Diseño factorial con bloques

Martin Elizondo
Carlos Osses

June 2025

Índice

1. Introducción **3**

2. Marco Teórico **4**
2.1. Diseño Factorial 4
2.2. Bloques 4
2.3. Diseño Factorial por Bloques 4
2.4. Ventajas 4
2.5. Aplicaciones del Diseño Factorial con Bloques 5

3. Modelo Factorial con un bloque **6**
3.1. Modelo: 6
3.2. Hipotesis: 7
3.3. Supuestos: 7
3.4. Descomposición de la Variabilidad y Tabla ANOVA 8

4. Modelo Factorial con dos bloques **10**
4.1. Modelo 10
4.2. Hipótesis 10
4.3. Supuestos 11
4.4. Descomposición de la Variabilidad y Tabla ANOVA 11

5. Comparaciones Múltiples de Duncan **12**
5.1. Fundamento Teórico 12
5.2. Aplicación en Diseño Factorial 13
5.3. Procedimiento de la Prueba 13

6. Ejemplos: **14**
6.1. Diseño factorial con un bloque : 14
6.2. Ejercicio con doble restricción de aleatorización 19

7. Conclusiones: **25**

8. Referencias **25**

1. Introducción

El diseño factorial por bloques permite estudiar el efecto de varios factores sobre una variable de respuesta, controlando al mismo tiempo fuentes externas de variabilidad mediante bloques. Esta técnica mejora la precisión del análisis al reducir el error experimental.

En este informe se presenta un repaso teórico del diseño factorial con bloques y se resuelve un ejemplo práctico utilizando análisis de varianza (ANOVA) para interpretar los resultados.

2. Marco Teórico

2.1. Diseño Factorial

Un diseño factorial es una metodología experimental que permite estudiar el efecto simultáneo de dos o más factores sobre una o varias variables de respuesta. Cada factor incluye distintos niveles, y se evalúan todas las combinaciones posibles entre ellos. Este tipo de diseño permite no solo analizar los *efectos principales* de cada factor, sino también las *interacciones* entre ellos, lo que proporciona una visión más completa del fenómeno bajo estudio.

2.2. Bloques

Un bloque es un grupo homogéneo de unidades experimentales que comparten una característica común que podría afectar los resultados, como el ambiente, el tiempo o el lugar. Al incluir bloques en un diseño experimental, se busca controlar esta fuente de variabilidad para que no interfiera con la evaluación de los factores de interés.

2.3. Diseño Factorial por Bloques

El diseño factorial por bloques combina las ventajas del diseño factorial completo con el control que ofrecen los bloques. En este diseño, cada combinación de niveles de los factores se aplica dentro de cada bloque, permitiendo separar la variación debida a los tratamientos de la variación debida a los bloques.

2.4. Ventajas

- Aumenta la precisión del experimento al reducir el error experimental.
- Permite estudiar múltiples factores simultáneamente.
- Controla la variabilidad entre bloques (condiciones no experimentales).
- Facilita la identificación de interacciones entre factores.

2.5. Aplicaciones del Diseño Factorial con Bloques

El diseño factorial con bloques se aplica frecuentemente en contextos donde se desea estudiar más de un factor simultáneamente, pero existe una fuente de variación adicional que debe controlarse. A continuación, se presentan algunos ejemplos concretos de su uso en distintas disciplinas:

- **Agricultura:** Comparación de fertilizantes y métodos de riego en diferentes parcelas, controlando la variabilidad del suelo mediante bloques.
- **Industria:** Evaluación de técnicas de manufactura o materiales en distintas líneas de producción o turnos, usando estos como bloques.
- **Psicología y Educación:** Análisis de tratamientos o intervenciones pedagógicas en distintos grupos homogéneos (bloques por curso, institución o terapeuta).
- **Medicina:** Pruebas de tratamientos clínicos en pacientes agrupados por edad, género u otras condiciones relevantes, utilizados como bloques.

En estos contextos, el uso de bloques permite reducir la variabilidad no explicada y mejorar la precisión del análisis sin aumentar el número total de observaciones necesarias.

3. Modelo Factorial con un bloque

3.1. Modelo:

En un diseño factorial con bloques, el modelo estadístico incorpora tanto los efectos de los factores como el efecto del bloqueo. Supongamos un diseño con dos factores: el **Factor A** con a niveles y el **Factor B** con b niveles, y un conjunto de r bloques. El modelo lineal aditivo que representa esta estructura puede expresarse como:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

donde:

- y_{ijk}: es la observación correspondiente al nivel i del Factor A, al nivel j del Factor B, y al bloque k.
- μ: es la media general.
- τ_i: es el efecto del nivel i del Factor A.
- β_j: es el efecto del nivel j del Factor B.
- $(\tau\beta)_{ij}$: es la interacción entre el nivel i del Factor A y el nivel j del Factor B.
- δ_k: es el efecto del bloque k.
- ε_{ijk}: es el término de error aleatorio, asumido normalmente distribuido con media cero y varianza constante.

Este modelo permite separar la variación total observada en componentes atribuibles a los factores principales, su interacción, los bloques y el error experimental. El propósito del análisis de varianza (ANOVA) en este contexto es determinar si alguno de estos efectos es estadísticamente significativo, es decir, si tiene un impacto real sobre la variable de respuesta.

El uso de bloques es especialmente útil cuando no es posible controlar ciertas condiciones experimentales, pero sí se pueden agrupar las unidades experimentales de modo que estas condiciones afecten a todas por igual dentro de cada bloque. Así, se reduce la variabilidad residual y se mejora la precisión del análisis.

