

Ecuaciones en derivadas parciales

Cutraró Federico; Iglesias, Martín

1. Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) son aquellas cuyas incógnitas son funciones de diversas variables independientes, con la peculiaridad de que en dicha ecuación figuran no solo las propias funciones sino también sus derivadas. Dichas ecuaciones son formulaciones matemáticas que intentan describir procesos físicos que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo.

En el campo de las EDP existen distintos tipos de familias que explican distintas propiedades de la naturaleza. Una de ellas es la familia de las ecuaciones hiperbólicas que nos hablan de cómo se propagan las propiedades en el medio. Un ejemplo de éstas es la ecuación de advección pura:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Donde A es la cantidad advectada ($A = A(x, t)$), y c es la velocidad con que se advecta la propiedad. De la cual se puede obtener una solución del tipo $f(x - vt)$. La solución se puede buscar proponiendo como solución $A(x, t) = A(t) e^{ikx}$ y se obtiene una ecuación de tipo oscilatoria $A'(t) = -ikcA(t)$.

Esta es una ecuación lineal de primer orden en diferencias parciales con coeficiente constante c .

Si consideramos la forma Lagrangiana de la ecuación en cualquier dimensión se tiene que:

$$\frac{DA}{Dt} = 0 \quad (2)$$

Mostrando que el valor A no cambia siguiendo a la partícula, lo cual se tiene que dicha cantidad se conserva en dicho movimiento. Esta propiedad se aplica en la dinámica de fluidos en donde el conjunto de partículas de fluido mantienen el valor de A en su movimiento. Sin bien la posición de las partículas probablemente cambie con el tiempo, los estadísticos de la distribución de la variable no cambian con el fluido en el proceso de advección, esta es la propiedad importante de la advección.

Antes de introducirnos a los esquemas numéricos nos es importante tener en cuenta algunos conceptos:

- **Consistencia**

Un esquema es consistente si la ecuación discretizada tiende a la ecuación diferencial analítica cuando todos los incrementos de las variables independientes tienden a cero.

$$L^h u \rightarrow Lu \quad \text{para } \Delta x_j, \Delta t \rightarrow 0 \quad (3)$$

Con Δx_j representando los pasos de la malla en todas las direcciones y ambos operadores se aplican a la solución exacta del problema.

Nota: Esto es equivalente a decir que si se toma el error que se comete al estimar numéricamente el sistema en derivadas parciales, definido como el error de truncado, y se hace tender a cero los incrementos el error de truncado tiende a cero, lo que se tiene que la ecuación numérica y analítica sean equivalentes. La siguiente figura ilustra esta idea:

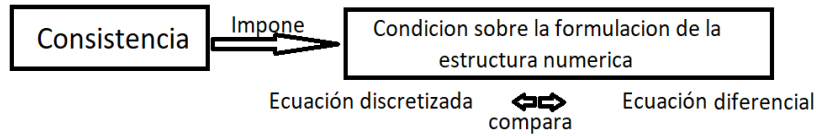


Fig.1 ilustración de la Consistencia

- **Estabilidad**

El análisis de estabilidad se basa en la relación que existe entre la solución numérica u_j^n y la solución exacta de la ecuación discretizada \bar{u}_j^n . Entre ellas existe una diferencia que viene dada por los errores de redondeo en los valores iniciales, obteniendo así:

$$u_j^n = \bar{u}_j^n + \varepsilon_j^n \quad (4)$$

La comprobación de la estabilidad del esquema numérico consiste en probar cotas sobre el crecimiento de la norma de la amplitud del error de manera controlada, independientemente del paso temporal. En la medida que para recorrer un intervalo temporal $[0; T]$.

Si se aplica el método de Von Neumann, el cual es válido para operadores lineales a coeficientes constantes y problemas periódicos, se ve que los errores evolucionan con el tiempo en la misma forma que la solución. Esto mismo se aplica en operadores, obteniendo

$$e^n = C e^n \quad (5)$$

Con e^n un vector que contiene a los errores de los nodos. Si las condiciones de borde son periódicas entonces se puede descomponer al error en series de Fourier para la variable espacial en cada paso del tiempo. Ya que el dominio tiene longitud finita la representación de Fourier será discreta y sumada sobre un conjunto finito de modos.

