MR(A)C - komentár k bonusovej úlohe

Obsah

1 Časť prvá

V zadaní sa hovorí:
Uvažujme riadený systém, ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{1}$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{2}$$

Mimochodom, ide o prenosové funkcie zodpovedajúce dynamiky „laboratórnych procesov - motorčekov“, ktoré sú v laboratóriu D330. Sú identifikované pre okolie rôznych pracovných bodov, teda raz sú otáčky motora nízke, raz vysoké - nemá význam tu hovoriť o fyzikálnych veličinách, pretože je to merané (a ovládané) len ako napäťové rozsahy 0 až 10 V (azda si niektorý čitateľ spomína). Možno nemá význam o tom vôbec hovoriť.

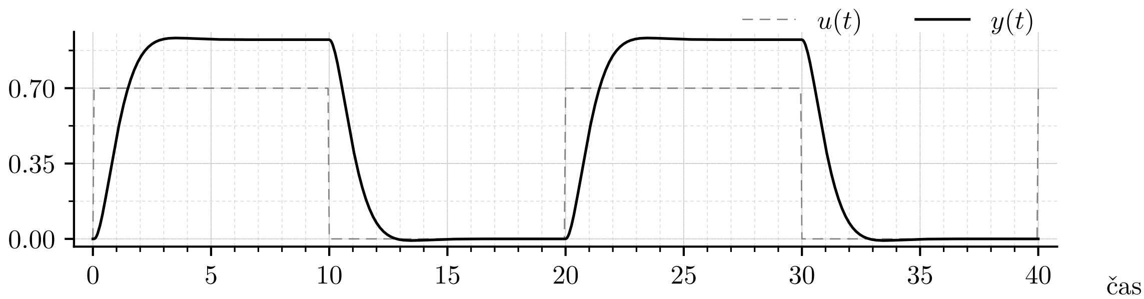
1.1 Úloha prvá, bod prvý

Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (1) a (2).

$$G_n(s) = 0,1664 \, \frac{s + 21,3809}{s^2 + 2,7423s + 2,6916} \tag{3}$$

Uvedené je prenosová funkcia systému 2. rádu (dva póly, jedna nula).

Pre azda ešte lepšiu predstavu o riadenom systéme, nakreslime priebeh výstupnej veličiny pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny - viď obr. 1.



Obr. 1: Priebeh výstupnej veličiny systému (3) pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny. Naozaj len mimochodom: čas je reálne v sekundách, a jednotky zobrazených veličín sú volty (via meracia karta).

Simulované priebehy vznikli s využitím nasledujúceho kódu (Python) - viď výpis kódu 2:

```
import numpy as np

from scipy.integrate import odeint

# odeint je ODE solver a tu nim budeme riesit
# Linear Time Invariant System, a jeho zapis ako (maticova)
# sustava diferencialnych rovnic je - vid nasled. funkciu,
# pricom metoda "matmul" je samozrejme maticove nasobenie

def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):

    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)

```

```python
    return dotx

# Vytvorme teraz funkciu, ktora bude realizovat simulacnu schemu.
# Argumentami funkcie su parametre suvisiace s casom
# a vopred dane (zname) signaly.

def fcn_simSch1(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):

    #-----------------------------------------
    # Parametre riadeneho systemu

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [0.1664 * 21.3809]])
    c = np.array([[1], [0]])

    #----------------------------------------------------
    # Do pola t_log sa bude logovat cas. Pole ma finalIndex
    # riadkov a 1 stlpec a je plne nul. Potom sa na prvu
    # poziciu (index 0) zapise hodnota t_start

    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    # Zaciatocne podmienky pre stavovy vektor nech su x_0
    # co je vektor rovnako velky ako vektor b

    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    # Stavovy vektor sa bude logovat do pola x_log s prislusnym
    # poctom stlpcov (detto y_log pre vyst. velicinu)

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #----------------------------------------------------
    # Jedna iteracia for cyklu je posun v case o T_s.
    # ODE solver hlada riesenie pre casovy rozsah timespan.
    # Pred danou iteraciou pozname vsetko z predchadzajucej
    # iteracie (idx-1)
    # Pocas iteracie si _log-ujeme "vysledky"

    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]
        # posledny prvok v poly je zapisany (logovany)

        # ------------
        # solver odeint pouzije fcn_LTIS, zaciatocne podmienky
        # stavu su z predch. iteracie (x_log[idx-1,:]), riesi
        # na casovom rozsahu timespan a dalej (do fcn_LTIS) sa
        # posunu uvedene parametre/hodnoty (args)

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        # odeOut obsahuje hodnoty stavu x pre cely timespan,
        # ale zapisujeme len poslednu hodnotu stavu x

        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))
        # okrem stavu (stavovych velicin) chceme aj
```

```python
        # vystupnu velicinu y

        # ---------------------------------

        u_log[idx,:] = sig_dummy_ext[idx,:]
        # v tejto simulacii len citame "externy" signal
        # a pouzivame ho ako vstup do systemu


    return [t_log, x_log, y_log, u_log, ]



# Vytvorme teraz vsetko potrebne pre "spustenie" simulacie,
# teda pre zavolanie prave vytvorenej funkcie fcn_simSch1.
# Hovorme tomu "nastavenie simulacie". Casove nastavenie:

sim_t_start = 0
sim_t_final = 40
sim_T_s = 0.05
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)


# Dalej je potrebne vytvorit (vopred znamy) signal.
# Co sa tu deje ponechajme bez komentara, ale vysledkom
# je proste "signal" pouzitelny v simulacii...

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 0.7],
                       [10, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl


# Teraz mozme "spustit" simulaciu:

t_log, x_log, y_log, u_log, = fcn_simSch1(
                                    sim_t_start,
                                    sim_T_s,
                                    sim_finalIndex,
                                    sig_dummy_ext,
                                    )

# Tu by mohlo byt kreslenie obrazku, ale to tu neuvedieme.
# Jednoducho nieco v zmysle plot(t_log, y_log) a podobne...
```