3.2. Hipotesis:

En el diseño factorial de dos factores, los factores (o tratamientos) de los renglones y las columnas, A y B, son de igual interés. Específicamente, el interés se encuentra en probar **hipótesis** acerca de la igualdad de los efectos de los tratamientos de los renglones, por ejemplo,

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$H_1 : \text{al menos un } \tau_i \neq 0$$

y de la igualdad de los efectos de los tratamientos de las columnas, por ejemplo,

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$
$$H_1 : \text{al menos un } \beta_j \neq 0$$

También existe interés en determinar si los tratamientos de los renglones y las columnas *interactúan*. Por lo tanto, también querría probarse

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad , \forall i, j$$
$$H_1 : \text{al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

De igual manera se quiere analizar si el bloque tiende a explicar la variabilidad del experimento , por lo que se ve si el bloque tiene una influencia para la variable de respuesta con la siguiente hipotesis.

- **Hipótesis nula H_0:** Todos los bloques tienen el mismo efecto, es decir, no hay efecto significativo del bloque (operador):

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = 0$$

- **Hipótesis alternativa H_1:** Al menos un bloque tiene un efecto diferente:

$$H_1 : \exists\ k,\ \delta_k \neq 0$$

3.3. Supuestos:

Para que los resultados obtenidos a través del análisis de varianza (ANOVA) en un diseño factorial por bloques sean válidos, es necesario que se cumplan los siguientes supuestos estadísticos:

1. **Independencia de las observaciones:** Las observaciones son independientes entre sí. Es decir, el valor de una unidad experimental no influye en otra.

2. **Normalidad:** Los errores aleatorios (ε_{ijk}) se distribuyen de forma normal con media cero, es decir, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$.

3. **Homogeneidad de varianzas:** La varianza de los errores es constante para todas las combinaciones de tratamientos y bloques.

4. **Ausencia de interacción entre bloques y tratamientos:** Se asume que no existe interacción entre los tratamientos y los bloques, es decir, los bloques no modifican el efecto de los tratamientos.

El incumplimiento de estos supuestos puede afectar la validez de las inferencias realizadas a partir del análisis estadístico.

3.4. Descomposición de la Variabilidad y Tabla ANOVA

En esta sección se presentan las expresiones utilizadas para descomponer la variabilidad total de un diseño factorial de dos factores con bloques completos aleatorizados. Se detallan las fórmulas para calcular las Sumas de Cuadrados (SC), los Cuadrados Medios Esperados (CME), y se presenta la tabla ANOVA correspondiente al modelo.

Fuente de variación	**gl**	**SC**	**CM**	F_0	**Valor-p**
Tratamiento A	$a-1$	$SC_{\text{tr\_A}}$	$CM_{\text{tr\_A}}$	$\frac{CM_{\text{tr\_A}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{a-1,\ ab(n-1)} > F_0)$
Tratamiento B	$b-1$	$SC_{\text{tr\_B}}$	$CM_{\text{tr\_B}}$	$\frac{CM_{\text{tr\_B}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{b-1,\ ab(n-1)} > F_0)$
Interacción A×B	$(a-1)(b-1)$	$SC_{\text{int\_AB}}$	$CM_{\text{int\_AB}}$	$\frac{CM_{\text{int\_AB}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{(a-1)(b-1),\ ab(n-1)} > F_0)$
Bloques	$n-1$	SC_{bl}	CM_{bl}	—	$P(F_{n-1,\ ab(n-1)} > F_0)$
Error	$ab(n-1)$	SC_{error}	CM_{error}	—	—
Total	$abn-1$	SC_{total}	—	—	—

Cuadro 1: Tabla ANOVA para un diseño factorial de dos factores en bloques completos aleatorizados

Sumas de Cuadrados (SC)

$$\begin{aligned}
\text{SC}_{\text{bl}} &= \frac{1}{ab}\sum_k y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{tr_A}} &= \frac{1}{bn}\sum_i y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{tr_B}} &= \frac{1}{an}\sum_j y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{int_AB}} &= \frac{1}{n}\sum_i\sum_j y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - \text{SC}_{\text{tr_A}} - \text{SC}_{\text{tr_B}} \\
\text{SC}_{\text{error}} &= \text{Sustracción (residuo)} \\
\text{SC}_{\text{total}} &= \sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}
\end{aligned}$$

Cuadrados Medios (CM)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CM}_{\mathrm{bl}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{bl}}}{n-1} \\
\mathrm{CM}_{\mathrm{tr\_A}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{tr\_A}}}{a-1} \\
\mathrm{CM}_{\mathrm{tr\_B}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{tr\_B}}}{b-1} \\
\mathrm{CM}_{\mathrm{int\_AB}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{int\_AB}}}{(a-1)(b-1)} \\
\mathrm{CM}_{\mathrm{error}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{error}}}{ab(n-1)} \\
\mathrm{CM}_{\mathrm{total}} &= \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{total}}}{abn-1}
\end{aligned}
$$

Estadísticos calculados

$$
\begin{aligned}
F_c(A) &= \frac{CM_{\mathrm{tr}_A}}{CM_{\mathrm{error}}} \\
F_c(B) &= \frac{CM_{\mathrm{tr}_B}}{CM_{\mathrm{error}}} \\
F_c(AB) &= \frac{CM_{\mathrm{inter}AB}}{CM_{\mathrm{error}}} \\
F_c\mathrm{bl} &= \frac{CM_{\mathrm{bl}}}{CM_{\mathrm{error}}}
\end{aligned}
$$