Sea un dominio de longitud L , la representación compleja de Fourier refleja la región $(0, L)$ en $(-L, L)$ con un rango de frecuencias y longitudes de onda $(k = 2\pi/\lambda)$ como el siguiente:

$$k_{min} = \pi/L \quad \lambda_{max} = 2L$$

$$k_{max} = \pi/\Delta x \quad \lambda_{min} = 2\Delta x$$

La siguiente figura muestra los dos modos extremos:

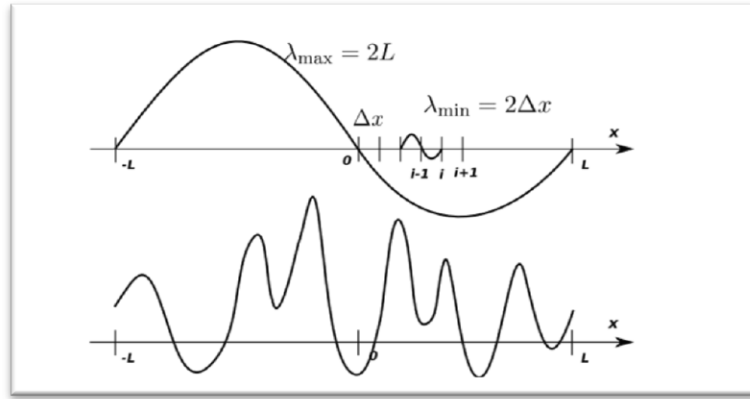


Fig. 2 modo que cubre el dominio $2L$ (ondas largas) y otro que abarca la menor región en la cual se puede representar una onda $2\Delta x$.

Sabiendo esto se tiene que la descomposición en series de Fourier del error es:

$$\varepsilon_j^n = \sum_{j=-N}^N E_j^n \varepsilon^{ik_j j \Delta x} \quad (6)$$

E_j^n es la amplitud de la j -ésimo modo.

Por lo tanto el esquema se dice estable si la diferencia permanece acotada $\forall n\Delta t$, con Δt fijo, y siendo además la cota independiente de n . Es decir,

$$|E_j^n| \leq k \quad (7)$$

Esta condición garantiza que los errores no se amplifican con el tiempo. Es una condición para el esquema, y no para la ecuación diferencial.

La siguiente figura ilustra esta idea:

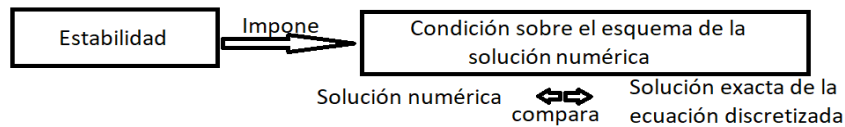


Fig. 3 Ilustración de la Estabilidad

- **Factor de Amplificación**

Sabiendo que el análisis de la estabilidad se puede desacoplar para cada modo. Si se elige uno de ellos $E_j^n \varepsilon^{i(k_j \Delta x)}$ y se lo introduce en el esquema, para satisfacer la condición de estabilidad las amplitudes del error no deberán crecer con el tiempo. Es decir:

$$|\lambda| = \left| \frac{E_j^{n+1}}{E_j^n} \right| \leq 1 \quad \forall \phi = k_j \Delta x \quad (8)$$

Donde λ se lo define como el factor de amplificación. Este mismo es esquema dependiente y es quien ayuda al análisis de la estabilidad mediante el método de Von Neumann.

- **Velocidad de fase y grupo numérica para la ecuación de advección**
(Dispersión computacional)

La velocidad de fase es aquella a la cual fase de cualquier componente en frecuencia de una onda se propaga (que puede ser diferente para cada frecuencia). La velocidad de fase está dada en términos de la velocidad angular de la onda ω y del vector de onda k por la relación:

$$C = \frac{\omega}{k} \quad (9)$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad de fase no es necesariamente igual a la velocidad de grupo de una onda, que es la velocidad del paquete de ondas que contiene en general modos de varias frecuencias. La misma está dada en términos de la derivada de la velocidad angular de la onda ω respecto del vector de onda k por la relación:

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (10)$$

Sin embargo, para la ecuación de advección para el caso continuo ambas velocidades son las mismas, pero en un esquema de diferencias finitas se tiene que algo particular:

Considerando la ecuación en diferencias finitas de la ecuación de advección con un esquema centrado en el espacio:

$$\frac{dA_j}{dt} + c \left(\frac{A_{j+1} - A_{j-1}}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (11)$$

Suponiendo que $A_j = \bar{A} e^{ikj\Delta x}$ se escribe

$$\frac{d\bar{A}_j}{dt} + c ik \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \bar{A}_j = 0 \quad (12)$$

Observamos que con la ecuación de advección el esquema no presenta una velocidad de fase c , sino c^*

$$c = c^* \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \quad (13)$$

En donde vemos que depende del número de onda k , notando así una dispersión computacional que surge de la diferenciación espacial.