Výpis kódu 1: Základná simulačná schéma (áno, blbo sa to odtiaľ kopíruje, nie, nie je to zámer)

1.1.1 Bod druhý

Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{4}$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

$$Z_p(s) = s + 21,3809 \tag{5a}$$
$$R_p(s) = s^2 + 2,7423s + 2,6916 \tag{5b}$$
$$k_p = 0,1664 \tag{5c}$$

$Z_p(s)$ je monický polynóm, pretože pri najvyššej mocnine „premennej“ je koeficient 1. Rovnako polynóm $R_p(s)$ je monický. Relatívny stupeň prenosovej funkcie je $n^* = 2 - 1 = 1$

1.1.2 Bod tretí

Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

Je. Hurwitzov polynóm totiž znamená, že „polynóm je stabilný“, a tým sa myslí, že korene polynómu sú v ľavej polrovine komplexnej roviny. Koreň polynómu $Z_p(s) = s + 21,3809$ je $s = -21,3809$ čo je na reálnej osi v záporných číslach, a teda v ľavej polrovine komplexnej roviny.

1.2 Úloha druhá

Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{6}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{7}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) r. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{8}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{9}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

Všimnime si, že dosť podstatnou vlastnosťou referenčného modelu je, že má rovnaký relatívny stupeň ako riadený systém, teda $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Referenčný model nemusí mať rovnaký rád ako riadený systém. Musí však mať rovnaký relatívny stupeň. Plynie to z požiadaviek (predpokladov) pri riešení MRC problému (úlohy riadenia s referenčným modelom) vo všeobecnosti.

1.2.1 Bod prvý

Na základe všeobecného tvaru zákona riadenia (8) určte zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad.

$\alpha(s)$ je vektor, ktorého dĺžka závisí od rádu riadeného systému (zjavne má dĺžku $n-1$). V tomto prípade $n = 2$, čo spĺňa $n \geq 2$. Preto $\alpha(s) = \left[s^{2-2}\right]^\mathsf{T} = \left[s^0\right]^\mathsf{T} = \left[1\right]^\mathsf{T} = 1$.

A teda $\alpha(s)$ bude v tomto prípade jednoducho číslo 1. Je to známa vec, nie je to parametrom zákona riadenia.

Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ budú mať v tomto prípade tiež len jeden prvok (sú dĺžky $n-1$) a teda len rovno píšme čísla $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$. K tomu $\Theta_3^\star$, $\Theta_4^\star$ sú vždy len skaláre. V tomto prípade sú tieto štyri čísla parametrami zákona riadenia. Tieto parametre sú predmetom výpočtu/hľadania, ak chceme použiť tento konkrétny zákon riadenia.

Polynóm $\Lambda(s)$ nie je „neznámou". Nie je to parameter zákona riadenia v tom pravom zmysle. Je ľubovoľný ak sú dodržané uvedené podmienky/predpoklady. Pri jeho voľbe je užitočné uvažovať o tom, že tento polynóm možno interpretovať vzhľadom na *pozorovateľ stavu* a jeho dynamické vlastnosti. Súvislosť pozorovateľa stavu s tu používaným zákonom riadenia bola uvedená v učebnom texte. Akokoľvek, ak $\Lambda(s)$ spĺňa dané podmienky je to ok. V tomto prípade (vlastne nie je veľa ľubovôle):

$$\Lambda(s) = Z_m(s) = s + \lambda \tag{10}$$

kde $\lambda = 3$, pretože $Z_m(s) = s + 3$.

Práve sme určili zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad:

$$u(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^\star \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{11}$$

1.2.2 Bod druhý

Vypočítajte parametre $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$, $\Theta_4^\star$.

Pre prehľadnosť označme

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{12}$$

a

$$W_m(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} \tag{13}$$

Potom je možné ukázať (a v učebnom texte je to ukázané), že uzavretý regulačný obvod sa bude zhodovať s referenčným modelom ak bude platiť:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \tag{14a}$$

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{14b}$$

Vypočítajme:

```
kp = 0.1664
b0 = 21.3809
a1 = 2.7423
a0 = 2.6916

km = 1
b0m = 3
a1m = 3.5
a0m = 3

M = np.array([[-1,  0, -kp],
              [-a1, -kp, -(kp*b0m + kp*b0)],
              [-a0, -kp*b0, -kp*b0*b0m],
             ])

N = np.array([[a1m + b0 - b0m - a1],
              [a0m + b0*a1m - a1*b0m - a0],
              [b0*a0m - a0*b0m],
             ])

Theta_c = np.linalg.solve(M,N)
# Theta_c je vektor obsahujuci Theta_1, Theta_2 a Theta_3

Theta_4 = km/kp
```

Výpis kódu 2: Výpočet ideálnych parametrov zákona riadenia

Teda:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,3809 \\ 11,8071 \\ -4,5535 \end{bmatrix} \tag{15a}$$

$$\Theta_4^\star = 6,0096 \tag{15b}$$