Advección y Difusión

Ecuación de Difusión-Advección

Flujo total de sustancia + Conservación de la masa

$$q_x = u\,C + \left(-D\,\partial C/\partial x\right)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Ecuación de difusión-advección

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Demostración de que la solución de esta ecuación se corresponde a la combinación de los procesos de advección y difusión

Se hace un cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \eta = x - \left(x_o + ut\right) \\ \tau = t \end{cases}$$

Se introducen en la ecuación anterior, utilizando la regla de la cadena

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) + u\left(\frac{\partial C}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

Se obtiene una ecuación de difusión en función de las nuevas coordenadas

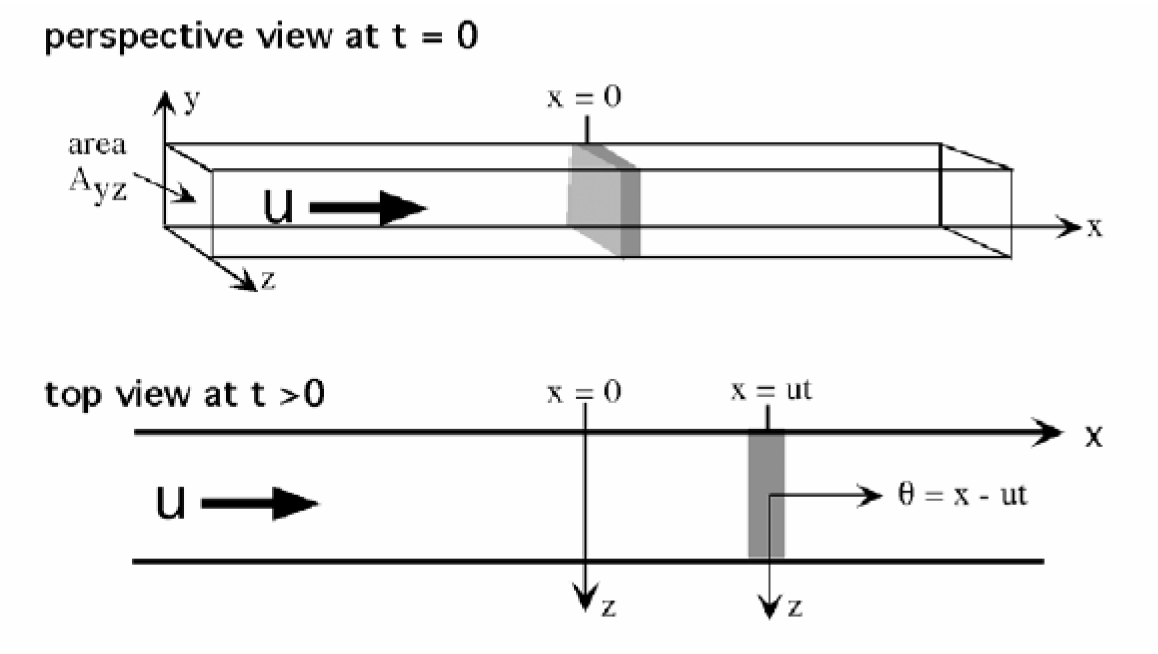
$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2}$$

Cuya solución fundamental es

$$C(\eta,\tau) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D\tau}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4D\tau}\right)$$

