

Matematikk 2 Prosjekt

Ole Jonas Liahagen, Martin J. Nilsen, Max T. Schau, Simon Årdal

Våren 2020

Innholdsfortegnelse

1 Forord	4
2 Innledning	5
3 Teori	6
3.1 Euler-Bernoulli-likningen	6
3.2 Taylor's teorem	6
3.3 Definisjon av den deriverte	8
3.4 Skjæringssetningen	9
3.5 Randbetingelser	10
3.5.1 Den faste enden	10
3.5.2 Den frie enden	10
3.6 Feilkilder	11
3.6.1 Forover -og bakoverfeil	11
3.6.2 Relativ bakover- og foroverfeil	12
3.6.3 Feilforstøringsfaktor	13
3.6.4 Maskin-epsilon	13
3.6.5 Kondisjonstall	14
3.7 Analyse av likninger i sammenheng med Oppgave 1	14
4 Resultater	19
4.1 Oppgave 1	19
4.1.1 Fremgangsmåte for oppgave 1	19
4.1.2 Utregninger for Oppgave 1	21
4.2 Oppgave 2	25
4.3 Oppgave 3	27
4.4 Oppgave 4	31
4.4.1 Oppgave a	31
4.4.2 Oppgave b	32
4.4.3 Oppgave c	33
4.4.4 Oppgave d	35
4.5 Oppgave 5	37
4.6 Oppgave 6	39
4.6.1 Oppgave a	39
4.6.2 Oppgave b	42
4.6.3 Oppgave c	43
4.6.4 Oppgave d	45

4.6.5	Oppgave e	46
4.6.6	Oppgave f	46
4.7	Oppgave 7	47
5	Konklusjon	49
6	Referanseliste	50
7	Vedlegg	52
7.1	Oppgave 2	52
7.2	Oppgave 3	53
7.3	Oppgave 4	54
7.4	Oppgave 5	55
7.5	Oppgave 6b	56
7.6	Oppgave 6c	58
7.7	Oppgave 6d	60
7.8	Oppgave 7	61

1 Forord

Denne rapporten er skrevet i emnet TDAT2002, Matematikk 2, ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Vi vil først starte med å takke Dag Olav Kjellemo, universitetslektor ved NTNU, for å ha bistått og veiledet oss.

Å skrive rapporten har bydd på sine utfordringer. Ettersom universitetet har vært stengt ned grunnet coronaviruset som har herjet verden den siste måneden, har vi måttet finne nye måter å samarbeide på. Ettersom gruppens medlemmer har reist hjem til sine respektive hjemsteder rundt om i landet har vi ikke kunnet møtes fysisk. Dette har vi løst ved å ha planlagte møter over nett der vi har kunnet snakke sammen og diskutere, noe som er essensielt for å kunne samarbeide på best mulig måte. Det å opprettholde rutiner, samt ha et forum for en prat, har vært positivt både for arbeidet med prosjektet, men også vært viktig for skolehverdagen i disse ekstraordinære tider.

Til slutt vil vi rette en takk til våre medstudenter. For ikke bare har vi diskutert innad i gruppa, men også med andre medstudenter. Vi har lært og diskutert sammen, samt hatt muligheten til å sammen reflektere over og løse oppgavene vi har blitt gitt.

2 Innledning

Denne rapporten inneholder en rekke oppgaver knyttet til Euler-Bernoullibjelken, der vi utforsker både hvordan bjelken påvirkes av sin egen vekt, og senere også med ekstra vekt.

Det vil bli beskrevet hva som har blitt gjort i arbeidet med prosjektet, i tillegg til hvordan de gitte oppgavene har blitt løst. Etter innledningen følger det et kapittel med teorien som har fungert som et fundament for løsningene av oppgavene.

Videre følger det et kapittel som beskriver de ulike resultatene vi har fått, der vi forklarer hvorfor disse resultatene blir som de blir. Avslutningsvis følger det et kapittel bestående av referanser, i tillegg til vedlegg som er relevante for oppgaven.

