Expansión Detallada de la Recurrencia de Quick Sort (Lomuto)

La recurrencia general es:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \qquad \text{(mejor caso)}$$

$$T(n) = T(n-1) + cn \qquad \text{(peor caso)}$$

Mejor caso (particiones perfectamente equilibradas)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\
&= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + c\frac{n}{2}\right] + cn \\
&= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c\frac{n}{2} + cn \\
&= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + cn + cn \\
&= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2cn \\
&= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + c\frac{n}{4}\right] + 2cn \\
&= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 4c\frac{n}{4} + 2cn \\
&= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + cn + 2cn \\
&= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3cn \\
&= 8\left[2T\left(\frac{n}{16}\right) + c\frac{n}{8}\right] + 3cn \\
&= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + 8c\frac{n}{8} + 3cn \\
&= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + cn + 3cn \\
&= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + 4cn \\
&= \cdots \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + kcn
\end{aligned}
$$

Cuando $\frac{n}{2^k} = 1 \implies k = \log_2 n$:

$$T(n) = nT(1) + cn\log_2 n$$

Por lo tanto:

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Peor caso (particiones totalmente desbalanceadas)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + cn \\
&= T(n-2) + c(n-1) + cn \\
&= T(n-3) + c(n-2) + c(n-1) + cn \\
&= T(n-4) + c(n-3) + c(n-2) + c(n-1) + cn \\
&\ \ \vdots \\
&= T(1) + c\sum_{k=2}^{n} k \\
&= T(1) + c(2 + 3 + 4 + \cdots + n) \\
&= T(1) + c\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Caso promedio

En el caso promedio, el costo esperado de Quick Sort es:

$$T_{\text{promedio}}(n) = \Theta(n \log n)$$

Resumen de complejidad

Mejor caso:	$\Theta(n \log n)$
Caso promedio:	$\Theta(n \log n)$
Peor caso:	$\Theta(n^2)$