Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

07_wahrscheinlichkeitstheorie

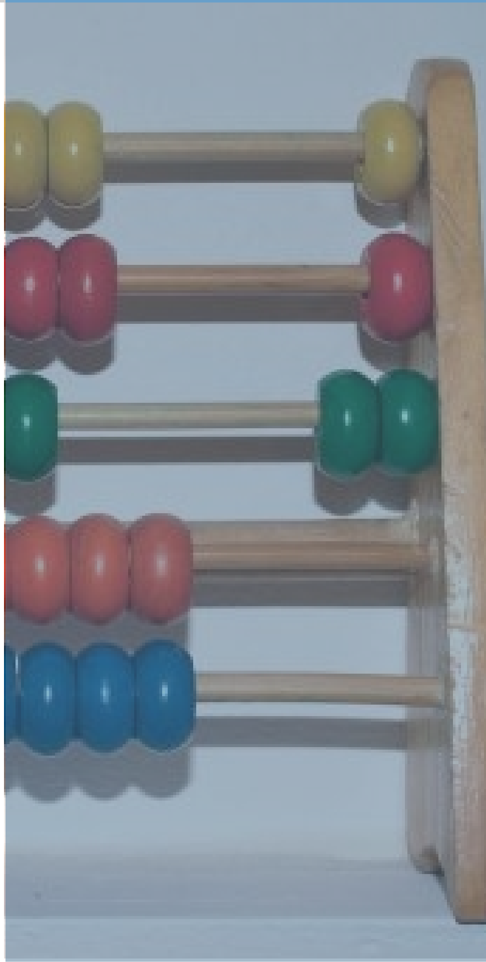
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Verteilungen

Zur Wiederholung: Grundgesamtheit und Stichprobe [1]

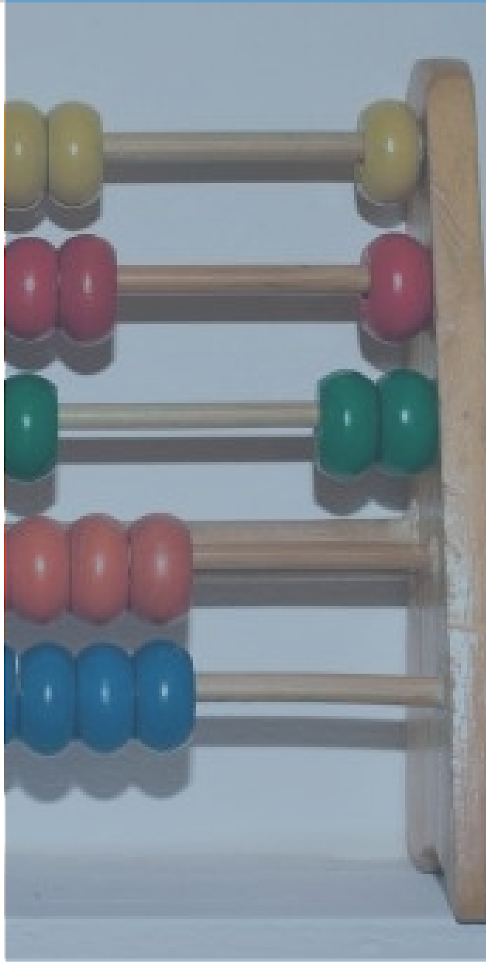
Grundgesamtheit
Menge aller Merkmalsträger, die für die Untersuchung relevant sind.

Stichprobe
Auswahl von Merkmalsträgern nach bestimmten Kriterien (z.B. Repräsentativität), die an Stelle der Grundgesamtheit untersucht werden
Arithm. Mittel, Median, Modus

Den Unterschied sollte man sich immer bewußt halten
Archäologen arbeiten (fast) nie mit der Grundgesamtheit



Zur Wiederholung: Grundgesamtheit und Stichprobe [2]



Eigenschaften der Grundgesamtheit: Parameter

Parameter gibt es immer, sie sind feste Werte, aber sie sind unbekannt, meist auch nicht überprüfbar

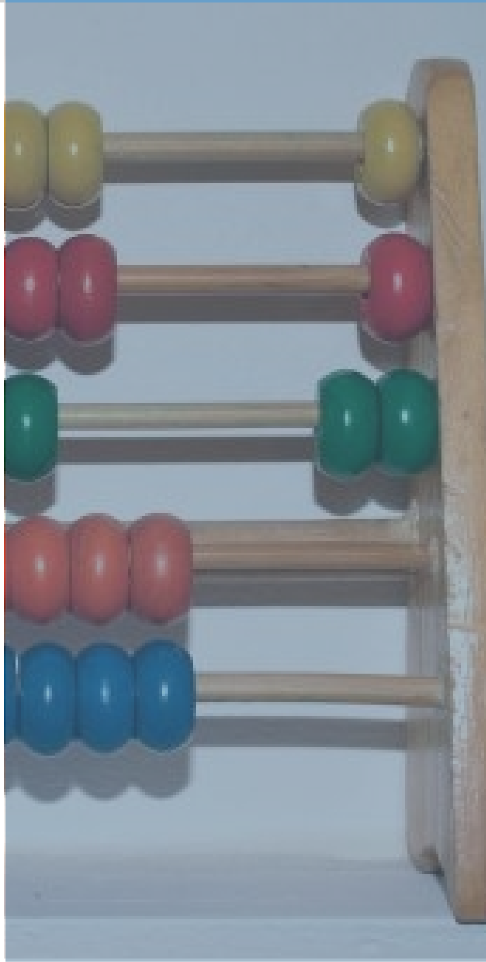
Bsp:

$$\mu : \textit{Arithm. Mittel der Grundgesamtheit}$$
$$\bar{x} : \textit{Arithm. Mittel der Stichprobe}$$

$$\sigma : \textit{Standardabweichung der Grundgesamtheit}$$
$$s : \textit{Standardabweichung der Stichprobe}$$

In statistischen Tests können immer nur die Eigenschaften der Stichprobe geprüft werden. Daher hängt die Qualität der Aussage immer von der Wahl der Stichprobe ab (Repräsentativität)

Zur Wiederholung: Null-Hypothese



Validierung durch Falsifikation

In statistischen Tests prüft man meist nicht die Aussage, die man erwartet, sondern versucht, die Aussage zu wiederlegen, die man nicht erwartet: Null-Hypothese. Diese sagt meist aus, das ein Zusammenhang oder ein Unterschied **nicht** besteht und die Verteilung der Beobachtungen lediglich zufällig sind.

Bsp: Wir wollen, ob die Beigabenverteilung zwischen Männern und Frauen unterschiedlich ist.

$$H_0: Die\ Beigabenverteilung\ ist\ gleich$$
$$H_1: Die\ Beigabenverteilung\ ist\ unterschiedlich$$

Grund:

1. Es ist (technisch) leichter, zu beweisen, das etwas nicht stimmt, als zu beweisen, das etwas stimmt.
2. Eine Nullhypothese ist oft einfacher zu formulieren (Wie genau ist denn die Beigabenverteilung unterschiedlich?). Sie sagt noch nichts über die Natur des Zusammenhangs/Unterschiedes aus.

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Subjektiver (alltäglicher) Wahrscheinlichkeitsbegriff

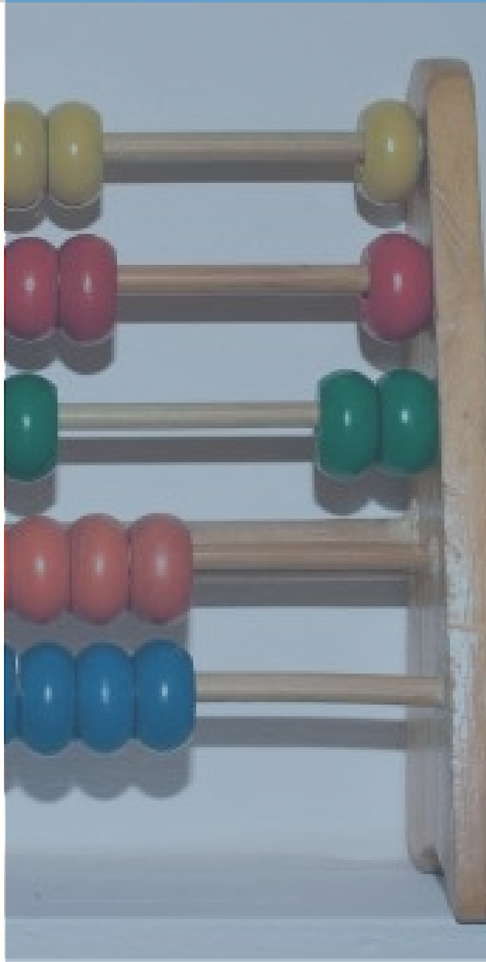
Aus der Alltagswelt bekannt, benutzen wir jeden Tag. Subjektives Mutmaßen über Wahrscheinlichkeiten (nicht überprüfbar)
Bsp:

Wahrscheinlich liegt draussen immer noch kein Schnee, wenn der Kurs zuende ist.
Wahrscheinlich gibt es Punktabzug, wenn ich die Hausaufgaben nicht abgebe.

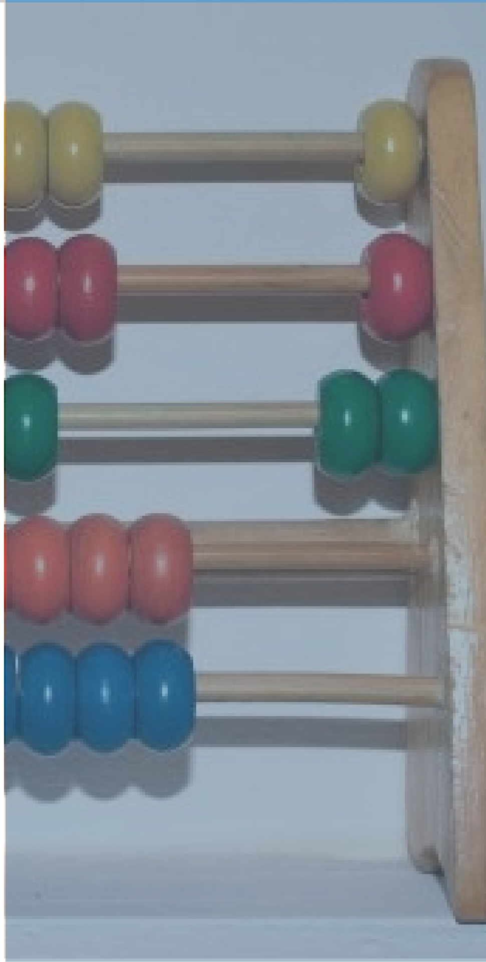
Statistischer (mathematischer, quasi-objektiver) Wahrscheinlichkeitsbegriff

Basiert auf mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetzen
Bezieht sich auf (im Prinzip) wiederholbare Vorgänge, deren Ergebnis (im Prinzip) nicht vorhersehbar ist

Klassische Beispiele: Glücksspiel



Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitstheorie



Grundlage jeder Statistik
Vorhersage von unbekannten Größen durch bekannte bei gegebenen Rahmenparametern mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie anhand von Zufallsexperimenten
Definition von Kolmogorov

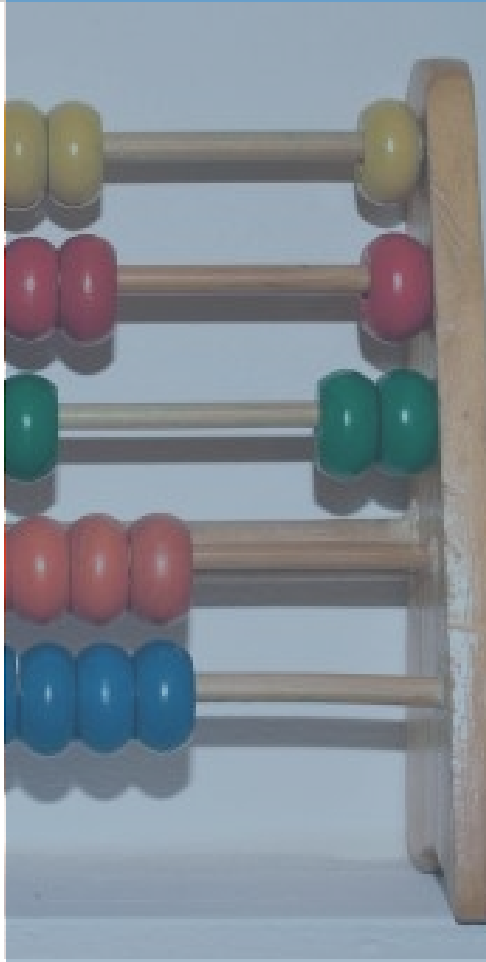
Klassisches Wahrscheinlichkeitsexperiment: Würfeln
(für Rollenspieler: W6)
Das Ergebnis eines Würfelwurfes ist ein Wahrscheinlichkeitsereignis (Elementarereignis): 5

Alle möglichen Ereignisse bilden den Ereignisraum

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ => Menge

Mehrere Würfelergebnisse bilden ebenfalls eine Menge
$A = \{2,4,1,3,5\}$

Mengenoperationen



Einige Symbole...

