

# Model Reference Control vo všeobecnosti

## Obsah

<b>1</b>	<b>O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formulácia problému riadenia s referenčným modelom</b>	<b>4</b>
2.1	Príklad pre systém 2. rádu . . . . .	4
2.2	Zovšeobecnenie pre systém $n$ . rádu . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Opis URO v stavovom priestore</b>	<b>7</b>
3.1	Príklad pre systém 2. rádu . . . . .	7
3.2	Systém $n$ . rádu . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Otázky a úlohy</b>	<b>10</b>

V predchádzajúcich častiach sme uvažovali riadený systém, ktorého stavové veličiny sú merateľné a navyše matica  $A$  má Frobeniovu kanonickú formu. To umožnilo použiť zákon riadenia v tvare stavového regulátora.

Pre systémy, ktoré nespĺňajú tieto podmienky je potrebné vyvinúť zákon riadenia, ktorý využíva len vstupný a výstupný signál systému (nie sú potrebné stavové veličiny systému), pretože často len tieto sú dostupné. Pritom musia existovať také parametre zákona riadenia, pri ktorých sa model uzavretého regulačného obvodu zhoduje s referenčným modelom (dostatočná štrukturálna flexibilita zákona riadenia). Je tiež dôležité aby pre realizáciu zákona riadenia nebolo potrebné použiť derivačné členy, pretože implementácia derivácie je vždy náročná.

## 1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom

V predchádzajúcich častiach sa ukázalo, že ak je stavový vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  merateľný, potom zákon riadenia v tvare<sup>1</sup>  $u(t) = \Theta_1^T(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$  zabezpečí splnenie cieľa riadenia. V takom prípade je adaptovaný člen  $\Theta_1^T(t)x(t)$  odhadom ideálneho člena  $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$ . Avšak, keď stavový vektor  $x(t)$  nie je merateľný odhad ideálneho člena  $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$  je potrebné zabezpečiť pomocou dostupných signálov. Dostupnými signálmi sú akčný zásah  $u(t)$  a výstupná veličina  $y(t)$ . To sa dosiahne parametrizáciou odhadu ideálneho člena, teda zmenou tohto adaptovaného člena, ktorá je zvyčajne založená na využití pozorovateľa stavu s redukovaným rádom [1].

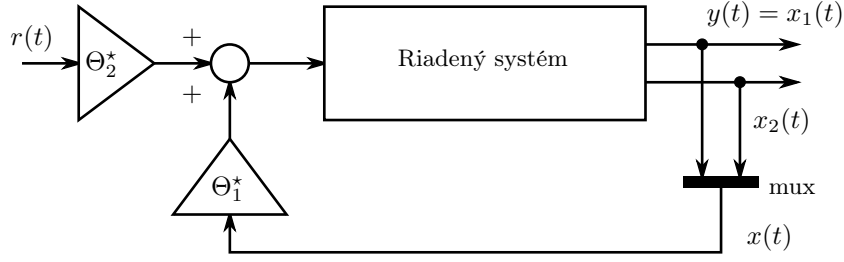
Riadený SISO lineárny systém  $n$ -tého rádu sa uvažuje v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = x_1(t) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1b)$$

kde  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$  je časť stavového vektora, ktorá nie je merateľná a ostatné vektory a matice majú zodpovedajúce rozmery. Pre odvodenie príslušného pozorovateľa stavu sa parametre systému (1) považujú za známe.

<sup>1</sup>Zákon riadenia  $u(t) = \Theta_1^T(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$  a zákon riadenia  $u(t) = k^T(t)x(t) + l(t)r(t)$  sa po formálnej stránke zhodujú, len označenie adaptovaných parametrov je iné.



Obr. 1: Zákon riadenia so stavovou spätnou väzbou – pôvodný tvar, ktorý je umožnený pre dostupnosť stavového vektora  $x(t)$ .