3 Teori

3.1 Euler-Bernoulli-likningen

Euler-Bernoulli-likningen er en modell for hvordan en bjelke oppfører seg under påvirkning av krefter som virker langs akse til bjelken (aksiale krefter). Selve likningen ble utviklet på 1750-tallet, og er fortsatt en av de mest brukte modellene for analyse av oppførselen til bjelker under påvirkning av krefter. [5b]

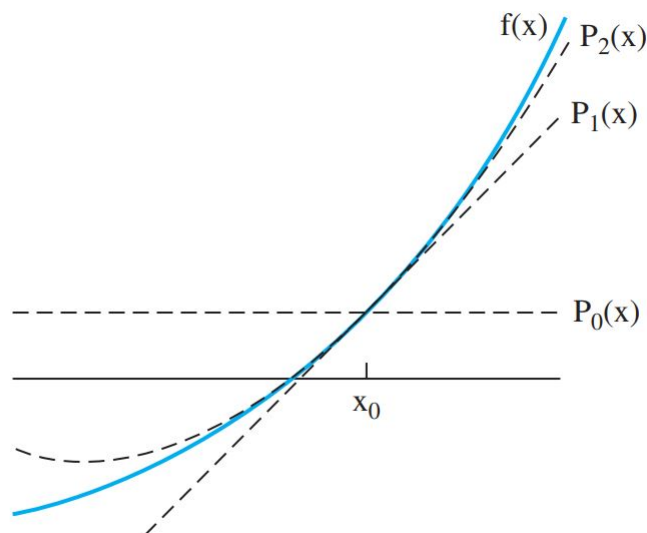
3.2 Taylor's teorem

I kalkulus kan Taylor's teorem bli sett på som en utvidelse av lineær tilnærming til polynomer av høyere orden, og kan gi en tilnærming til en k -ganger deriverbar funksjon rundt et gitt punkt ved et Taylorpolynom av orden k .

Tanken bak teoremet er at dersom man kjenner verdien av f i et punkt x_0 , så kan man lære mye om f i andre punkter som ligger nærme dette punktet. Dersom funksjonen er kontinuerlig vil altså funksjonsverdien $f(x)$ for x nærme x_0 bli ganske bra tilnærmet av $f(x_0)$.

Vi kan imidlertid få bedre tilnærminger ved å ta de deriverte av funksjonen med i betraktning. Ettersom $f'(x)$ beskriver funksjonens stigning for x , kan man ved å se på $f'(x_0)$ se hvordan funksjonen oppfører seg i det området. Dersom $f'(x_0) > 0$ vet man at funksjonsverdien øker for nære x -verdier til høyre for x_0 , mens hvis $f'(x_0) < 0$ vil det motsatte være tilfellet og funksjonsverdien vil minke for nære x -verdier til høyre for x_0 . Linjen som går gjennom $(x_0, f(x_0))$ med stigningstall $f'(x_0)$ blir altså en bedre tilnærming for funksjonsverdier nærme $(x_0, f(x_0))$ enn før, ettersom man også tar stigningen til $f(x)$ med i betraktning.

Slik kan man gjøre videre i flere steg, og skape bedre og bedre tilnærminger med høyere grader av den deriverte. Hvis vi for eksempel også tar med den andrederiverte, $f''(x)$, vil vi få en bedre tilnærming i og med at vi i tillegg tar stigning også tar med funksjonens konkavitet.



Figur 1: Illustrasjonen viser funksjonen $f(x)$, samt dens tilnærminger $P_0(x)$, $P_1(x)$ og $P_2(x)$, hvor $P_0(x)$ er uten noen deriverte, $P_1(x)$ er med $f'(x_0)$ tatt i betraktning, og $P_2(x)$ er med $f'(x_0)$ og $f''(x_0)$ tatt med i betraktning. Man ser at $P_2(x)$ gir den beste tilnærmingen. Differansen mellom $f(x)$ og dens tilnærming i punktet x utgjør Taylor restleddet.

Videre bruker Taylor's teorem alle de deriverte i x_0 for å gi funksjonsverdier i et lite intervall rundt x_0 :

Taylor's Teorem

La x og x_0 være reelle tall, og la f være kontinuerlig og $k+1$ ganger deriverbar på intervallet mellom x og x_0 . Da eksisterer det et tall c mellom x og x_0 som er slik at

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{(k+1)}$$

Hvor den polynomiske delen, leddene opp til og med grad k , er Taylorpolynomet av grad k for f sentrert rundt x_0 . Det siste leddet er kalt Taylor restleddet, og blir brukt som en feilestimering.