4. Modelo Factorial con dos bloques

4.1. Modelo

Supongamos un diseño factorial con dos factores, el **Factor A** con a niveles y el **Factor B** con b niveles, y dos criterios de bloqueo: **Bloque 1** (por ejemplo, operadores) con r_1 niveles, y **Bloque 2** (por ejemplo, turnos) con r_2 niveles. El modelo estadístico lineal aditivo se expresa como:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \gamma_l + \varepsilon_{ijkl}$$

- y_{ijkl}: observación correspondiente al nivel i de A, nivel j de B, bloque k de tipo 1 y bloque l de tipo 2.
- μ: media general.
- τ_i: efecto del i-ésimo nivel del Factor A.
- β_j: efecto del j-ésimo nivel del Factor B.
- $(\tau\beta)_{ij}$: efecto de la interacción entre los factores A y B.
- δ_k: efecto del k-ésimo nivel del Bloque 1.
- γ_l: efecto del l-ésimo nivel del Bloque 2.
- ε_{ijkl}: error aleatorio, $\varepsilon_{ijkl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Este modelo permite ajustar simultáneamente por ambas fuentes de variabilidad no experimental, mejorando la precisión de las estimaciones y reduciendo el error residual.

4.2. Hipótesis

- **Factor A:** $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Al menos un } \tau_i \neq 0$
- **Factor B:** $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Al menos un } \beta_j \neq 0$
- **Interacción A × B:** $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$

Los efectos de bloque usualmente se consideran como efectos de control y no son sometidos a contraste de hipótesis, aunque su aporte al modelo puede ser evaluado vía ANOVA.

4.3. Supuestos

1. Las observaciones son independientes.
2. Los errores ε_{ijkl} se distribuyen normalmente: $\varepsilon_{ijkl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
3. La varianza es homogénea en todas las combinaciones de tratamientos y bloques.
4. No hay interacción entre tratamientos y bloques.

4.4. Descomposición de la Variabilidad y Tabla ANOVA

La variabilidad total del experimento se descompone como se muestra a continuación:

Fuente de variación	**gl**	**SC**	**CM**	F_0	**Valor-p**
Tratamiento A	$a-1$	$SC_{\text{tr\_A}}$	$CM_{\text{tr\_A}}$	$\frac{CM_{\text{tr\_A}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{a-1,\, gl_{\text{error}}} > F_0)$
Tratamiento B	$b-1$	$SC_{\text{tr\_B}}$	$CM_{\text{tr\_B}}$	$\frac{CM_{\text{tr\_B}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{b-1,\, gl_{\text{error}}} > F_0)$
Interacción A×B	$(a-1)(b-1)$	$SC_{\text{int\_AB}}$	$CM_{\text{int\_AB}}$	$\frac{CM_{\text{int\_AB}}}{CM_{\text{error}}}$	$P(F_{(a-1)(b-1),\, gl_{\text{error}}} > F_0)$
Bloque 1	$ab-1$	SC_{bl1}	CM_{bl1}	—	—
Bloque 2	$ab-1$	SC_{bl2}	CM_{bl2}	—	—
Error	$(ab-1)(ab-2)$	SC_{error}	CM_{error}	—	—
Total	$(ab)^2-1$	SC_{total}	—	—	—

Cuadro 2: Tabla ANOVA para un diseño factorial de dos factores en bloques completos aleatorizados

Sumas de Cuadrados (SC)

$$
\begin{aligned}
\text{SC}_{\text{tr\_A}} &= \frac{1}{bn}\sum_i y_{i\cdots}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{tr\_B}} &= \frac{1}{an}\sum_j y_{\cdot j\cdot\cdot}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{int\_AB}} &= \frac{1}{n}\sum_i\sum_j y_{ij\cdot\cdot}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abn} - \text{SC}_{\text{tr\_A}} - \text{SC}_{\text{tr\_B}} \\
\text{SC}_{\text{bl1}} &= \frac{1}{ab}\sum_k y_{\cdot\cdot k\cdot}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{bl2}} &= \frac{1}{ab}\sum_l y_{\cdots l}^2 - \frac{y_{\cdots}^2}{abn} \\
\text{SC}_{\text{error}} &= \text{Sustracción (residuo)} \\
\text{SC}_{\text{total}} &= \sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abn}
\end{aligned}
$$

Cuadrados Medios (CM)

$$\mathrm{CM}_{\mathrm{tr\_A}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{tr\_A}}}{a-1}$$
$$\mathrm{CM}_{\mathrm{tr\_B}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{tr\_B}}}{b-1}$$
$$\mathrm{CM}_{\mathrm{int\_AB}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{int\_AB}}}{(a-1)(b-1)}$$
$$\mathrm{CM}_{\mathrm{bl1}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{bl1}}}{ab-1}$$
$$\mathrm{CM}_{\mathrm{bl2}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{bl2}}}{ab-1}$$
$$\mathrm{CM}_{\mathrm{error}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{error}}}{ab-1)(ab-2)}$$

Estadisticos calculados

$$F_c(A) = \frac{CM_{\mathrm{tr}_A}}{CM_{\mathrm{error}}}$$
$$F_c(B) = \frac{CM_{\mathrm{tr}_B}}{CM_{\mathrm{error}}}$$
$$F_c(AB) = \frac{CM_{\mathrm{inter}AB}}{CM_{\mathrm{error}}}$$
$$F_c\mathrm{bl} = \frac{CM_{\mathrm{bl}}}{CM_{\mathrm{error}}}$$

5. Comparaciones Múltiples de Duncan

Una vez realizado el análisis de varianza correspondiente al diseño factorial con bloques, y detectada la existencia de diferencias significativas entre tratamientos o niveles de los factores, se procedió a aplicar la *Prueba de Comparaciones Múltiples de Duncan* (Duncan's Multiple Range Test, DMRT). Esta prueba permite identificar cuáles tratamientos o combinaciones de niveles presentan diferencias estadísticamente significativas entre sus medias.