Systém (1) možno zapísať v tvare

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) \quad (2a)$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x_2(t) + (A_{11}x_1(t) + b_1u(t)) \quad (2b)$$

Z pohľadu návrhu pozorovateľa stavu  $x_2(t)$  sa signály  $x_1(t)$  a  $u(t)$  považujú za merateľné vstupy (platí  $y(t) = x_1(t)$ ). Zároveň sa signál  $\dot{x}_1(t)$  považuje za výstup pozorovaného systému. Pozorovateľ stavu je preto v tvare

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) + L(\dot{x}_1(t) - A_{12}\hat{x}_2(t) - (A_{11}x_1(t) + b_1u(t))) \quad (3)$$

kde  $L \in \mathbb{R}^{n-1}$  je voliteľný konštantný vektor.

Pre chybu pozorovania stavu  $\tilde{x}_2(t)$  platí  $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ . Dynamiku tejto chyby opisuje rovnica

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A_{22} - LA_{12})\tilde{x}_2(t) \quad (4)$$

Z toho vyplýva, že vektor  $L$  má byť zvolený tak, že matica  $A_{22} - LA_{12}$  je asymptoticky stabilná. Potom chyba pozorovania sa asymptoticky blíži k nule.

Získanie (meranie) signálu  $\dot{x}_1(t)$  je z praktického hľadiska problematické. Preto sa zavádza signál  $w(t)$  taký, že  $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$ . Je zrejmé, že  $\dot{w}(t) = \dot{\hat{x}}_2(t) + L\dot{y}(t)$ . Po dosadení a úpravách

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})w(t) + (A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)y(t) + (b_2 - Lb_1)u(t) \quad (5)$$

S využitím  $s$  ako operátora časovej derivácie je možné písať

$$w(t) = (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}(A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)y(t) + (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}(b_2 - Lb_1)u(t) \quad (6)$$

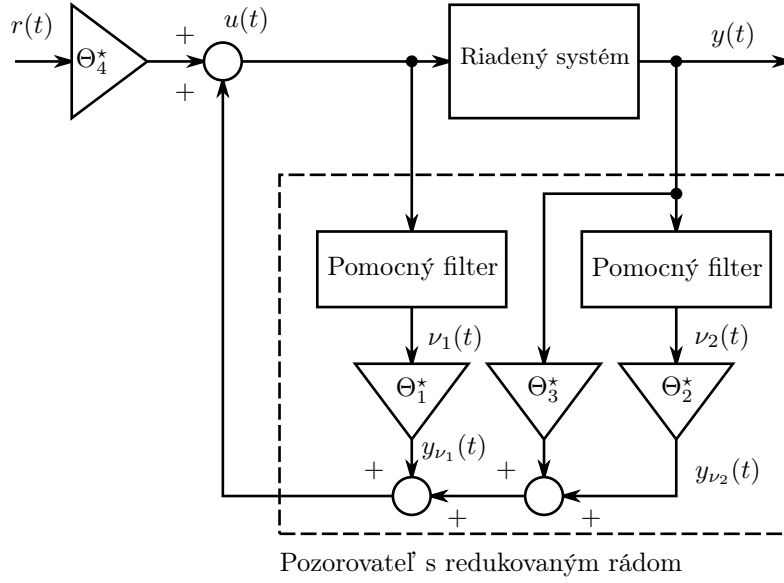
čo je možné vyjadriť aj v tvare

$$w(t) = \text{diag}(g_u) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) + \text{diag}(g_y) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] y(t) \quad (7)$$

kde  $g_u \in \mathbb{R}^{n-1}$  a  $g_y \in \mathbb{R}^{n-1}$  sú vektory konštant, preto  $\text{diag}(g_u)$  a  $\text{diag}(g_y)$  sú diagonálne matice,  $\alpha(s)$  je vektor mocnín operátora  $s$  v tvare  $\alpha^T(s) = [s^{n-2}, \dots, s, 1]$  ak  $n \geq 2$ , inak  $\alpha(s) = 0$ , a nakoniec polynóm  $\Lambda(s) = \det(sI - A_{22} + LA_{12})$  je monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n - 1$  daný voľbou vektora  $L$ . Ako bolo uvedené  $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$ , potom

$$\hat{x}_2(t) = \text{diag}(g_u) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) + \text{diag}(g_y) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] y(t) + Ly(t) \quad (8)$$