Es importante aclarar que no es lo mismo tener dispersión computacional que inestabilidad. Ambos pueden generar “ruido”, pero una solución ruidosa no necesariamente es inestable. En caso de dispersión, las ondas no crecen en amplitud, sino que las ondas se separan unas de otras (se dispersan moviéndose cada una a su propia velocidad).

- **Condición CFL (Courant – Friedrichs-Lewy)**

Es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante métodos numéricos. Como consecuencia de esta condición, el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor sino la simulación producirá resultados incorrectos.

Por ejemplo, si una onda está cruzando una malla discreta, entonces el intervalo de tiempo debe ser inferior que el tiempo necesario para que la onda atraviese los puntos de la malla adyacentes. Como consecuencia, cuando la separación entre los puntos de la malla se reduce, el límite superior para el intervalo de tiempo es inferior.

La condición CFL se representa comúnmente para esquemas de advección puros (es decir ignorando los términos de difusión) como

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < C \quad (14)$$

Es importante remarcar que esta condición no tiene implicancias en la estabilidad de los esquemas.

- **Convergencia**

Si un esquema es tanto consistente como estable, la solución numérica tiende a la solución real. Esto se lo conoce como el Teorema de equivalencia de Lax. Es decir:

El esquema será convergente, si $\forall (x, t)$ fijos se cumple:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ i, n \rightarrow +\infty}} |u_i^n - \bar{u}(i\Delta x, n\Delta t)| = 0 \quad \text{para } x = i\Delta x, t = n\Delta t$$

La siguiente figura ilustra esta idea:

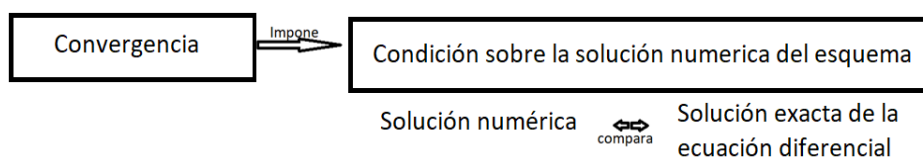


Fig.4 ilustración de la Convergencia

Por último en este trabajo se analizarán dos esquemas numéricos principales para el estudio de la ecuación de advección.

Método de diferencias centradas en el espacio y Leapfrog en el tiempo

Éste es un método explícito que utiliza tres niveles temporales y espaciales, cuyo esquema en diferencias finitas de la ecuación de advección se puede escribir como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{-c}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (15)$$

Obteniendo así un esquema para calcular la solución en el tiempo $n+1$ a partir de la información del tiempo n y $n-1$.

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (16)$$

Esto se representa en el diagrama a continuación para obtener lo comentado.

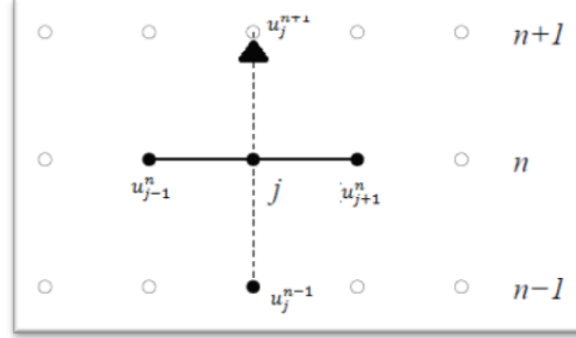


Fig.5 Diagrama esquemático de la evolución del esquema Leapfrog

Si se analiza el orden de aproximación para este esquema se obtiene que tanto para el paso temporal como espacial una aproximación de segundo orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (18)$$

Por lo tanto, si se toma $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación de advección original. Lo que se puede concluir con esto es que el esquema es Consistente.

