Риманова хипотеза

МАРТИН ЈАНЕВ - 236040

Што ќе се зборува?

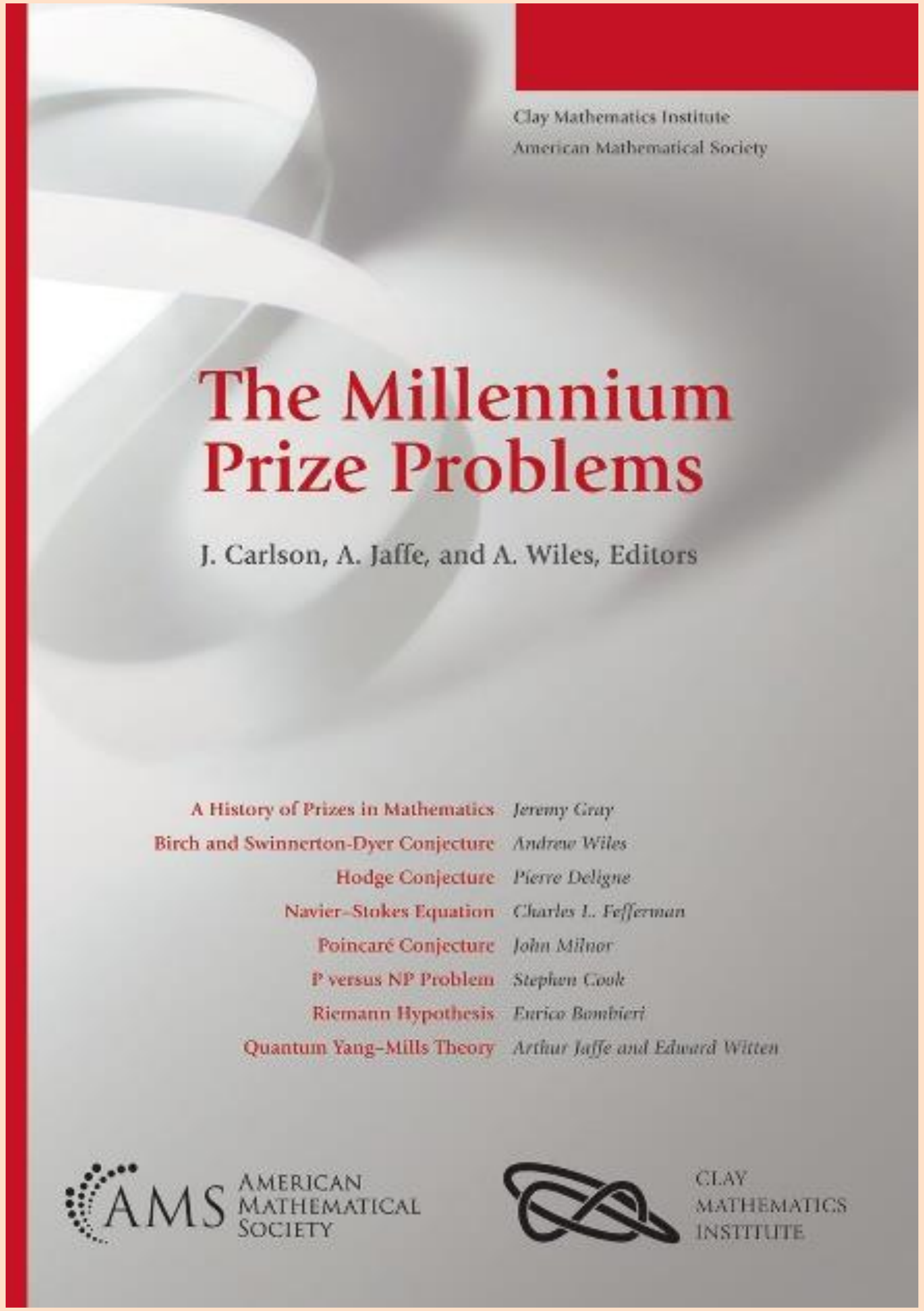
- Аналитичка теорија на броеви
- Теорема за прости броеви
- Зета функција
- Визуелизација на Зета функција
- Риманова хипотеза
- Примена

Милениумски проблеми

Милениумските проблеми се седум добро познати сложени математички проблеми избрани од Институтот за математика Клеј во 2000 година. Институтот Клеј ветува награда од 1 милион американски долари за првото правилно решение за секој проблем.

Проблеми со милениумската награда

- Претпоставката на Бреза и Свинертон-Дајер
- Претпоставката на Хоџ
- Навиер-Стоукс систем равенки
- П наспроти НП
- Поенкаре претпоставка (решена)
- **Риманова хипотеза**
- Постоењето на Јанг-Милс и масовниот јаз



Аналитичка теорија на броеви

Во математиката, аналитичката теорија на броеви е гранка на теоријата на броеви која користи методи од математичка анализа за решавање на проблеми за целите броеви.

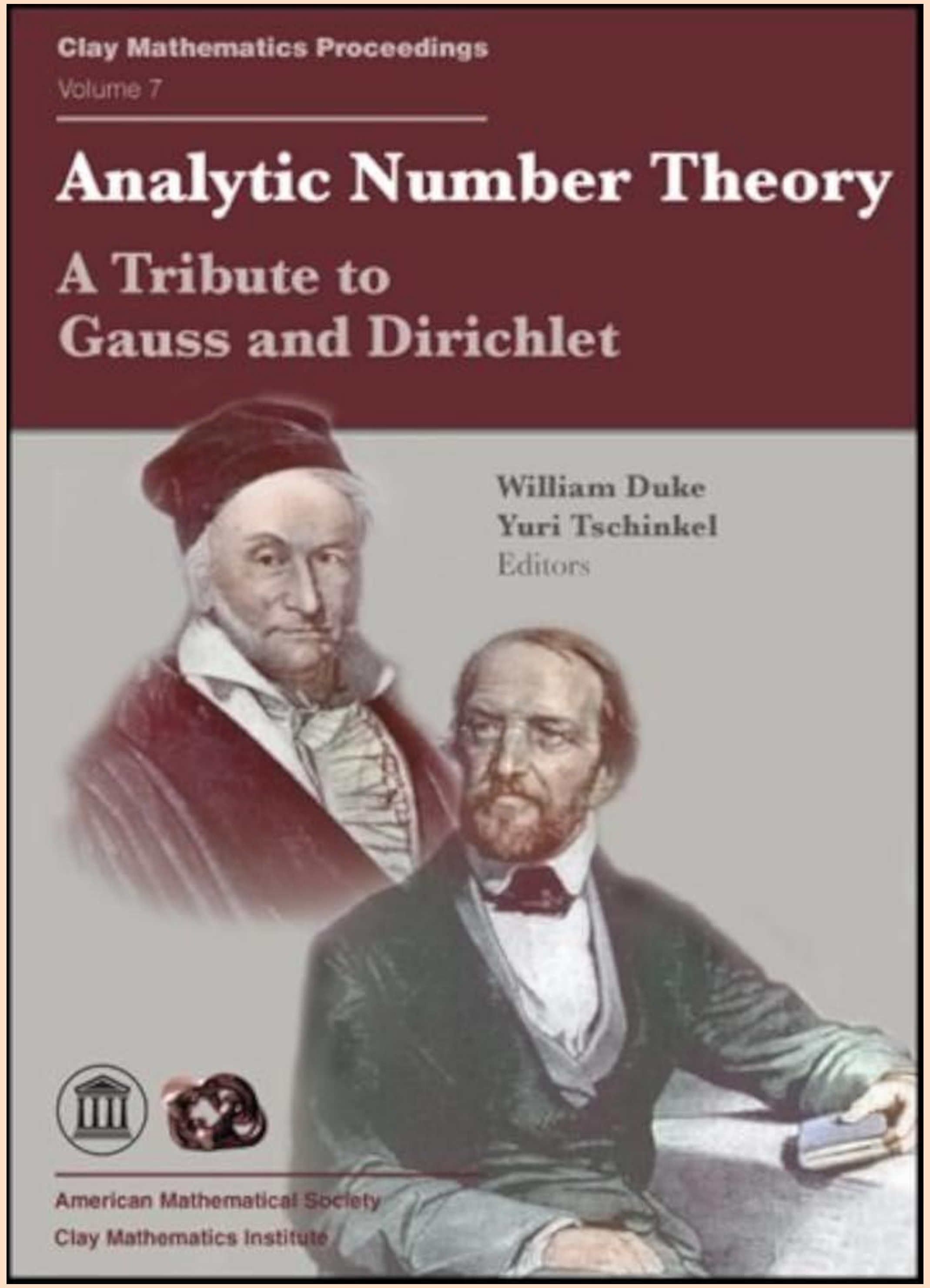
Често се вели дека оваа гранка започнала со воведувањето на Дирихлеовите L - функции од 1837 година благодарение на Питер Густав Лежене Дирихле за да се даде првиот доказ за неговата теорема за аритметичките прогресии. Исто така, математичарите Адриен-Мари Лежандре, Карл Фридрих Гаус, Пафнути Лвович Чебишев, Бернхард Риман и други се задолжни за развојот на оваа гранка од математиката.