V úvode časti uvedený ideálny člen  $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$  je teda možné parametrizovať nasledovne. Stavový vektor  $x(t)$  je nahradený odhadom  $\hat{x}(t) = [y(t) \quad \hat{x}_2(t)]^T$ , a tiež



Obr. 2: Pozorovateľ s redukovaným rádom.

sa rozdelí  $\Theta_1^*(t) = [k_y^* \quad k_2^{*\top}]^\top$ , pričom  $k_y^* \in \mathbb{R}$ , potom

$$\begin{aligned} \Theta_1^{*\top}(t)\hat{x}(t) &= k_y^* y(t) + k_2^{*\top} \hat{x}_2(t) \\ &= k_y^* y(t) + k_2^{*\top} \text{diag}(g_u) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) + k_2^{*\top} \text{diag}(g_y) \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] y(t) + k_2^{*\top} L y(t) \end{aligned} \quad (9)$$

V tomto bode text sa pre jednoduchosť a lepšiu názornosť zavedie úplne nové označovanie, ktorým sa mení označenie niektorých parametrov zákona riadenia, a teda význam pôvodného označovania. Pôvodný ideálny člen formálne zodpovedá výrazu  $\bar{\Theta}_1^{*\top} \hat{x}(t)$  a nové označovanie vyplýva zo zapísania rovnice (9) v tvare

$$\bar{\Theta}_1^{*\top} \hat{x}(t) = \Theta_1^{*\top} \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) + \Theta_2^{*\top} \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] y(t) + \Theta_3^* y(t) \quad (10)$$

kde sa vzhľadom na (9) zaviedlo označenie  $\Theta_1^{*\top} = k_2^{*\top} \text{diag}(g_u)$ ,  $\Theta_2^{*\top} = k_2^{*\top} \text{diag}(g_y)$  a  $\Theta_3^* = k_y^* + k_2^{*\top} L$ .

Z uvedeného vyplýva, že ideálny stavový zákon riadenia použitý v predchádzajúcich častiach je možné re-parametrizovať do tvaru

$$u(t) = \Theta_1^{*\top} \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) + \Theta_2^{*\top} \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] y(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \quad (11)$$

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (11) sú použité takzvané pomocné filtre. Tieto generujú pomocné signály  $\nu_1(t)$  a  $\nu_2(t)$  upresnené nižšie. Napríklad prvý člen pravej strany v rovnici (11) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{*\top} \left[ \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] u(t) = \frac{\Theta_{1(n-2)}^* s^{n-2} + \dots + \Theta_{11}^* s + \Theta_{10}^*}{s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0} u(t) \quad (12)$$

kde  $\Theta_1^* = [\Theta_{1(n-2)}^* \quad \dots \quad \Theta_{11}^* \quad \Theta_{10}^*]^\top$ , alebo v stavovom priestore v tvare (48) na strane 9. Po označení jednotlivých vektorov a matíc v (48) je prvý pomocný filter v tvare

$$\dot{\nu}_1(t) = \Lambda \nu_1(t) + q u(t) \quad (13a)$$

$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{*\top} \nu_1(t) \quad (13b)$$

Z uvedeného plynie, že prvý pomocný filter má v stavovom priestore tvar  $\dot{\nu}_1(t) = \Lambda \nu_1(t) + qu(t)$ , kde  $\nu_1(t)$  je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným filtrom (stavový vektor prvého pomocného filtra). Tento je násobený parametrami zákona riadenia  $\Theta_1^{\star T}$ . Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar  $\dot{\nu}_2(t) = \Lambda \nu_2(t) + qy(t)$ . Zákon riadenia využívajúci len vstupno-výstupné signály riadeného systému je potom v tvare

$$u(t) = \Theta_1^{\star T} \nu_1(t) + \Theta_2^{\star T} \nu_2(t) + \Theta_3^{\star} y(t) + \Theta_4^{\star} r(t) \quad (14)$$

## 2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom

Riešením MRC (Model Reference Control – Riadenie s referenčným modelom) problému je taký zákon riadenia  $u$ , ktorý zabezpečí, že výstup sústavy  $y$  sleduje výstup referenčného modelu  $y_m$  pri danom referenčnom signály  $r$ .