3.3 Definisjon av den deriverte

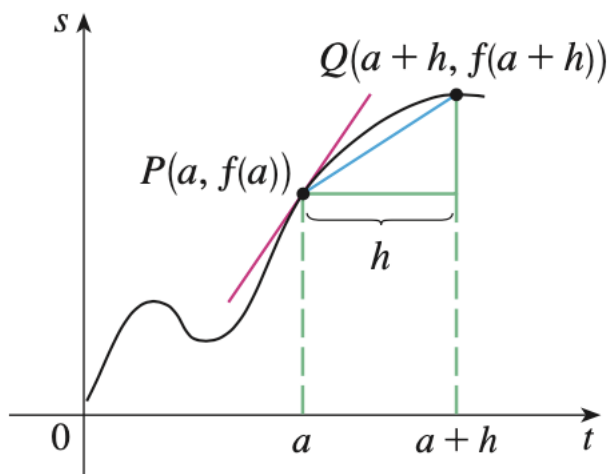
Det er kjent at momentan vekstfart til en funksjon i et gitt punkt, er gitt ved stigningstallet til tangenten i dette punktet. For å finne stigningstallet starter vi med to punkter på grafen $f(x)$. La disse være $(x, f(x))$ og $(x + h, f(x + h))$ og trekk en rett linje mellom disse to punktene. Dette blir en korde hvor stigningstallet til denne representerer gjennomsnittlig vekstfart mellom x og $x + h$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Når h går mot null, vil korden nærme seg tangenten i punktet. Dette er fordi punktet $((x + h), f(x + h))$ kommer nærmere og nærmere $(x, f(x))$. Med andre ord, grenseverdien til kordens stigningstall går mot tangentens stigningstall når h går mot 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Hvis denne grensen eksisterer kaller vi den den deriverte av f i x .



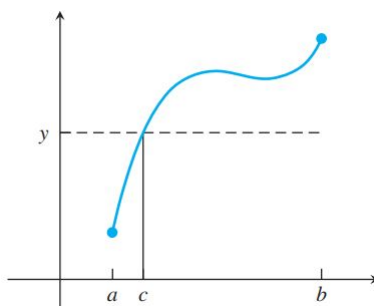
Figur 2: Illustrasjonen viser punktene P og Q , korden i blå og tangenten i rød. En kan observere at dersom h går mot 0, vil korden nærme seg tangenten, og dermed også ha samme stigningstall. [1b, s.xxx]

3.4 Skjæringssetningen

Skjæringssetningen sier at en reell funksjon f definert på et lukket intervall fra a til b vil treffe alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$.

Skjæringssetningen

Hvis f er kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, og y er et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$, så finnes et tall $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = y$.



Videre, hvis vi lar x_1, \dots, x_n være punkter i $[a, b]$, og $a_1, \dots, a_n > 0$, så eksisterer det et tall c mellom a og b slik at

$$(a_1 + \dots + a_n)f(c) = a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n). \quad (1)$$

Beviset på dette henter vi fra T. Sauers, Numerical Analysis [1a, s. 245]:

Bevis:

La $f(x_i)$ være lik den minste og $f(x_j)$ den største av n antall funksjonsverdier. Da har vi at

$$a_1f(x_i) + \dots + a_nf(x_i) \leq a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n) \leq a_1f(x_j) + \dots + a_nf(x_j)$$

Som impliserer at

$$f(x_i) \leq \frac{a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n)}{a_1 + \dots + a_n} \leq f(x_j)$$

Skjæringssetningen sier at det er et tall, c , mellom x_i og x_j slik at

$$f(c) = \frac{a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n)}{a_1 + \dots + a_n}$$

Og (1) er tilfredsstilt.

Akkurat dette beviset er tatt med fordi det blir brukt i Oppgave 1 for å kunne slå sammen flere restledd fra Taylorlikninger til ett.

3.5 Randbetingelser

Antallet randbetingelser som er nødvendig for å løse en differensiallikning er lik differensiallikningens grad. Euler-Bernoulli likningen har en fjerdederivert og har altså grad 4, som vil si at man trenger 4 randbetingelser for å løse likningen. [1a, s.103] Randbetingelsene gitt her gjelder for en bjelke som er festet i den ene enden, og har den andre enden fri, som et stupebrett.

3.5.1 Den faste enden

For en bjelke som er festet til ene enden med den andre enden fri, som f.eks. et stupebrett, er det innlysende at den vertikale forskyvningen i den faste enden er null ettersom den står fast: $y(0) = 0$. Ettersom y beskriver den vertikale forskyvningen, må y' beskrive hvor høy endringsraten til forskyvningen er, altså i hvor stor grad bjelken blir vertikalt forskjøvet, som i bunn og grunn er bjelkens grad av rotasjon. $y'(x)$ vil altså beskrive bjelkens rotasjon i punktet x . Derfor gir det også mening at ettersom den faste enden er festet, vil ikke bjelken heller rotere i akkurat dette punktet. Vi har altså at $y'(0) = 0$. Dette resulterer i de to randbetingelsene for den faste enden:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

3.5.2 Den frie enden

For den frie enden gjelder andre betingelser ettersom den ikke er festet. I det ytterste punktet på stupebrettet, $x = L$, har vi både vertikal forflytning og rotasjon, men rotasjonsmomentet i punktet er lik null. Dette er fordi det ikke er noe mer stupebrett som øker endringsraten til rotasjonen i punktet. Selv om dette virker mindre intuitivt enn rammebetingelsene for den faste enden, kan det sammenlignes med et enklere eksempel; fart og akselerasjon. Som kjent er $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Man kan ha en stødig fart etter t sekunder på f.eks. 15 m/s, men ingen akselerasjon (endringsraten til farten er lik null i punktet