Solución Fundamental

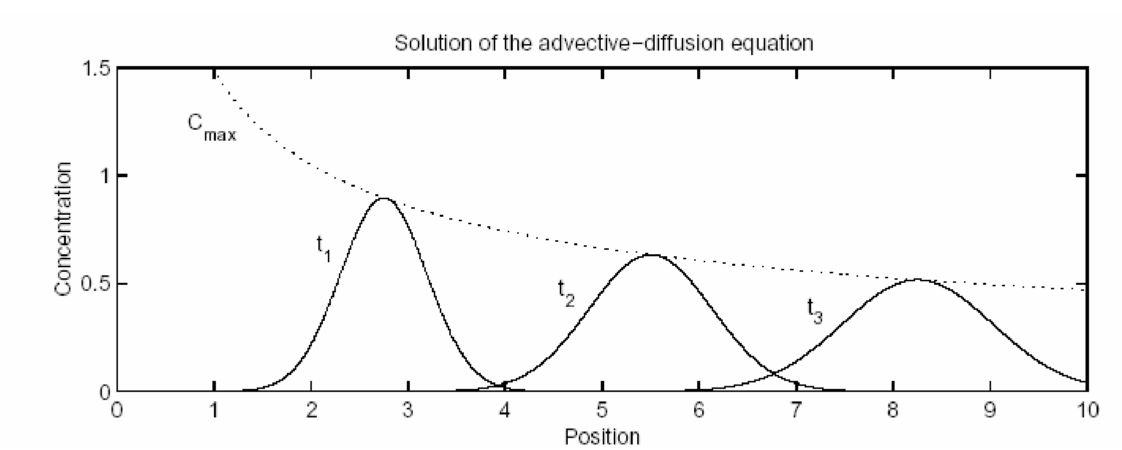
Liberación instantánea y puntual



Ecuación de transporte $$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Condición inicial $$C(x, t=0) = M\delta(x - x_o)$$

Solución $$C(x,y,t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{(x-(x_o+ut))^2}{4Dt}\right)$$



Advección y Difusión

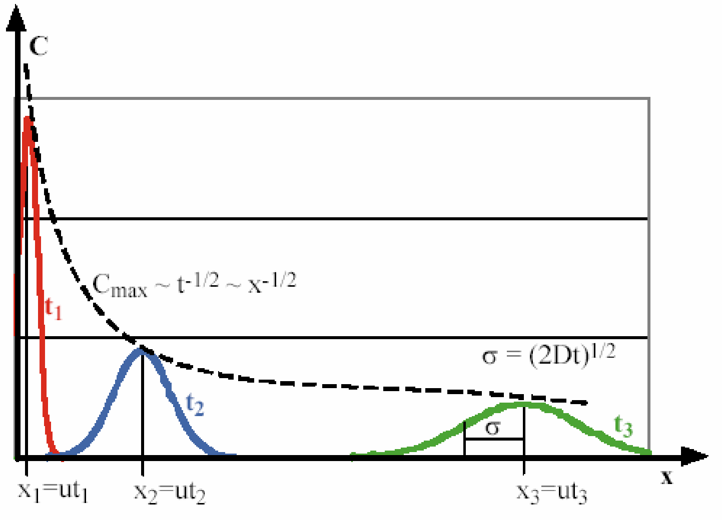


Figure 1. Evolution of concentration field after an instantaneous release of point-mass in a one-dimensional system with steady advection, u, and diffusion, D. Profiles in red, blue, and green represent C(x,t), at $t = t_1$, t_2, and t_3, respectively. The peak concentration decays at $t^{-1/2}$ and $x^{-1/2}$, as indicated by the dashed line.

Solución Fundamental 2D y 3D

Dos dimensiones

Ecuación de transporte
$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$$

Condición inicial
$$C(x,y,t=0)=M\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)$$

Solución
$$C(x,y,t)=\frac{M}{L_z 4\pi Dt}\exp\left(-\frac{(x-(x_o+ut))^2}{4Dt}-\frac{(y-(y_o+vt))^2}{4Dt}\right)$$