Аналитичка теорија на броеви

Аналитичката теорија на броеви може да се подели на два главни дела, поделени повеќе според типот на проблеми што се обидуваат да ги решат отколку фундаменталните разлики во техниката:

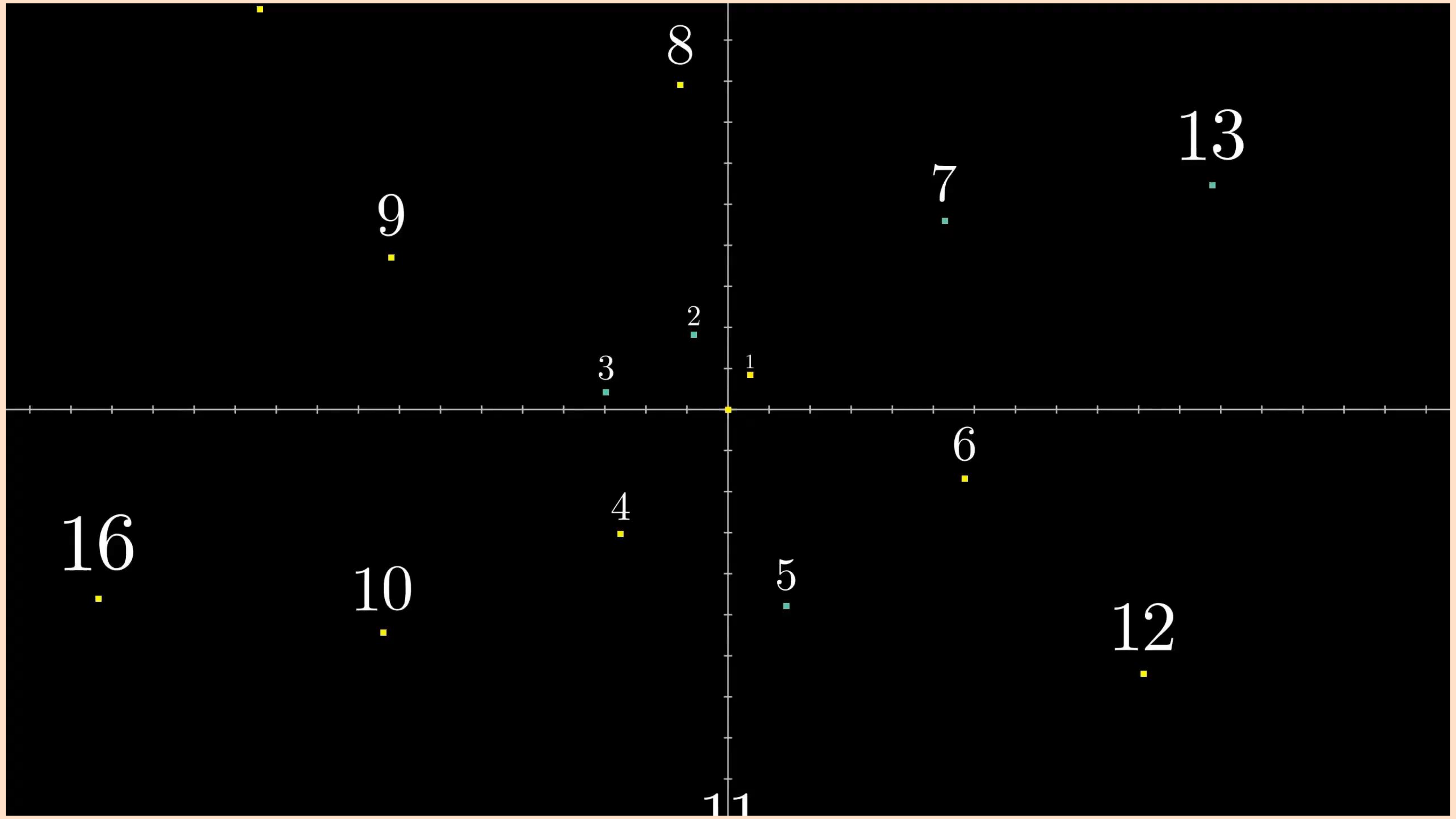
- **Теоријата на мултипликативните броеви** се занимава со распределбата на простите броеви , како што е проценување на бројот на прости броеви во интервал, и ги вклучува теоремата за прости броеви и теоремата на Дирихле за прости броеви во аритметичките прогресии.

- **Теоријата на адитивни броеви** се занимава со адитивната структура на цели броеви, како што е претпоставката на Голдбах. Еден од главните резултати во теоријата на адитивни броеви е решението на проблемот на Воринг



Што се прости броеви

- За природниот број p ќе велиме дека е прост ако има точно два природни делители.
- За природниот број n кој има повеќе од два прости делители ќе велиме дека е сложен.
- Понатаму, секој природен број n>1 има најмалку два природни делители 1 и n, што значи дека секој природен број n>1 е прост или сложен.
- Меѓутоа, бројот 1 има точно еден природен делител, па затоа тој не е прост и не е сложен број.
- Според тоа, множеството природни броеви е поделено на три дисјунктни множества и тоа: прости броеви, сложени броеви и бројот 1.



Графичко претставување на простите броеви

Теорема за прости броеви

Во математиката, теоремата за прости броеви ја опишува асимптотската распределба на простите броеви меѓу позитивните цели броеви. Ја формализира интуитивната идеја дека простите броеви стануваат поретки како што се поголеми со прецизно квантифицирање на брзината со која се случува овој процес.

Нека $\pi(x)$е функција дефинирана како број на прости броеви помал или еднаков на x, за кој било реален број x . На пример, $\pi(10) = 4$ затоа што има четири прости броеви (2, 3, 5 и 7) помали или еднакви на 10.

Теоремата за прости броеви тогаш вели дека $\frac{x}{\ln(x)}$ е добра приближување на $\pi(x)$, во смисла дека границата на количникот на двете функции, како x се зголемува без граница е 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\left[\frac{x}{\ln(x)}\right]} = 1$$

познат како асимптотички закон за распределба на прости броеви. Користејќи асимптотичка нотација, овој резултат може да се искаже како $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

Теорема за прости броеви

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Ова значи дека за доволно голем n , веројатноста дека случаен цел број, не поголем од n, е прост е многу блиску до $\frac{1}{\ln(n)}$. Следствено, случаен цел број со најмногу 2n цифри (за доволно големи n) има приближно половина поголема веројатност да биде прост споредено со случаен цел број со најмногу n цифри.

Во 1838 година, Дирихле дошол со своја апроксимативна функција - логаритамскиот интеграл

$$Li\ (x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

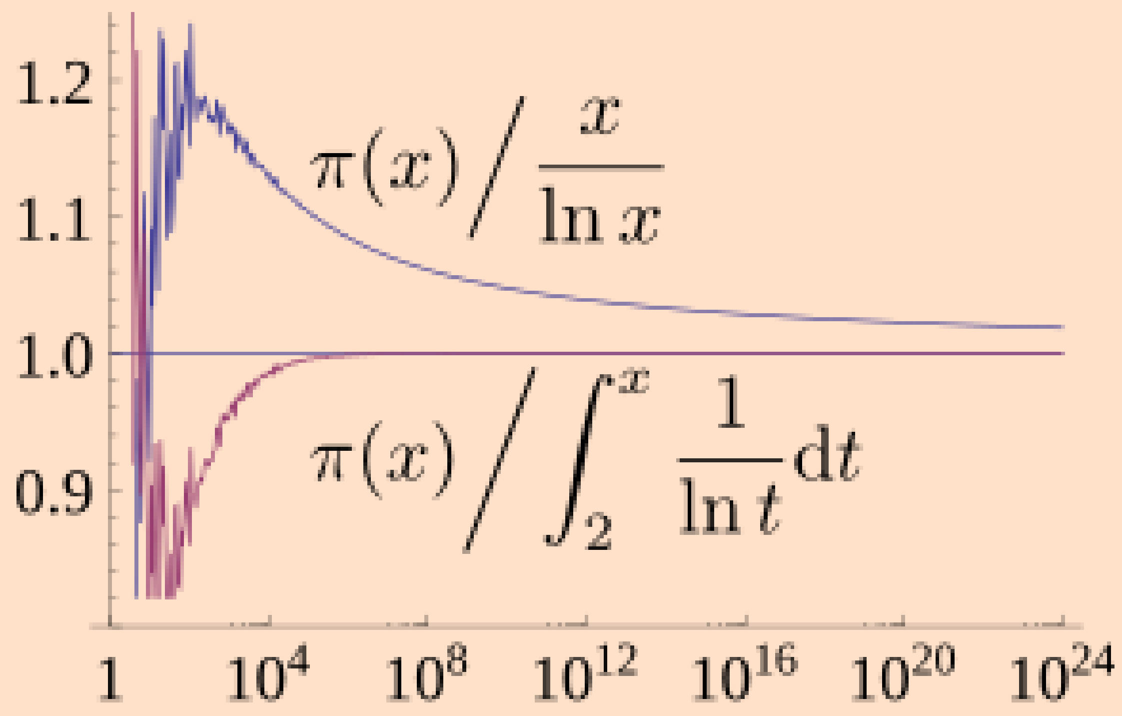


График кој го прикажува односот на функцијата за броење прости $\pi(x)$ до две нејзини приближувања, $\frac{x}{\ln x}$ и $Li\ (x)$. Како што се зголемува x, двата соодноси тежнеат кон 1. Односот за $\frac{x}{\ln x}$ конвергира одозгора многу бавно, додека односот за $Li\ (x)$ побрзо конвергира одоздола.

Дирихлев ред

Во областа на математичката анализа, за овј проблем, ќе се служиме со специјален вид на Дирихлев ред, таканаречен L - ред:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$\chi(n)$ – комплексна функција $\chi\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, која ја нарекуваме Дирихлев карактер на модул m (позитивен цел број)

s – комплексен број

Најпознат пример за овој вид е Римановата ζ (зета) функција

Риманова Зета функција

Риманова зета функција или Ојлер-Риман зета функција, означена со грчката буква ζ (зета), е математичка функција на сложена променлива дефинирана како:

$$\boldsymbol{\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots}$$

Римановата зета функција игра клучна улога во аналитичката теорија на броеви и има примена во физиката, теоријата на веројатност и применетата статистика. Леонхард Ојлер првпат ја вовел и проучувал функцијата над реалните броеви во првата половина на XVIII век. Во 1859, Риман преку својот труд, ја проширил Ојлеровата дефиниција на сложените променливи, но и ја вовел Римановата хипотеза, претпоставка за распределбата на сложените нули на Римановата зета функција која многу математичари ја сметаат за најважен нерешен проблем во чистата математика.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12} ????$$

$$\zeta(-1) \ - \text{подоцна}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Проблемот на Базел)

$$\zeta(2)$$

$\zeta(1)$ се добива хармониски ред, кој знаеме е дивергентен ред

За сега ќе игнорираме за вредности за $s < 1$

Ојлеров производ

Во 1737 година, врската помеѓу ζ функцијата и простите броеви била откриена од Ојлер, кој го докажал идентитетот:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ прост}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

каде што, по дефиниција, левата страна е $\zeta(s)$ и бесконечниот производ на десната страна се протега над сите прости броеви p (Ојлеров производ):

$$\prod_{p \text{ прост}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} * \frac{1}{1-3^{-s}} * \frac{1}{1-5^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Двете страни на формулата на Ојлеровиот производ се спојуваат за $Re(\ s) > 1$. Доказот за идентитетот на Ојлер ја користи само формулата за геометриски ред и основната теорема на аритметиката . Бидејќи хармонискиот ред дивергира, формулата на Ојлер (која станува $\Pi_p \frac{p}{p-1}$) имплицира дека има бесконечно многу прости броеви.