$x = t$). På samme måte har vi en rotasjon i punktet $x = L$, men ingen økning i rotasjonens endringsrate i dette punktet. Fra dette har vi at $y''(L) = 0$. Den tredjederiverte til den vertikale forskyvningen beskriver spenningen innad i stupebrettet i punktet $x = L$, og blir påvirket av stupebrettets ytre belastning. [3a] Når stupebrettet står fritt uten ytre belastning vil dette medføre at $y'''(L) = 0$. Vi har altså de to randebetingelsene for den frie enden:

$$y''(L) = 0$$

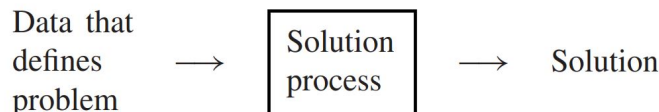
$$y'''(L) = 0$$

3.6 Feilkilder

Et av hovedmålene med numerisk analyse er å beregne løsninger innenfor et visst nivå av nøyaktighet. I denne oppgaven vil vi konsentrere oss om datamaskiner som opererer med dobbelpresisjons flyttallsformat, og som kan operere med, og lagre tall opp til 52-bits nøyaktighet, som tilsvarer ca. 16 desimaler. Det viser seg dog at slettes ikke alle svar kan bli beregnet til 16 korrekte desimaler, selv med de beste algoritmene. Ettersom dette er tilfelle, må man, når man gjør numerisk analyse, alltid ta i betraktning feilkilder av ulike slag, og derfor også gjøre seg kjent med de viktigste begrepene knyttet til beregning av feilkilder, nemlig foroverfeil, bakoverfeil, relativ forover- og bakoverfeil, feilforstørrelsesfaktor, kondisjonstall og maskin-epsilon.

3.6.1 Forover -og bakoverfeil

Når man utfører numerisk analyse kan man se på det som en funksjon som tar input og produserer output. Analyseprosessen kan ses slik ut



Bakoverfeil representerer feil (differanse) på venstre siden av løsningsprosessen, altså på input-siden. Dette er et mål på hvor mye vi må forandre problemet (i vårt tilfelle likningssettene) for å få de til å passe med outputen.

Foroverfeil representerer derimot feil (differanse) på høyre side av løsningsprosessen, altså på output-siden. Dette er et mål på hvor mye vi må forandre på løsningen for å få den til å passe med inputen.

Før vi definerer forover- og bakoverfeil eksakt, begynner vi med definisjonen av evighetsnorm, også kalt maksimumsnorm. Definisjonen her er hentet fra Numerical Analysis Second Edition. [1a, s. 86]

Evighetsnorm

Evighetsnormen, eller maksimalnormen, til en vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ er $\|x\|_\infty = \max |x_i|, i = 1, \dots, n$, altså den største absoluttverdien blant komponentene til x .

Nå som vi har definert evighetsnormen, kan vi fortsette med å definere bakover- og foroverfeil eksakt.

Bakoverfeil

Dersom vi lar x_a være en løsning på det lineære systemet $Ax = b$, får vi en restvektor definert som $r = b - Ax_a$, som er differansen på problemsiden av algoritmen. Bakoverfeilen blir da evighetsnormen til denne restvektoren, og er definert som

$$\|r\|_\infty = \|b - Ax_a\|_\infty$$

Foroverfeil

Vi husker at foroverfeilen representerer differanser i output, altså på løsningssiden av algoritmen. Differansen mellom den eksakte og den tilnærmede løsningen er $x - x_a$, og vi har at foroverfeilen er evighetsnormen

$$\|x - x_a\|_\infty$$

3.6.2 Relativ bakover- og foroverfeil

Relative feil er gitt ved bakover- og foroverfeilene delt på de sanne verdiene for problem- og løsningssiden av løsningsprosessen. Med "de sanne verdiene" menes de verdiene som hadde vært riktig å ha på henholdsvis problem- og løsningssiden av løsningsprosessen for å ikke ha noe feil. Mens vanlige bakover- og foroverfeil blir oppgitt i enheter, blir relative feil oppgitt i prosent.