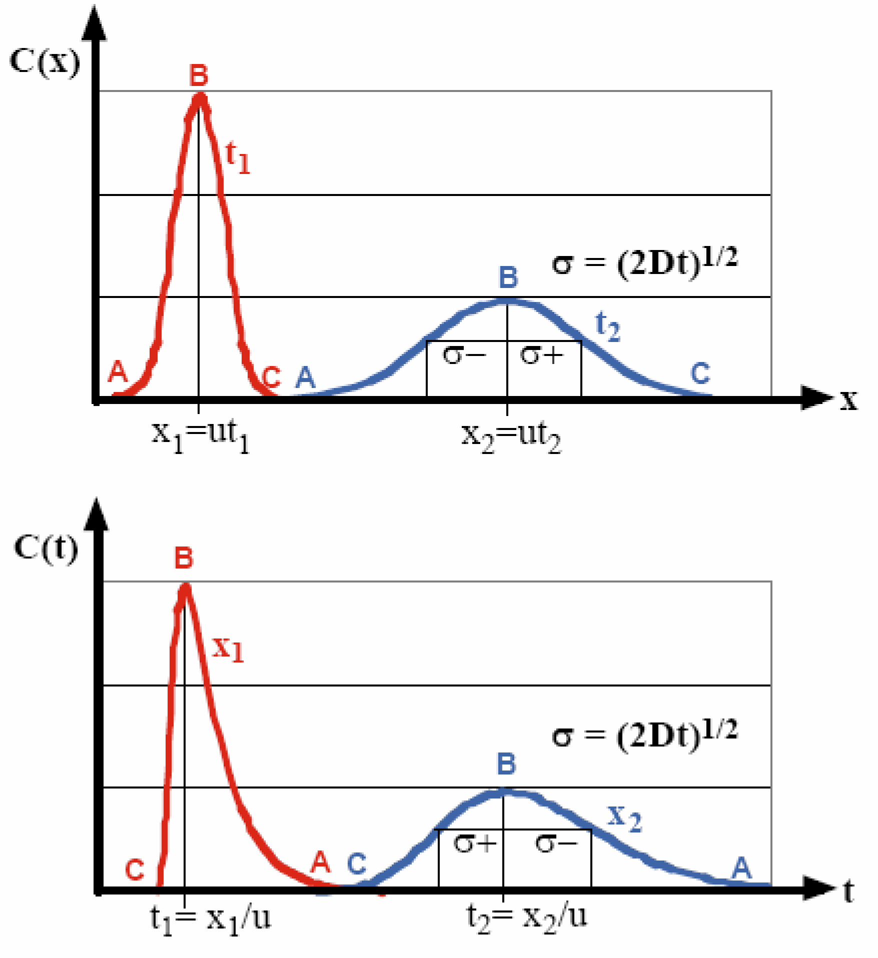
Tres dimensiones

Ecuación de transporte
$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

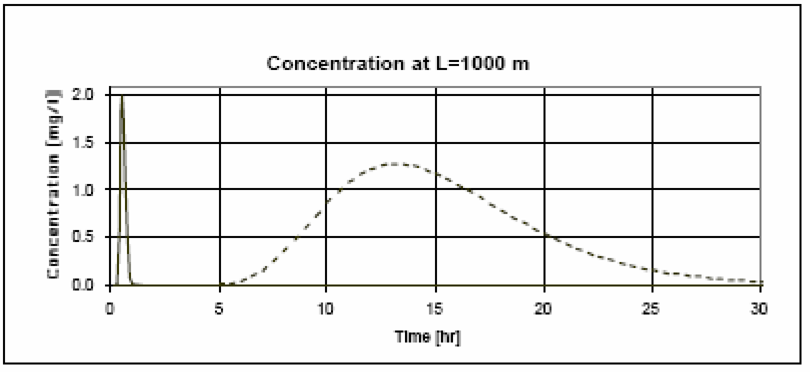
Condición inicial
$$C(x,y,z,t=0)=M\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)\delta(z-z_o)$$

Solución
$$C(x,y,t)=\frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-(x_o+ut))^2}{4Dt}-\frac{(y-(y_o+vt))^2}{4Dt}-\frac{(z-(z_o+wt))^2}{4Dt}\right)$$

Evolución espacial y temporal de la mancha



Número de Peclet



Transporte de sustancias no conservativas

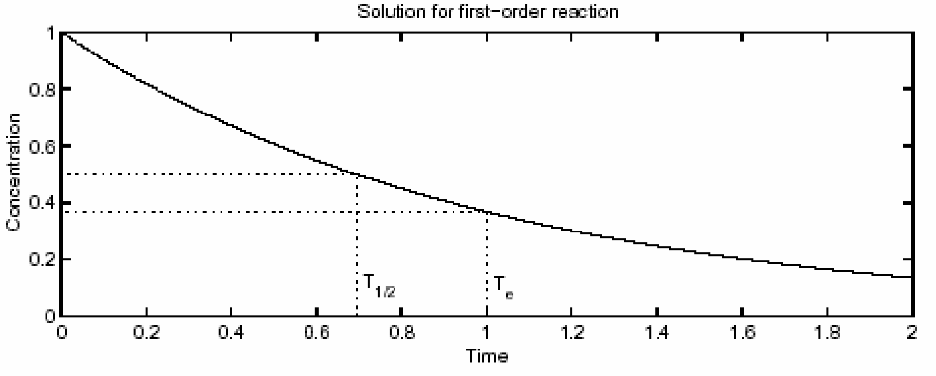


Fig. 3.1. Solution for a first-order transformation reaction. The reaction rate is $k = -1$.