Por otra parte es importante saber si este esquema es estable o no. Para ello si se aplica el método de Von Neumann, suponiendo la solución de la forma $u(x, t) = \text{Re}(A(t)e^{-ik(j\Delta x)})$ y aplicándola en el esquema, se busca el factor de amplificación de modo tal que cumpla $A^{n+1} = \lambda A^n$. Considerando que $\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$, se obtiene como solución de la ecuación cuadrática:

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (19)$$

A partir de esto se analiza la estabilidad observando el módulo al cuadrado del factor de amplificación.

$$|\lambda|^2 = \alpha^2 + (1 - \alpha^2) = 1 \quad \forall \alpha \leq 1 \quad (20)$$

Se observa que este esquema es estable si y sólo si $\alpha \leq 1$, lo que se puede considerar equivalente a decir $c\Delta t/\Delta x \leq 1$, lo que nos habla de que dicho esquema será estable si cumple la condición CFL. Esta es una condición necesaria para la estabilidad, en este caso para todos los modos, pero no implica estabilidad debido a que depende de las condiciones iniciales.

Si bien se habla de un esquema estable no implica que computacionalmente no exista dispersión. La energía puede mantenerse pero la estructura inicial que se imponga como condición inicial no necesariamente se mantenga. Es por ello que se analiza cómo serán las velocidades de fase de cada modo de Fourier a partir de suponer la solución de la forma $u(x, t) = \text{Re}(e^{i(kx - \omega t)})$ y reemplazarla en la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{c}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (21)$$

Se obtiene que

$$c_f = \frac{\omega}{k} = c \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \quad (22)$$

A partir de esto se puede notar que para modos con longitud de onda grandes su velocidad de fase es menor a la velocidad de fase real y los modos con longitud de onda pequeña su

velocidad de fase es mayor. Además la velocidad de fase de algunas ondas son negativas, por ecuación (21), por lo que se espera que el paquete inicial se vaya deformando en las dos direcciones de movimiento.

Por último se tiene que por el teorema de Lax que este esquema es convergente idealmente, pero por el tema de la dispersión computacional se tiene que el esquema no es de advección pura, sino difuso-advectivo.

Método de Lax-Wendroff

Éste es un método explícito que utiliza dos niveles temporales, con una diferencia con Leapfrog de utilizar un paso intermedio entre n y $n+1$, y tres espaciales. El esquema en diferencias finitas de la ecuación de advección se deduce de la siguiente forma

Se toma el paso temporal intermedio tanto espacial como temporal de la forma

$$\begin{aligned} U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (U_j^n + U_{j+1}^n) - c \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} \right) \\ U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (U_j^n + U_{j-1}^n) - c \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{j-1}^n - U_j^n}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Se lo reemplaza en la ecuación (15) para un paso intermedio se obtiene:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (24)$$

Si se reemplazan los pasos intermedios se llega a

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\mu^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad \text{con } \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (25)$$

Esto se representa en el diagrama a continuación para obtener lo comentado.

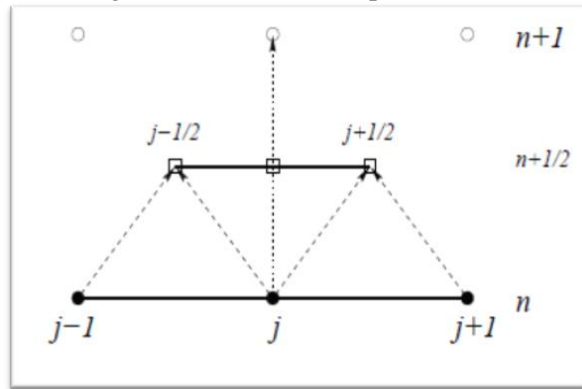


Fig.6 Diagrama esquemático de la evolución del esquema Lax-Wendroff

Si se analiza el orden de aproximación para este esquema como lo hecho para el esquema anterior se obtiene:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \left(U_{j+1\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (27)$$

Por lo tanto, si se toma $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación de advección original. Lo que se puede concluir con esto es que el esquema es Consistente.

Por otra parte es importante saber si este esquema es estable o no. Para ello si se aplica el método de Von Neumann, suponiendo la solución de la forma $u(x, t) = Re(A(t)e^{-ik(j\Delta x)})$ y aplicándola en el esquema, se busca el factor de amplificación de modo tal que cumpla $A^{n+1} = \lambda A^n$. Se obtiene como solución:

$$\lambda = 1 - 2\mu^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - i\mu \sin(k\Delta x) \quad (28)$$

A partir de esto se analiza la estabilidad observando el módulo al cuadrado del factor de amplificación

$$|\lambda|^2 = \left[1 - 4\mu^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + 4\mu^4 \sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right] + \mu^2 \sin^2(k\Delta x) = 1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \quad (29)$$

El esquema es estable si se cumple la condición CFL $c\Delta t / \Delta x \leq 1$

Si bien se habla de un esquema estable no implica que computacionalmente no exista dispersión.