Relativ foroverfeil er gitt ved

$$\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Mens den relative bakoverfeilen er gitt ved

$$\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

3.6.3 Feilforstøringsfaktor

Feilforstøringsfaktor er en måling på forholdet mellom den relative foroverfeilen og den relative bakoverfeilen. Den kan være grei å vite ettersom den forteller oss hvordan bakoverfeilen forplanter seg videre på funksjonen til foroverfeilen. Det sier altså hvor stor endring man kan få i output ved endring av input. Feilforstøringsfaktoren er gitt ved

$$\frac{\text{Relativ foroverfeil}}{\text{Relativ bakoverfeil}}$$

3.6.4 Maskin-epsilon

Maskin-epsilon ϵ_{mach} er definert som maksimum relative feil som er gitt ved en avrunding, altså hvor stor relativ feil en kan tillate i prosessen med å velge en representasjon av et reelt tall i et flyttallssystem. Videre er det da også gitt at maskin epsilon representerer det minste tallet slik at

$$1 + \epsilon_{mach} > 1$$

Altså forskjellen mellom 1 og det nærmeste neste tallet som kan representeres som et maskin-tall.

Det kan være relevant i denne sammenheng å nevne at det finnes en rekke ulike flyttallssystemer gitt av IEEE, der noen eksempler er "half precision" (binary16), "single precision" (binary32) og "double precision" (binary64). I numerisk analyse av T. Sauer er det blitt fokusert på double precision, binary64, som har en presisjon p på 53 bit. Dette vil, gitt en base $b = 2$ ettersom det er binært, gi en maskin epsilon på

$$b^{-(p-1)} = 2^{-52} \approx 2.22e - 16$$

Ettersom vi skal bruke Python med numpy/scipy er det verdt å merke seg at dette er samme presisjon som Python 3 som standard bruker til datatypen float.

3.6.5 Kondisjonstall

Kondisjonstallet forteller oss hvor stor feilforstøringsfaktoren kan bli. Dette forteller oss noe om hvor stor endring i output en endring i input i verste fall kan resultere i. Dersom kondisjonstallet er stort betyr det at det er lite som kan gjøres for å rette opp feilen som oppstår.

Dersom kondisjonstallet er lite vil det si at det er større muligheter for å rette opp feilen som oppstår. Kondisjonstallet er gitt ved:

$$C = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$$

3.7 Analyse av likninger i sammenheng med Oppgave 1

Oppgave 1 gikk ut på å løse to oppgaver fra læreverket Numerical Analysis Second Edition av T. Sauer [1a], for så å kunne utrede sammenhengen mellom de ulike likningene på side 102 og 103.

Likning 2.27

$$EIy'''' = f(x)$$

E, Youngs modulus av materialet, og I, treghetsmomentet, er konstante langs bjelken. Youngs modulus er ifølge Britannica en numerisk konstant, som representerer en måleenhet for et materials evne til å tåle endringer i lengde, når den er under et stadig press. [5a] Videre har vi at $f(x)$ på høyre side av likhetstegnet er den anvendte lasten, som inkluderer vekten av bjelken, i kraft per lengdeenhet.

Likning 2.28

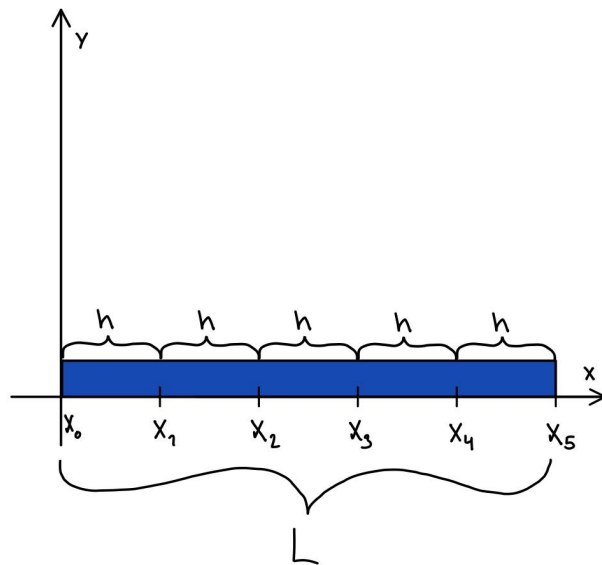
$$y'''(x) \approx \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4}$$

Denne likningen representerer en rimelig approksimasjon av den fjerdederiverte for en liten økning i h . Hvordan vi kommer frem til akkurat dette uttrykket kan sees under "Resultater".

Likning 2.29

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x)_i$$

Det første en kan observere er at 2.29 er en kombinasjon av likningene 2.27 og 2.28. Videre ser vi på bjelken som en samling av flere segmenter med lengde h . Deretter ønsker vi å bruke en diskretisert versjon av differentiallikningen på hvert segment.



Figur 3: Illustrasjon av oppdeling av stupebrett i segmenter med lengde h .