Problema 3.

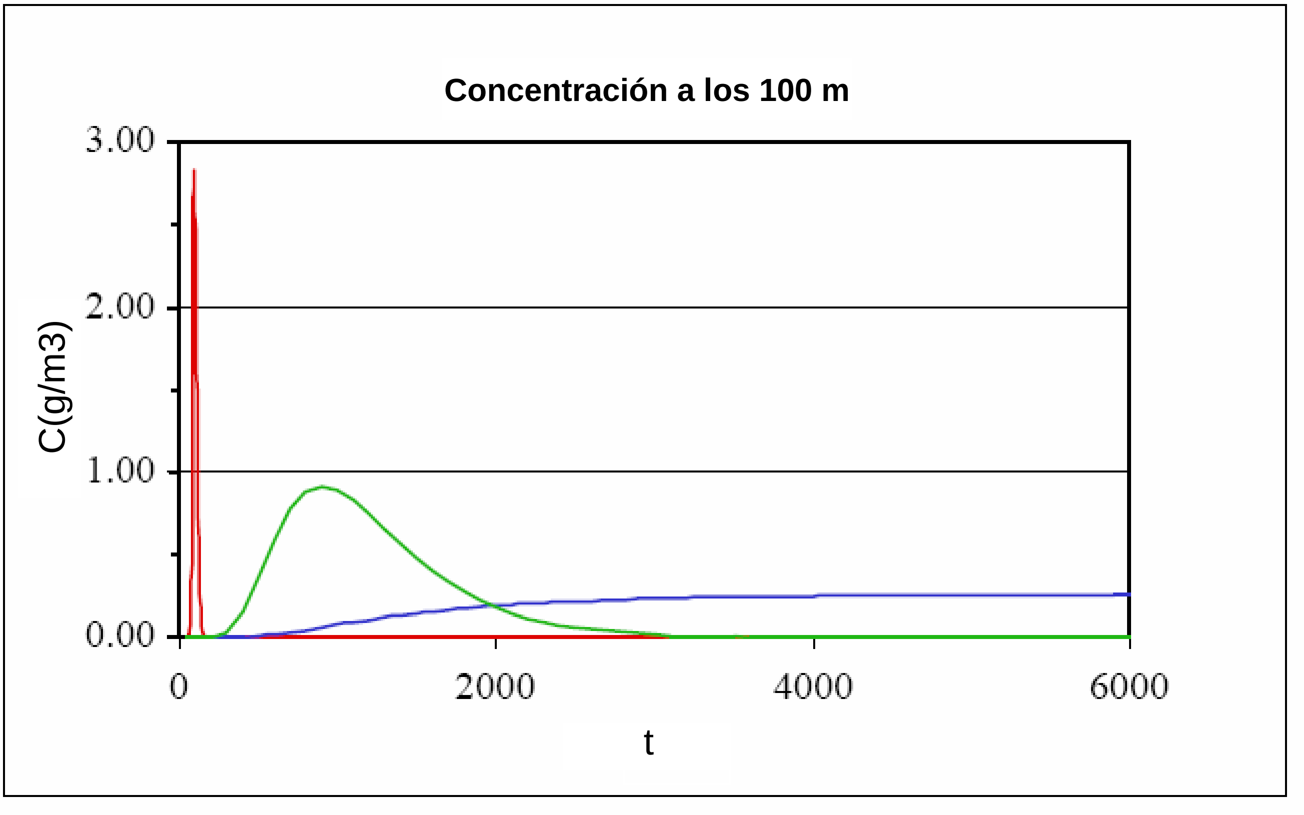
Se libera 1 kg de trazador en un canal de 10 m^2 de sección. Se mide la concentración en un punto situado a 100 m corriente abajo. Se repite el mismo experimento para tres velocidades de flujo diferentes: $u = 0.001,\ 0.1,\ 1\ m.s^{-1}$. El coeficiente de difusión es $D = 1\ m.s^{-1}$.

a) calcular para cada uno de los casos, las escalas temporales de advección y difusión y el número de Peclet.