Menge A={1,2,3,4}; Menge B={4,5,6}; Ereignisraum Ω={1,2,3,4,5,6}

1 ist ein Element der Menge A $1 \in A$

C ist die Vereinigungsmenge von A und B $C = A \cup B$
{1,2,3,4,4,5,6}

D ist die Schnittmenge von A und B $D = A \cap B$
{4}

E ist A abzüglich B $E = A - B$
{1,2,3}

Nicht A (=Ereignisraum - A) $\bar{A} = \Omega - A = \{5,6\}$

Die Schnittmenge von D {4} und E {1,2,3} ist die leere Menge

$$D \cap E = \emptyset$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition von Laplace

$$p(A)=\frac{\textit{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\textit{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

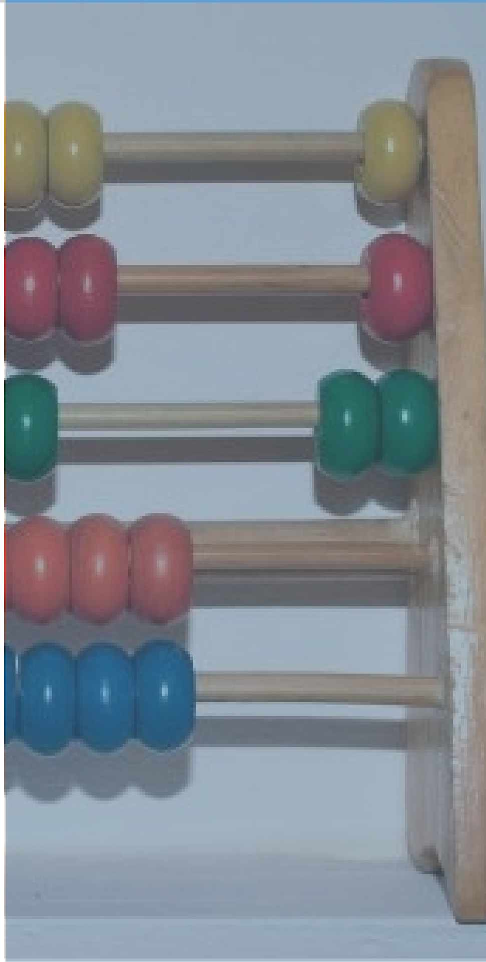
Relative Häufigkeit eines Ereignisses

$$\textit{Würfelbeispiel}$$

$$A=6\,,\ \textit{Ereignisraum}=1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$$

$$p(6)=\frac{1}{6}=0.1667=16{,}67\,\%$$

$$p(\overline{6})=p(\Omega)-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=0{,}8333=83{,}33\%$$



Wahrscheinlichkeitsrechnung

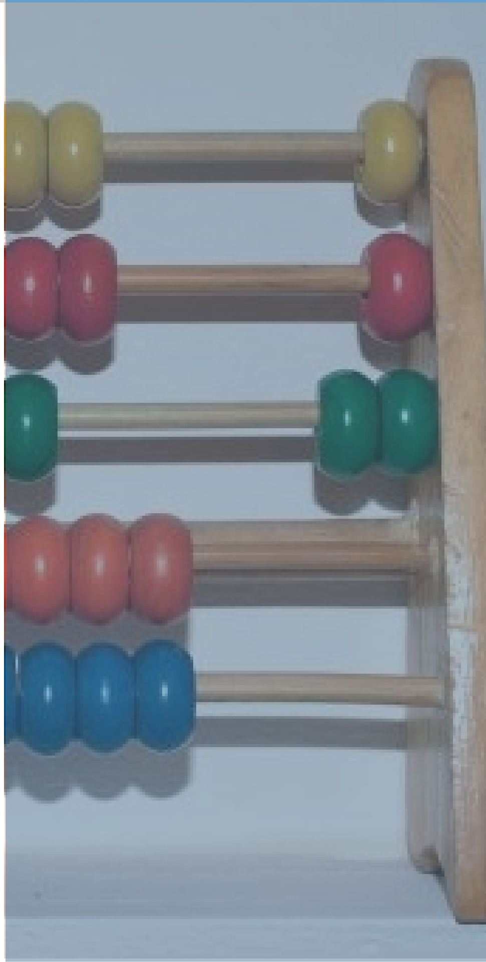
Grundwahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend etwas passiert, ist immer 100%
→ p(A) = 1

Ist ein Ereignis sicher: 100 % Wahrscheinlichkeit → p(A) = 1
p(dies ist eine Statistikkurs) → 1

Ist ein Ereignis ausgeschlossen: 0% Wahrscheinlichkeit → p(A) = 0

p(hier lernen Sie etwas über Stricken) → 0



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Komplementärereignisse

Würfeln:
Ohne physikalische Tricks hat ein Würfelwurf immer eine Zahl als Ergebnis:

$$p(6)=\frac{1}{6}\rightarrow p(A)=\frac{1}{6}$$

$$p(1\ldots5)=\frac{5}{6}\rightarrow p(\bar{A})=\frac{5}{6}$$

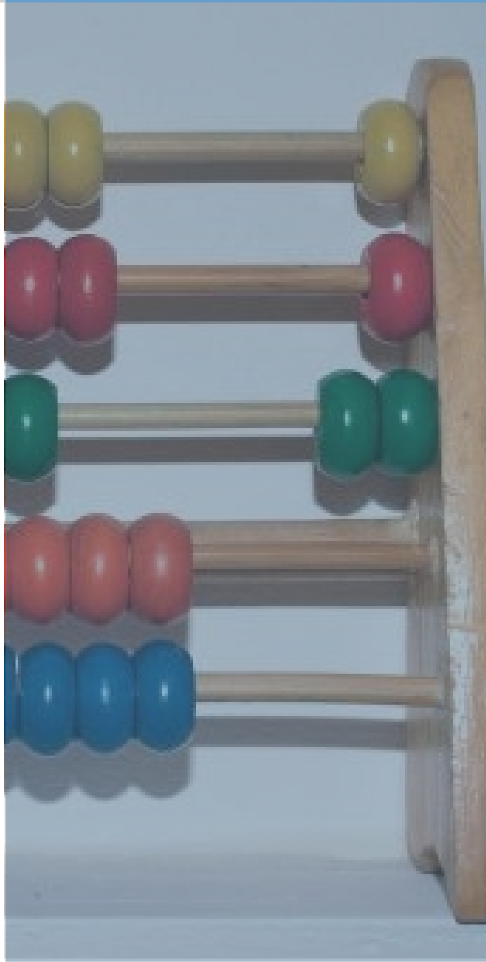
$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und seines Gegenteils ist immer 1. Daher kann man das eine aus dem anderen Berechnen.

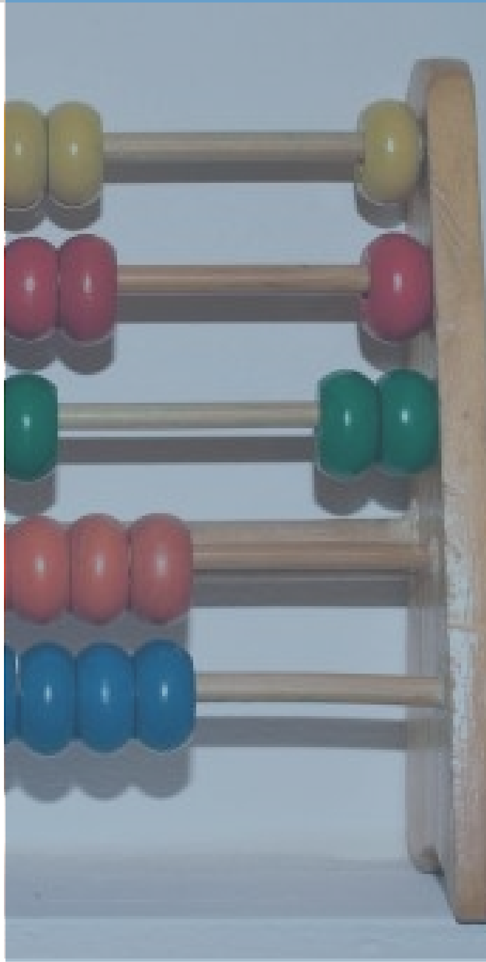
Beispiel: Ein Kartenspiel hat 4 Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz).

Die Wahrscheinlichkeit, eine Herz-Karte zu ziehen, ist 1 von 4: 0.25

Die Wahrscheinlichkeit, keine Herz-Karte zu ziehen, ist 3 von 4: 0.75, oder 1 - 1 von 4: 1-0.25 = 0.75



Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Kolmogorov



1. Axiom

Jedem Ereignis aus dem Ereignisraum ist eine Zahl p(A) zugeordnet, die die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses beschreibt. Diese liegt zwischen 0 und 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Axiom

Das sichere Ereignis hat den Wert Eins.

$$P(E) = 1$$

3. Axiom

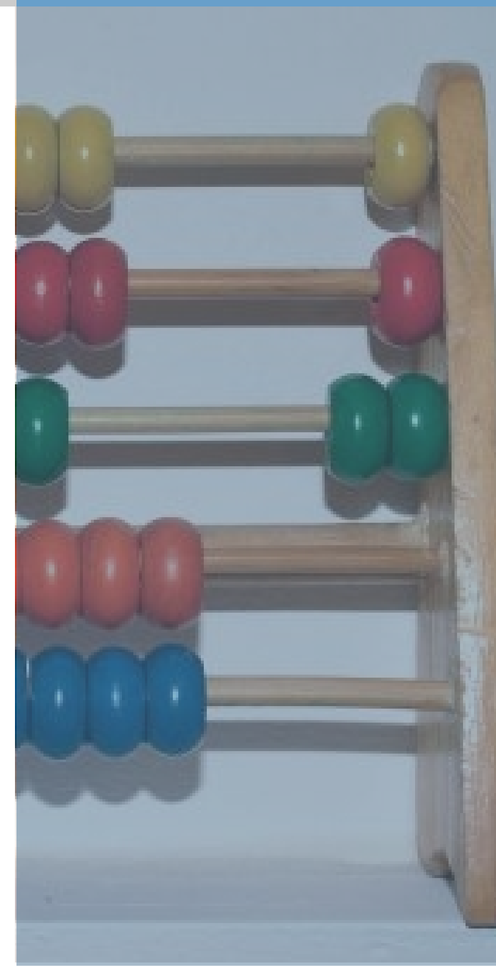
Für paarweise disjunkte Ereignisse, also solche, die keine Schnittmenge aufweisen (z.B. {1,2} und {3,4}), gilt, dass die Wahrscheinlichkeit für ihre Vereinigungsmenge die Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$\text{also z.B.}\, \Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\, A = \{1,2\},\, B = \{3,4\}$$

$$P(A) = \frac{2}{6},\, P(B) = \frac{2}{6},\, P(A \cup B) = P(\{1,2\} \cup \{3,4\}) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = 66{,}67\,\%$$

Bedingte und unabhängige Ereignisse



Unabhängige Ereignisse

Bsp. Ziehen von Karten: Das Ergebnis des 2. Wurfes ist unabhängig vom Ergebnis des 1. Wurfes. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine 5 und dann eine 6 zu würfeln:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = 36$$

Bedingte Ereignisse

Bsp. Kekse (nach Dolić): Eine (undurchsichtige) Tüte mit einem Schoko-Keks, einem Zucker-Keks, einem Öko-Keks. Wie wahrscheinlich ist es, zuerst den Schoko-Keks und dann den Öko-Keks herauszuholen?

falsch wäre: $P(Schoko\,und\,Öko) = P(Schoko) * P(Öko) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9,}$

denn nachdem der Schokokeks raus ist, sind ja nur noch 2 Kekse drin ($P(Öko\,wenn\,Schoko) = \frac{1}{2}$)

daher: $P(Schoko\,und\,Öko) = P(Öko) * P(Öko\,wenn\,Schoko) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

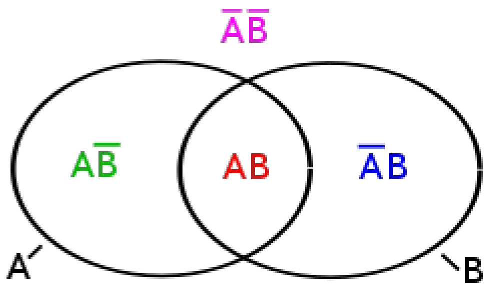
Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$

Zur Erinnnerung: $Anzahl = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6, P(A) = \frac{1}{6}$

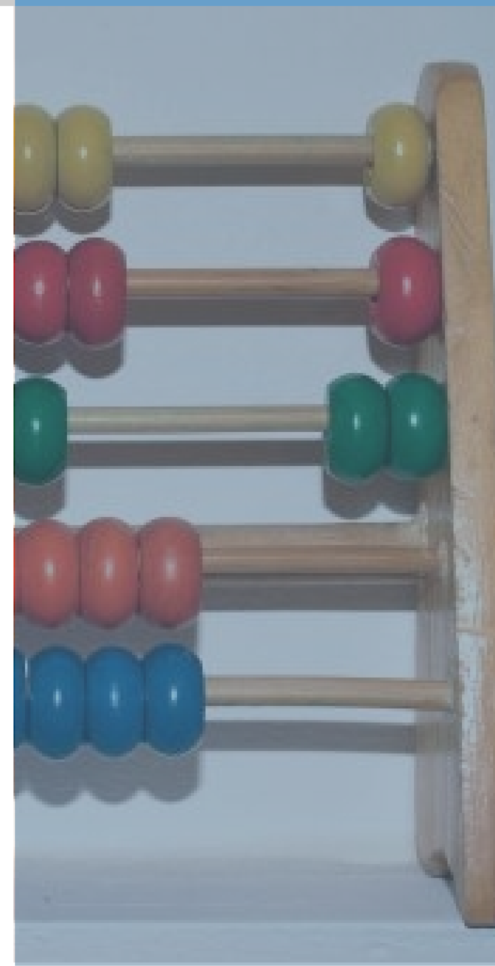
Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