5.1. Fundamento Teórico

La prueba de Duncan es un procedimiento de comparación múltiple que se basa en la comparación ordenada de medias mediante un criterio secuencial. A diferencia de métodos más conservadores, como el de Tukey, la prueba de Duncan ajusta el valor crítico según el número de comparaciones involucradas.

Esto le otorga una mayor potencia para detectar diferencias reales, aunque con un mayor riesgo de cometer errores tipo I.

El método se basa en el uso del *rango studentizado* para establecer una *diferencia mínima significativa* (RMS) entre las medias, que depende tanto del número de medias comparadas como del error cuadrático medio obtenido en el ANOVA.

5.2. Aplicación en Diseño Factorial

En el contexto de un diseño factorial con bloques completos al azar, se consideran múltiples factores (por ejemplo, el **Factor A** y el **Factor B**), cada uno con varios niveles, así como la posible interacción entre ellos. El análisis de varianza permite evaluar:

- Los **efectos principales** de cada factor (A, B),
- La **interacción** entre los factores (A $\times$ B),
- El **efecto del bloqueo** como fuente adicional de variación.

Dependiendo de los resultados del ANOVA, la prueba de Duncan se aplica de la siguiente forma:

- Si un **efecto principal** resulta significativo y la interacción no lo es, se aplica la prueba sobre los niveles de ese factor.
- Si la **interacción** entre factores es significativa, se aplica la prueba sobre las **combinaciones factoriales de niveles** (por ejemplo, A_1B_1, A_2B_1, A_1B_2, etc.).
- El **efecto del bloque** se incluye en el modelo de ANOVA pero no es objeto de comparaciones múltiples.

5.3. Procedimiento de la Prueba

El procedimiento general de la prueba de Duncan consiste en:

1. Ordenar las medias de los tratamientos a comparar, de mayor a menor.
2. Calcular el *rango mínimo significativo* (RMS) para cada número de comparaciones sucesivas mediante la fórmula:

$$RMS_r = r(\alpha, gl_{error}) \cdot \sqrt{\frac{CME}{n}}$$

donde:

- $r(\alpha, gl_{error})$ es el valor crítico del rango extraido de la tabla duncan para r tratamientos,

- CME es el error cuadrático medio del ANOVA,
- n es el número de réplicas por tratamiento(niveles del bloque),
- α es el nivel de significancia,
- gl_{error} representa los grados de libertad del error.

3. Comparar las diferencias absolutas entre medias con los valores correspondientes de RMS.

4. Identificar los grupos de tratamientos cuyas medias no difieren significativamente entre sí.

6. Ejemplos:

6.1. Diseño factorial con un bloque :

Un ingeniero estudia los métodos para mejorar la capacidad para detectar objetivos en el campo de acción de un radar. Dos factores que considera importantes son:

- La cantidad de ruido de fondo o "desorden de terreno" en el campo de acción del radar.
- El tipo de filtro colocado sobre la pantalla.

El ingeniero diseña un experimento utilizando tres niveles del desorden de terreno y dos tipos de filtro. Los factores se consideran fijos. El experimento se realiza seleccionando al azar una combinación de los tratamientos (nivel de desorden y tipo de filtro), e introduciendo una señal que representa el objetivo en el campo del radar. La intensidad de esta señal se incrementa hasta que el operador la detecta. La variable de respuesta es el nivel de intensidad en el momento de la detección.

Dado que la disponibilidad de los operadores es limitada, se selecciona cuatro operadores al azar como bloques. Una vez elegido un operador, el orden de los tratamientos se determina aleatoriamente para evitar sesgos.

A continuación presentamos los valores recopilados :

Resolución del ejercicio de forma manual :

Definición del modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

donde:

Tipo de filtro	Operadores (bloques)							
	1		2		3		4	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Desorden de terreno								
Bajo	90	86	96	84	100	92	92	81
Intermedio	102	87	106	90	105	97	96	80
Alto	114	93	112	91	108	95	98	83

- y_{ijk}: es la observación del nivel de intensidad obtenida con el i-ésimo nivel de desorden de terreno, el j-ésimo tipo de filtro, y el k-ésimo operador.
- μ: es la media general del nivel de intensidad.
- τ_i: es el efecto del i-ésimo nivel de desorden de terreno (donde $i = 1$ para Bajo, $i = 2$ para Intermedio, $i = 3$ para Alto).
- β_j: es el efecto del j-ésimo tipo de filtro (donde $j = 1$ para Filtro 1, $j = 2$ para Filtro 2).
- $(\tau\beta)_{ij}$: es la interacción entre el i-ésimo nivel de desorden de terreno y el j-ésimo tipo de filtro.
- δ_k: es el efecto del k-ésimo operador (donde $k = 1, 2, 3, 4$).
- ε_{ijk}: es el término de error aleatorio, asumido normalmente distribuido con media cero y varianza constante $\text{NID}(0, \sigma^2)$.