Формулата на Ојлеровиот производ може да се користи за пресметување на асимптотичната веројатност да s случајно избраните цели броеви да се заемно прости. Интуитивно, веројатноста дека секој единечен број е делив со прост (или кој било цел број) p е $\frac{1}{p}$. Оттука, веројатноста сите s броеви да се деливи со овој прост е $\frac{1}{p^s}$, а веројатноста барем еден од нив да не е, изнесува $1 - \frac{1}{p^s}$

Така, асимптотичната веројатност дека броевите s се заемно прости се дадени Ојлеровиот производ е:

$$\prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \left(\prod_{p \text{ прост}} \frac{1}{1-p^{-s}}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Развој во комплкесните броеви

Да се вратиме на $\boldsymbol{\zeta(2)}$, кој по случајност даде ред, чие решение е решението на Базелскиот проблем, решен од Ојлер во 1734 година:

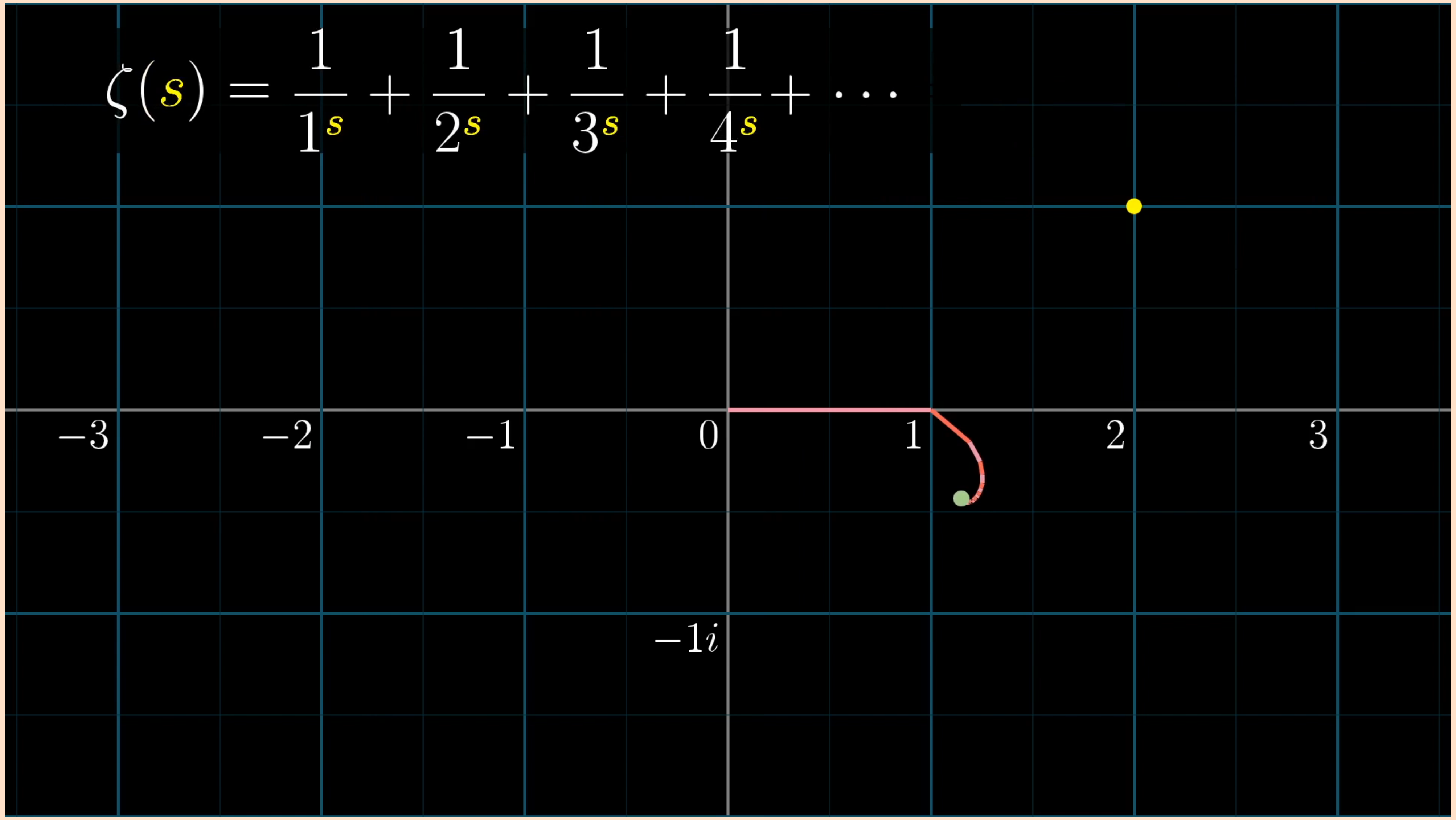
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Што ако земеме $\boldsymbol{\zeta(2+i)}$?

$$\boldsymbol{\zeta(2+i)}=\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n^{2+i}}}=1+\frac{1}{2^{2+i}}+\frac{1}{3^{2+i}}+\frac{1}{4^{2+i}}+\cdots$$

Сите членови може да се разделат на $\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^i$, па освен движењето во една насока по реалниот дел (x − оската), има некаква ротација (од имагинарната единица).

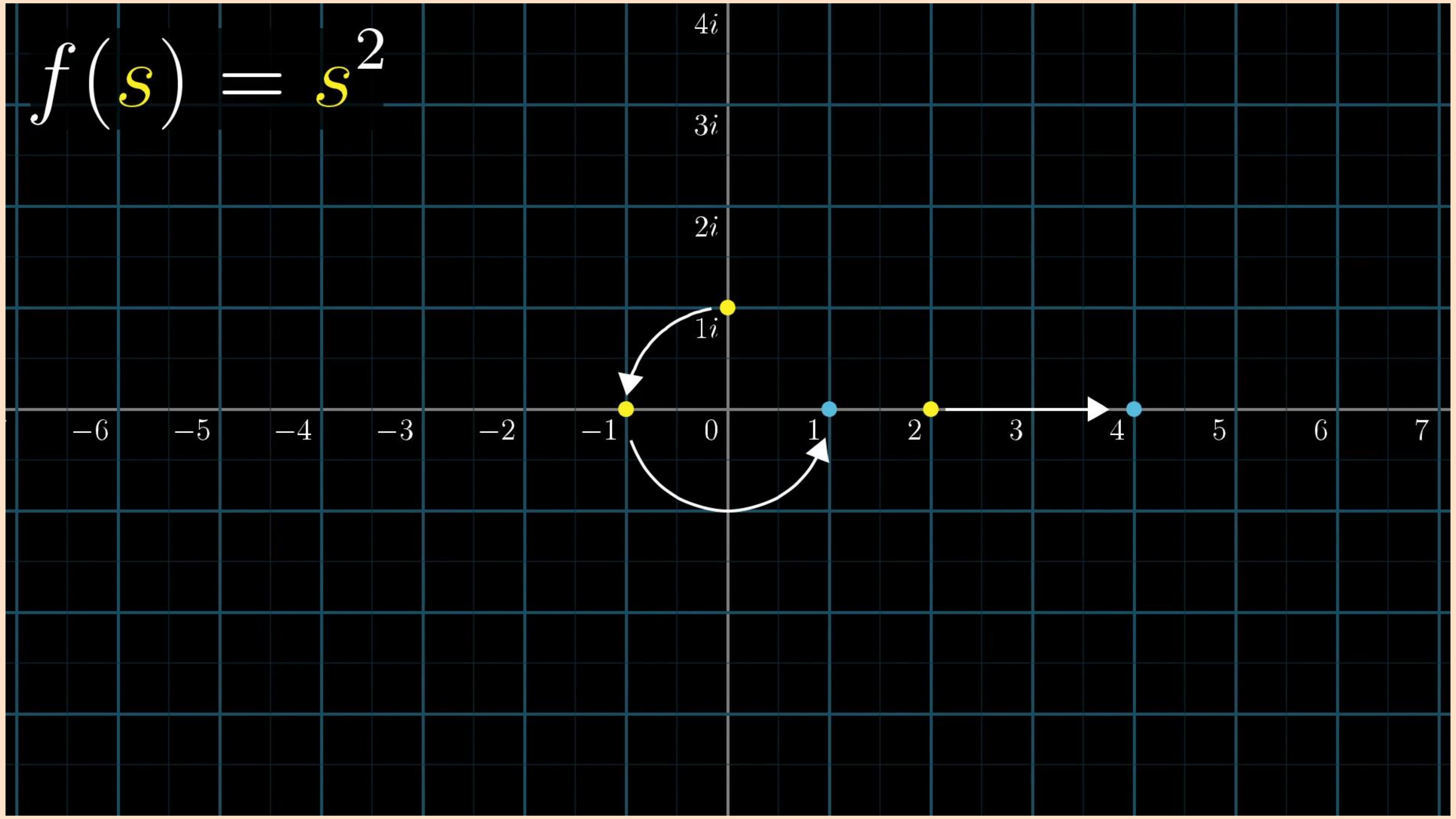
Визулено, жолтата точка претставува комплексниот број s и како оваа зета функција се однесува според вредноста:



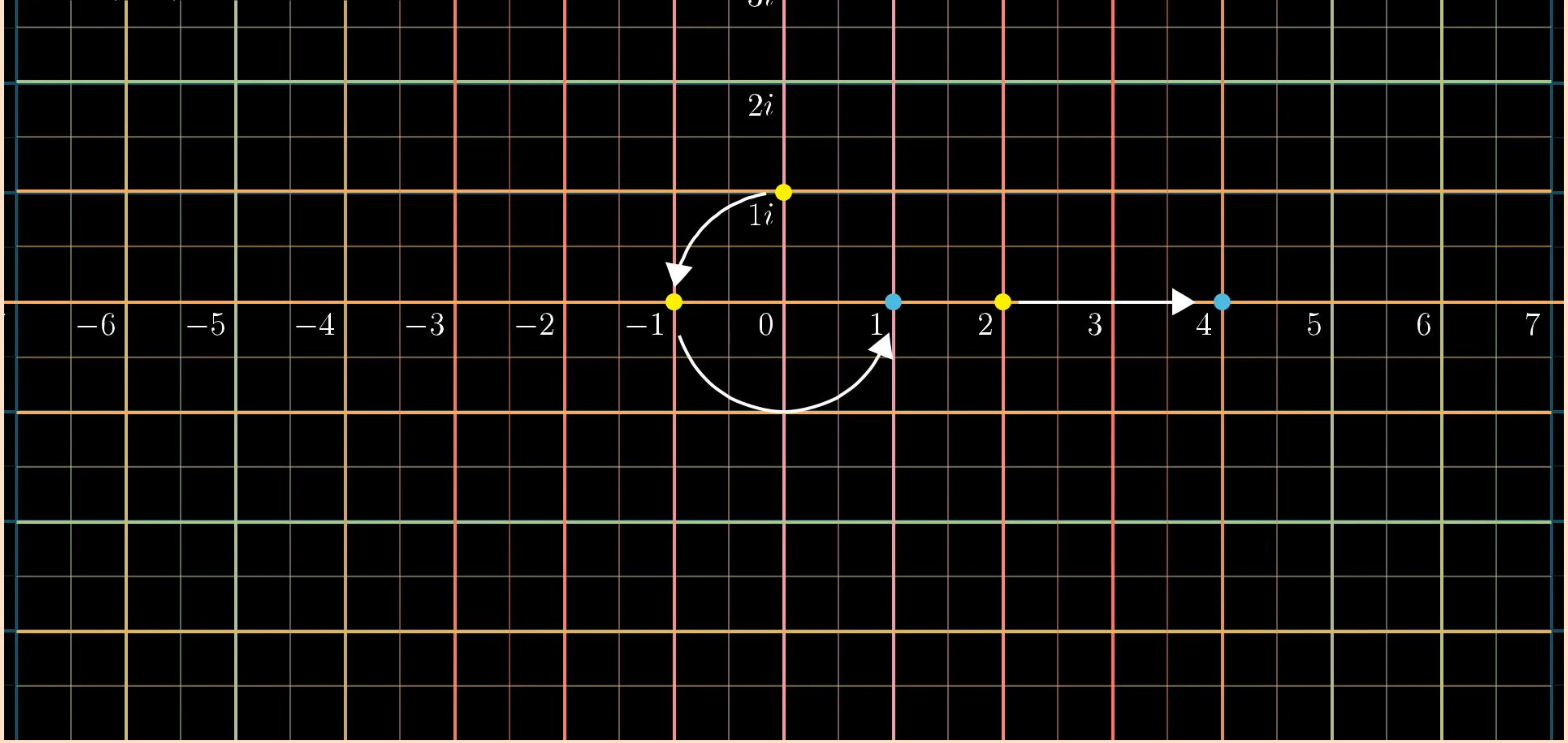
Визуелизација на комплексни функции

Подолу е прикажано всушност како изгледа една трансформација од реалната рамнина во комплексна рамнина. Пример е дадено $f(s) = s^2$. Овде жолтата точка е s, а сината е $f(s)$.

На следниот слајд е анимација од тоа како се „трансформира“.