Abgeleitet aus den Axiomen
Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel eine Herz-Karte zu ziehen? 32 Karten, 1/4 sind Herz (8)

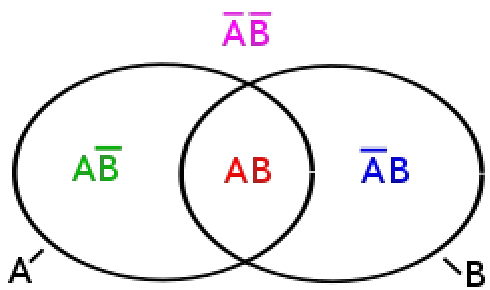


Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

Abgeleitet aus den Axiomen

Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

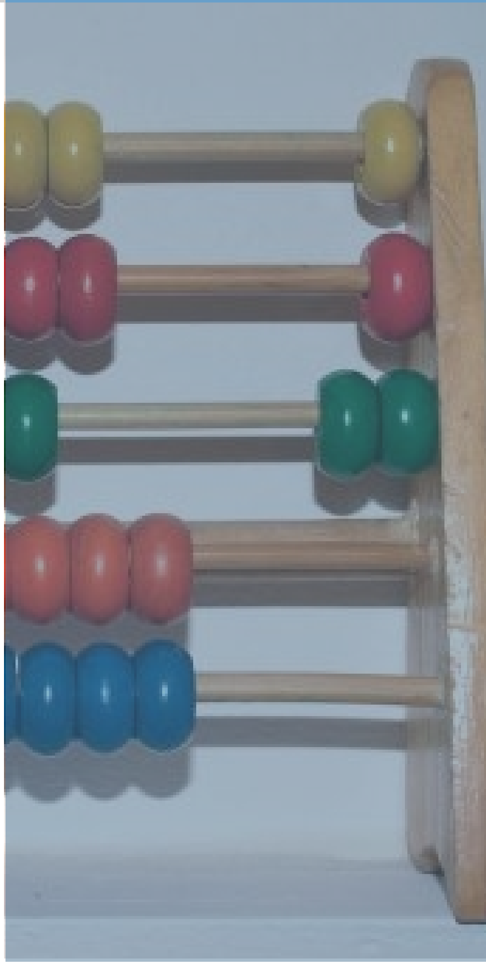
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel eine Herz-Karte zu ziehen?

$$P(A) = \frac{8}{32}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

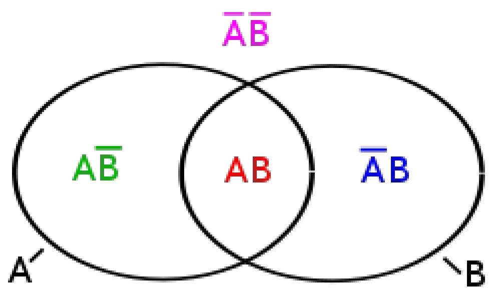


Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

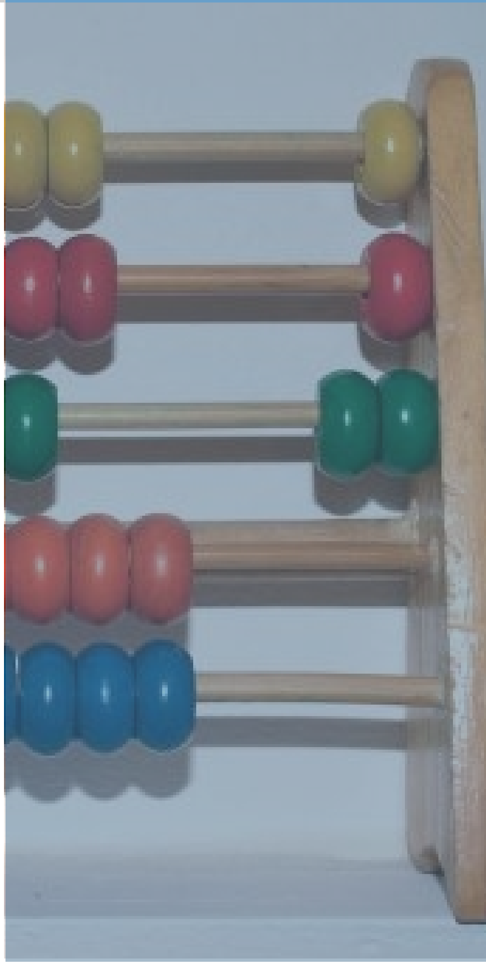
Abgeleitet aus den Axiomen

Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel einen Buben zu ziehen? 32 Karten, 4 Buben.

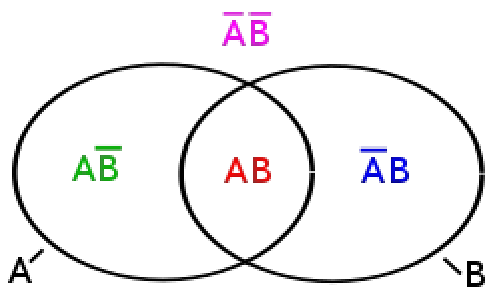


Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

Abgeleitet aus den Axiomen

Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

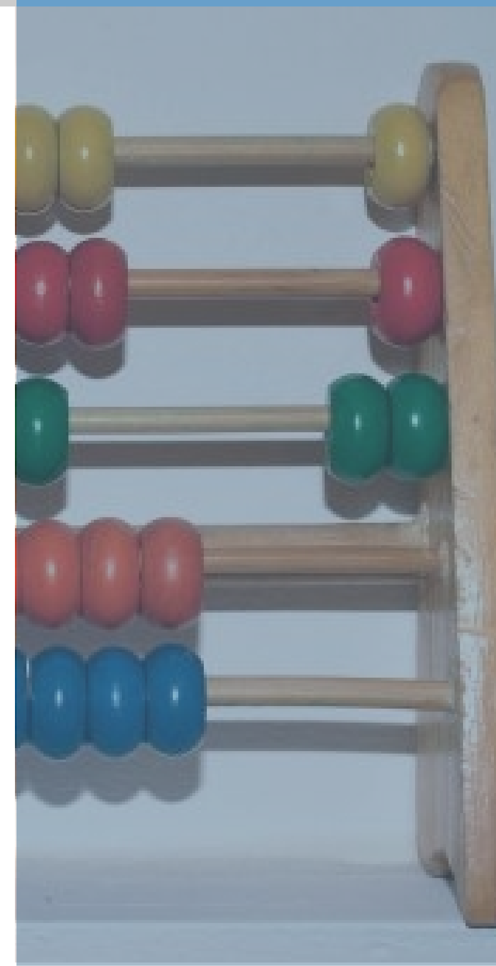
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel einen Buben zu ziehen?

$$P(B) = \frac{4}{32}$$

$$P(B) = \frac{1}{8}$$

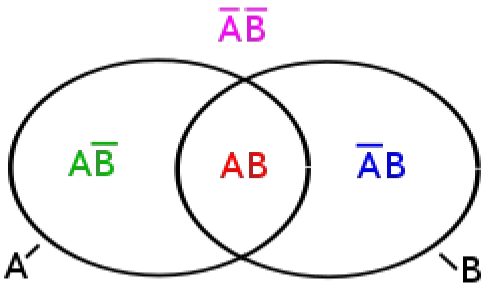


Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

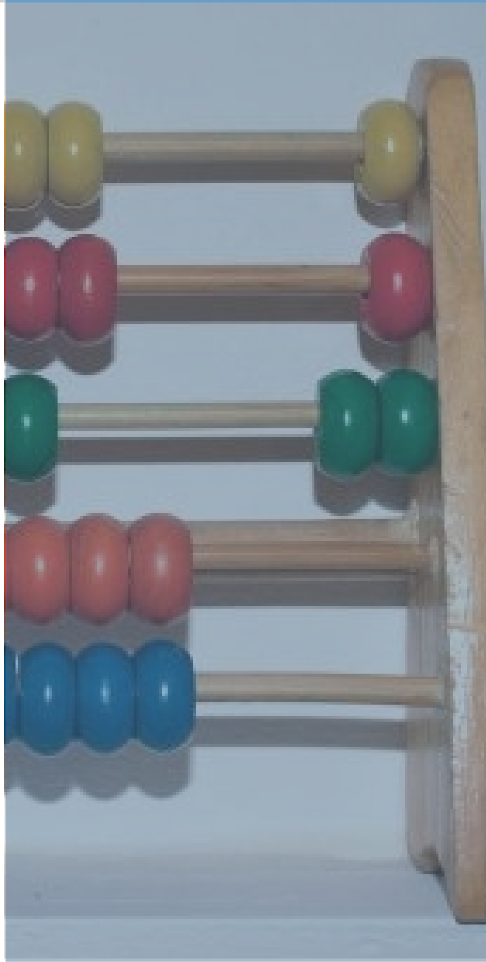
Abgeleitet aus den Axiomen

Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



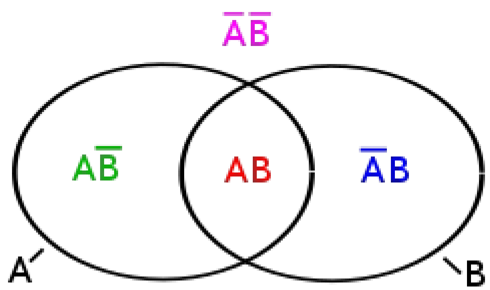
Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel eine Trumpf-Karte zu ziehen (Herz und Buben sind Trumpf)?
32 Karten, 8 Herz, 4 Buben, ein Herz-Bube.



Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse

Abgeleitet aus den Axiomen
Für alle möglichen Kombinationen von Ereignissen gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

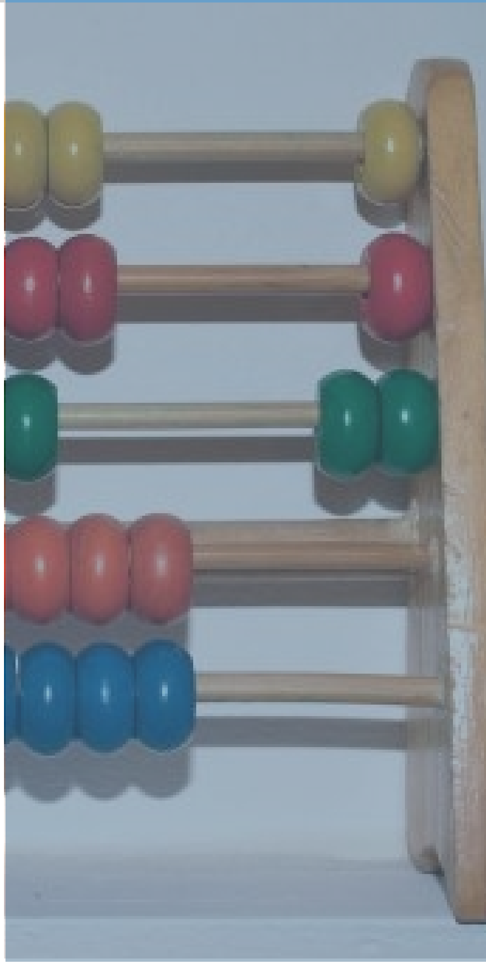


Ziehen von Karten: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skat-Kartenspiel eine Trumpf-Karte zu ziehen (Herz und Buben sind Trumpf)?

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \quad P(A \cup B) = \frac{11}{32} = 0{,}34375$$



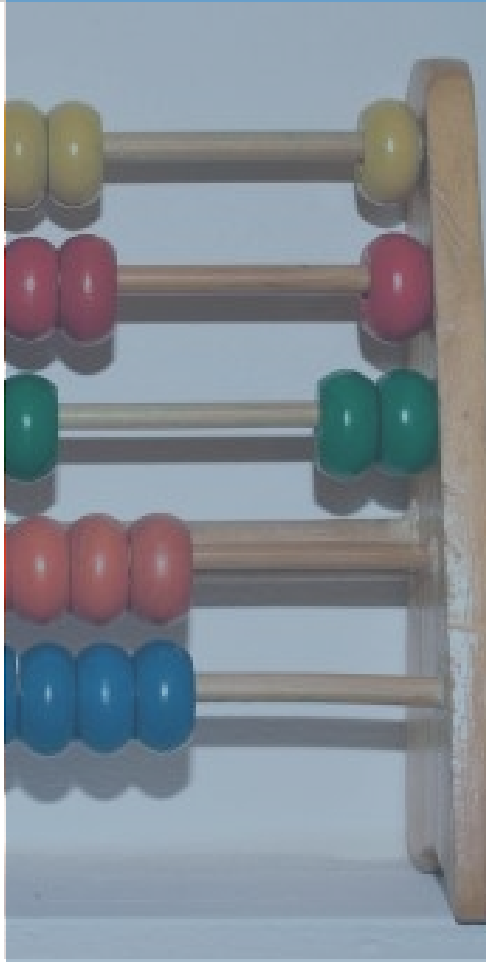
Kombinatorik [1]

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit ist es nötig, alle möglichen Ereignisse zu kennen

Bei einem Ereignis ist dies einfach, was aber, wenn Ereignisse kombiniert werden sollen? → Kombinatorik

Wie viele möglichkeiten gibt es, aus n Elemente k Elemente auszuwählen?