Hipotesis:

Hipótesis del modelo

- **Efecto del Desorden del Terreno (Factor A):**

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0 \quad \text{(no hay efecto del desorden)}$$
$$H_1 : \text{Al menos un } \tau_i \neq 0 \quad \text{(existe efecto del desorden)}$$

- **Efecto del Tipo de Filtro (Factor B):**

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{(no hay efecto del tipo de filtro)}$$
$$H_1 : \text{Al menos un } \beta_j \neq 0 \quad \text{(existe efecto del tipo de filtro)}$$

- **Interacción entre Desorden del Terreno y Tipo de Filtro (A × B):**

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i, j$$
$$H_1 : \text{Al menos un } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

- **Efecto del Operador (Bloque):**

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0 \quad \text{(no hay efecto del operador)}$$
$$H_1 : \text{Al menos un } \delta_k \neq 0 \quad \text{(existe efecto del operador)}$$

- Factor A (Desorden de Terreno): $a = 3$ niveles
- Factor B (Tipo de Filtro): $b = 2$ niveles
- Bloques (Operador): $n = 4$ bloques
- Observaciones Totales: $N = a \times b \times n = 24$

Gran Total ($y_{...}$): La suma de todas las 24 observaciones.

$$y_{...} = 90 + 86 + 96 + \cdots + 83 = 2278$$

Suma de Cuadrados de las Observaciones ($\sum y_{ijk}^2$):

$$\sum y_{ijk}^2 = 90^2 + 86^2 + \cdots + 83^2 = 218268$$

Factor de Corrección (CF):

$$CF = \frac{(y_{...})^2}{N} = \frac{(2278)^2}{24} = \frac{5189284}{24} \approx 216220{,}167$$

2. Cálculo de las Sumas de Cuadrados (SC)

SC Total

Se calcula como la diferencia entre la suma de cuadrados de las observaciones y el factor de corrección.

$$SC_{Total} = \sum y_{ijk}^2 - CF$$

$$SC_{Total} = 218268 - 216220{,}167 = \mathbf{2047{,}833}$$

SC Bloques (Operador)

Las sumas para cada operador (bloque) son: $y_{.,1} = 572$, $y_{.,2} = 579$, $y_{.,3} = 597$, $y_{.,4} = 530$.

$$SC_{Bloques} = \frac{\sum_k y_{..k}^2}{ab} - CF$$

$$SC_{Bloques} = \frac{572^2 + 579^2 + 597^2 + 530^2}{3 \times 2} - 216220{,}167$$

$$SC_{Bloques} = \frac{1299734}{6} - 216220{,}167 = 216622{,}333 - 216220{,}167 = \mathbf{402{,}166}$$

SC Factor A (Desorden de Terreno)

Las sumas para cada nivel de desorden son: $y_{1..} = 721$, $y_{2..} = 763$, $y_{3..} = 794$.

$$SC_A = \frac{\sum_i y_{i..}^2}{bn} - CF$$

$$SC_A = \frac{721^2 + 763^2 + 794^2}{2 \times 4} - 216220{,}167$$

$$SC_A = \frac{1732446}{8} - 216220{,}167 = 216555{,}75 - 216220{,}167 = \mathbf{335{,}583}$$

SC Factor B (Tipo de Filtro)

Las sumas para cada tipo de filtro son: $y_{,1.} = 1219$, $y_{,2.} = 1059$.

$$SC_B = \frac{\sum_j y_{.j.}^2}{an} - CF$$

$$SC_B = \frac{1219^2 + 1059^2}{3 \times 4} - 216220{,}167$$

$$SC_B = \frac{2607442}{12} - 216220{,}167 = 217286{,}833 - 216220{,}167 = \mathbf{1066{,}666}$$

SC Interacción (A x B)

Primero, calculamos la SC de los subtotales de las combinaciones de tratamiento (A y B).

$$SC_{Subtotales(AB)} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij.}^2}{n} - CF$$

$$SC_{Subtotales(AB)} = \frac{378^2 + 343^2 + 409^2 + 354^2 + 432^2 + 362^2}{4} - 216220{,}167$$

$$SC_{Subtotales(AB)} = \frac{870798}{4} - 216220{,}167 = 217699{,}5 - 216220{,}167 = 1479{,}333$$

Luego, la SC de la interacción se obtiene restando los efectos principales.

$$SC_{AB} = SC_{Subtotales(AB)} - SC_A - SC_B$$

$$SC_{AB} = 1479{,}333 - 335{,}583 - 1066{,}666 = \mathbf{77{,}084}$$

SC del Error

Se calcula por sustracción del resto de los componentes al total.

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Bloques} - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

$$SC_{Error} = 2047{,}833 - 402{,}166 - 335{,}583 - 1066{,}666 - 77{,}084 = \mathbf{166{,}334}$$

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	gl	Cuadrado Medio (CM)	F Calculado	Valor-p
Bloque (Operador)	402.166	3	134.055	12.09	0.00027
Desorden (A)	335.583	2	167.792	15.13	0.00025
Filtro (B)	1066.666	1	1066.666	96.19	$6{,}44e^{-8}$
Interacción (A x B)	77.084	2	38.542	3.47	0.057
Error	166.334	15	11.089		
Total	**2047.833**	**23**			

Cuadro 3: Análisis de varianza (ANOVA) del experimento

Tabla de ANOVA Finalmente, se resumen todos los resultados en la tabla de ANOVA.

Se rechaza la hipótesis nula (es decir, si el valor-p correspondiente a la interacción es mayor que el nivel de significancia establecido, $\alpha = 0{,}05$), por lo tanto se dice que los tratamientos de una factor no dependen de cualquier tratamiento del otro factor.

