Resolución de ecuaciones diferenciales Elipticas (Laplace/Poisson)

Elípticas Bidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0; \quad \nabla^2 f=0$$ Laplace's Equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=S; \quad \nabla^2 f=S$$ Poisson's Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}b\frac{\partial f}{\partial y}=S; \quad \nabla\cdot\phi\nabla f=S$$

Elípticas Tridimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$ Laplace's Equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=s$$ Poisson's Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}b\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}c\frac{\partial f}{\partial z}=s$$

Condiciones de Borde

$f=f_0(x,y)$ Dirichlet

$\frac{\partial f}{\partial n}=g_0(x,y)$ Neumann

Ejemplos

$\nabla^2 T=-\frac{\dot{q}}{k}$ Steady conduction equation

$\nabla^2\psi=\omega$ 2-D stream function equation

2-D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (1)$$

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2},$$

$$u_{xx} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})/h^2$$

$$u_{yy} \approx \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2},$$

$$u_{yy} = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})/h^2$$

y $\Delta x = \Delta y = h$

Si en (1) f(x,y)=0 Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(x,y) = (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})/h^2$$

$$0 = \nabla^2 u(x,y) = (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})/h^2$$

Y .... las diferencias finitas insertada en la ec. de Laplace

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right].$$

Ahora .....Si en (1) f(x,y)≠0 Ecuacion de Poisson y nos queda:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \frac{h^2}{4}\, f_{i,j}$$

¿ Como resolvemos la ecuación de Poisson?

** METODOS DIRECTOS o EXACTOS

- Eliminacion Gaussiana

** METODOS ITERATIVOS

- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Metodos de Sobrerrelajacion sucesiva

Eliminacion Gaussiana

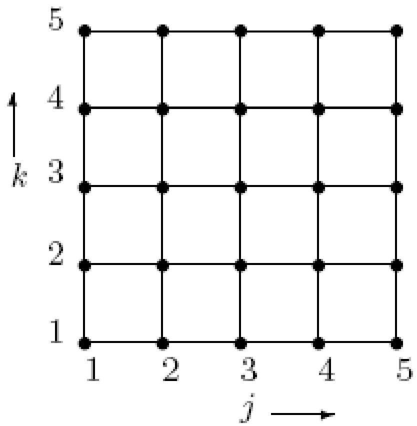
$$\left.\begin{aligned} u_{11}x_1 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1,n}x_n &= f_1 \\ &\ldots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= f_{n-1} \\ u_{n,n}x_n &= f_n \end{aligned}\right\} \qquad u_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{f_n}{u_{n,n}} \\ x_{n-1} = \dfrac{f_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}} \\ \ldots \\ x_1 = \dfrac{f_1 - u_{1,n}x_n - u_{1,n-1}x_{n-1} - \ldots - u_{1,2}x_2}{u_{1,1}} \end{cases}$$

c

$$x_j = \frac{-\sum_{k=i+1}^{n} u_{i,k}x_k + f_i}{u_{j\ j}}, \qquad i = n, n-1, \ldots, 1$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right]$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (1)$$

Figure 8.1: Finite Difference Grid for a Poisson equation.

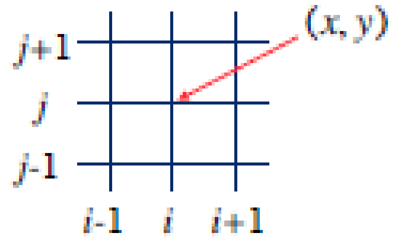
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ u_{4,3} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \\ u_{4,4} \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ f_{4,2} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \\ f_{4,3} \\ f_{2,4} \\ f_{3,4} \\ f_{4,4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{2,1} + u_{1,2} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{2,5} \\ u_{3,5} \\ u_{4,5} + u_{5,4} \end{pmatrix} \qquad (8.2)$$

METODOS ITERATIVOS

Resolvamos la ec. de Poisson

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=S$$

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta y^2}=S_{i,j}$$



La solución de Poisson puede ser pensada como : “ solución en el estado estacionaria” de :

$$u=\nabla^2 u-f$$

discretizo

$$f_{i+1,j}+f_{i-1,j}+f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-4f_{i,j}=h^2 S_{i,j}$$

Despejo para fi,j

$$f_{i,j}=\frac{1}{4}\left[f_{i+1,j}+f_{i-1,j}+f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-h^2 S_{i,j}\right]$$

Jacobi

Gauss-Seidel

SOR

Sobrerelajacion Sucesiva (SOR)

Ui,j= $U\ (i,j)+R(i,j)$

Gauss-Seidel puede ser acelerado con diferentes técnicas.
La mas simple es la de SOBRERELAJACION SUCESIVA (***SOR***) .

R(i,j)= $\frac{U\ (i{+}1,j){+}U\ (i{-}1,j){+}U\ (i,j{+}1){+}U(i,j{-}1)\ -4U(i,j)}{h{*}{*}2}$

U(i,j)= $U(i,j)+\beta R(i,j)$

1‹β‹2.

