Estimación Paso a Paso de Parámetros en Modelo Factorial con Bloques

Martin Elizondo
Carlos Osses

Junio 2025

1. Definición del modelo

Consideramos el siguiente modelo estadístico:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

donde:

- μ: media general,
- τ_i: efecto del nivel i del factor A,
- β_j: efecto del nivel j del factor B,
- $(\tau\beta)_{ij}$: interacción entre A y B,
- δ_k: efecto del bloque k,
- ε_{ijk}: error aleatorio independiente.

2. Función de verosimilitud

Cada observación sigue una distribución normal, por lo que su densidad es:

$$f(y_{ijk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)^2\right)$$

Como las observaciones son independientes:

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) = \prod_{i,j,k} f(y_{ijk})$$

$$= \prod_{i,j,k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)^2\right)$$

3. Log-verosimilitud

Aplicando logaritmo natural:

$$\log L(\theta \mid \mathbf{y}) = \sum_{i,j,k} \left[\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)^2 \right]$$

$$= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)^2$$

4. Derivadas de la log-verosimilitud

Para maximizar, derivamos respecto a cada parámetro e igualamos a cero.

Respecto a μ:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Respecto a τ_i:

$$\tau_i = \frac{1}{rb} \sum_{j,k} (y_{ijk} - \mu - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Respecto a β_j:

$$\beta_j = \frac{1}{ab} \sum_{i,k} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Respecto a δ_k:

$$\delta_k = \frac{1}{ab} \sum_{i,j} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij})$$

Respecto a $(\tau\beta)_{ij}$:

$$(\tau\beta)_{ij} = \frac{1}{b} \sum_{k} (y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - \delta_k)$$

5. Aplicación de las condiciones de estimabilidad

Las derivadas obtenidas en la sección anterior forman un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, estas ecuaciones son linealmente dependientes, es decir, no se pueden resolver de forma única sin imponer restricciones adicionales. Esta no unicidad es consecuencia de que el modelo es sobreparametrizado: los efectos individuales no se pueden identificar sin referencias.

Para obtener estimadores únicos, se imponen condiciones de estimabilidad, también conocidas como restricciones de suma cero:

$$\sum_i \tau_i = 0, \quad \sum_j \beta_j = 0, \quad \sum_k \delta_k = 0, \quad \sum_{i,j} (\tau\beta)_{ij} = 0$$

Estas condiciones eliminan las redundancias del sistema y permiten que los parámetros se puedan estimar de forma única.

A continuación, mostramos cómo estas condiciones simplifican las expresiones obtenidas:

Estimador de μ

Recordemos la ecuación:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Separando los términos:

$$\mu = \bar{y}_{...} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i,j,k} \tau_i + \sum_{i,j,k} \beta_j + \sum_{i,j,k} (\tau\beta)_{ij} + \sum_{i,j,k} \delta_k \right)$$

Cada sumando se puede factorizar considerando las repeticiones:

$$= \bar{y}_{...} - \left(rb \sum_i \tau_i + ab \sum_j \beta_j + b \sum_{i,j} (\tau\beta)_{ij} + ar \sum_k \delta_k \right) \cdot \frac{1}{n}$$

Aplicando las condiciones:

$$\sum_i \tau_i = 0, \quad \sum_j \beta_j = 0, \quad \sum_k \delta_k = 0, \quad \sum_{i,j} (\tau\beta)_{ij} = 0$$

entonces:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

Estimador de τ_i

Usamos la expresión derivada:

$$\tau_i = \frac{1}{rb} \sum_{j,k} (y_{ijk} - \mu - \beta_j - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Reemplazamos $\mu = \bar{y}_{...}$, y agrupamos términos:

$$\tau_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{rb}\sum_{j,k}(\beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k)$$

Al promediar sobre j y k, los efectos con suma cero se anulan, quedando:

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

Estimador de β_j

Partimos de la derivada:

$$\beta_j = \frac{1}{ab}\sum_{i,k}(y_{ijk} - \mu - \tau_i - (\tau\beta)_{ij} - \delta_k)$$

Sustituimos $\mu = \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$, y expresamos en términos de promedios:

$$\beta_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{ab}\sum_{i,k}(\tau_i + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k)$$

Como los términos τ_i, δ_k y $(\tau\beta)_{ij}$ tienen suma cero, su promedio es cero:

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

Estimador de δ_k

De forma análoga, a partir de:

$$\delta_k = \frac{1}{ar}\sum_{i,j}(y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij})$$

Sustituyendo estimadores:

$$\delta_k = \bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{ar}\sum_{i,j}(\tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij})$$

Aplicando restricciones de suma cero:

$$\hat{\delta}_k = \bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

Estimador de la interacción $(\tau\beta)_{ij}$

Partimos de:

$$(\tau\beta)_{ij} = \frac{1}{b}\sum_{k}(y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - \delta_k)$$

Reemplazamos estimadores:

$$(\tau\beta)_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdots} - \tau_i - \beta_j - \bar{\delta}$$

Donde $\bar{\delta}$ representa el promedio de δ_k, que es cero por la restricción:

$$\hat{(\tau\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}$$

Estimador de la varianza σ^2

Recordamos que los errores $\varepsilon_{ijk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, y su varianza puede estimarse usando los residuos del modelo:

$$\hat{\varepsilon}_{ijk} = y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j - \hat{(\tau\beta)}_{ij} - \hat{\delta}_k$$

Entonces, el estimador de máxima verosimilitud de la varianza es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i,j,k} \hat{\varepsilon}_{ijk}^2$$

donde p es el número de parámetros libres tras aplicar las restricciones (grados de libertad del modelo).

Estas fórmulas garantizan que las estimaciones sean consistentes con las restricciones de suma cero, y por tanto, sean únicas y válidas bajo el criterio de máxima verosimilitud.