	Variation (mit Beachtung der Reihenfolge)	Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge)
„mit Zurücklegen“; mit Wiederholung	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!*(n-1)!}$
„ohne Zurücklegen“; ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!*(n-k)!}=\binom{n}{k}$



Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Kombinatorik [2]

Beispiele

„mit zurücklegen", mit Beachtung der Reihenfolge

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 Würfelergebnisse zu kombinieren?

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\ n(\Omega)=6,\ Anzahl\ Würfe\ k=2$$

$$B_n^{k=2}=\{(x_1,x_2)|x_i\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$Anzahl(B)=Anzahl(x_1)*Anzahl(x_2)=Anzahl(\Omega)*Anzahl(\Omega)=6*6=6^2=36$$

Daher: Wahrscheinlichkeit für 1. Wurf 6, 2. Wurf 6: $p(6,6)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}=0{,}0278=2{,}78\,\%$

„ohne zurücklegen", ohne Beachtung der Reihenfolge

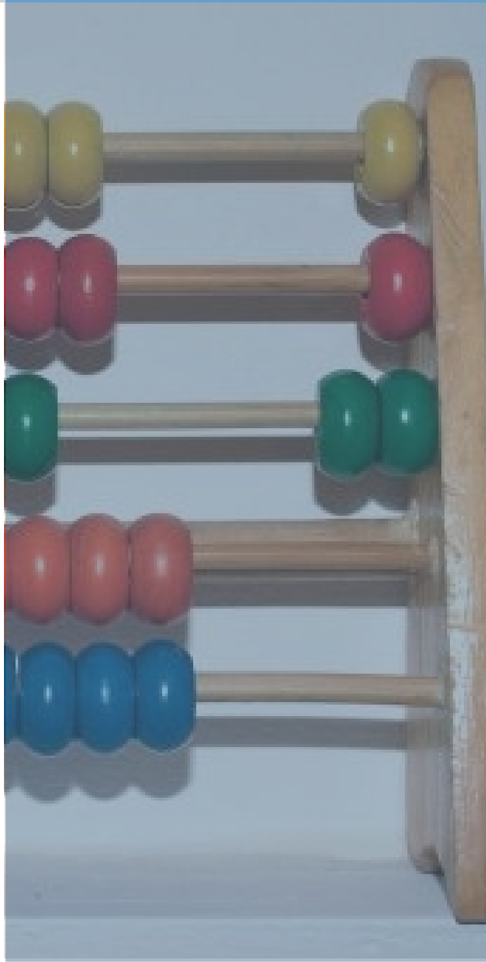
Wieviele mögliche Kombinationen gibt es im Lotto?

$$\Omega=\{1,\dots,49\},\ n(\Omega)=49,\ Anzahl\ Kugeln\ k=6$$

$$B_n^{k=6}=\{(x_1,\dots,x_6)|x_i\in\Omega=\{1,\dots,49\}\setminus\{x_1,\dots,x_i-1\}\}$$

$$Anzahl(B_6^{49})=\frac{49!}{6!*(49-6)!}=13983816$$

Daher: Wahrscheinlichkeit für 6er im Lotto: $p(6er)=\frac{1}{13983816}=0{,}000000072=0{,}000007151\,\%$

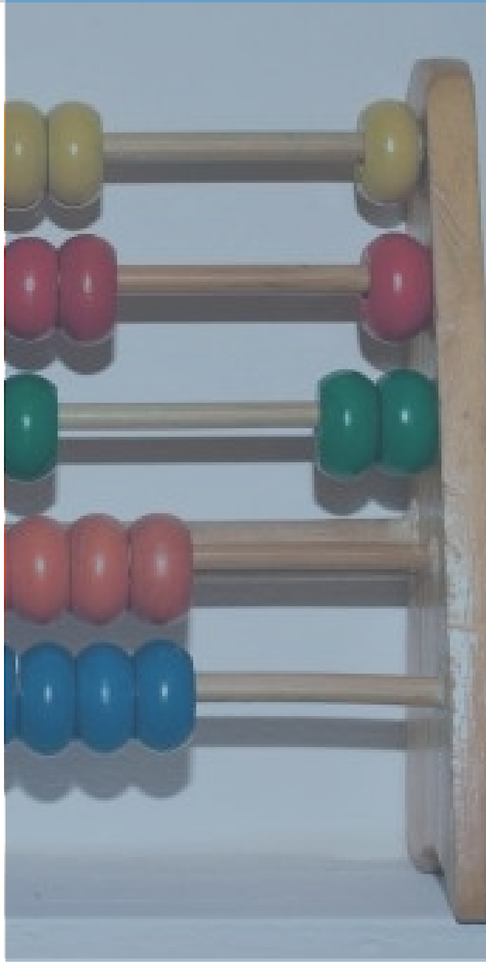


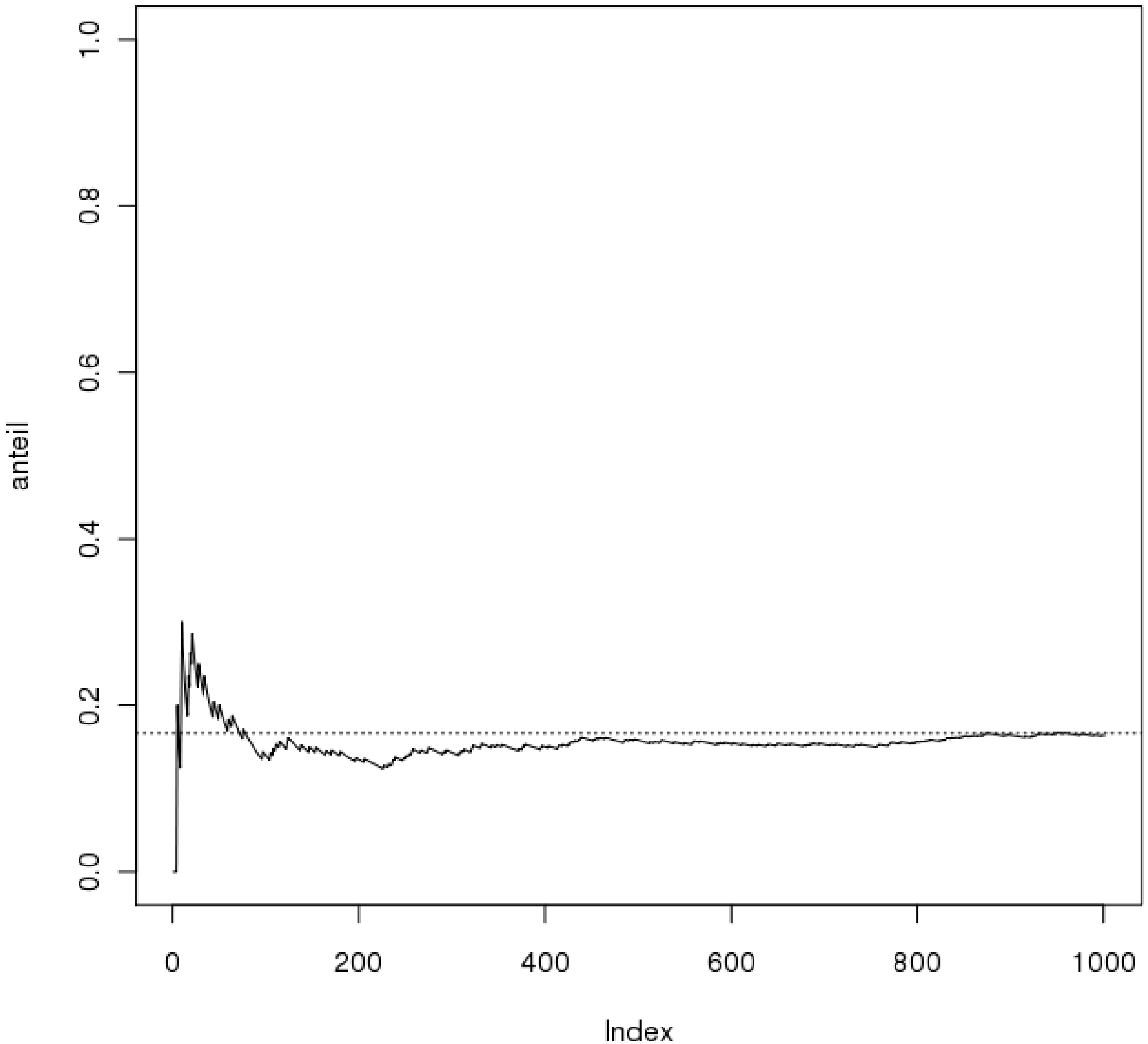
Gesetz der großen Zahl

Je größer die Stichprobe, desto ähnlicher die Verteilung von Stichprobe und Grundgesamtheit
Bsp: Würfeln:
Die theoretische Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis ist 1/6,
bei der Grundgesamtheit aller jemals erfolgten Würfe (mit ungezinkten Würfeln) dürfte der Anteil jeder Augenzahl ziemlich genau 1/6 betragen.
Je häufiger man experimentell würfelt, umso ähnlicher ist die Verteilung der Stichprobe der der Grundgesamtheit.

Die relative Häufigkeit der Zufallsergebnisse konvergiert gegen die Wahrscheinlichkeit des Zufallsergebnisses

Das Gesetz der großen Zahl ist die Brücke von der Stichprobe zur Grundgesamtheit, es erlaubt Aussagen über diese, ohne dass man die Gesetzmäßigkeiten kennt.





Simuliertes Würfelexperiment, der Anteil der Augenzahl 6 ist aufgetragen, die gestrichelte Linie zeigt die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 an.

R-Script hierzu laden:

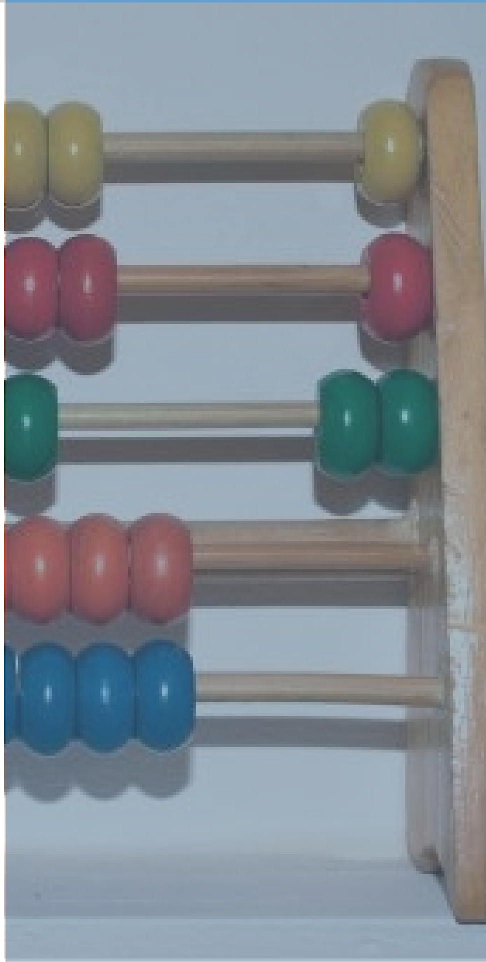
`source("roll.txt")`

Quelltext:

```
rolls=1000

roll<-as.numeric(sample(1:6,rolls,
replace=T))
list=0
count=0
position=0
anteil=0
for (test in roll)
{
list<-
append(list,test,length(list))
anteil<-
append(anteil,sum(list==1)/length(l
ist))
}
plot(anteil,type="l",ylim=c(0,1))
abline(h=1/6,lty=3)
```

Zufallsvariable



Was ist schon zufällig?
Eine Zufallsvariable ist das Ergebnis eines (komplexen?, unbekannten?) Prozesses.
Die verschiedenen möglichen Ausgänge des Prozesses stellen die Merkmalsausprägungen der Zufallsvariable dar.
Ob eine Variable als zufällig angesehen wird oder nicht, hängt von der Definition ab:

Münzwurf: Das Ergebnis eines Münzwurfes wird durch verschiedene physikalische Gesetzmäßigkeiten **bestimmt** (Wurfkraft, Dichte der Luft, Schwerkraft etc.)! Da wir diese nicht kontrollieren können, kann das Ergebnis als **zufällig** angesehen werden!