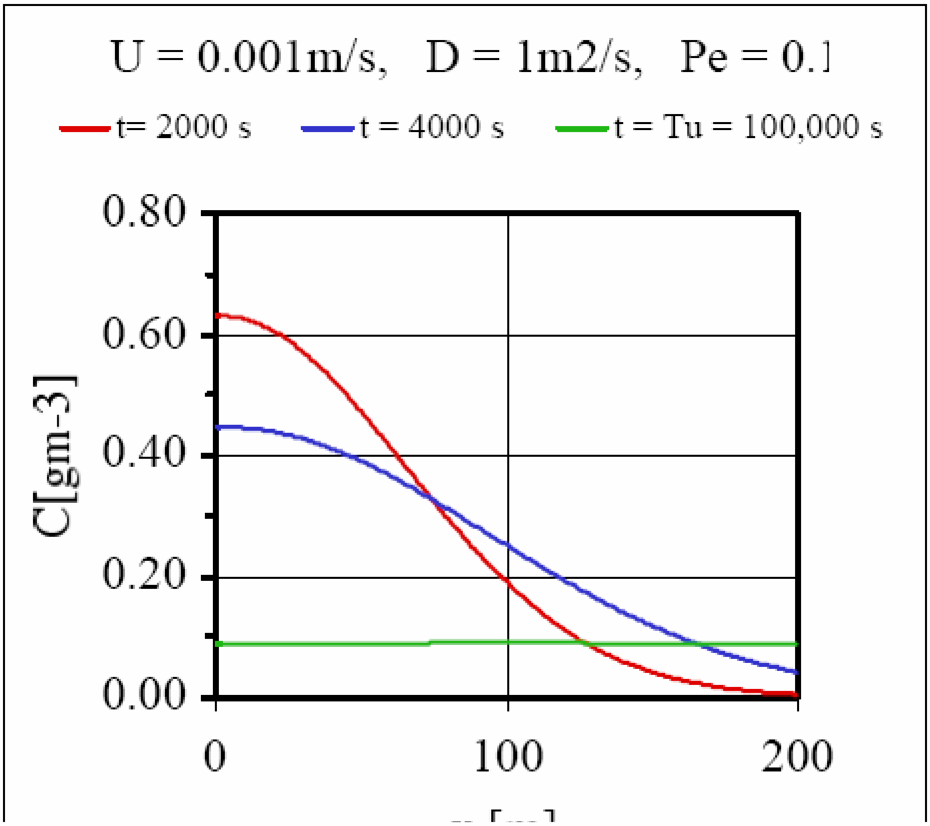
b) La gráfica muestra los tres casos. Indica a qué curva corresponde cada uno de los números de Peclet que has calculado.

c) Para qué curvas el pico de concentración en el punto en cuestión ocurrirá a la escala temporal de advección. Calcula el pico de concentración para esos casos.

d) La inyección de masa tarde 10 s. Se puede considerar dicha inyección como instantánea.



Problema 3. Lección Difusión-Advección



Problema 5

Hay un canal largo y estrecho conectado a un puerto que recibe agua de drenaje de la ciudad en $x = 0$ y a un caudal promedio de $q = 0.005\ m^3/s$. El canal es $75\ m$ de longitud, $2\ m$ de profundidad y $10\ m$ de anchura. Una mañana un bote derrama un aceite en $x = 25\ m$. Responder a las siguientes preguntas que ayudarán a evaluar el impacto del derrame sobre el puerto. Suponer difusividad isotrópica $D = 0.1\ m^2/s$.

a) Calcula el número de Peclet y explica el resultado.