Si se analiza el factor de amplificación (26), se tiene que

$$\lambda = 1 - \sin^2(k\Delta x) \left[1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \quad (30)$$

Si $k\Delta x \ll 1 \rightarrow \lambda \approx 1$, se tiene entonces un número de onda bajo. Si $k\Delta x \gg 1 \rightarrow \lambda$ chico.

Los modos con k chicos (longitud de onda grande) están poco amortiguados. Las fluctuaciones pequeñas se amortiguan y planchan.

Por último se tiene que por el teorema de Lax que este esquema es convergente idealmente, pero por el tema de la dispersión computacional se tiene que el esquema no es de advección pura, sino difuso-advectivo.

2. Metodología

En el presente trabajo se utilizó el esquema Leapfrog en el tiempo y un esquema centrado en el espacio (de orden 2) para resolver numéricamente la ecuación de advección en una dimensión. Se tomó el intervalo espacial $[0, 50]$ y el intervalo temporal $[0, 30]$ y se utilizó la velocidad del flujo advectivo constante con el tiempo de $c=1$.

En dichos esquemas fueron utilizadas distintas particiones tanto temporales como espaciales, con primer paso de tiempo de la siguiente forma:

- $\Delta x = 1, \Delta t = 0.1$; Primer paso de tiempo con Euler adelantado
- $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.5$; Primer paso de tiempo con Euler adelantado
- $\Delta x = 1, \Delta t = 1$; Primer paso de tiempo con Euler adelantado
- $\Delta x = 1, \Delta t = 0.1$; Primer paso de tiempo con Heun

Este primer paso se realiza debido a que el esquema Leapfrog en el tiempo precisa inicializarse en el segundo paso temporal por el hecho de no poseer el tiempo anterior(n-1) al que se usa cuando se realiza el primer paso.

Si se usa Euler adelantado, el primer nivel temporal se calcula a partir del esquema:

$$u_j^1 = u_j^0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0) \quad (31)$$

Donde el dato en $n=0$ viene dado por la condición inicial.

Si se usa Heun, el primer nivel temporal se calcula a partir del esquema:

$$u_j^1 = u_j^0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^{*1} - u_{j-1}^{*1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2\Delta x} \right) \quad (32)$$

$$u_{j+1}^{*1} = u_{j+1}^0 - c\Delta t (u_{j+2}^0 - u_j^0) \quad (33)$$

$$u_{j-1}^{*1} = u_{j-1}^0 - c\Delta t (u_j^0 - u_{j-2}^0) \quad (34)$$

Para conseguir los nodos espaciales para todo tiempo se usaron las condiciones de contorno cíclicas en el espacio, esto quiere decir que la condición inicial planteada se repite indefinidamente en el dominio extendido del espacio de Fourier. Con el objetivo de resolver la ecuación en todo el dominio planteado se añadieron 2 nodos extra en cada borde del mismo a los cuales se les asignó el valor del extremo opuesto con el fin de representar las condiciones de borde utilizadas.

Se impuso la condición inicial en forma de pulso rectangular dado por

$$u(x, t) = f(x - ct) = \begin{cases} 80 & \text{si } 0 \leq x - ct \leq 10 \\ 0 & \text{si } 11 \leq x - ct \leq 50 \end{cases} \quad (35)$$

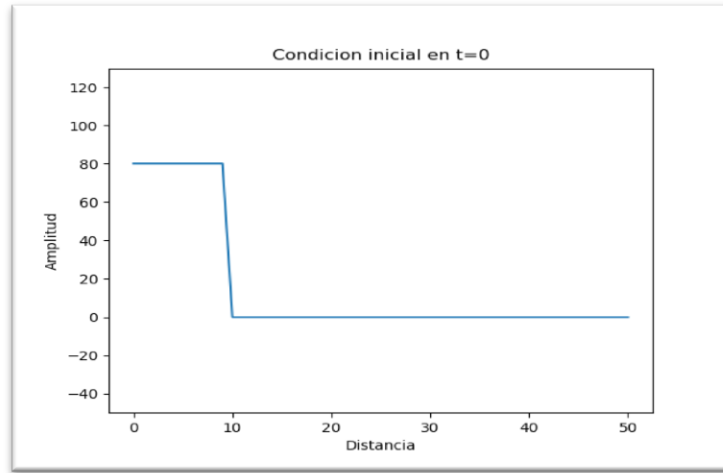


Fig.7 Condición inicial que se le da a los esquemas

Además se aplicó al esquema anterior una iteración cada 10 pasos de tiempo el esquema Lax-Wendroff para dos particiones consideradas a continuación:

- $\Delta x = 1, \Delta t = 0.1$; Primer paso de tiempo con Heun
- $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.5$; Primer paso de tiempo con Heun

Todos los cálculos realizados se hicieron a partir de un programa escrito en Fortran 90, el cual devuelve como output seis archivos de texto almacenados en distintas carpetas según el caso que se esté considerando (ordenados en la forma en que fueron escritos anteriormente), en donde se almacena una matriz que presenta en cada columna la solución en todo el dominio espacial para cada tiempo particular.