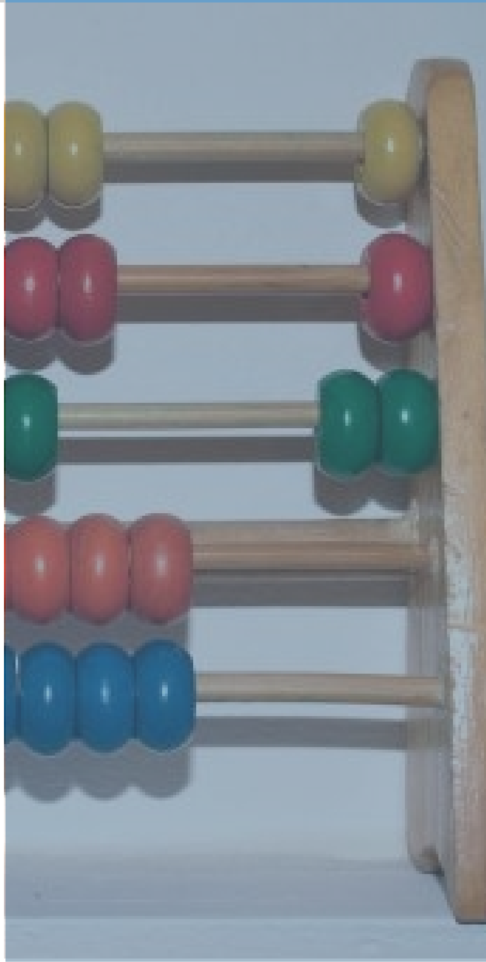
Die Ergebnisse werden, um sie statistisch verarbeiten zu können, in den Raum der Reellen Zahlen abgebildet (umcodiert).

Zufallsvariable Beispiel

Beispiel (nach Dolić)
Eine Münze wird drei Mal geworfen. Die Anzahl der “Köpfe“ wird als Zufallsvariable notiert.

Mögliche Ergebnisse:

Ergebnis	x_i	$P(x_i)$
ZZZ	0	1/8
ZZK	1	1/8
ZKZ	1	1/8
KZZ	1	1/8
ZKK	2	1/8
KKZ	2	1/8
KZK	2	1/8
KKK	3	1/8

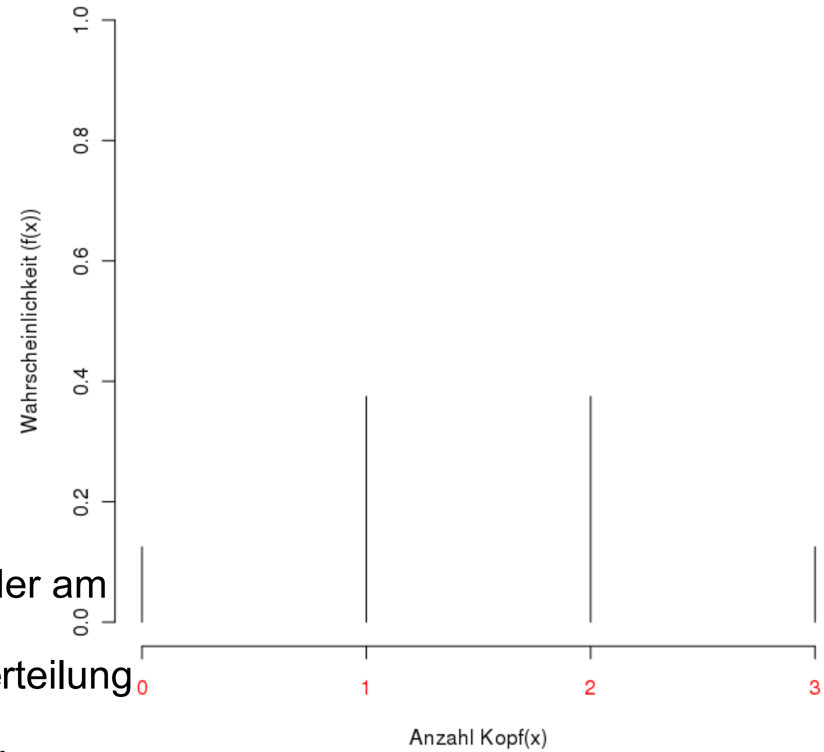


Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion)

Ordnet jedem Ereignis der Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit zu

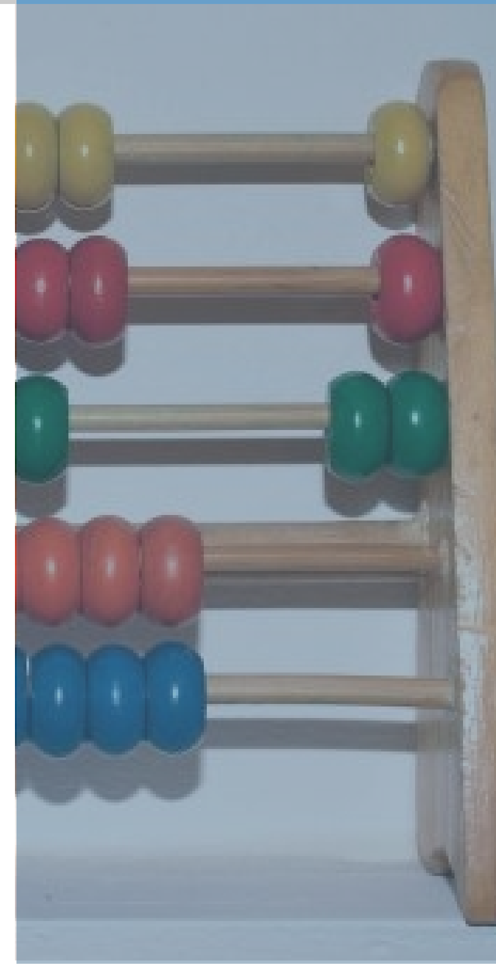
Beispiel Münzwurf

$$f(x_i)=\begin{Bmatrix} P(x_i=0)=\frac{1}{8} \\ P(x_i=1)=\frac{3}{8} \\ P(x_i=2)=\frac{3}{8} \\ P(x_i=3)=\frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$



2 typische Eigenschaften
Erwartungswert: Der Wert, der am wahrscheinlichsten ist
Streuung: Die Varianz der Verteilung

weitere: Schiefe und Kurtosis"

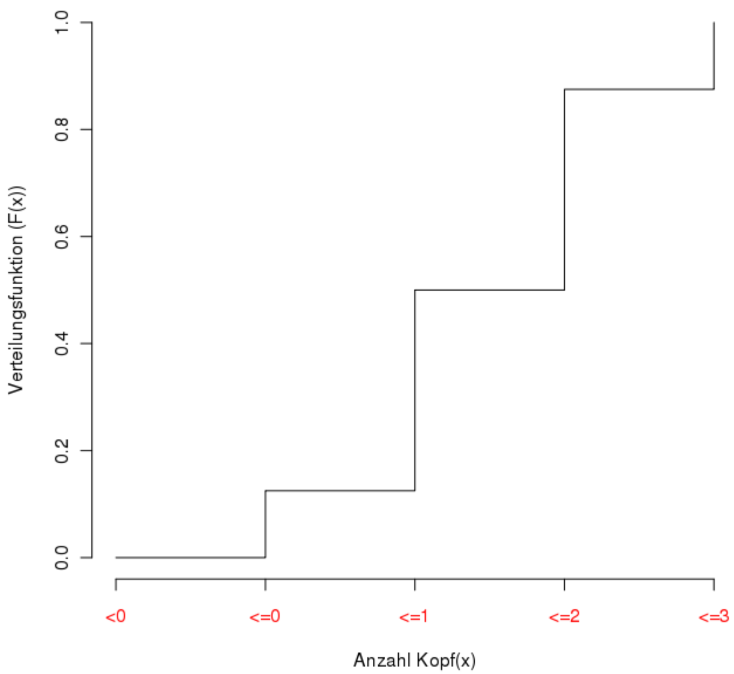


Verteilungsfunktion

Ist die Summenfunktion der Wahrscheinlichkeitsfunktion

dh. „Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das bis zu 2x Kopf fällt?“

$$F(x_i) = \begin{Bmatrix} P(x_i < 0) = 0 \\ P(x_i \leq 0) = \frac{1}{8} \\ P(x_i \leq 1) = \frac{4}{8} \\ P(x_i \leq 2) = \frac{7}{8} \\ P(x_i \leq 3) = 1 \end{Bmatrix}$$

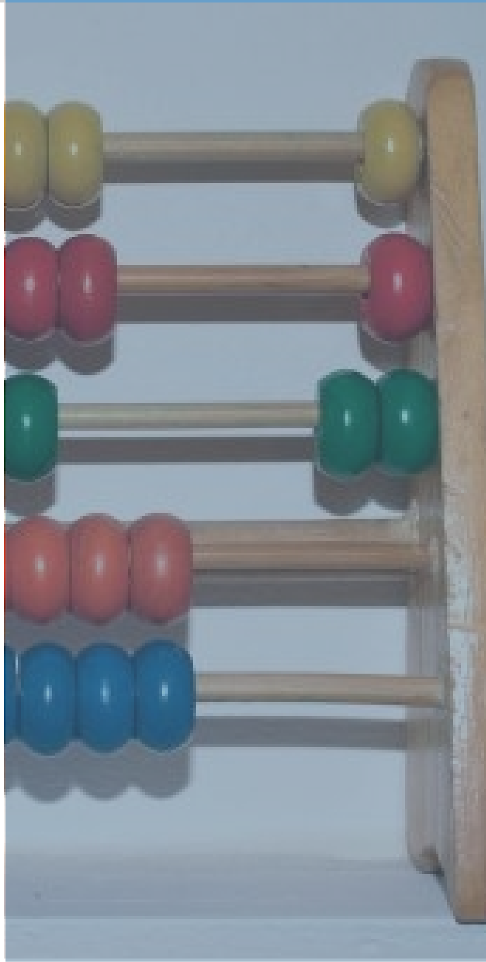


Eigenschaften:

$0 <= F(x) <= 1$

F(x) ist monoton nicht fallend

$F(x_1) <= F(x_2) ... <= F(x_n)$



Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

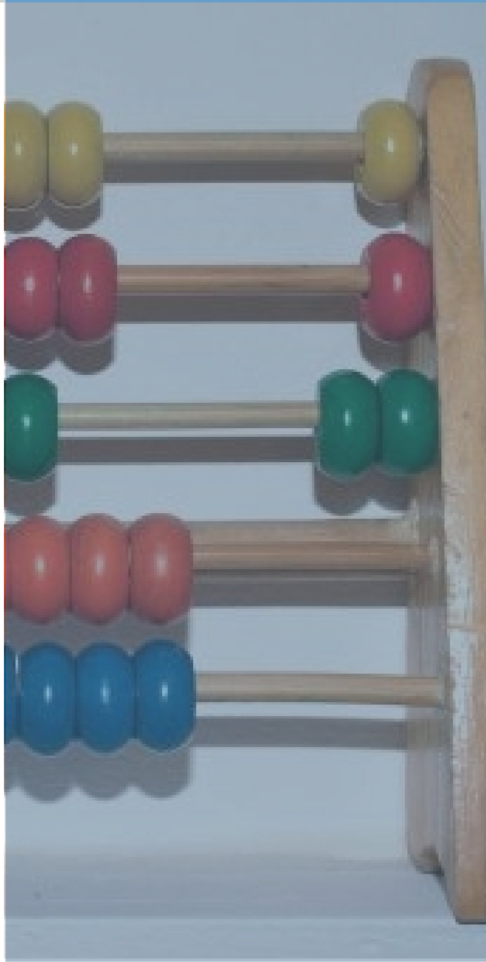
Wie kann man signifikant (Fehlerwahrscheinlichkeit 5%) feststellen, dass die Münzen gezinkt sind und immer Kopf zeigen?

H_0: Die Münzen sind nicht gezinkt, die Verteilung entspricht der Verteilung eines ungezinkten Münzwurfes (Binomialverteilung).

H_1: Die Münzen sind gezinkt, die Verteilung unterscheidet sich signifikant von der der Verteilung eines ungezinkten Münzwurfes (Binomialverteilung).

N=20 Würfe

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

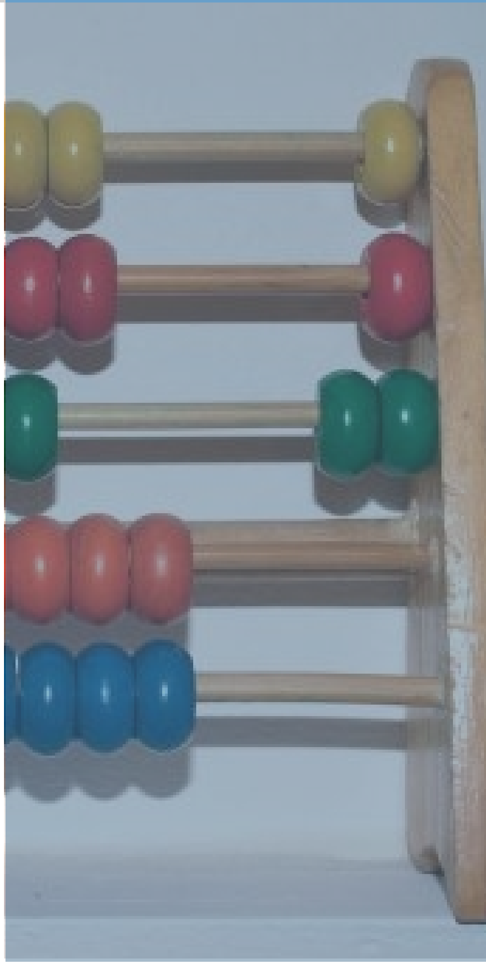


Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Wenn die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Eintretens eines Ergebnisses weniger als 5% beträgt, so ist das Auftreten dieses Ereignisses mit 95% Wahrscheinlichkeit nicht zufällig.