Vi erstatter deretter differentiallikningen fra 2.27 med differentialapproksimasjonen fra 2.28 for å få et system med lineære likninger som representerer forskyvningen $y_i = y(x_i)$:

$$EI \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} = f(x)$$

Som gir at:

$$y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h) = \frac{h^4}{EI} f(x)$$

Figur 3 viser oppdelingen av stupebrettet, og man kan se at $y(x-h)$ er det samme som y av x -verdien "en h bakover" fra x , som kan skrives som y_{i-1} . Dette fører til at likning 7, som er en sammenslåing av likning 2.29 og 2.27, kan skrives som:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x)$$

I og med at vi har n antall oppdelinger av stupebrettet, får vi n antall likninger (y_1, \dots, y_n) . Koeffisientmatrisen i 2.34 vil ha koeffisienter fra disse likningene. Det er fremdeles noe vi må tenke på videre; et stupebrett er festet i ene enden, og har den andre enden fri. Dette gir visse betingelser (se Teori 3.5 om randbetingelser) som gjør at følgende gjelder:

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

Vi har altså at $y_0 = 0$.

Man møter midlertidig på et problem dersom man ønsker å finne y_1 . Dersom man bruker likning 2.29 for å finne $y(x_1)$ får man

$$y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EI} f(x_1)$$

y_{-1} er midlertidig ikke definert, ettersom man ikke kan regne ut den vertikale forskyvningen til et punkt bak det bakerste punktet på stupebrettet (som er y_0). Vi blir nødt til å bruke en alternativ approksimering til den deriverte i punktet x_1 , som er gitt av likning 2.31:

Likning 2.31

$$y''''(x_1) \approx \frac{16y(x_1) - 9y(x_1 + h) + \frac{8}{3}y(x_1 + 2h) - \frac{1}{4}y(x_1 + 3h)}{h^4}$$

Denne likningen kommer vi frem til i oppgave 5.22 a), og utregningen kan ses under "Resultater". Fremgangsmetoden er akkurat den samme som vist lenger oppe, bare at Taylorlikningene som blir lagt sammen tar utgangspunkt i andre punkt på x-aksen: $f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h), f(x+4h)$. Likningen gjelder dersom $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Vi kan nå bruke likning 2.31 for å finne en valid likning for $y(x_1)$.

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI}f(x_1)$$

For de to punktene ytterst på den frie enden vil man også trenge alternative tilnærminger for de siste punktene x_{n-1} og x_n . Disse får vi oppgitt og trenger ikke å bevis. Videre er de i likhet med uttrykket vi fant for $y(x_1)$ gyldig under de gitte randbetingelsene (se under Teori 3.5 om Randbetingelser).

$$y''''(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4}$$

$$y'''(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4}$$

Dersom man deler opp stupebrettet i $n = 8$ like lange biter med lengde h , får man 8 likninger som er gitt som:

$$y_1 = 16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI}f(x_1)$$

$$y_2 = y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_3 = y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_4 = y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_5 = y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_6 = y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_7 = \frac{16}{17}y_5 - \frac{60}{17}y_6 + \frac{72}{17}y_7 - \frac{28}{17}y_8 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

$$y_8 = -\frac{12}{17}y_5 + \frac{96}{17}y_6 - \frac{156}{17}y_7 + \frac{72}{17}y_8 = \frac{h^4}{EI}f(x)$$

Satt inn i et matricesystem ville man fått matriseuttrykk 2.34:

Matrise-uttrykk 2.34

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 6 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & 1 \\ & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix}$$

4 Resultater

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Fremgangsmåte for oppgave 1

For å løse oppgave 1 benytter vi oss av numerisk differansiering, og utvikler likninger som representerer rimelige approksimasjoner av de deriverte ved bruk av Taylor's teorem.

Fra definisjonen av den deriverte har man at:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Men man kan ikke bruke grenseverdien i en reell kalkulering. Her kommer Taylor's teorem inn, som sier at dersom f er kontinuerlig og to ganger differensierbar, så er

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$$

Slik får man et uttrykk for den deriverte, som kalles formelen for to-steg fremoverdifferanse, ettersom man bruker to "steg" og går fremover på x-aksen ($f(x)$ og $f(x+h)$).

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{2} f''(c)$$

Løsningen på denne likningen vil nærme seg den deriverte dersom h er tilstrekkelig liten. Man kan derfor bruke den som en tilnærming for den deriverte og se på det siste leddet, $-\frac{h^2}{2} f''(c)$, som en feil. Ettersom man ser at feilen er proporsjonal med h , kan man gjøre feilen tilstrekkelig liten ved å gjøre h mindre. Vi har altså at

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

som er et uttrykk man kan bruke i reelle kalkulasjoner. Fremgangsmåten for å finne $f''(x)$, $f'''(x)$ og høyere deriverte går ut på å bruke flere "steg", og slå sammen flere Taylor-likninger slik at man ender opp med et uttrykk for den deriverte man vil ha.

