DOI: 10.16177/j.cnki.gxmzk.1997.02.005

广西民族学院学报 (自然科学版)
第3卷第2期 JOURNAL OF GUANGXI UNIVERSITY FOR NATIONALITIES Vol. 3 NO. 2
1997年10月 (Natural Science Edition) Oct. 1997

瑞利—— 琼斯 (Jeans) 公式的一种推导方法*

农亮勤

(广西民族学院物理与电子工程系, 南宁, 530006)

摘 要 本文根据瑞利—— 琼斯的思想方法和经典的电磁理论, 推导出瑞利—— 琼斯公式

关键词 电磁辐射 驻波 振动模式

A Way of Deduction for Rayleigh—— Jeans' Formula

Nong Liangqin

(Dept. of Physics and Electronics, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006)

Abstract In this Paper, according to Rayleigh—— Jeans' idea and the classical electromagnetic theory, we deduce Rayleigh—— Jeans' formula.

Keywords Electromagnetic radiation; Standing wave; Vibratory mode.

1859年, 克希霍夫 (Kirchhoff) 用热力学证明了物体的辐射本领与吸收本领的比率与物体的性质无关, 它只是波长 λ 和温度 T 的函数 $f(\lambda, T)$.[1] 根据这个定律可得, 在一定温度下, 所有绝对黑体的辐射能量按波长分布的情况都相同; 所有绝对黑体的面发光度随温度的变化情况也都一样.[2] 随后、维恩 (Wien) 由热力学的讨论并进一步对绝对黑体的发射和吸收过程作了一些特殊假设后导出了著名的黑体辐射能量按波长的分布公式.[3] 它仅在短波部分与实验曲线符合得较好. 而瑞利和琼斯 (Jeans) 曾尝试用经典的电磁理论及能量按自由度平均分布的定理来解决这个问题. 他们从经典的电磁理论对一封闭的真空容器求得了平衡辐射按波长分布的公式.[3] 该公式仅在长波部分与实验曲线较好符合, 但在短波部分误差很大, 并导出了积分能量密度等于无限大的荒谬结果. 最终解决黑体辐射问题的还是德国科学家马克斯·普朗克 [M. Planck]. 但著名的瑞利 —— 琼斯公式却是解决黑体辐射问题整个进程中的重要一步. 研究其导出思想和过程对科学史发展的了解及深化学习近代物理学将很有帮助. 现以一边长为 a 的立方形空腔来推导瑞利 —— 琼斯公式.

设空腔为封闭的真空容器, 如图 1, 器壁为理想反射面, 空腔内的温度 T 保持不变, 则空腔内的热辐射即电磁辐射的能量将保持不变.

我们把容器内的电磁波分解为 X, Y, Z 三互相垂直方向上的分量, 根据乌莫夫 —— 坡印廷矢量 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 可知, 在空腔表面处的场量必然与某一界面垂直. 显然, 由于器壁反射的结果, 容器内将形成一个

* 收稿日期: 1997-06-03. 作者: 男, 51岁, 副教授.

无限多的驻波的系统 .而辐射能量按电磁波的频率或波长的分布也即按驻波的频率或波长的分布 .

图 1　封闭的真空容器

显然 ,空腔内的电磁波服从经典的麦克斯韦电磁场方程组:

$$5 \cdot \vec{D} = d \qquad (1)$$

$$5 \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$5 \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$5 \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

由于空腔是真空立方形容器，无自由电荷，即 d = 0,无传导电流 ,即 $\vec{j} = 0$, 故方程可演变为

$$5 \cdot \vec{E} = 0 \qquad (5)$$

$$5 \times \vec{E} = -\ _0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (6)$$

$$5 \cdot \vec{H} = 0 \qquad (7)$$

$$5 \times \vec{H} = X_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (8)$$

对方程 (6) 运用算符 5 x即

$$5 \times (\nabla \times \vec{E}) = 5 \times (-\ _0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t})$$

上式变为 $5(5 \cdot \vec{E}) - (5 \cdot 5)\vec{E} = -\ _0 \frac{\partial}{\partial t}(5 \times \vec{H})$