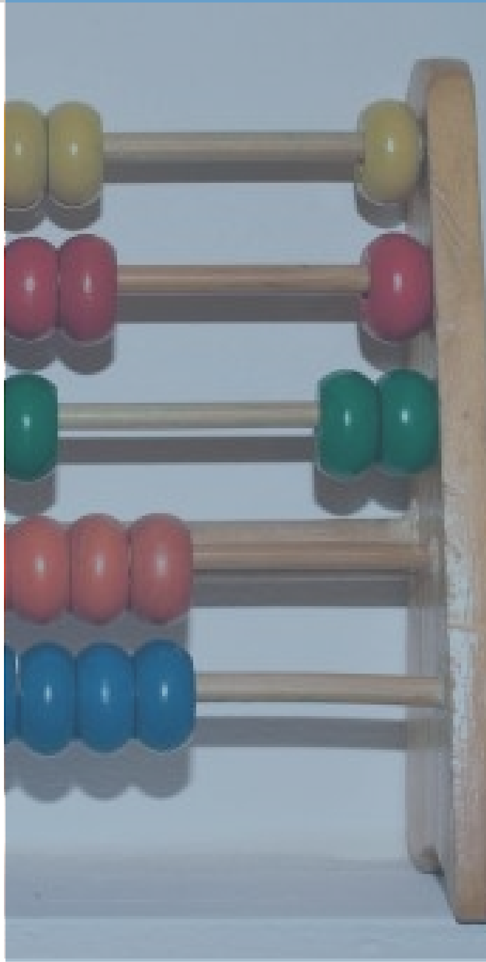
Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Wenn die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Eintretens eines Ergebnisses weniger als 5% beträgt, so ist das Auftreten dieses Ereignisses mit 95% Wahrscheinlichkeit nicht zufällig.

Also: Für wieviele Kopf-Ergebnisse bei 20 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit 5% oder niedriger?



Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

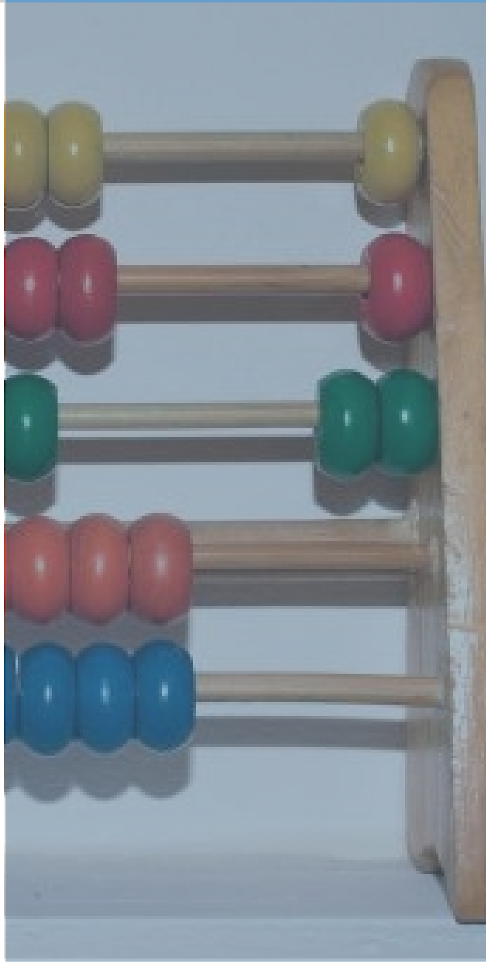
Wenn die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Eintretens eines Ergebnisses weniger als 5% beträgt, so ist das Auftreten dieses Ereignisses mit 95% Wahrscheinlichkeit nicht zufällig.

Also: Für wieviele Kopf-Ergebnisse bei 20 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit 5% oder niedriger?

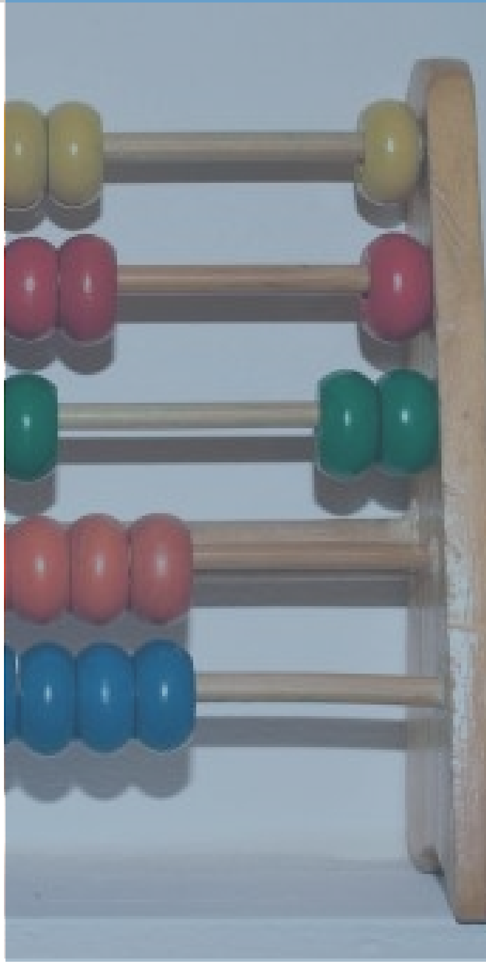
Grundsätzlich: Wahrscheinlichkeit nach Laplace:

$$p(A)=\frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Relative Häufigkeit eines Ereignisses



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Grundsätzlich: Wahrscheinlichkeit nach Laplace:

$$p(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Relative Häufigkeit eines Ereignisses

Wir brauchen: Zahl der günstigen Ereignisse (Wurf von Kopf) und Zahl der möglichen Ereignisse (Gesamtmenge der Ausgänge von Würfen von 20 Münzen)

Anzahl der möglichen Ausgänge

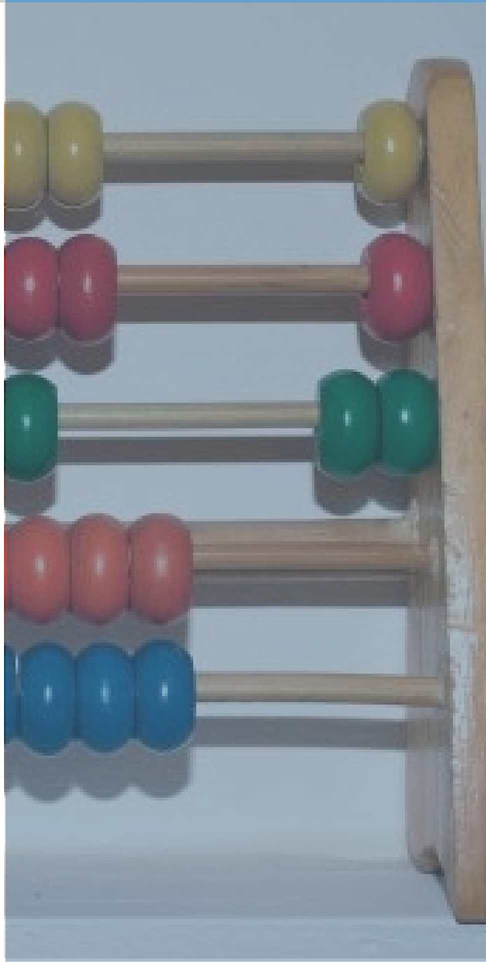
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Z	K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Zahl der möglichen Ereignisse (Gesamtmenge der Ausgänge von Würfen von 20 Münzen)

Zur Kombinatorik:

Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?

Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

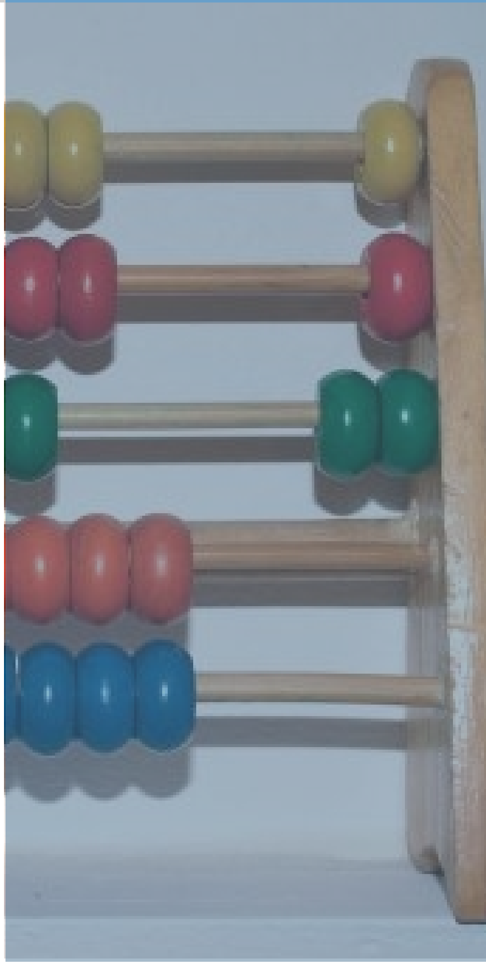
Zahl der möglichen Ereignisse (Gesamtmenge der Ausgänge von Würfen von 20 Münzen)

Zur Kombinatorik:

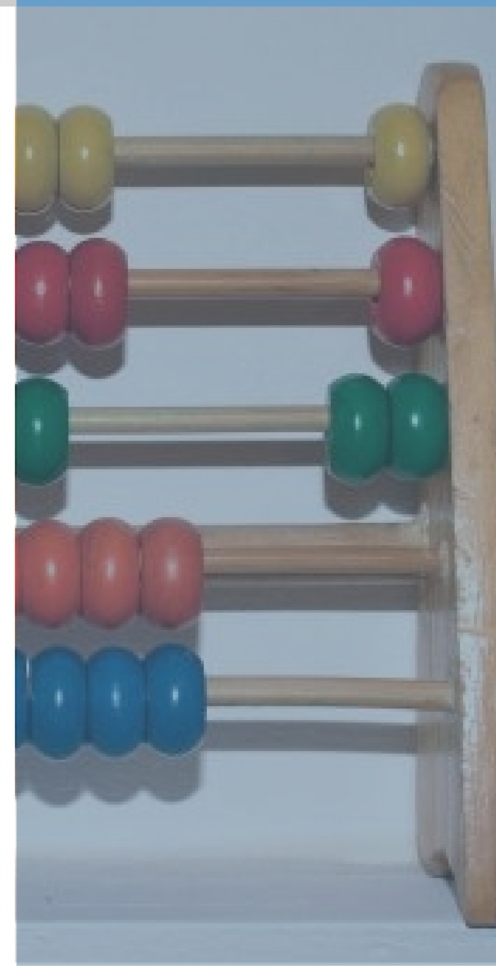
Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?

Antwort: Ja, [Kopf, Kopf, Zahl] ist nicht gleich [Kopf, Zahl, Kopf]!

Wenn eine Münze auf Zahl gefallen ist, verändert das die Chancen, das die nächste Münze auf Zahl fällt (ohne Zurücklegen) oder bleibt die Wahrscheinlichkeit gleich (mit Zurücklegen)?



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Zahl der möglichen Ereignisse (Gesamtmenge der Ausgänge von Würfen von 20 Münzen)

Zur Kombinatorik:

Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?

Antwort: Ja, [Kopf, Kopf, Zahl] ist nicht gleich [Kopf, Zahl, Kopf]!

Wenn eine Münze auf Zahl gefallen ist, verändert das die Chancen, das die nächste Münze auf Zahl fällt (ohne Zurücklegen) oder bleibt die Wahrscheinlichkeit gleich (mit Zurücklegen)?

Antwort: Die Chancen ändern sich nicht! Mit Zurücklegen!