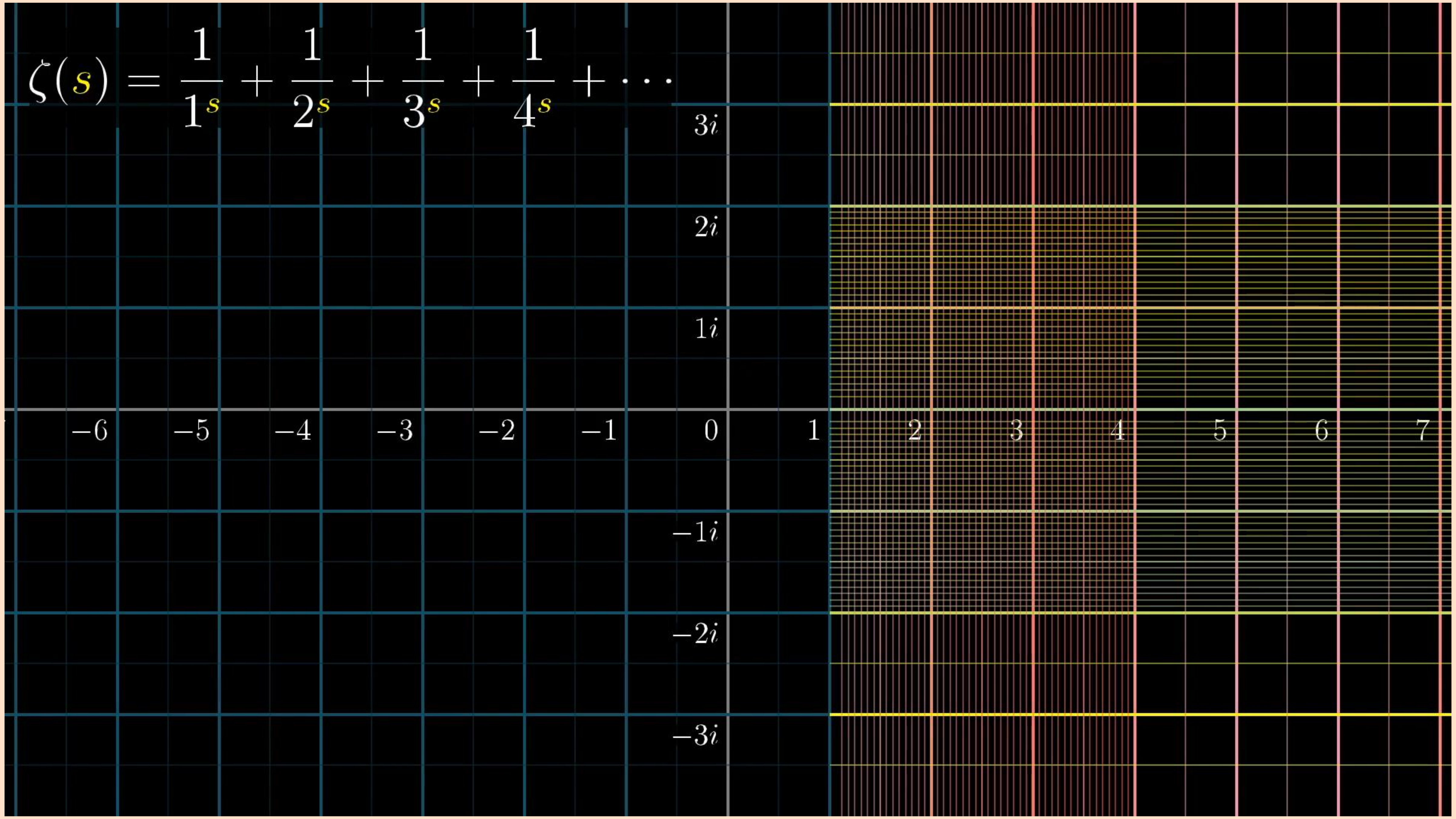


$$f(s) = s^2$$



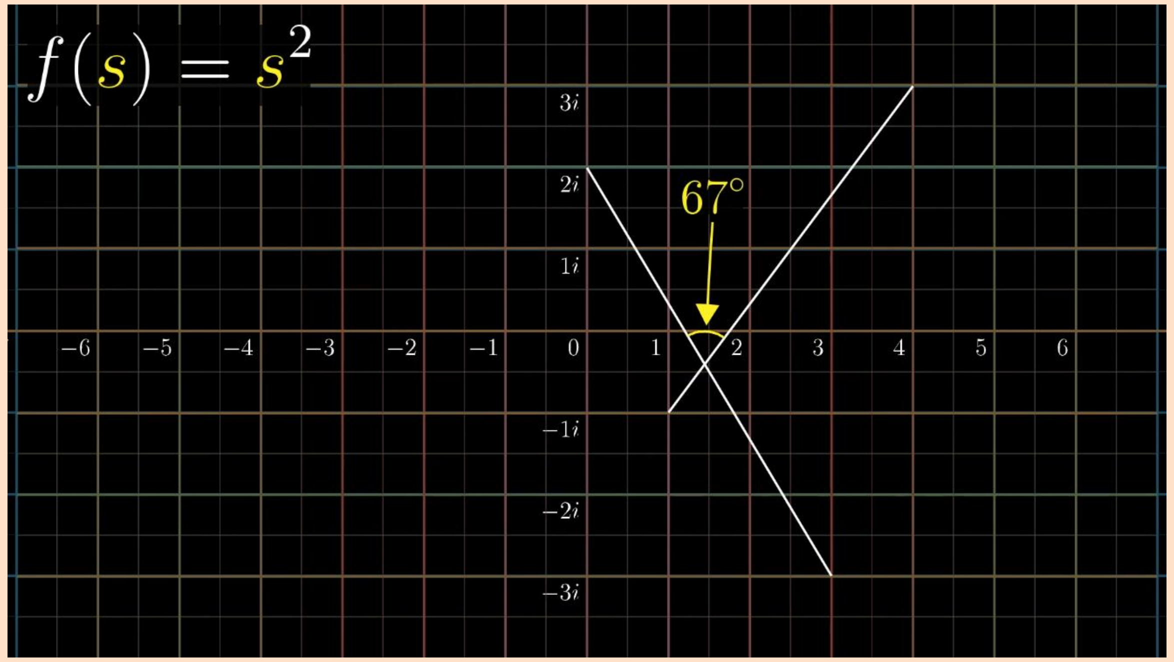
Визуелизација на $\zeta(s)$

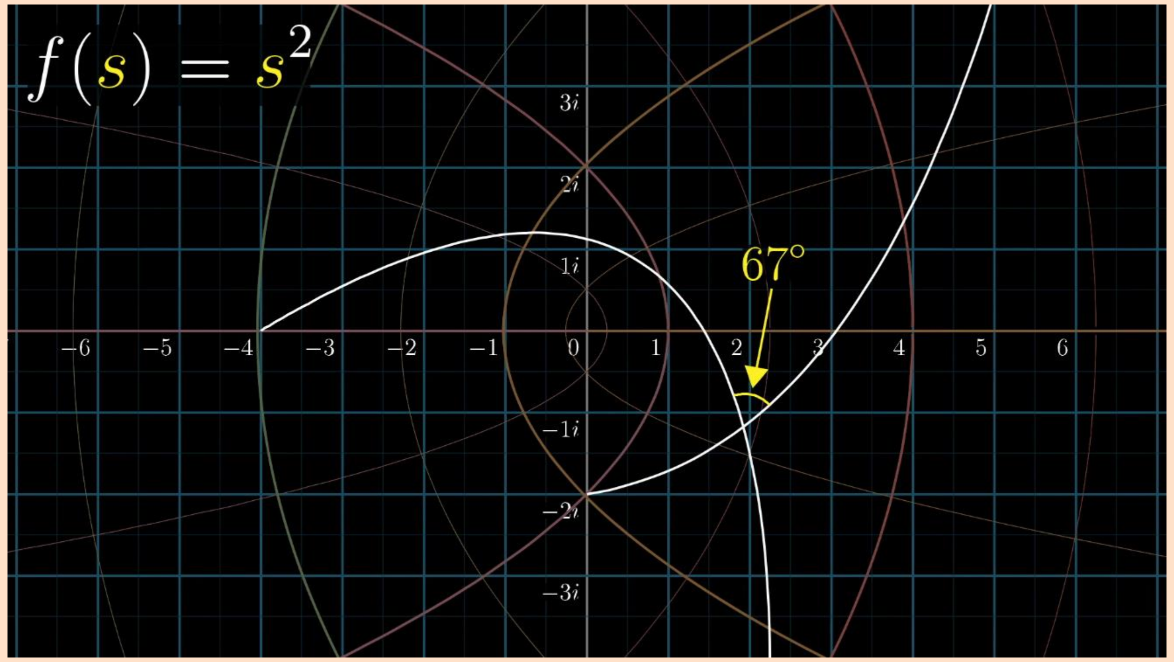
Од претходното за Зета функцијата, видовме дека сите вредности „лежат десно од 1“ (реалниот дел на s>1), па ако на неа извршиме трансформација ја добиваме:



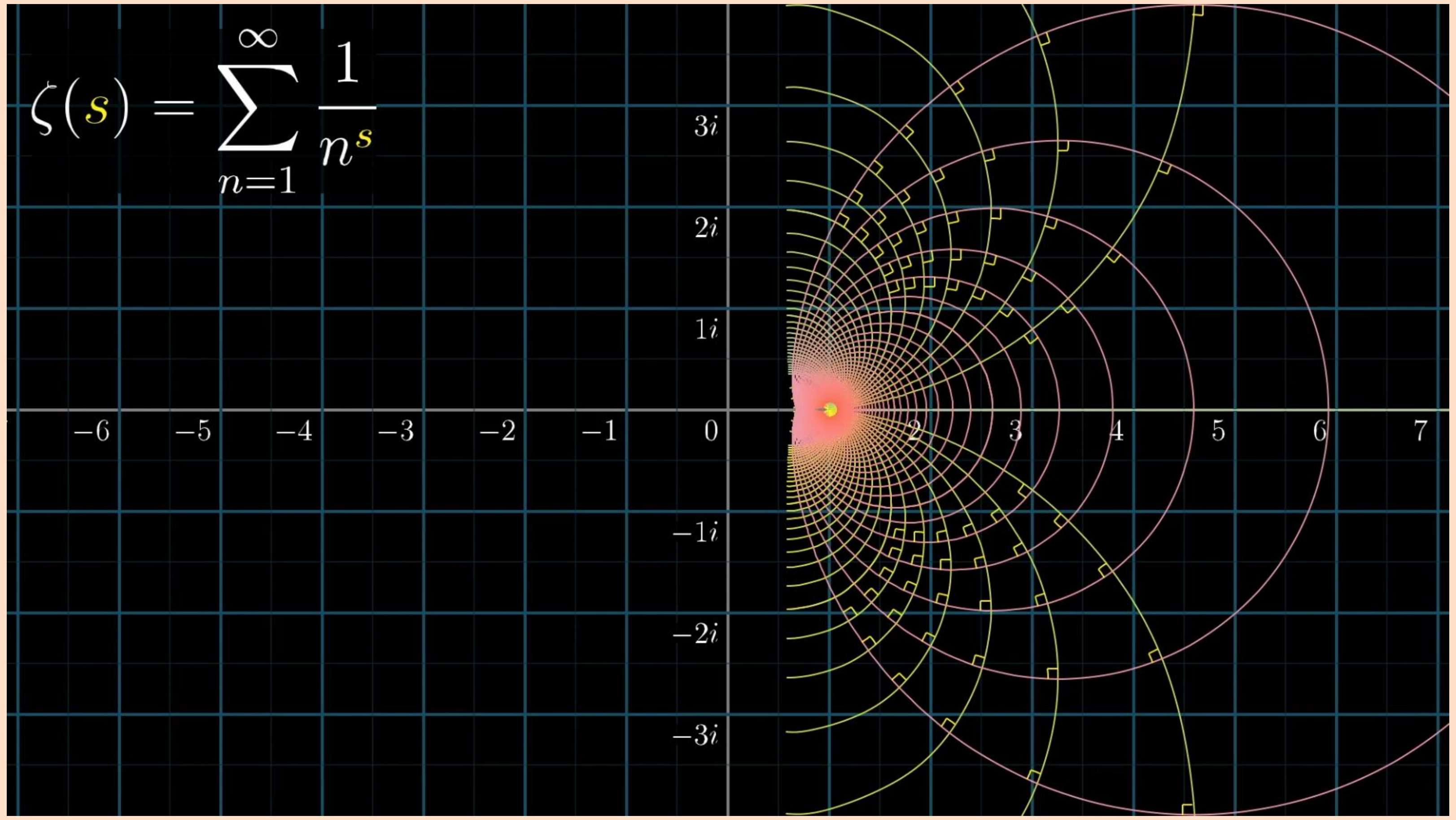
Што ако сакаме да го прошириме интервалот?

Ние можеме некако да си играме со функцијата и да направиме како рефлексива во однос на $Re(s) = 1$.



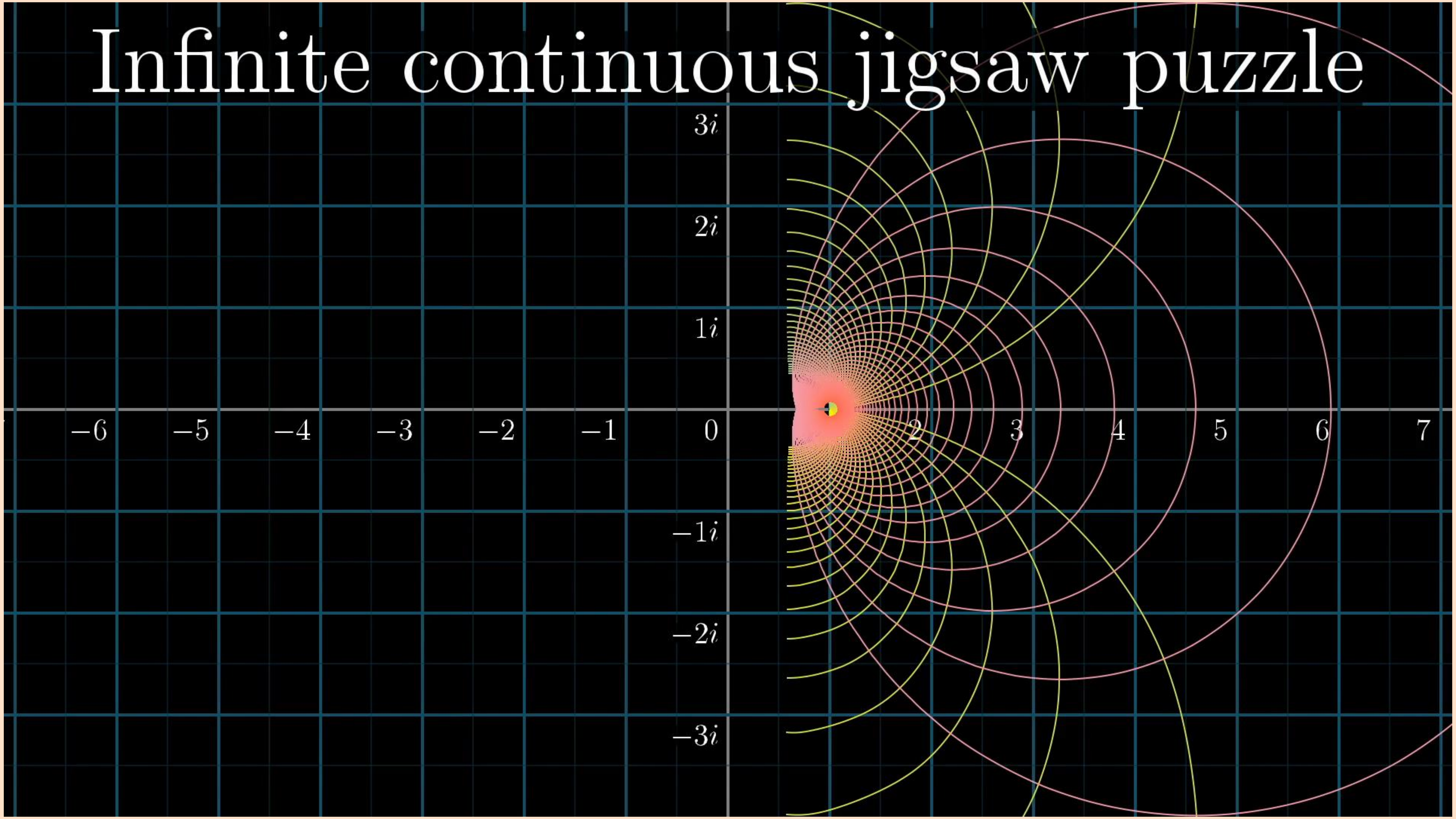


Постојат повеќе идеи, но она што е конзистентно е искористување на едно својство што важи и во комплексните фунцкии, а тоа е:
Две прави, што се сечат под даден агол, ќе се сечат со истиот агол по трансформацијата од едното во другото поле (чување на агол).