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (15)$$

kde  $Z_p(s)$  je monický, hurwitzov polynóm stupňa  $m$ ,  $R_p(s)$  je monický polynóm stupňa  $n$  a  $k_p$  je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je  $n^* = n - m$ .

Polynóm sa nazýva *monický* ak je koeficient pri najvyššej mocnine  $s$  (v tomto prípade) rovný jednotke. Polynóm sa nazýva *hurwitzov* ak sú reálne časti všetkých koreňov polynómu záporné.

Nech referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (16)$$

kde  $k_m$  je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm  $Z_m(s)$  je monický Hurwitzov polynóm stupňa  $m_m$ ,  $R_m(s)$  monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n_m$ , pričom relatívny stupeň  $n_m^* = n_m - m_m = n^*$ .

Zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je nasledovný. Najskôr uvedieme jeho všeobecný zápis, avšak pre lepšiu názornosť budeme riešenie MRC problému vyšetřovať na zjednodušenom konkrétnom príklade. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^{\star} y + \Theta_4^{\star} r \quad (17)$$

kde  $\alpha(s)$  je vektor obsahujúci mocniny  $s$ ,  $\alpha(s) = [s^{n-2}, \dots, s, 1]^T$  ak  $n \geq 2$ , inak  $\alpha(s) = 0$ . Vektory  $\Theta_1^{\star} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Theta_2^{\star} \in \mathbb{R}^{n-1}$  a skaláry  $\Theta_3^{\star} \in \mathbb{R}^1$ ,  $\Theta_4^{\star} \in \mathbb{R}^1$  sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme.  $\Lambda(s)$  je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n - 1$  obsahujúci  $Z_m(s)$  ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \quad (18)$$

a teda aj  $\Lambda_0(s)$  je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

### 2.1 Príklad pre systém 2. rádu

Uvažujme systém opísaný prenosovou funkciou v tvare

$$y(s) = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u(s) \quad (19)$$

kde  $a_i, b_i$  sú konštanty ( $b_0 > 0$ ). Referenčný model zvolíme tak aby mal rovnaký relatívny stupeň ako sústava.

$$y_m(s) = W_m(s) r(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} r(s) \quad (20)$$

V tomto konkrétnom príklade, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je v tvare

$$u(s) = \Theta_1^* \frac{1}{(s + \lambda)} u(s) + \Theta_2^* \frac{1}{(s + \lambda)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s) \quad (21)$$

kde sme použili  $\alpha(s) = 1$  a  $\Lambda(s) = (s + \lambda)$ . V tomto prípade  $\Theta_1^*$ ,  $\Theta_2^*$  aj  $\Theta_3^*$  a  $\Theta_4^*$  sú skalárne konštanty – parametre zákona riadenia. Zákon riadenia (21) možno upraviť do tvaru

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^*}{(s + \lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^*}{(s + \lambda)} + \Theta_3^*\right) y(s) + \Theta_4^* r(s) \quad (22a)$$

$$\left(\frac{(s + \lambda) - \Theta_1^*}{(s + \lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda)}{(s + \lambda)}\right) y(s) + \Theta_4^* r(s) \quad (22b)$$

$$u(s) = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda)}{(s + \lambda) - \Theta_1^*} y(s) + \frac{\Theta_4^*(s + \lambda)}{(s + \lambda) - \Theta_1^*} r(s) \quad (22c)$$

Dosadením (22c) do (19) získame prenosovú funkciu URO v tvare (23):

$$y(s) = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \left( \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda)}{(s + \lambda) - \Theta_1^*} y(s) + \frac{\Theta_4^*(s + \lambda)}{(s + \lambda) - \Theta_1^*} r(s) \right) \quad (23a)$$

$$\left(1 - \frac{k_p(s + b_0)(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda))}{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*)}\right) y(s) = \frac{k_p(s + b_0)\Theta_4^*(s + \lambda)}{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*)} r(s) \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*) - k_p(s + b_0)(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda))}{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*)}\right) y(s) = \\ = \frac{k_p(s + b_0)\Theta_4^*(s + \lambda)}{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*)} r(s) \end{aligned} \quad (23c)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s + b_0)\Theta_4^*(s + \lambda)}{(s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*) - k_p(s + b_0)(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda))} \quad (23d)$$