Dersom man f.eks vil finne $f''(x)$ kan man prøve seg med å benytte samme fremgangsmåte som vi brukte for å finne $f'(x)$, nemlig med Taylor's formel bare med flere ledd. Da får man

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

Her ser man at man ender opp med et uttrykk som inneholder både $f''(x)$ og $f'(x)$. Vi trenger en måte å fjerne $f'(x)$ på, slik at man står igjen med et uttrykk for $f''(x)$ og ingen andre deriverte. Løsningen her er å bruke en Taylorlikning til som tar utgangspunkt i et annet punkt i nærheten av $f(x)$, for så å legge de sammen på en slik måte at de uønskede leddene forsvinner, og man står igjen med det man vil ha. For å finne $f''(x)$ kan man f.eks. bruke de to likningene

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c_1)$$

Og

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c_2)$$

Når man legger sammen disse to får man

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c_1) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c_2)$$

Skjæringssetningen (se Teori 3.4 om Skjæringssetningen) sier at man kan kombinere de to siste leddene til et, og man ender opp med

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

Som kan skrives som

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2f''(x) + O(h^4)$$

Og vi ender med et uttrykk for $f''(x)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

Fremgangsmåten for å finne høyere grader av den deriverte er lik, men desto høyere grad, desto flere likninger trenger man for å kunne fjerne alle uønskede ledd. I oppgave 5.21 bruker vi for eksempel 4 Taylorlikninger som tar utgangspunkt i punktene $f(x-2h)$, $f(x-h)$, $f(x+h)$ og $f(x+2h)$ for å finne en tilnærming til den fjerdederiverte, og er vist i neste seksjon.

4.1.2 Utregninger for Oppgave 1

Oppgave 5.21

Vi har at:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(c_4) \quad (1)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) - \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(c_3) \quad (2)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c_2) \quad (3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c_1) \quad (4)$$

Legger sammen likning (1) og (3), samt (2) og (4), som gir følgende to likninger:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^4f^{(4)}(x) + \frac{64}{720}h^6f^{(6)}(c_4) + \frac{64}{720}h^6f^{(6)}(c_3) \quad (5)$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{1}{12}h^4f^{(4)}(x) + \frac{1}{720}h^6f^{(6)}(c_2) + \frac{1}{720}h^6f^{(6)}(c_1) \quad (6)$$

Ganger likning (6) med -4 og legger sammen med likning (5) for å fjerne andrederiverte:

$$\begin{aligned}
 -4f(x+h) - 4f(x-h) &= -8f(x) - 4h^2 f''(x) - \frac{1}{3}h^4 f^{(4)}(x) - \frac{1}{180}h^6 f^{(6)}(c_2) - \frac{1}{180}h^6 f^{(6)}(c_1) \\
 &+ \\
 f(x+2h) + f(x-2h) &= 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^4 f^{(4)}(x) + \frac{64}{720}h^6 f^{(6)}(c_4) + \frac{64}{720}h^6 f^{(6)}(c_3) \\
 &\Downarrow \\
 f(x+2h) + f(x-2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + 6f(x) &= \\
 &= \\
 h^4 f^{(4)}(x) - \frac{4}{720}h^6 f^{(6)}(c_2) - \frac{4}{720}h^6 f^{(6)}(c_1) + \frac{64}{720}h^6 f^{(6)}(c_4) + \frac{64}{720}h^6 f^{(6)}(c_3)
 \end{aligned}$$

På grunn av skjæringssetningen (se teori 3.4 om skjæringssetningen) kan restleddene kombineres, og likningen kan skrives som:

$$f(x+2h) + f(x-2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + 6f(x) = h^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{6}h^6 f^{(6)}(c)$$

Flytter så restleddet over og deler på h^4 for å få et uttrykk for $f^{(4)}(x)$ og vi får at:

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2)$$

Som skulle bevises.