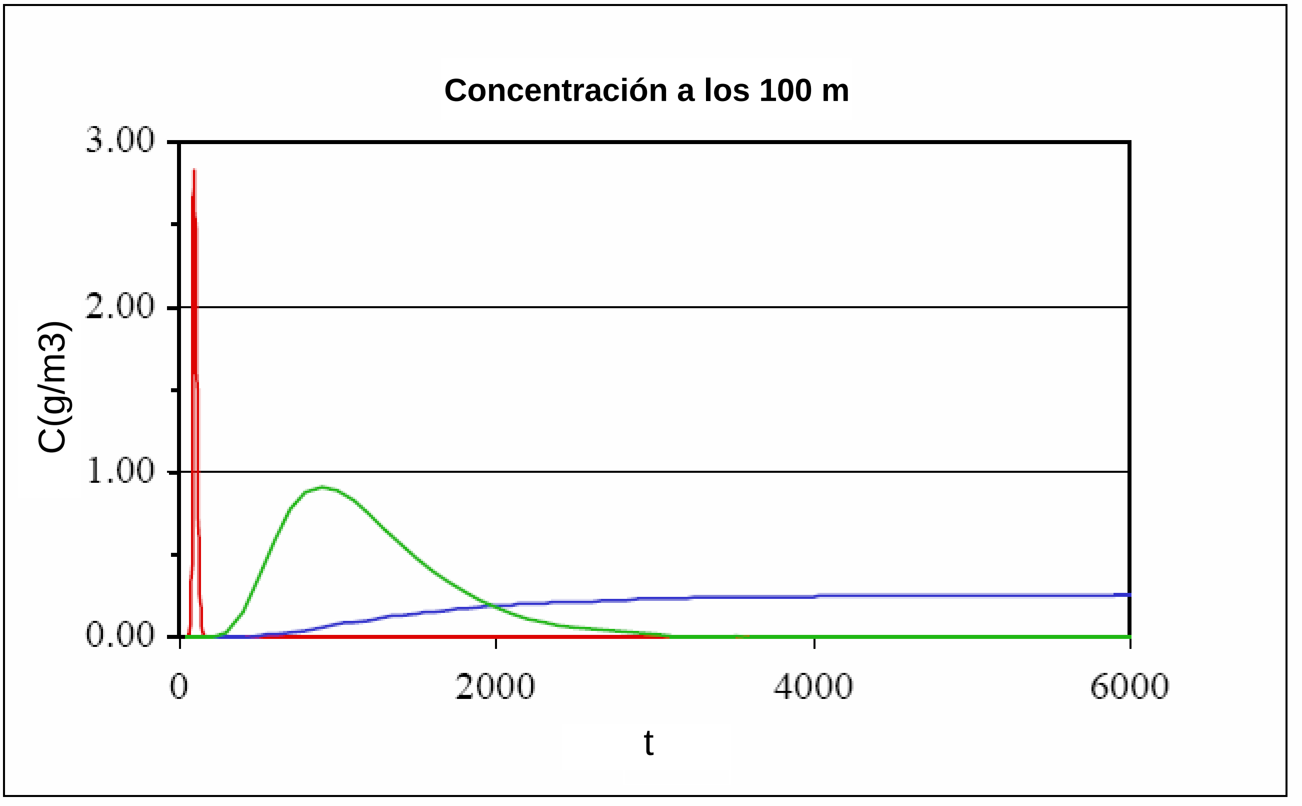
b) Cuándo que aplicar las medidas preventivas para mantener el contaminante fuera del puerto.

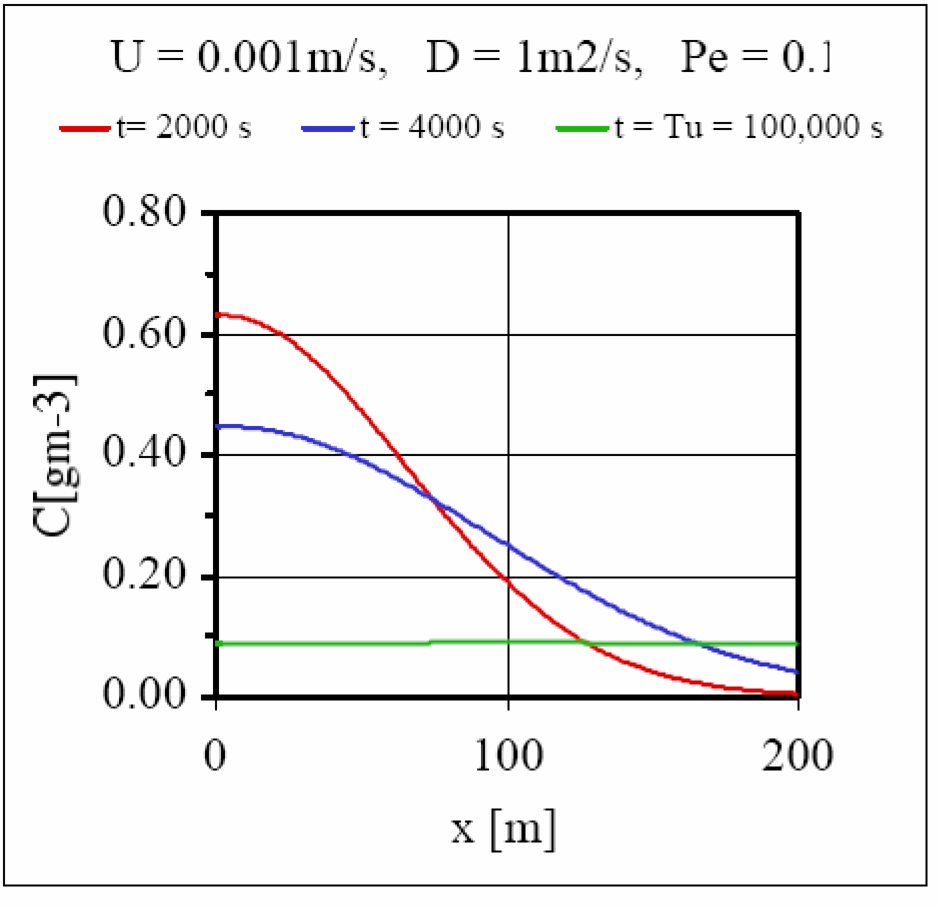
c) Estima la escala temporal para que el contaminante se distribuya uniformemente lateral y verticalmente.