Prenosovú funkciu (23d) označme  $G_c(s)$ . Výstupná veličina sústavy bude sledovať výstupnú veličinu referenčného modelu ak  $G_c(s) = W_m(s)$ . Táto podmienka bude splnená ak

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (24)$$

$$(s + \lambda) = \Lambda_0(s)(s + b_{0m}) = (s + b_{0m}) \quad (25)$$

pričom (24) je prvou podmienkou zhody, (25) je voľbou polynómu  $\Lambda(s)$  stupňa  $n - 1$  kde v tomto prípade  $\Lambda_0(s) = 1$  a teda  $\lambda = b_{0m}$  a druhou podmienkou zhody je

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1 s + a_0)((s + \lambda) - \Theta_1^*) - k_p(s + b_0)(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s + \lambda)) \\ = (s + b_0)(s^2 + a_{1m} s + a_{0m}) \end{aligned} \quad (26)$$

Potom možno (23d) zapísať v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s + b_0) \frac{k_m}{k_p} (s + b_{0m})}{(s + b_0)(s^2 + a_{1m} s + a_{0m})} = \frac{k_m(s + b_{0m})}{(s^2 + a_{1m} s + a_{0m})} = W_m(s) \quad (27)$$

V prenosovej funkcii (27) dochádza ku vzájomnému vykráteniu sa polynómu  $(s + b_0)$ . Táto operácia je možná, pretože tieto polynómy majú korene v zápornej polovici komplexnej roviny a teda sú stabilné (Hurwitzove). Taký je predpoklad pre  $Z_p(s)$ . Polynómy, ktoré nie sú Hurwitzove nemožno v prenosovej funkcii navzájom vykrátiť. Podmienku zhody (26) je možné zapísať aj v maticovom tvare porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách na oboch stranách

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \Theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \quad (28)$$

čo je sústava algebraických rovníc v tvare  $M_s \Theta_s = p_s$  a teda existencia takého vektora  $\Theta_s$ , ktorý spĺňa rovnosť, je závislá od vlastností matice  $M_s$ . Z podmienok zhody (24) a (28) plynú konkrétne hodnoty parametrov zákona riadenia, ktoré riešia daný MRC problém.

Predchádzajúci postup je možné zapísať prehľadnejšie (pre prehľadnosť vynecháme aj zátvorky s laplaceovou premennou ( $s$ )):

Zákon riadenia

$$u = \frac{\Theta_1^*}{\Lambda} u + \frac{\Theta_2^*}{\Lambda} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \quad (29a)$$

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^*}{\Lambda}\right) u = \left(\frac{\Theta_2^*}{\Lambda} + \Theta_3^*\right) y + \Theta_4^* r \quad (29b)$$

$$\frac{\Lambda - \Theta_1^*}{\Lambda} u = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda} y + \Theta_4^* r \quad (29c)$$

$$u = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} y + \frac{\Theta_4^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} r \quad (29d)$$

Uzavretý regulačný obvod

$$y = k_p \frac{Z_p}{R_p} \left( \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} y + \frac{\Theta_4^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} r \right) \quad (30a)$$

$$\left(1 - \frac{k_p Z_p (\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda)}{R_p (\Lambda - \Theta_1^*)}\right) y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p (\Lambda - \Theta_1^*)} r \quad (30b)$$

$$\frac{R_p (\Lambda - \Theta_1^*) - k_p Z_p (\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda)}{R_p (\Lambda - \Theta_1^*)} y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p (\Lambda - \Theta_1^*)} r \quad (30c)$$

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p (\Lambda - \Theta_1^*) - k_p Z_p (\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda)} r \quad (30d)$$

Podmienky zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (31a)$$

$$\Lambda = Z_m \quad (31b)$$

$$R_p (\Lambda - \Theta_1^*) - k_p Z_p (\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda) = Z_p R_m \quad (31c)$$