Por último se utilizó el software Python para graficar los resultados obteniendo de los esquemas numéricos utilizados y la solución real en los tiempos $t = 5$, $t = 15$ y $t = 30$.

3. Resultados

Primero se resolvió la ecuación advection con un paso temporal de 0.1 y el espacial de 1 realizando el primer paso con el método de Euler adelantado. En la Fig. 8 se puede observar que el pulso rectangular ya en el tiempo 5 se deformó a una onda que a su vez posee ondas más cortas embebidas generadas por la discretización. Para los tiempos 15 y 30 la onda asociada a la advección del pulso se observa más suave pero para valores de x menores a la posición de este hay ondas cortas. Además se nota que la onda de mayor amplitud se desplaza conforme lo hace la solución analítica con una velocidad similar, mientras que las ondas de menor amplitud presentan una velocidad menor que la real viendo así que la solución numérica se aleja de la solución real por esta diferencia entre las velocidades de las ondas que la componen.

La segunda discretización realizada ($dt=0.5$, $dx=0.5$) la solución numérica presenta una onda de aspecto dentado que se advecta solidariamente a la solución analítica. Esto puede interpretarse como un conjunto de ondas retrogradadas y progresivas que se suman constructiva o destructivamente generando así este patrón.

Como se comentó en la introducción para que el esquema sea estable la condición CFL debe ser menor o igual a 1 y en este caso la estabilidad se cumple por ser igual a 1. Con esto podemos ver que si bien la amplitud de las ondas en el esquema numérico se aparta de la forma de la solución analítica pero en promedio presentan la misma amplitud por ser el esquema estable.

Resultados similares se obtienen en el tercer caso tomando una discretización temporal de 1 y espacial de 1 la única diferencia es que al ser el paso de grilla espacial más grande la estructura es menos dentada.

El cuarto caso analizado es el que tiene las mismas discretizaciones que el primero pero a diferencia de este, el primer paso se realizó con el método de Heun que es de un orden mayor de aproximación que el de Euler adelantado. Se puede observar que a grandes rasgos el hecho de cambiar el esquema con el que se realiza el primer paso no cambia mucho la solución numérica en tiempos grandes.

Con el objetivo de eliminar las ondas más cortas que aparecen espúreamente en la solución se aplicó cada 10 iteraciones temporales el método de Lax-Wendroff. El primer caso en que se aplicó este método es con la discretización utilizada en los casos 1 y 4. Como se puede ver en la Fig. 11 aplicar este método no tiene un efecto significativo en la disipación de ondas cortas generadas por la discretización utilizada. Esto se debe a que la condición CFL de este caso es menor a 1 y el método de Lax-Wendroff actúa mejorando la solución.

En todos los casos hasta ahora analizados se puede ver que en el borde derecho del dominio aparecen ondas que se propagan en contra de la advección que muy probablemente estén asociadas a las condiciones de borde cíclicas planteadas. Por último, para la discretización utilizada en 2, se emplea también el método de Lax-Wendroff cada 10 pasos temporales obteniéndose el mismo patrón asociado a la advección de la onda pero a diferencia de los otros casos planteados las ondas que aparecían asociadas a la condición de contorno luego de aplicar por primera vez el método de Lax-Wendroff dejan de propagarse hacia la izquierda y comienzan a ser advectadas hasta desaparecer de la solución.