En nuestro caso el valor-p es mayor , por ende debemos realizar nuevamente la tabla ANNOVA , pero sin considerar la interaccion de los tratamientos , y por consiguiente los grados de libertad y la suma cuadratica seran añadidos al error (variabilidad no explicada) , se presentara la nueva tabla a continuación:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	gl	Cuadrado Medio (CM)	F Calculado	Valor-p
Bloque (Operador)	402.166	3	134.055	9.36	0.0007
Desorden (A)	335.583	2	167.792	11.71	0.0006
Filtro (B)	1066.666	1	1066.666	74.46	$1{,}28e^{-7}$
Error	243.418	17	14.318		
Total	**2047.833**	**23**			

Cuadro 4: Tabla ANOVA ajustada sin interacción (A $\times$ B); gl y SC de la interacción fueron reasignados al error

Interpretación de la Tabla ANOVA A partir de la tabla ANOVA ajustada (sin el término de interacción A $\times$ B), se obtienen las siguientes conclusiones basadas en los valores-p:

- **Bloque (Operador):** El valor-p asociado al efecto del operador es 0,00053, el cual es menor que el nivel de significancia ($\alpha = 0{,}05$). Por lo tanto, se **rechaza la hipótesis nula**, concluyendo que el operador tiene un efecto significativo sobre la variable respuesta, en palabras menos tecnicas significa que el bloque se esta usando de manera correcta para disminuir la variabilidad del error-
- **Tratamiento A (Desorden del Terreno):** El valor-p correspondiente al factor A es 0,00064, lo que indica un efecto significativo del nivel de desorden del terreno en la variable respuesta. Se **rechaza la hipótesis nula** de igualdad de medias entre los niveles de del desorden del terreno.
- **Tratamiento B (Filtro):** El valor-p para el factor B es extremadamente pequeño ($1{,}03 \times 10^{-7}$), proporcionando una evidencia muy fuerte contra la

hipótesis nula. Se concluye que el tipo de filtro tiene un **efecto altamente significativo** sobre la variable respuesta.

En conjunto, los resultados indican que los tres factores evaluados (bloque y ambos tratamientos) influyen significativamente en la respuesta. Como la interacción A × B no fue significativa (valor-p = 0.057 ¿0.05), fue eliminada del modelo, y su variabilidad se reasignó al término de error, lo que mejora la precisión del análisis de los efectos principales, se recomienda hacer comparaciones multiples por cada factor por separado , en este informe no se esta investigando esto , por lo que no se añadira de manera manual , pero en el anexo se podra visualizar la comparacion multiple para este ejercicio realizaremos duncan de manera computacional.

6.2. Ejercicio con doble restricción de aleatorización

Durante el desarrollo del experimento relacionado con la detección de un objetivo mediante radar, el investigador se percató de ciertas limitaciones operativas que afectaban la planificación original. Inicialmente, el experimento consideraba dos factores: el **tipo de filtro** (con dos niveles) y el **desorden del terreno** (con tres niveles), bajo un diseño factorial 2×3.

Sin embargo, al momento de implementar el experimento, se detectaron dos restricciones importantes que motivaron una modificación en la estructura del diseño. En primer lugar, los **operadores** disponibles debían considerarse como bloques, ya que cada uno podía participar en una sola corrida por día. En segundo lugar, debido a limitaciones de tiempo y logística, sólo era posible realizar seis corridas por día, por lo que los **días** también debían tratarse como una segunda restricción sobre la aleatorización.

Ante esta situación, el investigador decidió utilizar un **cuadrado latino doble** de tamaño 6×6, que permitiera controlar simultáneamente las dos restricciones. Esto se justificaba, ya que el número de combinaciones del diseño factorial $2 \times 3 = 6$ coincidía exactamente con el número de niveles en cada una de las restricciones (seis operadores y seis días). De esta forma, cada combinación de tratamiento sería aplicada una sola vez por operador y una sola vez por día.

Las combinaciones de tratamientos se representaron mediante letras latinas, como sigue:

$$A = f_1g_1, \quad B = f_1g_2, \quad C = f_1g_3,$$
$$D = f_2g_1, \quad E = f_2g_2, \quad F = f_2g_3.$$

Este diseño permitió al investigador llevar a cabo el experimento respetando las restricciones logísticas y de personal, asegurando al mismo tiempo una adecuada balanceabilidad en la aplicación de los tratamientos.A continuacion se presenta la tabla con los respectivos datos de informacion

Cuadro 5: El experimento de la detección del radar realizado en un cuadrado latino 6×6

Día	Operador 1	Operador 2	Operador 3	Operador 4	Operador 5	Operador 6
1	A($f_1g_1 = 90$)	B($f_1g_2 = 106$)	C($f_1g_3 = 108$)	D($f_2g_1 = 81$)	F($f_2g_3 = 90$)	E($f_2g_2 = 88$)
2	C($f_1g_3 = 114$)	A($f_1g_1 = 96$)	B($f_1g_2 = 105$)	F($f_2g_3 = 83$)	D($f_2g_1 = 86$)	E($f_2g_2 = 84$)
3	B($f_1g_2 = 102$)	E($f_2g_2 = 90$)	F($f_2g_3 = 95$)	A($f_1g_1 = 92$)	C($f_1g_3 = 85$)	D($f_2g_1 = 104$)
4	E($f_2g_2 = 87$)	D($f_2g_1 = 84$)	A($f_1g_1 = 100$)	C($f_1g_3 = 96$)	B($f_1g_2 = 110$)	F($f_2g_3 = 91$)
5	F($f_2g_3 = 93$)	C($f_1g_3 = 112$)	D($f_2g_1 = 92$)	E($f_2g_2 = 80$)	A($f_1g_1 = 90$)	B($f_1g_2 = 98$)
6	D($f_2g_1 = 86$)	F($f_2g_3 = 91$)	E($f_2g_2 = 97$)	B($f_1g_2 = 98$)	C($f_1g_3 = 100$)	A($f_1g_1 = 92$)

Modelo Estadístico El modelo lineal para este experimento factorial con bloques completos aleatorizados es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \delta_k + \gamma_l + \varepsilon_{ijkl}$$