Вака ќе бидеме затворени, за да се најде само еден и единствен начин на проширување на функцијата.

Што ако сакаме да го прошириме интервалот?



Визуелизација на $\zeta(s)$

Интересното за комплексните функции е, ако сакаме да ја прошириме аналитичката функција (ф-ја која има изводи насекаде) над доменот на кој е дефинирана (конкретно $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{s})$ да се дефинира лево од 1), тогаш опстојувањето на ова аналитичко својство т.е. чувањето на аголот на секоја точка, ќе не форсира на тоа едно проширување, доколку постои. Овој процес е аналитчко проширување.

На ваков начин ја дефинираме целосната Зета функција. За $s > 1$, сумата конвергира кон некоја спирална вредност, видена претходно. За останатите вредности, знаеме дека постои еден и само еден начин на аналитичко проширување на функцијата.

Математичарите имаат некоја идеја и дофат како изгледа оваа проширување:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)$$

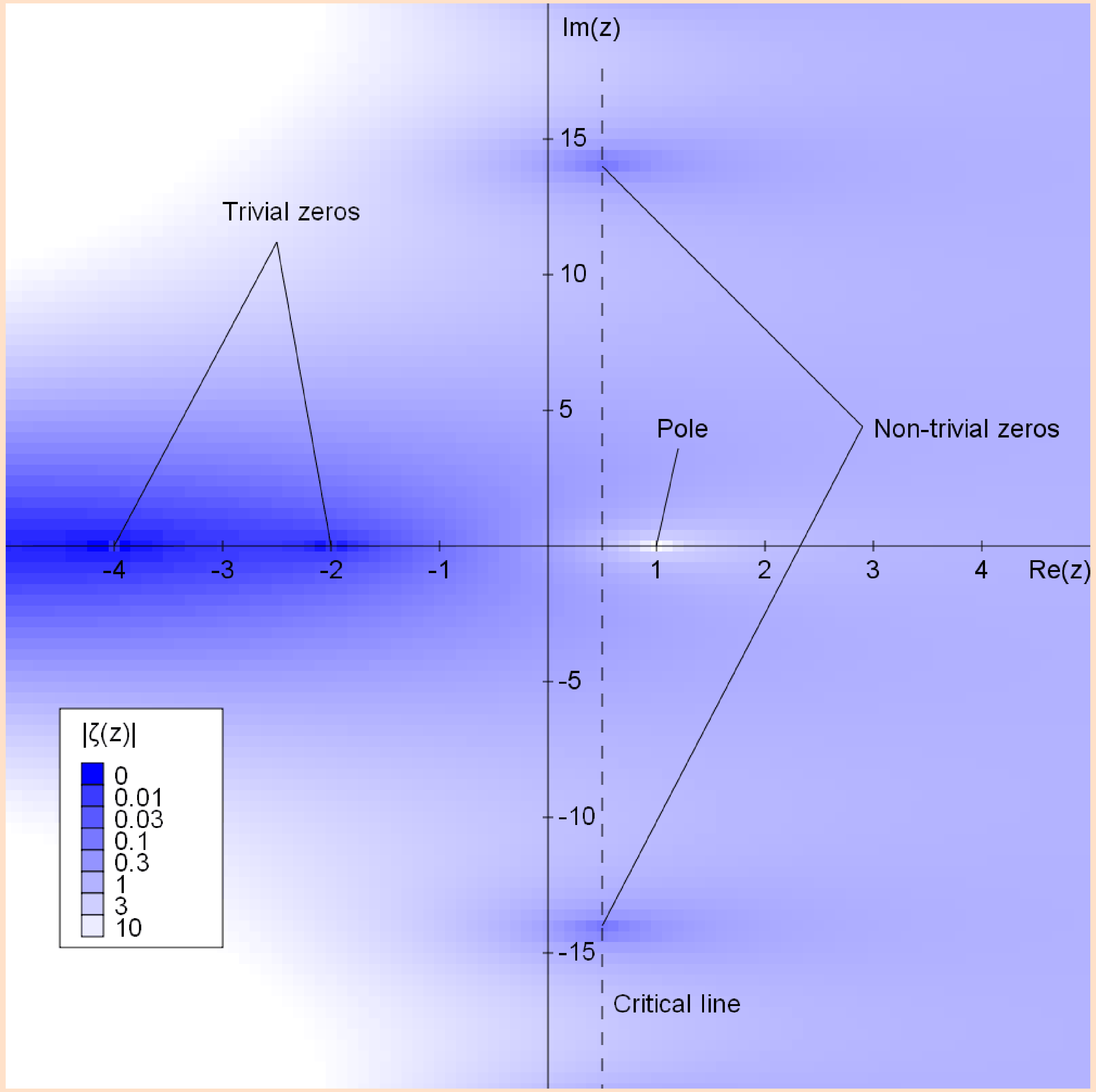
Но сепак ова ќе не донесе до милионерскиот проблем!

Што е Римановата хипотеза?

Во математиката, Римановата хипотеза е претпоставката дека Римановата ζ функција има нули само кај негативните парни цели (тривијални нули) и сложени броеви со реален дел ½ (нетривијални нули и проблем на истражување).

Синусовиот член е еднаков на 0 за негативни парни броеви, предизвикувајќи зета функцијата да биде еднаква на нула. За 1, функцијата зета формира нешто што се нарекува пол (англ. singularity), така што тие се исклучени.

Римановата зета функција игра клучна улога во аналитичката теорија на броеви и има примена во физиката, теоријата на веројатност и применетата статистика.