## 2.2 Zovšeobecnenie pre systém $n$ . rádu

Pri uvažovaní všeobecného zákona riadenia v tvare (17) má prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda^2}{\Lambda \left( R_p \left( \Lambda - \Theta_1^{*\top} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^{*\top} \alpha(s) + \Theta_3^* \Lambda \right) \right)} r \quad (32)$$

a podmienky zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (33a)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \quad (33b)$$

$$R_p \left( \Lambda - \Theta_1^{*\top} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^{*\top} \alpha(s) + \Theta_3^* \Lambda \right) = Z_p \Lambda_0 R_m \quad (33c)$$

Predpoklady pri, ktorých sú tieto podmienky splniteľné sú intuitívne zrejmé z predchádzajúceho príkladu v časti 2.1. Hlbšou analýzou MRC problému sa v tomto kurze zaoberať nebudeme. Poslucháča odkazujeme na odporúčanú literatúru, kde nájde všetky potrebné (matematické) detaily k riešeniu MRC problému.

## 3 Opis URO v stavovom priestore

### 3.1 Príklad pre systém 2. rádu

V tejto časti vyjadríme uzavretý regulačný obvod, ktorý vznikne riešením MRC problému, pomocou opisu v stavovom priestore. Opäť začneme zjednodušeným príkladom 2.1, a v ďalšej časti dodáme pre úplnosť všeobecný zápis URO v stavovom priestore.

Sústava v tvare (15), konkrétne (19), môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (34a)$$

$$y = c^T x \quad (34b)$$

kde  $x$  je vektor stavových veličín sústavy a  $A$ ;  $b$ ;  $c^T$  sú konštantné matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov. V tomto prípade nekladíme žiadne podmienky na formu (kanonickú) matice  $A$ , ako to bolo v prípade stavového MRAC-u.

Uvažujeme zákon riadenia (21), pripomeňme:

$$u(s) = \Theta_1^* \frac{1}{(s + \lambda)} u(s) + \Theta_2^* \frac{1}{(s + \lambda)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s) \quad (35)$$

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (35) sú použité takzvané prídavné filtre, ktorých vstupom je buď akčný zásah  $u$  (vstupný signál sústavy) alebo výstupná (riadená) veličina  $y$ . Tieto prídavné filtre sú tiež nazývané pomocné, či prídavné generátory, generujú prídavné (pomocné) signály. Oba prídavné filtre sú rovnaké, v tomto prípade dané prenosovou funkciou  $\frac{1}{(s + \lambda)}$ . Výstupné signály filtrov sú v tomto prípade skalárne signály. Vo všeobecnosti sú výstupné signály pomocných filtrov vektory signálov s rovnakým rozmerom ako vektory parametrov  $\Theta_1^*$  a  $\Theta_2^*$ , viď všeobecný zápis zákona riadenia (17). Označme výstupné signály prídavných filtrov  $\nu_1$  a  $\nu_2$ . Tieto signály sa násobia parametrami zákona riadenia  $\Theta_1^*$  a  $\Theta_2^*$ . Pridané filtre možno zapísať v tvare

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda \nu_1 + u \quad (36a)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda \nu_2 + y = -\lambda \nu_2 + c^T x \quad (36b)$$

Jednoduchým pridaním týchto pomocných signálov k sústave máme sústavu rovníc:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (37a)$$

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda \nu_1 + u \quad (37b)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda \nu_2 + c^T x \quad (37c)$$

$$y = c^T x \quad (37d)$$

Sústavu rovníc (37) budeme nazývať *doplnená sústava*. Doplnenú sústavu (37) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^T & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (38a)$$

$$y = [c^T \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \quad (38b)$$

a po označení jednotlivých matíc a vektorov

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \quad (39a)$$

$$y = C_c^T X \quad (39b)$$

Zákon riadenia (35) zapíšeme v takom vektorovom tvare, v ktorom je možné využiť stavový vektor doplnenej sústavy  $X$ :

$$u = \Theta_c^*{}^T DX + \Theta_4^* r \quad (40)$$

kde  $\Theta_c^* = [\Theta_3^* \quad \Theta_1^* \quad \Theta_2^*]^T$ ;  $\Theta_4^*$  sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (40) mohli priamo písať stavový vektor  $X$ . Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (40) viac podobá na pôvodný zápis (35), a ktorý vyplýva priamo z (40) je

$$u = \Theta_1^* \nu_1 + \Theta_2^* \nu_2 + \Theta_3^* c^T x + \Theta_4^* r \quad (41a)$$

$$u = \Theta_1^* \nu_1 + \Theta_2^* \nu_2 + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \quad (41b)$$