Zusammenhang mit statistischen Tests

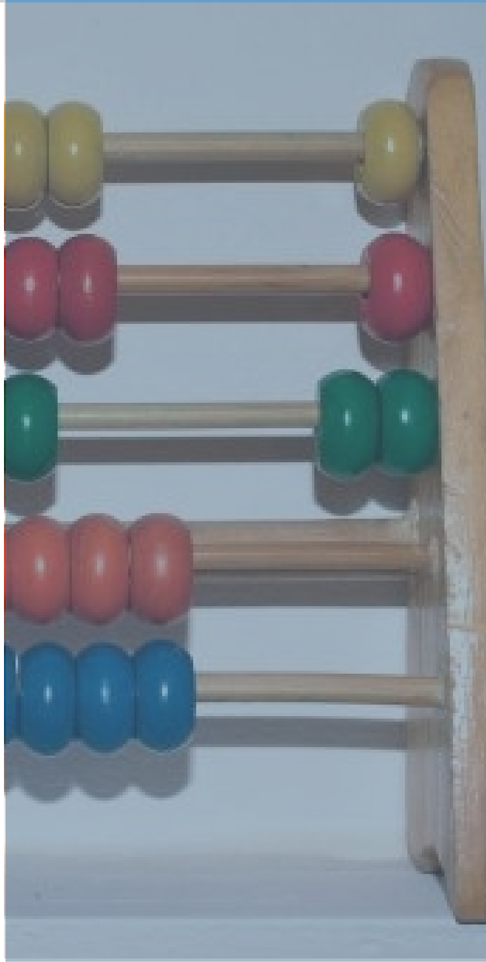
Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf, die hoch genug ist, um mit 95% Sicherheit sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

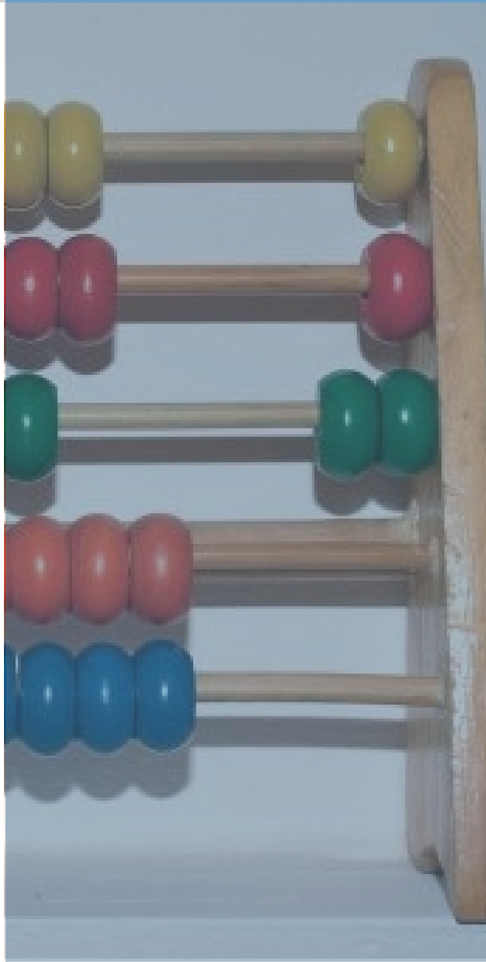
Zahl der möglichen Ereignisse (Gesamtmenge der Ausgänge von Würfen von 20 Münzen)

Antwort: Ja, [Kopf, Kopf, Zahl] ist nicht gleich [Kopf, Zahl, Kopf]! + Mit Zurücklegen!

	Variation (mit Beachtung der Reihenfolge)	Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge)
„mit Zurücklegen“; mit Wiederholung	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!*(n-1)!}$
„ohne Zurücklegen“; ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!*(n-k)!}=\binom{n}{k}$



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf oder Zahl, die hoch genug ist, um sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

2 Mögliche Ausgänge : n
20 mögliche Positionen : k
n=2 Fälle (Kopf oder Zahl), k=20 Würfe
für die Zahl der Gesamtmöglichkeiten

Anzahl der möglichen Ausgänge: $n^k = 2^{20}$=1048576

2 Ergebnisse können auf 1048576 Möglichkeiten auf 20 Würfe verteilt sein

$$n^k$$

Anzahl der günstigen Ausgänge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	K	K	K	K	K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	K	K	K	K	Z	K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Zusammenhang mit statistischen Tests

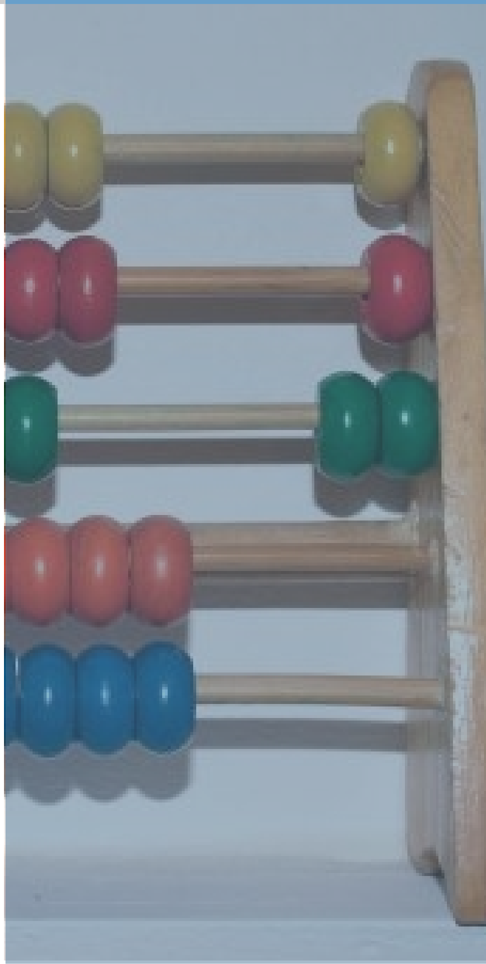
Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf oder Zahl, die hoch genug ist, um sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Anzahl der günstigen Ausgänge? Oder: Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine festgelegte Anzahl Münzen mit Kopf (k: 1-20) auf 20 Plätze (n) zu verteilen?

n=20 Plätze, k= Fälle Kopf

Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?



Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

n=20 Plätze, k= Fälle Kopf

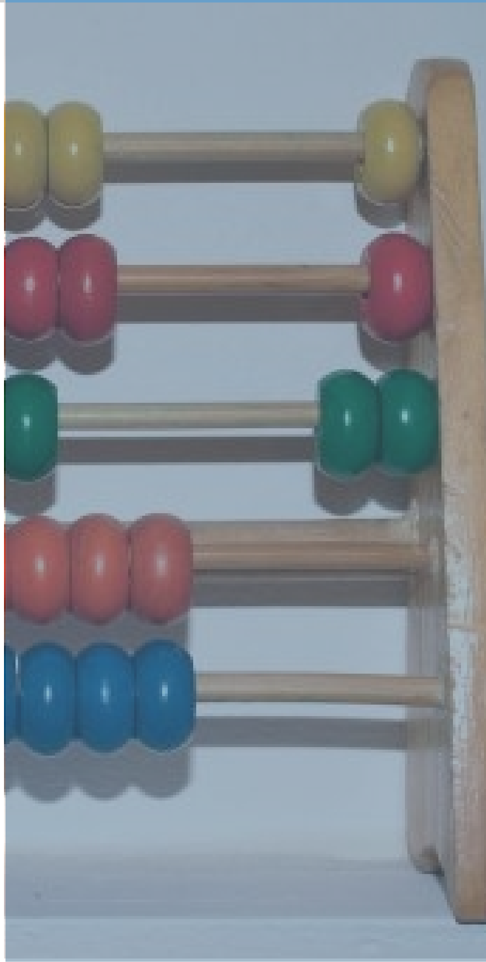
Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf oder Zahl, die hoch genug ist, um sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Anzahl der günstigen Ausgänge? Oder: Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine **festgelegte Anzahl Münzen mit Kopf** (k: 1-20) auf 20 Plätze (n) zu verteilen?

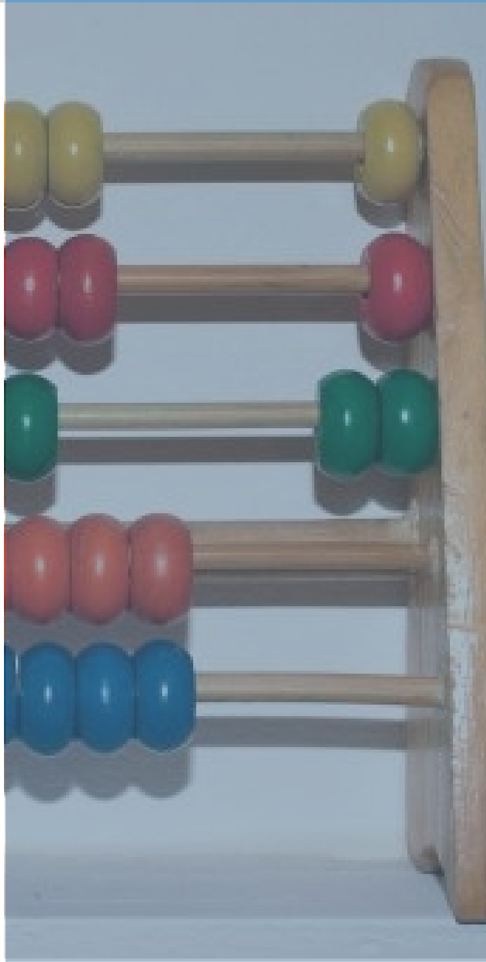
Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?

Antwort: Nein, wir sind nur an der Anzahl von z.B. 1x Kopf, 2x Zahl interessiert, nicht an ihrer Ordnung.

Wenn eine Münze auf Zahl gefallen ist, verändert das die Verteilung von Kopf/Zahl auf die verbliebenen Plätze? (ja: ohne, nein: mit Zurücklegen)



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

n=20 Plätze, k= Fälle Kopf

Anzahl der günstigen Ausgänge? Oder: Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine festgelegte Anzahl Münzen mit Kopf (k: 1-20) auf 20 Plätze (n) zu verteilen?

Ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Münzen fallen?

Antwort: Nein, wir sind nur an der Anzahl von z.B. 1x Kopf, 2x Zahl interessiert, nicht an ihrer Ordnung.

Wenn eine Münze auf Zahl gefallen ist, verändert das die Verteilung von Kopf/Zahl auf die verbliebenen Plätze? (ja: ohne, nein: mit Zurücklegen)

Antwort: Die Verteilung ändert sich! Wenn ich für einen Platz Kopf gewählt habe, ändert sich (bei einer festgelegten Zahl von Kopf) die Anzahl verbliebener Köpfe!

Zusammenhang mit statistischen Tests

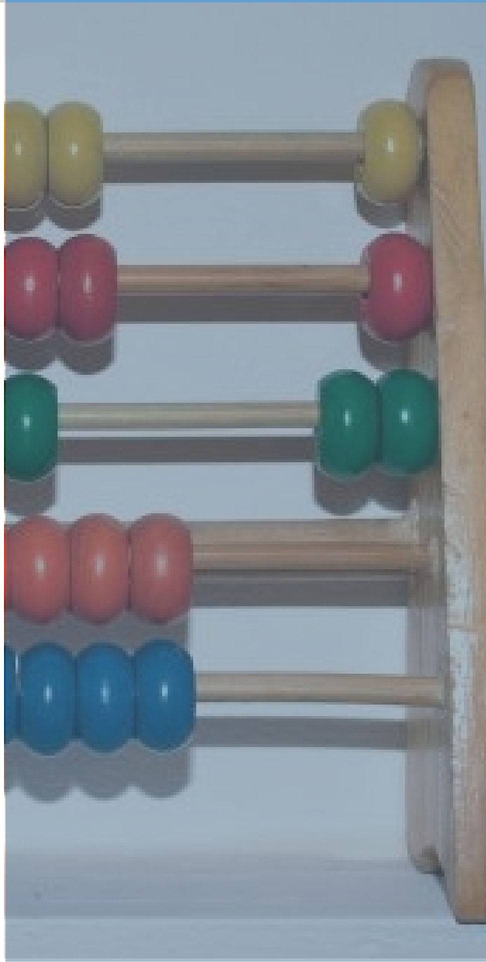
Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

n=20 Plätze, k= Fälle Kopf

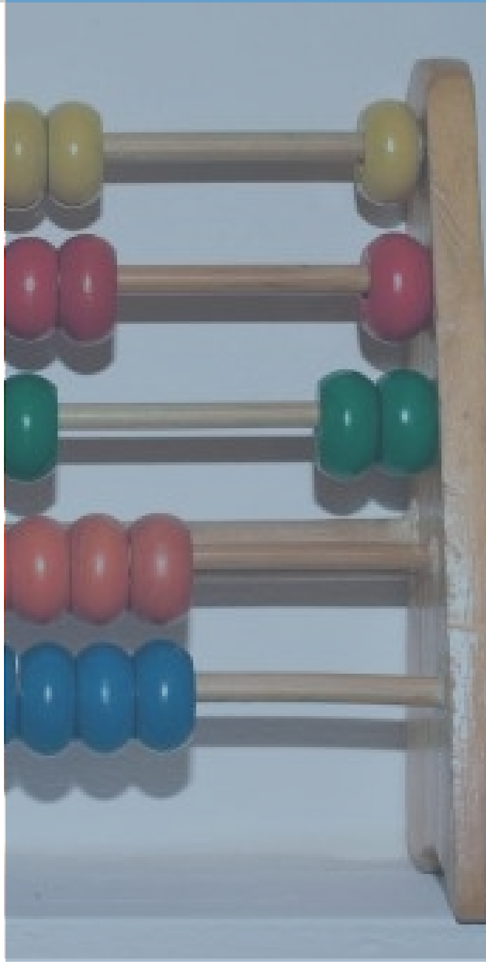
Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf oder Zahl, die hoch genug ist, um sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

... nicht an ihrer Ordnung + ohne Zurücklegen!

	Variation (mit Beachtung der Reihenfolge)	Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge)
„mit Zurücklegen"; mit Wiederholung	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!*(n-1)!}$
„ohne Zurücklegen"; ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!*(n-k)!}=\binom{n}{k}$



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

n=20 Plätze, k= Fälle Kopf

Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Kopf oder Zahl, die hoch genug ist, um sicher zu sein, das die Münze gezinkt ist.