d) Describe la concentración de contaminantes en el puerto $x = 75\ m$. Explica qué ecuación, si en una, dos o tres dimensiones, se debería utilizar.

e) Escribe una expresión que describa la evolución de la mancha en tiempo y espacio. Supón que el contaminante no puede pasar a través de la pared que está en $x = 0$ y que se ha mezclado de forma instantánea tanto lateral como verticalmente.

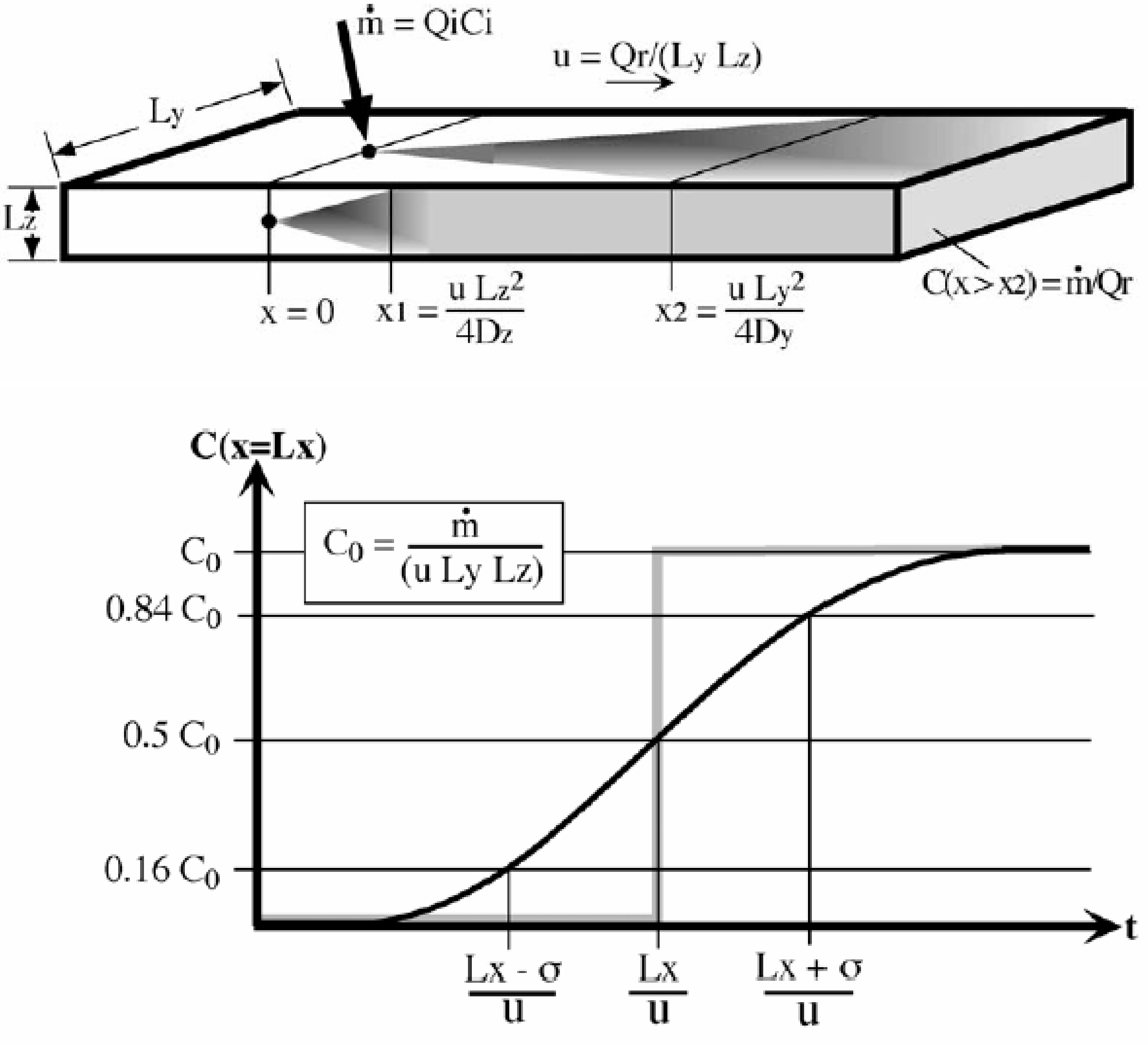
Problema 3. Lección Difusión-Advección



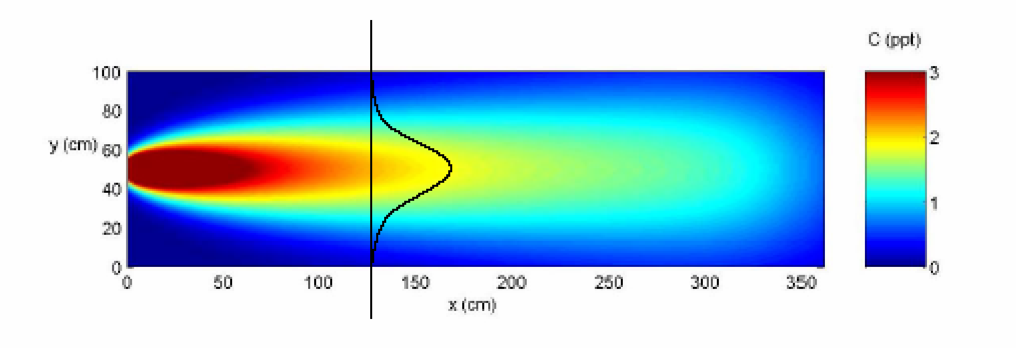


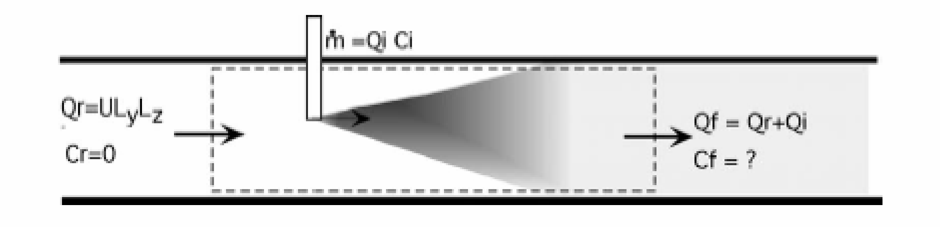
Problema 3. Lección Difusión-Advección

Plumas gaussianas



Plumas gaussianas





Plumas gaussianas

$$u\frac{\partial C}{\partial x}=0$$

Con contornos

Cf = (Qi Ci) /(Qi + Qr).

$$u\frac{\partial C}{\partial x}=D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Sin contornos

$$C(x,y,z)=\frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z}\,x}\exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x}-\frac{uz^2}{4D_z x}\right)$$

Con contornos

$$C(x,y,z)=\frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z}\,x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{u(y+nL_y)^2}{4D_y x}-\frac{uz^2}{4D_z x}\right)+\sum_{\substack{n=-\infty \\ but\ n\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x}-\frac{u(z+nL_z)^2}{4D_z x}\right)\right]$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}=D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Sin contornos

$$C(x,y)=\frac{\dot{m}/u}{L_z\sqrt{4\pi D_y(x/u)}}\exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x}\right)$$

Con contornos

$$C(x,y)=\frac{\dot{m}/u}{L_z\sqrt{4\pi D_y(x/u)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{u(y+nL_y)^2}{4D_y x}\right),$$

Problema chimenea