Dosadením (40) do (39) získame opis URO v stavovom priestore v tvare (výstupnú rovnicu vynechávame, pretože sa nemení)

$$\dot{X} = A_o X + B_c \left( \Theta_c^*{}^T DX + \Theta_4^* r \right) \quad (42a)$$

$$\dot{X} = A_o X + B_c \Theta_c^*{}^T DX + B_c \Theta_4^* r \quad (42b)$$

$$\dot{X} = \left( A_o + B_c \Theta_c^*{}^T D \right) X + B_c \Theta_4^* r \quad (42c)$$

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^* r \quad (42d)$$

kde

$$\begin{aligned} A_c &= A_o + B_c \Theta_c^*{}^T D \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^T & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\Theta_3^* \quad \Theta_1^* \quad \Theta_2^*] \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^T & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* & \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^T & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* c^T & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* c^T & \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^* c^T & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* c^T & -\lambda + \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ c^T & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

Pretože uzavretý regulačný obvod zapísaný v tvare

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^* r \quad (44a)$$

$$y = C_c^T X \quad (44b)$$

obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré splňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať s referenčným modelom. Preto tzv. *neminimálna reprezentácia* prenosovej funkcie referenčného modelu (16) v stavovom priestore je

$$\dot{X}_m = A_c X_m + B_c \Theta_4^* r \quad (45a)$$

$$y_m = C_c^T X_m \quad (45b)$$

kde  $X_m$  sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie modelu



### 3.2 Systém $n$ . rádu

Uvažujeme zákon riadenia (17), pripomeňme:

$$u = \Theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \quad (46)$$

kde  $\alpha(s)$  je vektor obsahujúci mocniny  $s$ ,  $\alpha(s) = [s^{n-2}, \dots, s, 1]^T$  ak  $n \geq 2$ , inak  $\alpha(s) = 0$ . Vektory  $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$  a skaláry  $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$  sú konštantné parametre zákona riadenia.  $\Lambda(s)$  je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n - 1$ .

Napríklad prvý člen v (46) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u = \frac{\Theta_{1(n-2)}^* s^{n-2} + \dots + \Theta_{11}^* s + \Theta_{10}^*}{s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0} u \quad (47)$$

kde  $\Theta_1^* = [\Theta_{1(n-2)}^* \quad \dots \quad \Theta_{11}^* \quad \Theta_{10}^*]^T$ , alebo v stavovom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{1(n-2)} \\ \dot{\nu}_{1(n-3)} \\ \dot{\nu}_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \dot{\nu}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \dots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (48a)$$

$$y_{\nu_1} = [\Theta_{1(n-2)}^* \quad \Theta_{1(n-3)}^* \quad \Theta_{1(n-4)}^* \quad \dots \quad \Theta_{10}^*] \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} \quad (48b)$$

Označme v (48) jednotlivé vektory a maticu:

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \quad (49a)$$

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{*\top} \nu_1 \quad (49b)$$

Z uvedeného vyplýva, že prvý prídavný filter má v stavovom priestore tvar  $\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u$  kde  $\nu_1$  je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným generátorom (stavový vektor prvého pomocného generátora). Tento je násobený parametrami zákona riadenia  $\Theta_1^{*\top}$ . Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar  $\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q y = \Lambda \nu_2 + q c^\top x$ . Doplnená sústava vo všeobecnom tvare je

$$\dot{x} = A x + b u \quad (50a)$$

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \quad (50b)$$

$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q c^\top x \quad (50c)$$

$$y = c^\top x \quad (50d)$$

Potom v (39) sú

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_c^\top = [c^\top \quad 0 \quad 0] \quad (51)$$