由于方程 (5) 和 (8), 上式可变为

$$-(5 \cdot 5)\vec{E} = -\ _0 X_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

由于光速 $C = \frac{1}{\ _0 X_0}$, 所以上式变为

$$(5 \cdot 5)\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (9)$$

对方程 (8) 作同样的运算可得

$$(5 \cdot 5)\vec{H} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (10)$$

方程 (9) 和 (10) 是波动的矢量方程 , 各包含三个标量方程 , 分别是关于 E_x、E_y、E_z 及 H_x、H_y、H_z 的标量方程 ,方程的形式完全相同 .以 f 代表以上六个标量之一 , 则标量方程可表示为

$$(5 \cdot 5)f - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (11)$$

用分离变量法求解该方程 .

设 f 为电场强度 $E_X = T(t) \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

代入方程 (11) 后用 E_X 除以方程两边得

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{1}{C^2 T}\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \qquad (12)$$

这是一个恒等式 , 要使其成立 , 唯有式中的每一项都为常数，由于是驻波，所以该常数必小于 0.[4]

设

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} &= -P^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} &= -Q^2 \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} &= -R^2 \\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -W^2 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

把之代入 (12) 式得

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \frac{W^2}{C^2} \qquad (14)$$

(13) 的 4个方程的解为

$$\left.\begin{aligned} X &= A_1 \cos Px + A_2 \operatorname{Sin} Px \\ Y &= B_1 \cos Qy + B_2 \operatorname{Sin} Qy \\ Z &= C_1 \cos Rz + C_2 \operatorname{Sin} Rz \\ T &= K_1 \cos Wt + K_2 \sin Wt \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

电磁波是从波阻较大的介质反射回来 ,属于半波反射[5]. 于是有边界条件

$$\left.\begin{aligned} E_x|_{y=0,a} &= 0 \\ E_x|_{z=0,a} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

把 (16) 代入 (15) 得

$$B_1 = C_1 = 0$$

$$B_2 \operatorname{Sin} Qa = 0$$

$$C_2 \operatorname{Sin} Ra = 0$$

于是得到

$$Qa = n_2 c \qquad (17)$$

$$Ra = n_3 c \qquad (18)$$

n_2和 n_3为正整数.

所以得到满足 (17) 和 (18) 的特解

$$E_X = T(t)(A_1 cosPx + A_2 sinPx)\cdot B_2 sinQy\cdot C_2 sin\ Rz$$

$$= T(t)(AcosPx + A' sinPx)\cdot SinQy\cdot Sin\ Rz \quad (19)$$

再设 f 代表 E_y 或 E_z, 同理可得它们的特解

$$E_y = T(t)(B\ cosQy + B' SinQy)\cdot SinPx\cdot SinRz \quad (20)$$

$$E_z = T(t)(C\ cosRz + C' Sin\ Rz)\cdot Sin\ Px\cdot SinQy \quad (21)$$

(20) 和 (21) 均满足以下条件:

$$Pa = n_1 \mathrm{c} \quad (22)$$

$$Qa = n_2 \mathrm{c} \quad (17)$$

$$Pa = n_3 \mathrm{c} \quad (18)$$

n_1、n_2、n_3均为正整数.

由方程 (5) 得 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

把 (19)、(20)、(21)代入上式整理得 $T(t)\cdot A'P\cdot cosPx\cdot SinQy\cdot SinRz + T(t)\cdot B'Q\cdot cosQy\cdot SinPx\cdot SinRz + T(t)\cdot C'R\cdot cosRz\cdot SinPx\cdot SinQy - (AP + BQ + CR)\cdot T(t)SinPx\cdot SinQy\cdot SinRz = 0$

上式为一恒等式,要使其对一切可能的 x, y, z, t 都成立, 必有

$$A' = B' = C' = 0 \quad (23)$$

$$AP + BQ + CR = 0 \quad (24)$$

(24) 即为

$$\frac{n_1 \mathrm{c}}{a}A + \frac{n_2 \mathrm{c}}{a}B + \frac{n_3 \mathrm{c}}{a}C = 0 \quad (25)$$