- Y_{ijklm}: es la observación del nivel de intensidad obtenida con el i-ésimo nivel de desorden de terreno, el j-ésimo tipo de filtro, el k-ésimo operador y en el l-ésimo dia de trabajo.
- μ: Media general.
- τ_i: Efecto del i-ésimo nivel del tratamiento A (Desorden del terreno), con $i = 1, 2, \ldots, a$.
- β_j: Efecto del j-ésimo nivel del tratamiento B (Tipo de filtro), con $j = 1, 2, \ldots, b$.
- $(\tau\beta)_{ij}$: Efecto de la interacción entre los tratamientos A y B.
- δ_k: Efecto del k-ésimo operador (bloque), con $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- γ_l: Efecto del l-ésimo día (bloque), con $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- ε_{ijklm}: Error aleatorio asociado a la observación, asumido como $\varepsilon_{ijkl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Hipotesis:

Formulación de Hipótesis Para el análisis del experimento con dos factores (tratamientos) y bloques, las hipótesis se formulan de la siguiente manera:

- **Tratamiento A (Desorden del Terreno):**

$$H_0^A : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0 \quad \text{(No hay efecto del desorden del terreno)}$$
$$H_1^A : \exists\, i \neq j \text{ tal que } \tau_i \neq \tau_j \quad \text{(Existe al menos un efecto distinto)}$$

- **Tratamiento B (Tipo de Filtro):**

$$H_0^B : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{(No hay efecto del tipo de filtro)}$$
$$H_1^B : \exists\, i \neq j \text{ tal que } \beta_i \neq \beta_j \quad \text{(Existe al menos un efecto distinto)}$$

- **Interacción A × B:**

$$H_0^{AB} : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i, j \quad \text{(No hay interacción entre A y B)}$$
$$H_1^{AB} : \exists\, (i, j) \text{ tal que } (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{(Existe interacción entre A y B)}$$

Análisis de Varianza (ANOVA)

Cálculos Preliminares

Los parámetros del diseño son $p = 6$ (6 filas, 6 columnas y 6 tratamientos) y un total de $N = p^2 = 36$ observaciones.

Totales y Factor de Corrección

- **Gran Total (G):** Suma de todas las observaciones.

$$G = 90 + 106 + \cdots + 92 = \mathbf{3396}$$

- **Suma de Cuadrados de las Observaciones:**

$$\sum y^2 = 90^2 + 106^2 + \cdots + 92^2 = \mathbf{323154}$$

- **Factor de Corrección (CF):**

$$CF = \frac{G^2}{N} = \frac{3396^2}{36} = \frac{11532816}{36} = \mathbf{320356}$$

Cálculo de las Sumas de Cuadrados (SC)

SC Total

$$SC_{Total} = \sum y^2 - CF = 323154 - 320356 = \mathbf{2798}$$

SC Filas (Día)

Totales por día: $R_1 = 563, R_2 = 568, R_3 = 568, R_4 = 568, R_5 = 565, R_6 = 564$.

$$SC_{Filas} = \frac{\sum R_i^2}{p} - CF = \frac{563^2 + 568^2 + 568^2 + 568^2 + 565^2 + 564^2}{6} - 320356 = 320360{,}3 - 320356 = \mathbf{4{,}3}$$

SC Columnas (Operador)

Totales por operador: $C_1 = 572, C_2 = 579, C_3 = 597, C_4 = 530, C_5 = 561, C_6 = 557$.

$$SC_{Columnas} = \frac{\sum C_k^2}{p} - CF = \frac{572^2 + 579^2 + 597^2 + 530^2 + 561^2 + 557^2}{6} - 320356 = 320784 - 320356 = \mathbf{428}$$

SC desorden de terreno

Totales por tratamiento: $T_{bajo} = 1072, T_{inter} = 1135, T_{Alto} = 1189$.

$$SC_{Trat} = \frac{\sum T_j^2}{b \cdot n} - CF = \frac{1072^2 + 1135^2 + 1189^2}{2 \cdot 6} - 320356 = 320927{,}5 - 320356 = \mathbf{571{,}5}$$

SC Tipo de filtro

Totales por tratamiento: $T_{filtro_1} = 1813, T_{filtro_2} = 1583.$

$$SC_{Trat} = \frac{\sum T_j^2}{a \cdot n} - CF = \frac{1813^2 + 1583^2}{3 \cdot 6} - 320356 = 321825{,}4 - 320356 = \mathbf{1469{,}4}$$

SC interaccion

Totales por interaccion de los tratamientos: $T_{f_1,g_1} = 560, T_{f_1,g_2} = 607, T_{f_1,g_3} = 646, T_{f_2,g_1} = 512, T_{f_2,g_2} = 528, T_{f_2,g_3} = 543.$

$$SC_{interacción} = \frac{\sum T_j^2}{p} - CF - SC_{tra_1} - SC_{tra_2}$$

$$= \frac{560^2 + 607^2 + 646^2 + 512^2 + 528^2 + 543^2}{6} - 320356 - [1469{,}4 + 571{,}5] = 126{,}7$$

SC Error

Se calcula por sustracción:

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Filas} - SC_{Columnas} - SC_{Trat}$$

$$SC_{Error} = 2798 - 1469{,}4 - 571{,}5 - 126{,}7 - 428 - 4{,}3 =$$

Cuadrados medios:

$\mathrm{CM_{tr\_A}} = \frac{\mathrm{SC_{tr\_A}}}{a-1} = \frac{571{,}5}{3-1} = 285{,}7$