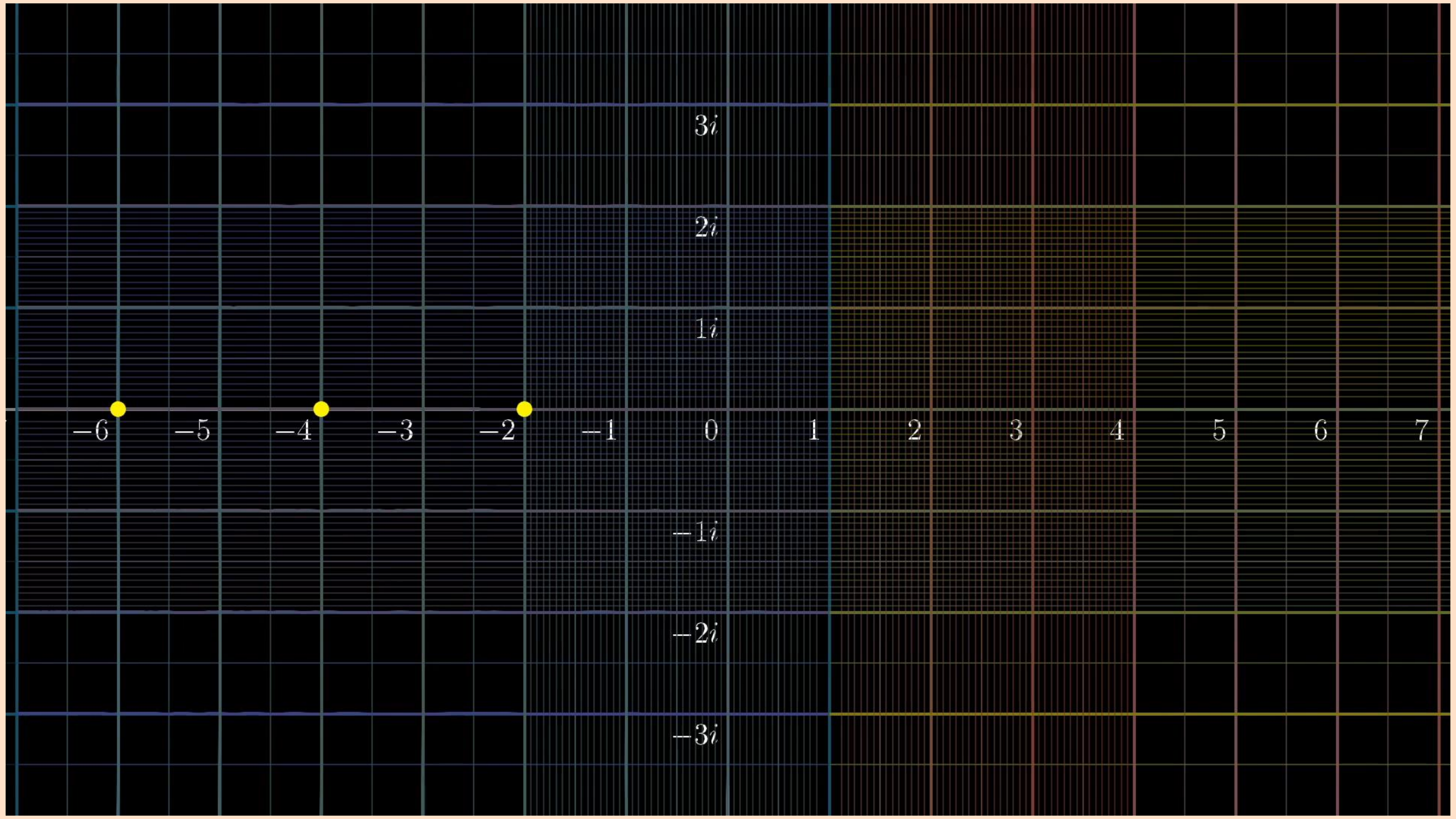


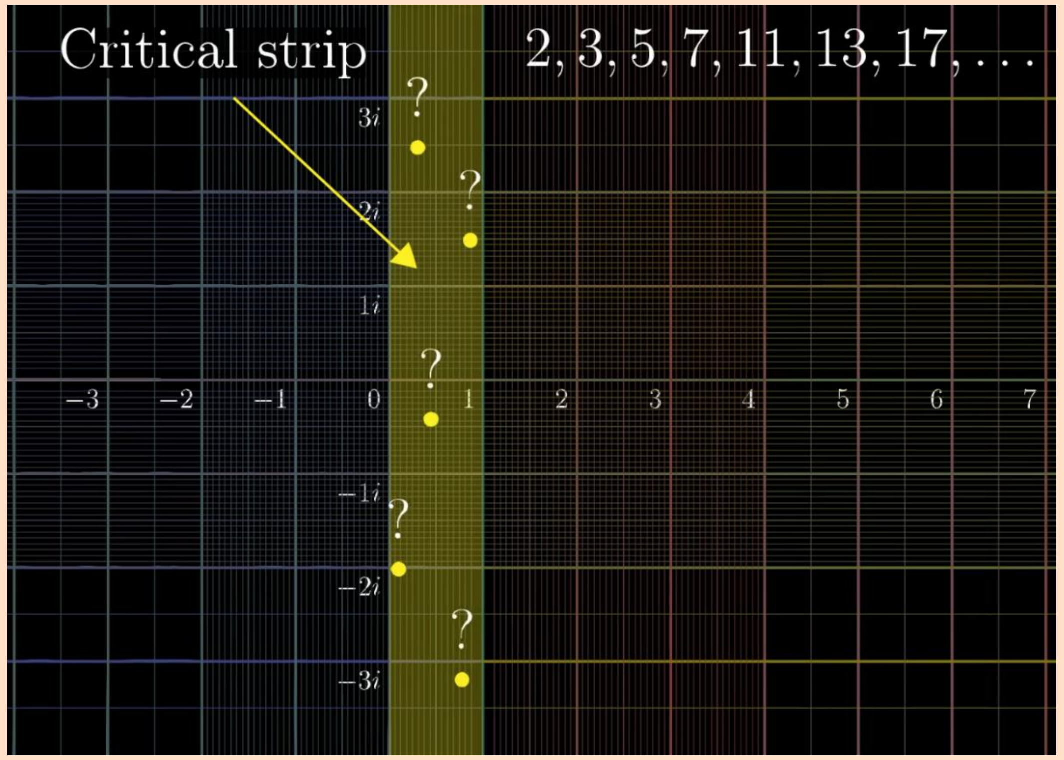
$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

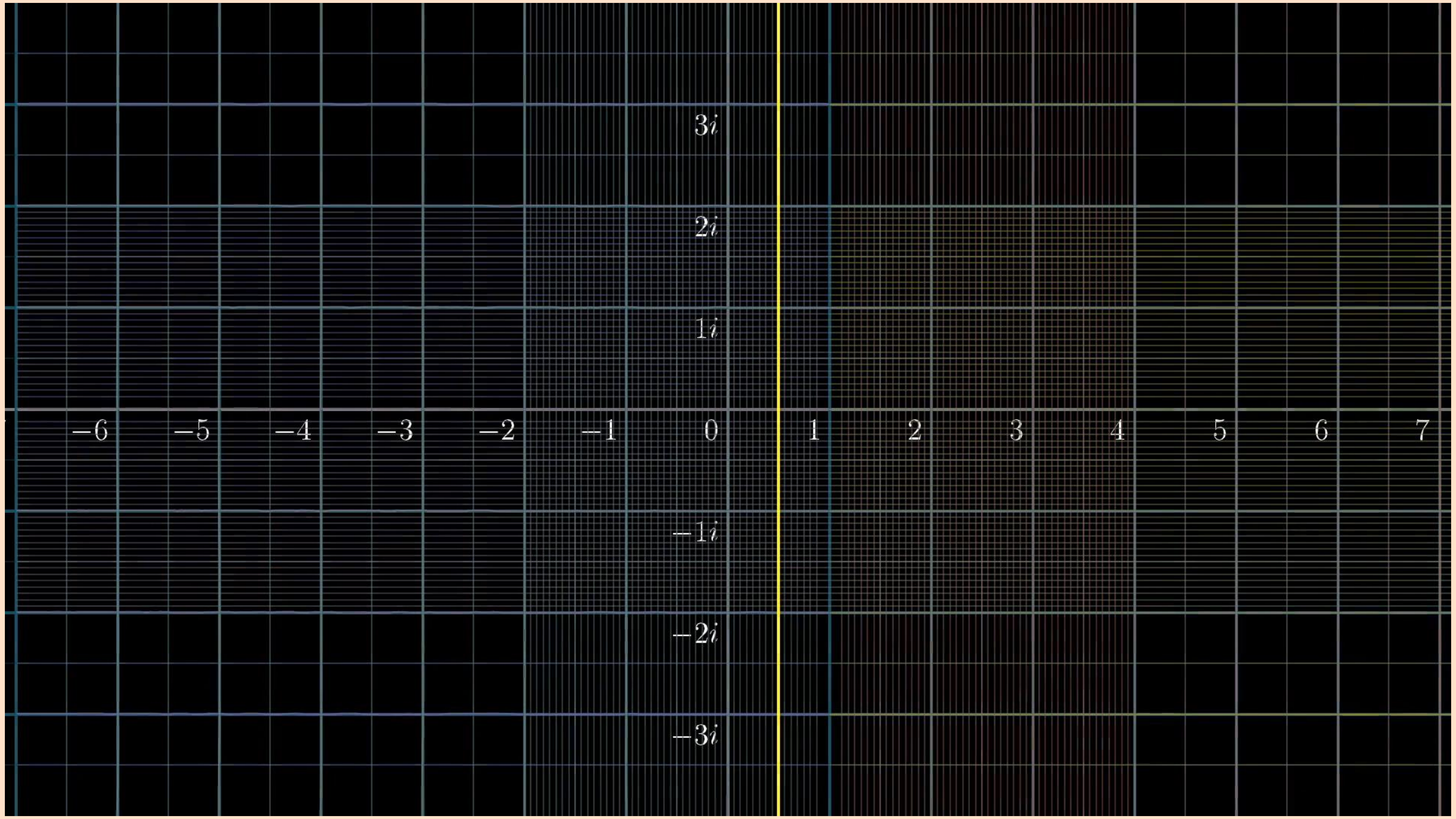
Што е Римановата хипотеза?

За нетривијалните нули, регионот $0 < Re(s) < 1$ е таканаречен „критичен регион“, а хипотезата сугестира дека сите нули имаат $Re(s) = \frac{1}{2}$ („критична линија“). Со досегашните истражувања, (последни релевантни во 2004) ова е точно за $2.4 * 10^{12}$ вредности на $Im(s)$.

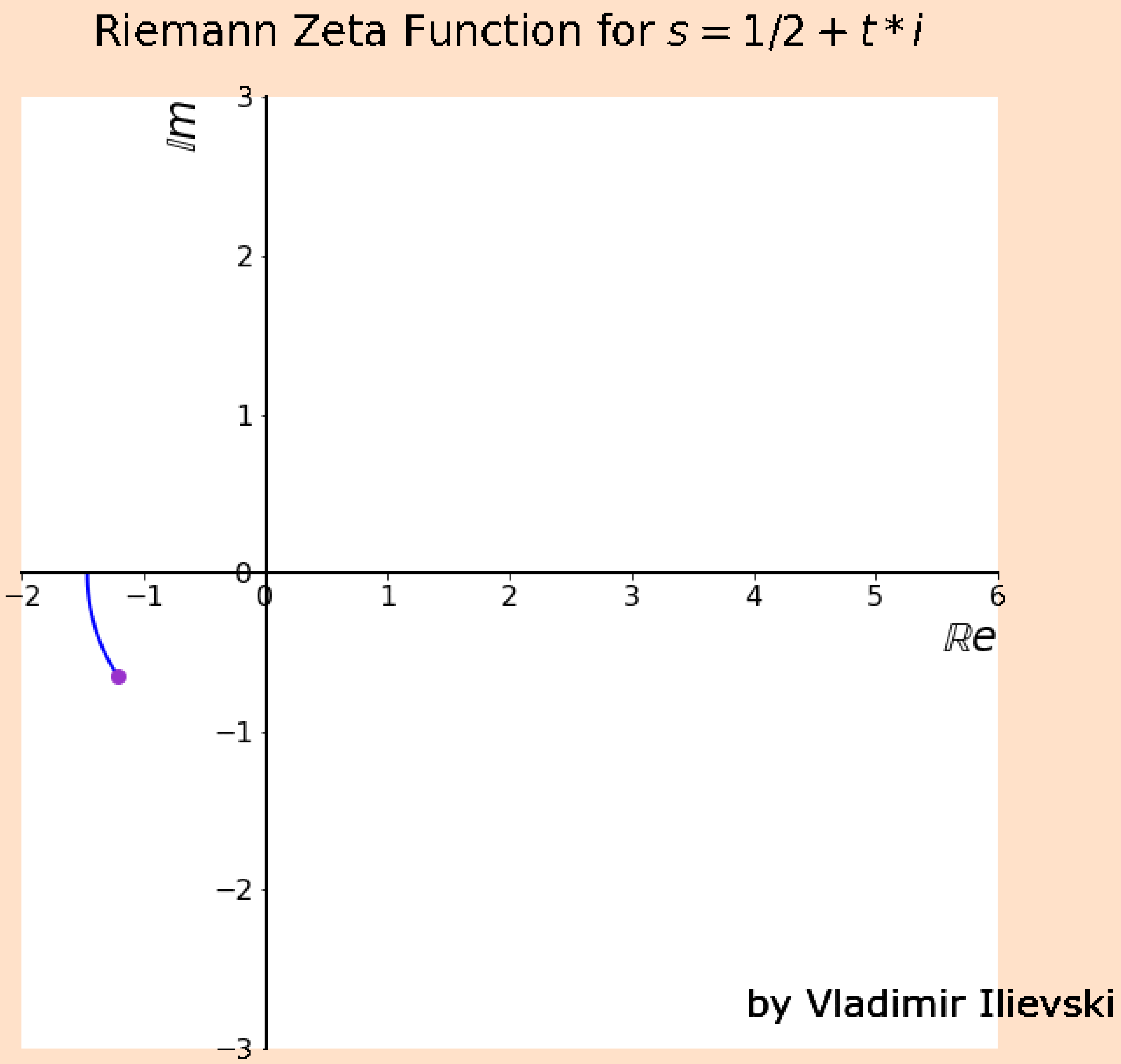
Сега се поставува прашање, како ќе изгледа правата $x = \frac{1}{2}$, по „трансформацијата“ од една во друга рамнина?