这样, 我们就得到了电场强度 E的一个特解,它的三个分量为

$$E_x = AT(t)\cos Px\cdot SinQy\cdot SinRz$$

$$E_y = BT(t)\cos Qy\cdot SinPx\cdot SinRz$$

$$E_z = CT(t)\cos Rz\cdot SinPx\cdot SinQy$$

P、Q、R满足 (17)、(18)、(22) 式, A、B、C满足 (25) 式, A、B、C有两个是任意选取的. 显然, E的特解是由一组正整数 n_1、n_2、n_3所确定的驻波态, 它有两个偏振方向. 驻波的振动频率由 (14) 式确定, 即 w= 2πν 满足方程

$$(\frac{n_1 \mathrm{c}}{a})^2 + (\frac{n_2 \mathrm{c}}{a})^2 + (\frac{n_3 \mathrm{c}}{a})^2 = \frac{4\mathrm{c}\nu^2}{c^2}$$

解之得

$$\nu = \frac{C}{2a}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (26)$$

以 n_1、n_2、n_3为轴, 取$\frac{C}{2a}$为单位标记整数 n_1、n_2、n_3, 建立笛卡儿坐标系, 则一个坐标为 n_1、n_2、n_3的点代表一种频率为 ν 的驻波模式. 每个模式在该坐标空间中占据 $(\frac{C}{2a})$的体积. 由此可得频率介于 ν—— ν + dν 并处于第一象限的代表点数 (即驻波模式数)为

$$\frac{1}{8}\cdot 4\mathrm{c}\nu^2 d\nu / (\frac{C}{2a})^3 = \frac{4\mathrm{c}a^3}{C^3}\nu^2 d\nu \quad (27)$$

如上所述, 每一个驻波态有两个偏振方向, 即每一个驻波模式有两个简谐振动模式. 所以空腔内频率在 ν—— ν+ dν 间的驻波振动模式数为

$$dN = \frac{8\mathrm{c}a^3}{C^3}\nu^2 d\nu \quad (28)$$

于是单位体积内的模式数为

$$dn = \frac{dN}{a^3} = \frac{8\mathrm{c}\nu^2}{C^3}d\nu \quad (29)$$

按照能量按自由度均分原理, 温度为 T时, 一个振动自由度的能量为 KT (与电磁振动相应的有两种能量—— 电能和磁能, 平均能量均为$\frac{1}{2}$ KT,总平均能量为 KT. 而固体中每个振动自由度的能量则为振动动能和势能之和), K为玻耳兹曼常数. 所以, 温度为 T时, 空腔内单位体积内频率在 ν—— ν+ dν 内的辐射能量密度为

$$\rho_\nu d\nu = dn\cdot KT = \frac{8\mathrm{c}\nu^2}{C^3}KTd\nu \quad (30)$$

即单色辐射能量密度为

$$\rho_\nu = \frac{8\mathrm{c}\nu^2}{C^3}KT \quad (31)$$

设驻波模式的波长为 λ, 则 $\lambda = \frac{C}{\nu}$. 由 (30) 式即得以波长 λ 表示的单色辐射能量密度为

$$\rho_\lambda = \frac{8\mathrm{c}KT}{\lambda^4} \quad (32)$$

(31) 和 (32) 式即为著名的瑞利—— 琼斯公式.

推导瑞利—— 琼斯公式最本质的错误是把每个振动模式的能量看作相等, 且各种振动频率出现的几率视作相同.

参考文献

[1]埃米里奥·赛格雷著, 夏孝勇、杨庆华等译. 从 x射线到夸克. 上海科学技术文献出版社, 1984年 8月, P74.

[2] C. Э. 福里斯、 A. B. 季莫列娃著. 吉林大学物理系普通物理教研室和程路合译. 普通物理学 (修订本)第三卷第一分册, 人民教育出版社, 1963年 8月第 2版, P287.

[3]母国光, 战元令编. 光学. 人民教育出版社, 1978年 9月, P569.

[4]梁昆淼编. 数学物理方法. 人民教育出版社, 1978年 7月第 2版, P202.

[5]赵景员, 王淑贤编. 力学. 高等教育出版社, 1979年, P259.

[责任编辑　蒋士亮]