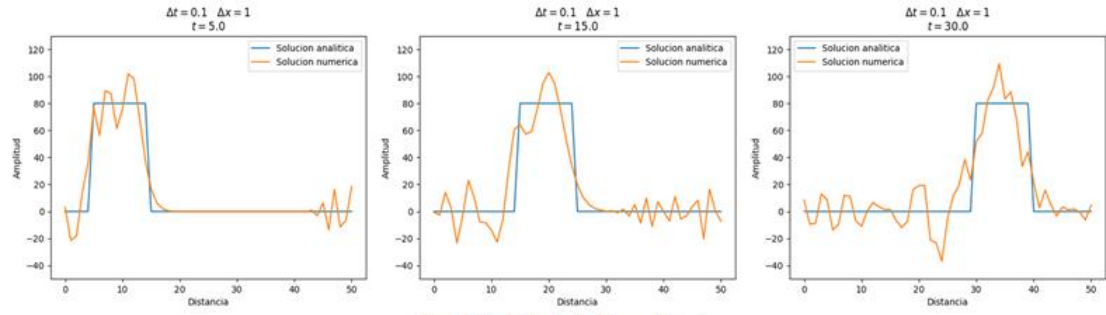


Fig 8. Evolución de la solución para el Caso 1

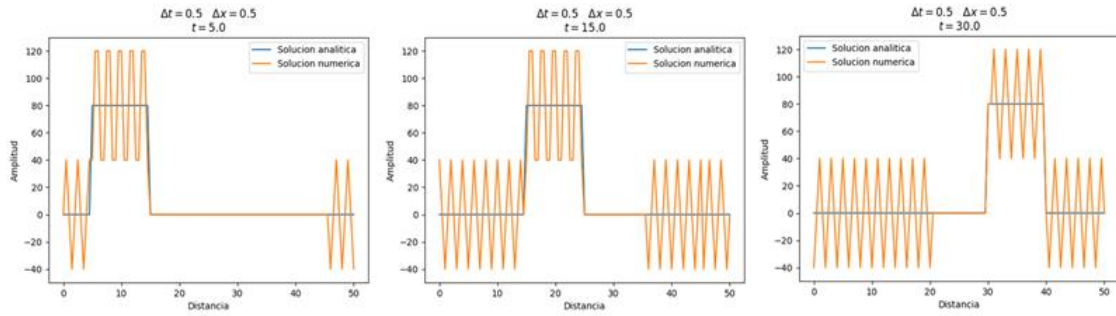


Fig 9. Evolución de la solución para el Caso 2

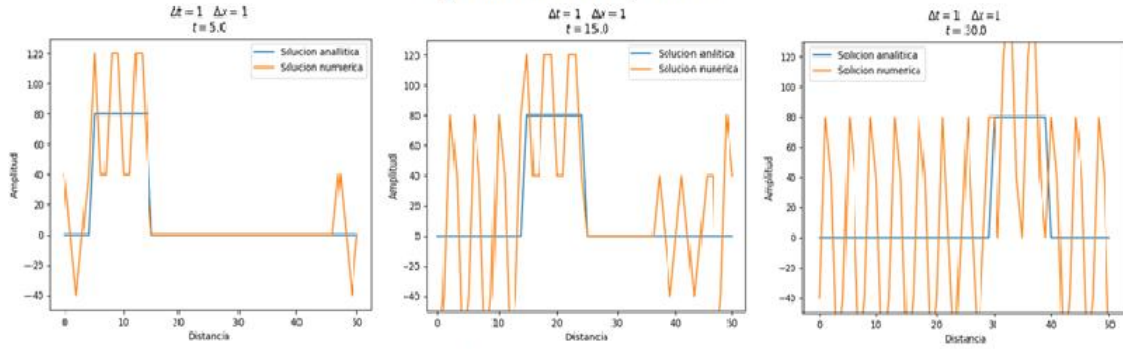


Fig 10. Evolución de la solución para el Caso 3

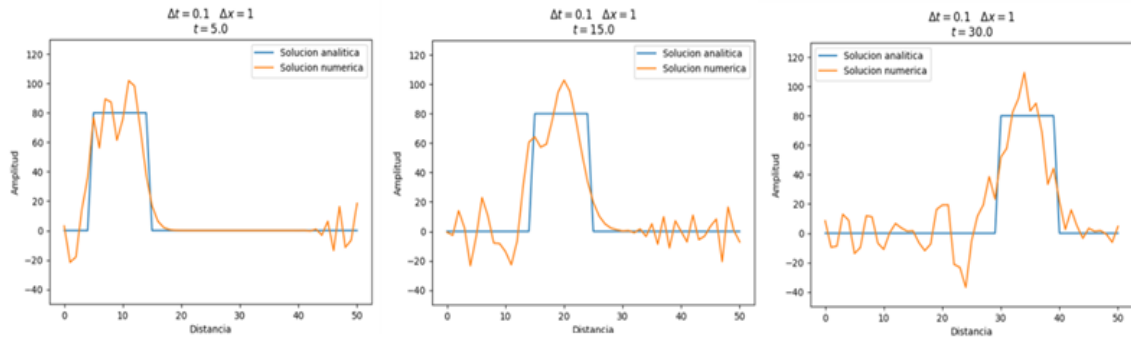


Fig 11. Evolución de la solución para el Caso 4

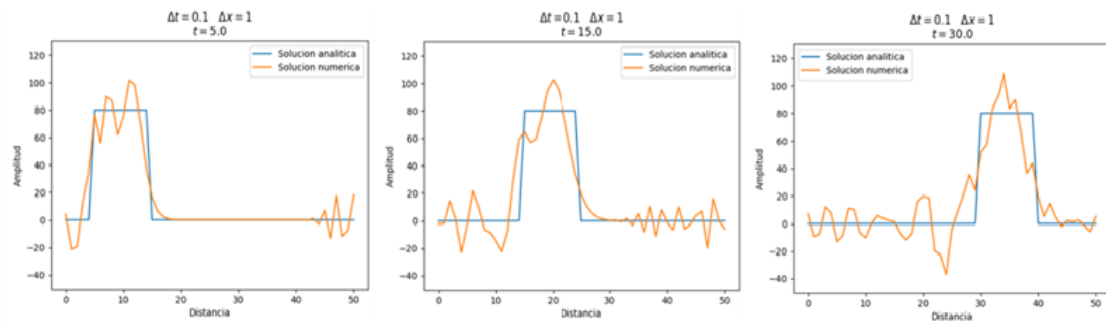


Fig 12. Evolución de la solución para el Caso 5

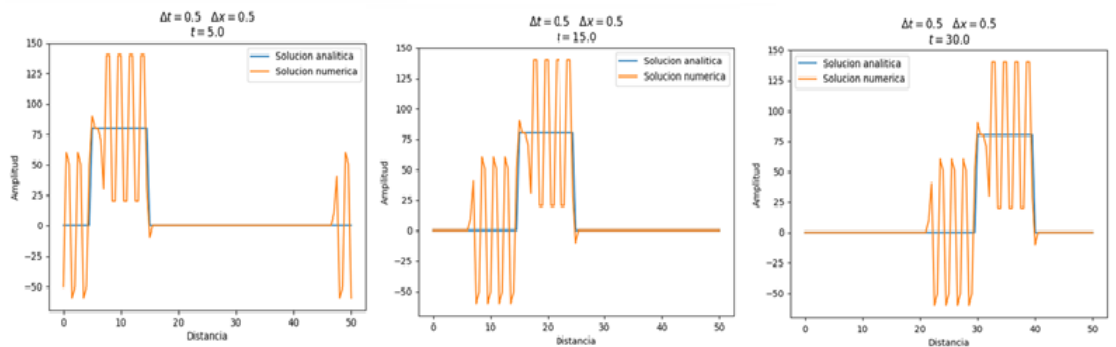


Fig 13. Evolución de la solución para el Caso 6

4. Conclusiones

Luego de aplicar todos los métodos propuestos se pudo ver que no hay ninguno que preserve la forma del pulso debido a que este presenta una discontinuidad la cual no puede ser resuelta mediante ninguna de las discretizaciones y esquemas utilizados. De todos modos en los 6 casos planteados se pudo observar en mayor o menor medida la advección del pulso cuadrado. Los casos que poseían una condición CFL igual a 1 presentaron una estructura similar a la solución analítica pero tenían una estructura dentada mientras que en los que la condición CFL era menor a 1 la solución numérica presentaron una estructura más suave pero que se alejaba de la forma rectangular del pulso. Aplicar el método de Lax-Wendroff no arrojó mejoras significativas en la representación de la advección de la condición inicial, pero sí lo hizo en el último caso en donde la deformación asociada a la condición de borde desaparece luego de aplicar este esquema. Otra forma posible de eliminar esta inestabilidad es probar con otras condiciones de contorno distintas a las cíclicas como suponer que fuera del dominio donde se resuelve la advección la amplitud es 0.

5. Referencias

- [1] David A. Randall (2009). An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere. Department of Atmospheric Science Colorado State University
- [2] Luciano Rezzolla (2011). Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations Lecture Notes for the COMPSTAR School on Computational Astrophysics. Albert Einstein Institute, Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, Potsdam, Germany
- [3] E.F. Lavia(Dmitruk-Sztrajman)(2017). Métodos para resolución numérica de PDE's. . Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires.
- [4] Norberto Nigro , Mario Storti. (2007) Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería.