la pendiente y utilizar la fórmula deducida anteriormente. Es decir:

Definición (Ecuación de la recta dados dos puntos)

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ecuación principal de la recta.

Sea $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$ una recta no vertical ($b \neq 0$). Sea m su pendiente.

Entonces dividiendo por b la ecuación de $\mathcal{L}$ puede escribirse

$$\mathcal{L} : -mx + y + \frac{c}{b} = 0$$

o sea

$$\mathcal{L} : y = mx - \frac{c}{b},$$

donde llamamos $n = -\frac{c}{b}$, con lo cual la ecuación de la recta queda

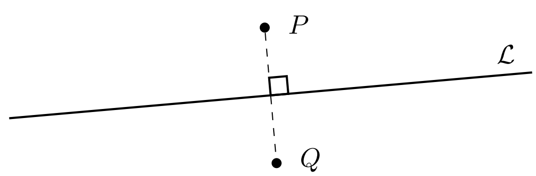
> **Definición (Ecuación principal de la recta)**
>
> $$\mathcal{L} : y = mx + n.$$

Observación: Es claro que el punto $(0, n)$ satisface la ecuación de la recta, luego el significado geométrico de la constante n corresponde a la altura donde la recta corta al eje OY.

Paralelismo y perpendicularidad

Para estudiar formalmente estas intuitivas nociones geométricas, necesitamos definir primero:

> **Definición (Simetral)** Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ distintos, llamamos Simetral de P y Q, a la recta $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisface
>
> $$(x, y) \in \mathcal{L} \iff d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y)).$$



En la figura, $\mathcal{L}$ es simetral de P y Q.

Definimos ahora las nociones de paralelismo y perpendicularidad:

> **Definición (Paralelismo)** Dos rectas L y L' son paralelas (denotado $L \parallel L'$) si $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$.

> **Definición (Perpendicularidad)** Dos rectas L y L' son perpendiculares u ortogonales (denotado $L \perp L'$), si para todo par de puntos P y Q en L, $P \neq Q$, la simetral entre P y Q es paralela a L'.

Proposición 3.2. *Sean L y L' dos rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface.*

- *L es horizontal y L' es vertical.*
- *L es vertical y L' es horizontal.*
- *L y L' son oblicuas con pendientes m_L y $m_{L'}$ respectivamente y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.*

DEMOSTRACIÓN.

- En el primer caso, dos puntos P y Q de L tienen asociada una simetral vertical, luego L' debe ser vertical.
- En el segundo caso, se procede de manera análoga y se propone como ejercicio.
- En el tercer caso, sabemos que dados dos puntos $P = (\alpha, \beta)$ y $Q = (\gamma, \delta)$, con $\alpha \neq \beta$ y $\gamma \neq \delta$, la simetral es oblicua con pendiente $\frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}$. Como la pendiente de la recta L es $\frac{\delta-\beta}{\gamma-\alpha}$ y cualquier paralela a la simetral tiene la misma pendiente, concluimos el resultado.

$\square$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos x a la distancia de P a la recta OX.

2. $\square$ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos x a la distancia de P a la recta OY.

3. $\square$ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos y a la distancia de P al origen O.

4. $\square$ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra arriba de la recta OX, entonces $y > 0$.

5. $\square$ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra arriba de la recta OX, entonces $x > 0$.

6. $\square$ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra a la izquierda de la recta OY, entonces $x < 0$.

7. $\square$ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia 4 del eje OX.

8. $\square$ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia 4 del eje OY.

9. $\square$ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia -4 del origen O.

10. $\square$ El eje OY se denomina eje de las abscisas.

11. $\square$ El eje OX se denomina eje de las abscisas.

12. $\square$ El eje OY se denomina eje de las ordenadas.

13. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = y = 0\}$, corresponde al eje OX.

14. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, \ y = 0\}$, corresponde al eje OX.

15. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ y \in \mathbb{R}, \ x = 0\}$, corresponde al eje OX.

16. $\square$ El primer cuadrante corresponde al conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, \ y > 0\}$.

17. $\square$ El tercer cuadrante corresponde al conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x < 0, \ y < 0\}$.

18. $\square$ El segundo cuadrante está incluido en el conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x < 0, \ y \in \mathbb{R}\}$.

19. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = 0, \vee y = 0\}$, corresponde a unión de los dos ejes OX y OY.

20. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ xy = 0\}$, corresponde al origen O.

21. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ xy \neq 0\}$, contiene a todo el plano geométrico, salvo al origen.

22. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x = 3\}$, corresponde a una recta horizontal.

23. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x = 2\}$, corresponde a una que pasa por el punto $(2,54)$.

24. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ y = -1\}$, corresponde a una recta horizontal qeu está abajo del eje OX.

25. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$.

26. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

27. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

28. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 = 3\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen.

29. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 = x\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen.

30. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ (x+1)^2 + y^2 = 3\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el el punto $(-1,0)$.

31. $\square$ Los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 1$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(-1,2)$ y radio 1.

32. $\square$ Los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 - 4y = 0$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2.

33. $\square$ Los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación $x^2 - 4y = 0$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

34. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$, siempre corresponde a una circunferencia.

35. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$ corresponde a una circunferencia sólo en el caso que A, B y C son positivos.

36. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$ corresponde a una circunferencia si $A^2 + B^2 - 4C \geq 0$.

37. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 > 4\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

38. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

39. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ x^2 + (y-1)^2 - 5 \leq 0\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 5.

40. ☐ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2$ entonces la recta que pasa por A y B es horizontal.

41. ☐ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2$ entonces la recta que pasa por A y B es vertical.

42. ☐ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2 = 0$ la recta que pasa por A y B es el eje OY.

43. ☐ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos en ambas coordenadas, si un punto P pertenece al segmento $\overline{AB}$ entonces pertenece a la recta que pasa por A y B.

44. ☐ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos en ambas coordenadas, si un punto P cumple que A pertenece al segmento $\overline{PB}$ entonces pertenece a la recta que pasa por A y B.

45. ☐ La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es $(x - x_1)(x_2 - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

46. ☐ La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

47. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ siempre corresponde a una recta.

48. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ corresponde a una recta siempre que $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

49. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ corresponde a una recta siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

50. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$, con $a = 0$ y $b \neq 0$ corresponde a una recta inclinada.

51. ☐ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ corresponde a una recta inclinada.

52. ☐ Dada una recta $L : ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera en ella, el cuociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.

53. ☐ Dada una recta $L : ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera en ella, el cuociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es igual a $b - a$.

54. ☐ Si m es la pendiente de una recta L, entonces esta se puede escribir como $(y - y_0) = m(x - x_0)$, con (x_0, y_0) cualquier punto que pertenezca a ella.

55. ☐ Si m es la pendiente de una recta L, entonces esta se puede escribir como $m(y - y_0) = (x - x_0)$, con (x_0, y_0) cualquier punto que pertenezca a ella.

Guía de Ejercicios

1. Dada la ecuación de la recta $y + 7x = 2y - 1$, determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

(a) $(1, 0)$.

(b) $(0, 0)$.

(c) $(1, 8)$.

(d) $(15, 2)$.

(e) $(1, 15)$.

2. Dada la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$, determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

(a) $(1, -1)$.

(b) $(1, 1)$.

(c) $(2, -1)$.

(d) $(1, 0)$.

(e) $(0, -1)$.

3. Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:

(a) Tiene pendiente 0 y pasa por $(-1, 2)$.

(b) Pasa por $(3, 2)$ y $(9, 7)$.

(c) Pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -8.

(d) Pasa por la intersección de $L_1 : x = 0$ con $L_2 : y = -1$ y tiene pendiente 6.

(e) Pasa por la intersección de $L_1 : 2x + y = 0$ con $L_2 : x = -2y$ y la intersección de $L_3 : 3x - 6y = 2$ con $L_4 : 4x + 1 = 0$.

4. Determine las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

(a) Radio 2 y centro en $(1, 2)$.

(b) Pasa por $(-2, 0)$, tiene radio 2 y la coordenada x del centro es 1. >Es única la solución?.

(c) Pasa por $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.¿Es única la solución?.

5. Considere la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

(a) ¿ Bajo qué condiciones sobre los coeficientes A, B, C, D, E, la ecuación representa una recta?. En este caso, ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(b) ¿ Bajo qué condiciones sobre los coeficientes A, B, C, D, E, la ecuación representa una circunferencia?. En este caso, ¿Cuál es el centro y el radio?

6. Dadas las siguientes ecuaciones, determine si representan rectas ó circunferencias. Explicitar pendiente y coeficiente de posición, o bien, centro y radio, según corresponda.

(a) $2y + 3x^2 = 3(y + x)^2 - 3y^2$

(b) $3x^2 + 2y^2 = (y + 1)^2 + 5$

(c) $2 + y = 3(y + x)$

(d) $(x + y)^2 = x + y + 2xy$

(e) $2x^2 + 3x + 2y^2 + 5y = 0$

(f) $(x + y)^2 = (x - y)^2$

(g) $y + 2x = 2(y + x) - 1$

7. Escriba de las tres formas distintas, vistas en clase, las siguientes rectas. En cada caso, indique pendiente y coeficiente de posición:

(a) $y = 3x + 2$

(b) $x = 2y + 1$

(c) $2 + y + x = 0$

(d) $(y - 1) = 2(x - 2)$

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella una hora antes de la clase de trabajo dirigido, que resuelva sus dudas en la clase de trabajo dirigido y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

Antes de comenzar, considere las siguientes definiciones preliminares, que necesitará para resolver los problemas.

Preliminar 1: Se dice que dos rectas L y L' son *perpendiculares* si sus pendientes satisfacen que $m_L \cdot m_{L'} = -1$. En el caso de segmentos, se considera la recta que contiene al segmento.

Preliminar 2: La ecuación de la recta *tangente* por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$. P se llama punto de tangencia .

P1. (15 min.) Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo que determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dimidiado por L.

P2. (15 min.) Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C, varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.

P3. (15 min.) Dados el punto $P = (a, b)$ y la recta $L : y = mx$, se trazan PH perpendicular a OX y PK perpendicular a L. Si D es el punto medio de OP y M es el punto medio de HK probar que DM es perpendicular a HK y $DK = DH$.

P4. (15 min.) Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan, respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determinar el lugar geométrico de P.

P5. (30 min.) Sean $L_1 : x + 2y + 4 = 0$, $L_2 : x - y - 1 = 0$, y $L_3 : -x + 3y - 3 = 0$, tres rectas que definen el triángulo ABC. Determinar:

a) Perímetro del triángulo ABC.

b) Area del triángulo ABC.

c) La ecuación de la circunferencia circunscrita.

P6. (30 min.) Se consideran tres puntos O, A, B situados sobre un recta y se contruyen dos semicircunferencias de diámetros OA y OB, respectivamente. Desde el punto medio M del trazo AB se levanta la perpendicular, cortando a la circunferencia mayor en R y luego se traza la tangente MP a la circunferencia menor, siendo P

el punto de tangencia. Demuestre que O, P y R se encuentran sobre una misma recta.

P7. (30 min.) La base de un triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$. El vértice C está sobre la recta $y = c$, $b > 0$ y $c > 0$. Determinar el lugar geométrico correspondiente a la intersección de las tres alturas.