Можеби не изгледа дека ќе минува низ нула, но ако ја продолжиме патеката (таа започнува под -1 во видеото), таа ќе изгледа нешто вака:



Ако успеете математички да докажете дека **сите** нетривијални нули ќе лежат на оваа права, тогаш Математичкиот Институт Клеу (Clay Mathematics Institute (CMI)) ќе ве наградат со 1 милион долари, за решавање еден од „Милениуските проблеми“ и бидете одговорниот за решението на илјадници проблеми поврзани со простите броеви, кои се потпираат на оваа теорема, под претпоставка дека е точна.

Зошто Римановата хипотеза и простите броеви?

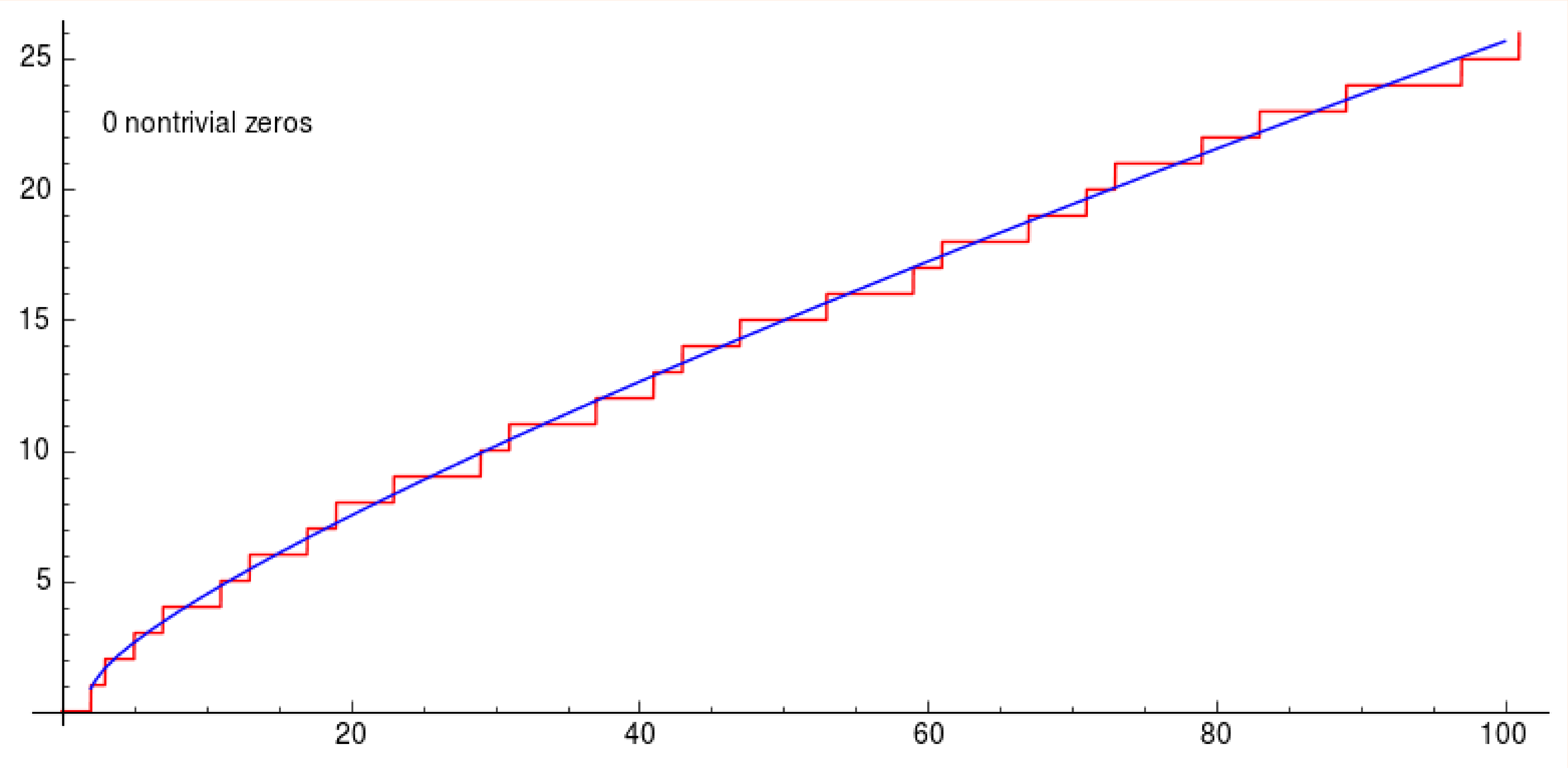
Од претходно спомнатото, оваа хипотеза ја отклучува тајната за:

Разбирање на празнините меѓу простите броеви:
Грешката во приближувањето и осцилациите во експлицитните формули се поврзани со тоа колку „редовно“ или „нередовно“ се распределени простите броеви. При Римановата хипотеза, колебањата во функцијата за броење на простите броеви ($\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$) се ограничени. Ова значи дека празнините меѓу последователните прости броеви може да се предвидат со поголема точност во просек, иако секоја поединечна празнина може да варира.

Предвидливост и случајност:
Иако простите броеви може да изгледаат распределени на случаен начин, границите на грешка при Римановата хипотеза укажуваат на одредена „статистичка редовност“. Во суштина, ако таа е вистинита, тогаш простите броеви не одстапуваат многу од нивната просечна густина, како што ја предвидува теоремата за простите броеви, што ја прави целокупната распределба посистематизирана на статистички начин.

Зошто Римановата хипотеза и простите броеви?

Ако ја земеме Гаусовата функција за дистрибуцијата на простите броеви и ја модифицираме така што наместо дискретен скок од 1 ќе има зголемување за log(x) (ако x е прост број) – графикот со црвена боја, добиваме подобра аналитичка репрезентација на распределбата на прости броеви (преку $\zeta(s)$, за $s = 1$).



Што значи ова? – Предвидливоста што ја зборуваме постојано за простите броеви.

Зошто Римановата хипотеза и простите броеви?

RSA шифрирање:
Модерните методи за шифрирање, како RSA, се базираат на тешкотијата при факторизација на големи композитни броеви. Безбедноста на RSA зависи од непредвидливата распределба на простите броеви.

•**Генерирање на клучеви:**
Ефикасните алгоритми генерираат големи прости броеви со користење на веројатносни тестови (како Miller–Rabin тестот). Изведбата и сигурноста на овие тестови се поткрепени со нашето разбирање на густината на простите броеви.

•**Проценки за густина на простите броеви:**
Благодарение на резултатите од теоремата за простите броеви и пофини оценувања на грешката преку нулите на $\zeta(s)$, знаеме дека за големи броеви x, веројатноста случајно избран број n во околина на x да биде прост е приближно $\frac{1}{\log(x)}$. На пример, за x околу 10^{12}, се очекува приближно еден прост број на секои 28–30 броеви, што ги води алгоритмите за пребарување на криптографски прости броеви.

•**Ефикасност на алгоритмите:**
Подобрени оценувања на грешката во теоремата за простите броеви (благодарение на точната улога на нулите на $\zeta(s)$) доведуваат до ефикасни алгоритми за тестирање на простите броеви и за факторизација. Иако Римановата хипотеза уште не е докажана, нејзината сметана вистина им овозможува на криптографите да дадат силни веројатносни гаранции за распределбата на простите броеви, што води кон посилни шеми за шифрирање.

Примена во физика

Во трудот „*Риманова хипотеза: Веројатност, физика и прости броеви*“, Жустина Р. Јанг ја истражува поврзаноста на Римановата хипотеза со статистиката, веројатноста и физиката. Во воведот истакнува дека идеи од овие области, особено од теоријата на веројатност и физиката на субатомски честички, можеби ќе помогнат во нејзиното решавање.

Еден важен дел од трудот се фокусира на откритието на Хју Монтгомери во 1972 година. Тој ја проучувал распределбата на нулите на зета-функцијата и открил дека тие се однесуваат исто како и сопствените вредности на случајни Ермитови матрици, што ги опишуваат енергетските нивоа на атомските јадра. Оваа поврзаност ја забележал физичарот Фриман Дајсон, што довело до идејата дека нулите на зета-функцијата можат да имаат физичко значење.

Овој резултат ја поддржува *Хилберт-Полијевата хипотезата*, која вели дека нулите на зета-функцијата можеби се поврзани со спектарот на некој физички оператор. Доколку ова е точно, тоа би значело дека постои длабока врска помеѓу простите броеви и квантната механика. Понатаму, трудот разгледува и поврзаноста на Римановата хипотеза со квантниот хаос, сугерирајќи дека физиката и случајните матрици можат да понудат нов пристап кон решавање на оваа математичка мистерија.

ПРАШАЊА?

Ви благодарам за вниманието