Anzahl der möglichen Ausgänge: $n^k = 2^{20} = 1048576$

Anzahl günstige Ausgänge: nach Binomialkoeffizent berechnet, Möglichkeiten, Anzahl von Zahl in Anzahl von Würfen anzuordnen

Kein mal Zahl: n = 20, k=0: nur eine Möglichkeit
1 mal Zahl: n = 20, k = 1: 20 Möglichkeiten
2 mal Zahl: n = 20, k = 2: 190 Möglichkeiten
3 mal Zahl: n = 20, k = 3: 1140 Möglichkeiten
4 mal Zahl: n = 20, k = 4: 4845 Möglichkeiten
5 mal Zahl: n = 20, k = 5: 15504 Möglichkeiten
6 mal Zahl: n = 20, k = 6: 38760 Möglichkeiten

$$\frac{n!}{k!*(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Zusammenhang mit statistischen Tests

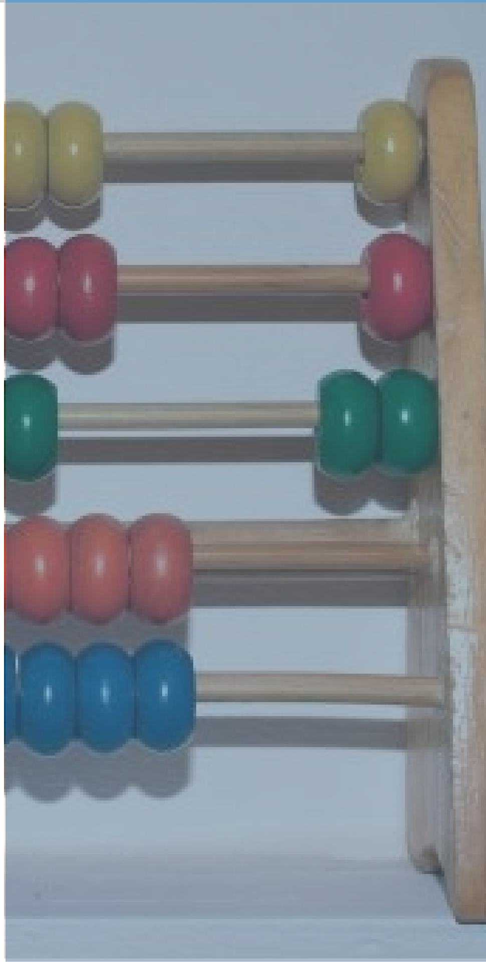
Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Anzahl der möglichen Ausgänge: $n^k = 2^{20}=1048576$

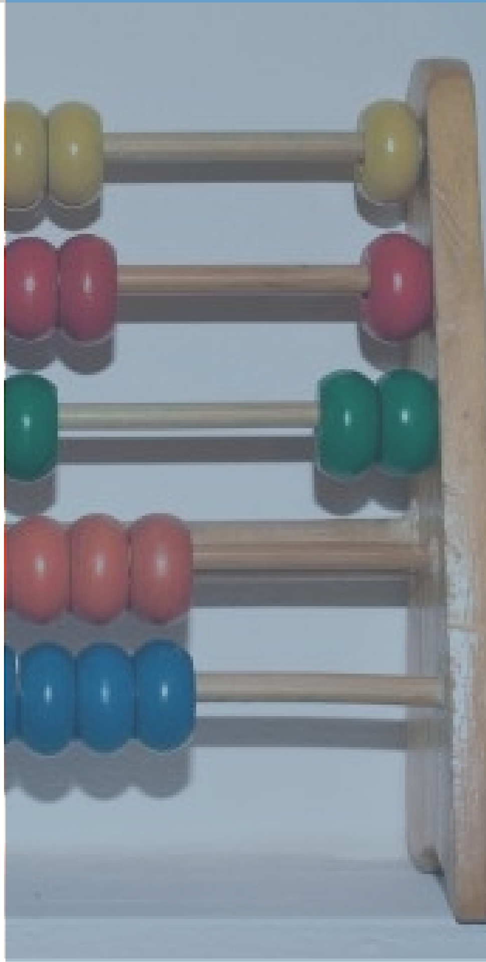
$$p(A)=\frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Ausgänge}{Anzahl\ der\ möglichen\ Ausgänge}$$

Relative Häufigkeit eines Ereignisses

Anzahl Zahl	Möglichkeiten	Günstige / Gesamtmöglichkeiten	kumulativ
0	1	9.536743e-07	9.536743e-07
1	20	1.907349e-05	2.002716e-05
2	190	0.0001811981	0.0002012253
3	1140	0.001087189	0.001288414
4	4845	0.004620552	0.005908966
5	15504	0.01478577	0.02069474
6	38760	0.03696442	0.05765916



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

Anzahl der möglichen Ausgänge: $n^k = 2^{20} = 1048576$

$$\text{Allgemein: } B_{n;k;p} = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} : \text{Formel für die Binominalverteilung}$$

$$Hier: z.B.\ 2\ Kopf\ ,\ 18\ Zahl : k=2, n=20, p=0.5:$$

$$190/1048576 = 0.0001811981 = \binom{20}{2} * 0.5^2 * (1-0.5)^{20-2} = 190 * 0{,}25 * 3.814697\text{e-}06$$

$$(da\ Wahrscheinlichkeit\ für\ Kopf\ gleich\ Wahrscheinlichkeit\ von\ Zahl)$$

Anzahl Zahl	Möglichkeiten	Günstige / Gesamtmöglichkeiten	kumulativ
0	1	9.536743e-07	9.536743e-07
1	20	1.907349e-05	2.002716e-05
2	190	0.0001811981	0.0002012253
3	1140	0.001087189	0.001288414
4	4845	0.004620552	0.005908966
5	15504	0.01478577	0.02069474
6	38760	0.03696442	0.05765916

Zusammenhang mit statistischen Tests

Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen?

N=20 Würfe

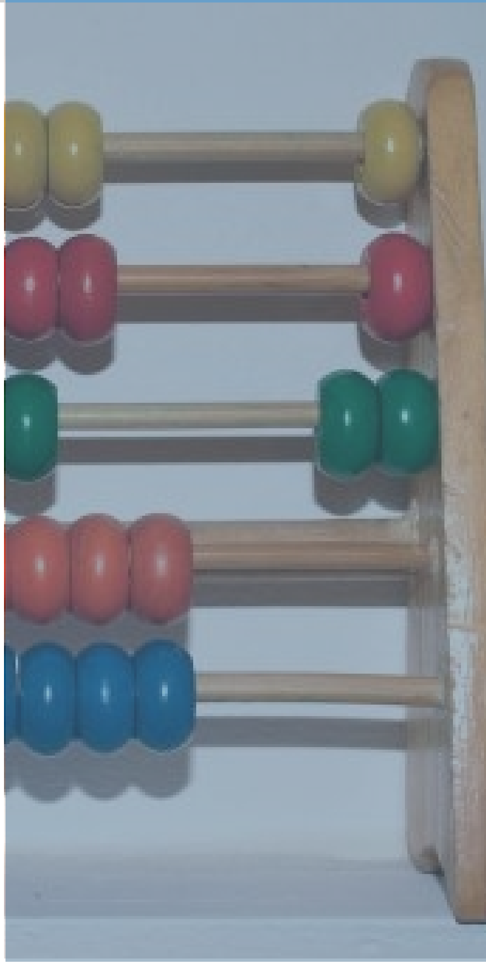
Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Zahl < 6: 95% Wahrscheinlichkeit, das mit der Münze was nicht stimmt. (25% der Würfe)

In R:

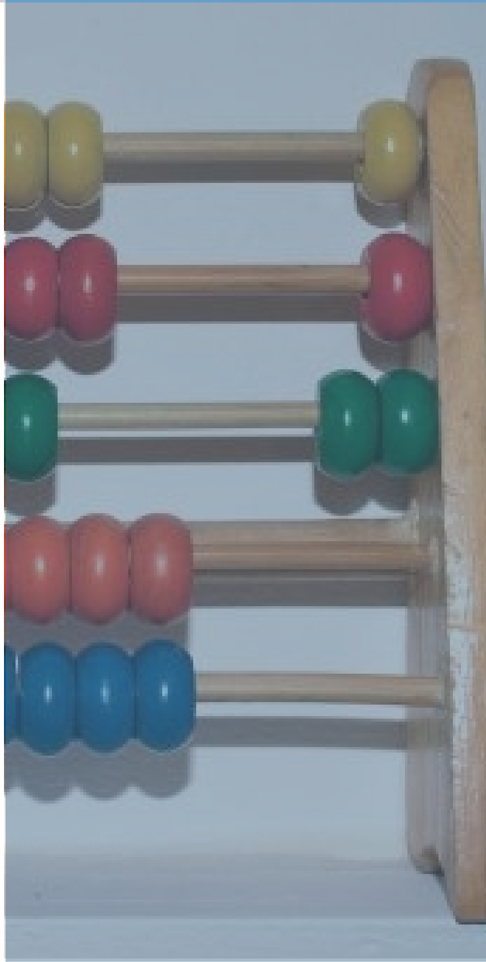
```
binom.test(5,20,0.5)

     Exact binomial test

data:  5 and 20
number of successes = 5, number of trials = 20, p-value = 0.04139
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to
0.5
95 percent confidence interval:
 0.08657147 0.49104587
sample estimates:
probability of success
                  0.25
```



Zusammenhang mit statistischen Tests



Frage: Spiel da jemand mit gezinkten Münzen? Jetzt mit mehr Münzen

N=200 Würfe

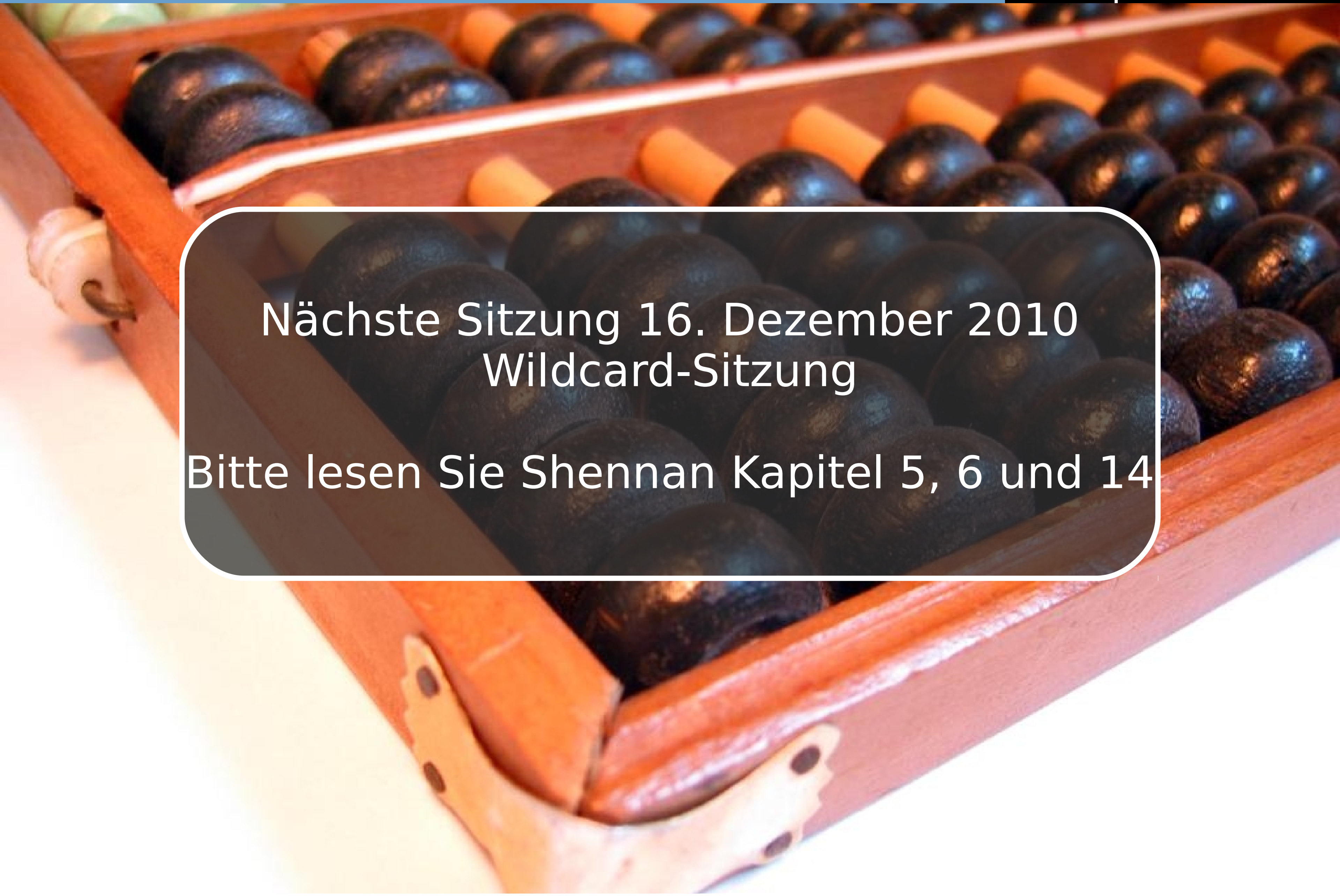
Wir brauchen:
Ablehnungsbereich: Anzahl Zahl < 85: 95% Wahrscheinlichkeit, das mit der Münze was nicht stimmt. (42% der Würfe)

In R:

```
binom.test(85,200,0.5)

     Exact binomial test

data:  85 and 200
number of successes = 85, number of trials = 200, p-value = 0.04004
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to
0.5
95 percent confidence interval:
 0.3555612 0.4966959
sample estimates:
probability of success
                 0.425
```



Nächste Sitzung 16. Dezember 2010

Wildcard-Sitzung

Bitte lesen Sie Shennan Kapitel 5, 6 und 14