β=1.5 es un valor adecuado

Las iteraciones deben ser realizadas hasta que la solución sea lo suficientemente aproximada o exacta.
Para medir ese error, definimos un valor “residual” ;

En un estado estacionario el “valor residual” debería ser cero o aproximadamente cero.

Para la ecuación (1) (Laplace) y discretizando el dominio bidimensional con paso uniforme Δx=Δy=1, tal que:

u(x,y). .----->Ui,j

f(x,y) ----→Fi,j

con:

i=0, N y j=0;M

donde N y M representan los puntos del dominio en las direcciones x e y respectivamente.

En un dominio uniforme con N=M=10 y considerando la solución exacta de (1):

Ui,j=i*(i-N)*j*(j-M)

Calcule el forzante con un Laplaciano de 5 puntos.

Con el forzante ya obtenido, calcule la solución numérica Gi,j de la ecuación de Poisson, en los puntos interiores del dominio, mediante el método de relajación secuencial con sobrerrelajación, considerando para los residuos una cota igual a 0,001.

```
PROGRAM relax1 !relax2.f90
!     RESUELVE LA ECUACION DE POISSSON MEDIANTE EL METODO DE RELAJACION
SECUENCIAL CON SOBRERELAJACION
!
!     DIMENSIONES Y DECLARACIONES
      implicit none
      REAL (kind=8) :: U(0:11,0:11),F(0:11,0:11),G(0:11,0:11)
      REAL (kind=16) ::PI,A1,A2,A3,ALFA,EPS
      REAL (kind=16) ::ECM,R
      INTEGER :: I,J,N,M,N1,M1,IA,NPTS,NIT,NREL,NN
!
!     U ES LA solucion EXACTA
!     F ES EL FORZANTE
!     G ES LA SOLUCION EN DIFERENCIAS FINITAS
!
!***abro el archivo de resultados y escribo titulos
      OPEN(3,FILE='SOBREREL2.DAT',STATUS='UNKNOWN')
!      WRITE(3,1000)
!1000  FORMAT(2X,'METODO DE RELAJACION SECUENCIAL CON
SOBRERELAJACION',/,2X, 'PARA RESOLVER LA ECUACION DE POISSON')
!*****************************************************************
```

```
!******DEFINO CONSTANTES A USAR*********************************
!
!     ALFA ES EL COEFICIENTE DE SOBRERELAJACION

      N=10
      M=10
      N1=N-1
      M1=M-1
      IA=500
      NPTS=(N-1)*(M-1)
      EPS=0.01
      PI=3.1415926
      A1=1./M**2
      A2=1./N**2
      A3=SQRT(A1+A2)
      ALFA=2.-2.*PI*A3/SQRT(2.)
      WRITE(3,1100)ALFA
1100  FORMAT(' ','EL COEFICIENTE ALFA ES:',F9.6)
      WRITE(3,1200)EPS,NPTS
1200  FORMAT(' ','COTA PARA EL RESIDUO EPS:',F6.3,2X,'EL NUMERO DE PUNTOS NPTS
ES:',I6)
!
```

```
!****CALCULO DE LA SOLUCION EXACTA DE U Y LA PRIMERA APROXIMACION DE G
      DO I=0,N
      DO J=0,M
      U(I,J)=(I)*(I-N)*(J)*(J-M)
      G(I,J)=0.0
      ENDDO
      ENDDO

!****CALCULO DEL FORZANTE F****************************
     DO I=1,N1
     DO J=1,M1
     F(I,J)=U(I+1,J)+U(I-1,J)+U(I,J-1)+U(I,J+1)-4*U(I,J)
     ENDDO
     ENDDO
!
```

```
!*****CALCULO DEL RESIDUO PARA TODA LA MATRIZ*********
      NIT=0
100   NREL=0
      DO I=1,N1
      DO J=1,M1
       R=G(I-1,J)+G(I+1,J)+G(I,J-1)+G(I,J+1)-4*G(I,J)-F(I,J)
       G(I,J)=G(I,J)+ALFA*R/4.
        IF(R.LT.EPS)THEN
        NREL=NREL+1
        ENDIF
       ENDDO
       ENDDO
      NIT=NIT+1
!
!*****VERIFICA SI TODOS LOS PUNTOS TIENEN RESIDUO MENOR QUE EPS. Y SINO ES
ASI, ENTONCES VUELVE A ITERAR**************

      NN=NREL-NPTS
       IF(NN.LT.0)THEN
       IF(NIT.LT.IA)GO TO 100
       ENDIF
```

$$R_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4 f_{i,j}}{h^2} - S_{i,j}$$

$R(i,j)$ At steady-state the residual should be zero. The point-wise residual or the average absolute residual can be used, depending on the problem. Often, simpler criteria, such as the change from one iteration to the next is used