Zákon riadenia (46) zapíšeme vo vektorovom tvare:

$$u = \Theta_c^{*\top} D x + \Theta_4^* r \quad (52)$$

kde  $\Theta_c^* = [\Theta_3^* \quad \Theta_1^{*\top} \quad \Theta_2^{*\top}]^\top$ ;  $\Theta_4^*$  sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (52) mohli priamo písať stavový vektor  $x$ . Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (52) viac podobá na pôvodný zápis (46), a ktorý vyplíva priamo z (52) je

$$u = \Theta_1^{*\top} \nu_1 + \Theta_2^{*\top} \nu_2 + \Theta_3^* c^\top x + \Theta_4^* r \quad (53a)$$

$$u = \Theta_1^{*\top} \nu_1 + \Theta_2^{*\top} \nu_2 + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \quad (53b)$$

Dosadením (52) do (39), v ktorej sú ale matice (51), získame opis URO v stavovom priestore v tvare (44), a matica  $A_c$  má tvar

$$\begin{aligned} A_c &= A_o + b_c \Theta_c^{*\top} D \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix} [\Theta_3^* \quad \Theta_1^{*\top} \quad \Theta_2^{*\top}] \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* & b\Theta_1^{*\top} & b\Theta_2^{*\top} \\ q\Theta_3^* & q\Theta_1^{*\top} & q\Theta_2^{*\top} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* c^\top & b\Theta_1^{*\top} & b\Theta_2^{*\top} \\ q\Theta_3^* c^\top & q\Theta_1^{*\top} & q\Theta_2^{*\top} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^* c^\top & b\Theta_1^{*\top} & b\Theta_2^{*\top} \\ q\Theta_3^* c^\top & \Lambda + q\Theta_1^{*\top} & q\Theta_2^{*\top} \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

Pretože takto všeobecne opísaný URO obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať so všeobecným referenčným modelom (16), ktorého neminimálna reprezentácia v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x}_m = A_c x_m + \bar{b}_c r \quad (55a)$$

$$y_m = c_c^\top x_m \quad (55b)$$

kde  $x_m$  sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie referenčného modelu a kde sme označili  $\bar{b}_c = b_c \Theta_4^*$ .

## 4 Otázky a úlohy

1. Je daný model systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde  $a_0, a_1, b_0 > 0$  sú neznáme parametre systému,  $u(t)$  je vstup,  $y(t)$  je výstup a  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r(t) \\ y_m(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde  $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$  sú známe parametre referenčného modelu,  $r(t)$  je referenčný signál,  $y_m(t)$  je výstup a  $x_{1m}(t)$ ,  $x_{2m}(t)$  sú stavové veličiny referenčného modelu.

- (a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde  $Z_p(s)$  je monický, hurwitzov polynóm stupňa  $m$ ,  $R_p(s)$  je monický polynóm stupňa  $n$  a  $k_p$  je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde  $k_m$  je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm  $Z_m(s)$  je monický Hurwitzov polynóm stupňa  $m_m$ ,  $R_m(s)$  monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n_m$ .

- (b) Cieľom riadenia je  $y = y_m$ . Navrhните ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r$$

kde  $\alpha(s)$  je vektor obsahujúci mocniny  $s$ ,  $\alpha(s) = [s^{n-2}, \dots, s, 1]^T$  ak  $n \geq 2$ , inak  $\alpha(s) = 0$ . Vektory  $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$  a skaláry  $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$  sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme.  $\Lambda(s)$  je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa  $n - 1$  obsahujúci  $Z_m(s)$  ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj  $\Lambda_0(s)$  je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

2. Odvoďte podmienky zhody pre MRAC vstupno-výstupný
3. Odvoďte podmienky zhody uzavretého regulačného obvodu a referenčného modelu.

Model riadeného systému:  $\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$       rád systému  $n = 2$   
relatívny stupeň  $n^* = 1$

Referenčný model:  $\frac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$

Zákon riadenia:  $u(s) = \frac{\Theta_1^*}{\Lambda(s)} u(s) + \frac{\Theta_2^*}{\Lambda(s)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s)$

## Literatúra

- [1] G. Tao. *Adaptive control design and analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2003.