$\mathrm{CM_{tr\_B}} = \frac{\mathrm{SC_{tr\_B}}}{b-1} = \frac{1469{,}4}{2-1} = 1469{,}4$

$\mathrm{CM_{int\_AB}} = \frac{\mathrm{SC_{int\_AB}}}{(a-1)(b-1)} = \frac{126{,}7}{(2-1)(3-1)} = 63{,}4$

$\mathrm{CM_{bl1}} = \frac{\mathrm{SC_{bl1}}}{ab-1} = \frac{428}{6-1} = 85{,}6$

$\mathrm{CM_{bl2}} = \frac{\mathrm{SC_{bl2}}}{ab-1} = \frac{4{,}3}{6-1} = 0{,}9$

$\mathrm{CM_{error}} = \frac{\mathrm{SC_{error}}}{ab-1)(ab-2)} = \frac{198}{6-1)(6-2)} = 9{,}9$

Estadisticos calculados

$\mathrm{F}_c(B) = \frac{CM_{\mathrm{tr}_B}}{CM_{\mathrm{error}}} = \frac{285{,}7}{9{,}9} = 28{,}864$

$\mathrm{F}_c(AB) = \frac{CM_{\mathrm{inter}AB}}{CM_{\mathrm{error}}} = \frac{63{,}4}{9{,}9} = 6{,}4$

$\mathrm{F}_c\mathrm{bl1} = \frac{CM_{\mathrm{bl1}}}{CM_{\mathrm{error}}} = \frac{85{,}6}{9{,}9} = 8{,}646$

$\mathrm{F}_c\mathrm{bl2} = \frac{CM_{\mathrm{bl2}}}{CM_{\mathrm{error}}} = \frac{0{,}9}{9{,}9} = 0{,}88$

valor-P

El valor-p debe ser calculado mediante rstudio, utilizando la siguiente comando de rstudio :

$$valor - p = 1 - pf(f_C(tratamiento), gl_{trat}, gl_{error})$$

Tabla de ANOVA Resumen

Se consolidan los resultados en la tabla de ANOVA. Los grados de libertad (gl) para filas, columnas y tratamientos son $p - 1 = 5$, y para el error son $(p - 1)(p - 2) = 20$.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	gl	Cuadrado Medio (CM)	F Calculado	Valor-p
Desorden (A)	571.5	2	285.7	28.864	$1{,}2e^{-6}$
Filtro (B)	1469.4	1	1469.4	148.429	$1.0e^{-10}$
Interacción (A x B)	126.7	2	63.4	6.400	0.007
Bloque (Operador)	428	5	85.6	8.646	
Bloque (día)	4.3	5	0.9	0.088	
Error	198	20	9.9		
Total	**2798.2**	**35**			

Cuadro 6: Análisis de varianza (ANOVA) del experimento

Interpretación de la Tabla ANOVA El análisis de varianza permite evaluar el efecto de dos tratamientos principales (Desorden del Terreno y Tipo de Filtro), así como sus interacciones y el efecto de los bloques (Operador y Día). A continuación, se interpretan los resultados con base en los valores-p:

- **Interacción A $\times$ B (Desorden $\times$ Filtro):** El valor-p es 0,007, menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, lo que indica que se **rechaza la hipótesis nula** de no interacción.

  Conclusión: Existe una interacción significativa entre los factores A y B. Es decir, el efecto de un nivel del desorden del terreno depende del tipo de filtro utilizado, y viceversa. Por lo tanto, **no se debe interpretar los efectos principales por separado sin considerar la interacción**.

- **Factor A (Desorden del Terreno):** A pesar de que el valor-p asociado es $1{,}2 \times 10^{-6}$ (muy pequeño), debido a la interacción significativa con el tratamiento B, su interpretación individual debe hacerse con precaución, ya que los efectos no son independientes.

- **Factor B (Filtro):** Similar al factor A, el valor-p es extremadamente pequeño ($1{,}0 \times 10^{-10}$), lo que muestra un efecto altamente significativo del tipo de filtro. Sin embargo, nuevamente, debido a la presencia de interacción significativa, el análisis de los efectos de B debe considerar su dependencia con los niveles del factor A.

Conclusion General : Existe una interacción significativa entre los tratamientos, lo que implica que sus efectos no son independientes y deben analizarse conjuntamente. Además, el tipo de filtro y el nivel de desorden del terreno influyen en la variable de interés, aunque su impacto depende del nivel del otro factor. El operador parece tener un efecto importante, mientras que el día no tiene relevancia estadística, aca de igual manera que la tabla annova anterior , se realizara de manera computacional , que estara en el anexo.

7. Conclusiones:

En base al análisis realizado para el diseño factorial con bloques, se concluye lo siguiente:

- Los **bloques** permiten controlar fuentes conocidas de variabilidad que no forman parte del interés principal del estudio, como por ejemplo días, operadores, máquinas u otras condiciones externas.
- La incorporación de bloques mejora la **precisión** del experimento al reducir la variabilidad atribuida al error experimental, permitiendo así una estimación más confiable de los efectos de los tratamientos.
- El diseño factorial con bloques permite estudiar simultáneamente los **efectos principales** y las **interacciones** entre factores, siendo una estrategia eficiente en términos de recursos experimentales.
- Para que las conclusiones del análisis de varianza (ANOVA) sean válidas, es necesario que se cumplan los **supuestos fundamentales** del modelo: independencia de las observaciones, normalidad de los errores y homogeneidad de varianzas.

8. Referencias

Referencias

[1] Montgomery, D. C. (2004). *Diseño y análisis de experimentos.* Limusa Wiley.

[2] Lawson, J. (2014). *Design and Analysis of Experiments with R.* Chapman and Hall/CRC.