Oppgave 5.22 a

Vi har at:

$$f(x-h) = \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c_1)$$

$$f(x+h) = \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c_2)$$

$$f(x+2h) = \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \frac{(2h)^3}{6} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{120} f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720} f^{(6)}(c_3)$$

$$f(x+3h) = \frac{(3h)^2}{2} f''(x) + \frac{(3h)^3}{6} f'''(x) + \frac{(3h)^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{(3h)^5}{120} f^{(5)}(x) + \frac{(3h)^6}{720} f^{(6)}(c_4)$$

$$f(x+4h) = \frac{(4h)^2}{2} f''(x) + \frac{(4h)^3}{6} f'''(x) + \frac{(4h)^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{(4h)^5}{120} f^{(5)}(x) + \frac{(4h)^6}{720} f^{(6)}(c_5)$$

Ganger $f(x+h)$ med -10, $f(x+2h)$ med 5, $f(x+3h)$ med $-\frac{5}{3}$, og $f(x+4h)$ med $\frac{1}{4}$ og får:

$$f(x-h) = \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720} f^{(6)}(c_1)$$

$$-10f(x+h) = -5h^2 f''(x) + \frac{5}{3} h^3 f'''(x) + \frac{5}{12} f^{(4)}(x) + \frac{1}{12} f^{(5)}(x) + \frac{1}{72} f^{(6)}(c_2)$$

$$5f(x+2h) = 10h^2 f''(x) + \frac{20}{3} h^3 f'''(x) + \frac{10}{3} f^{(4)}(x) + \frac{4}{3} f^{(5)}(x) + \frac{4}{9} f^{(6)}(c_3)$$

$$-\frac{5}{3}f(x+3h) = -\frac{15}{2} f''(x) - \frac{15}{2} h^3 f'''(x) - \frac{45}{8} f^{(4)}(x) - \frac{27}{8} f^{(5)}(x) - \frac{27}{16} f^{(6)}(c_4)$$

$$\frac{1}{4}f(x+4h) = 2h^2 f''(x) + \frac{8}{3} h^3 f'''(x) + \frac{8}{3} f^{(4)}(x) + \frac{32}{15} f^{(5)}(x) - \frac{64}{15} f^{(6)}(c_5)$$

Adderer alle likningene sammen og får:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) =$$

$$0h^2 f''(x) + 0h^3 f'''(x) + 0h^4 f^{(4)}(x) + 0h^5 f^{(5)}(x) - \frac{1}{72} h^6 f^{(6)}(c_2) +$$

$$\frac{4}{9} h^6 f^{(6)}(c_3) - \frac{27}{16} h^6 f^{(6)}(c_4) + \frac{64}{45} h^6 f^{(6)}(c_5) + \frac{1}{720} h^6 f^{(6)}(c_1)$$

På grunn av Skjæringssetningen (se teori 3.4 om skjæringssetningen) kan restleddene kombineres, og likningen kan skrives som:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = \frac{1}{6}h^6 f^{(6)}(c)$$

slik at vi har at:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

Nå kan vi lage et uttrykk for $f(x-h)$:

$$f(x-h) = 10f(x+h) - 5f(x+2h) + \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h) + O(h^6)$$

$O(h^6)$ er en feilmargin som vil være svært liten i forhold til feilen i uttrykket for $f^4(x+h)$: $O(h^2)$. Ettersom $O(h^2)$ vil være den dominerende feilen i likningen, tar vi bort $O(h^6)$ og ser bort fra den.

Bruker definisjonen av den fjerdederiverte fra oppgave 5.21 for å finne $f^{(4)}(x+h)$:

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{f(x+h-2h) - 4f(x+h-h) + 6f(x+h) - 4f(x+h+h) + f(x+h+2h)}{h^4} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

Setter inn uttrykket for $f(x-h)$ uten $O(h^6)$ som vi fant tidligere:

$$f^{(4)}(x+h) =$$

$$\frac{10f(x+h) - 5f(x+2h) + \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

Rydder opp og får at når $f(x) = f'(x) = 0$, så er:

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2)$$

Hvilket skulle bevises.

4.2 Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi skrive et program som definerer strukturmatrisen

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & 1 & & \\ & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} & & \\ & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} & & \end{bmatrix}$$

For å løse oppgaven har vi valgt å bruke programmeringsspråket Python, med bibliotekene numpy og scipy. Oppgaven ble løst ved at vi i første omgang oppretter en båndmatrise

NB: Illustrerer hvordan matrisen blir til når vi setter $n = 10$.

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Deretter hardkoder vi inn de ulike verdiene inn i øverste, nest nederste og nederste rad slik at vi får følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix}$$

Som vi ser er identisk med strukturmatriisen på side 104. Se oppgave2.py i innlevert mappe.

4.3 Oppgave 3

Oppgaven ber om at vi skal skrive et program som bruker koden fra oppgave 2. Vi skal finne en løsning y_c på problemet for en bjelke med ingen ytre påvirkning, gitt ved likningen:

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{bmatrix} = \frac{h^4}{EI} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \\ f(x_6) \\ f(x_7) \\ f(x_8) \\ f(x_9) \\ f(x_{10}) \end{bmatrix}$$

Oppgaven gir følgende verdier for bjelken:

- bredde $w = 30cm = 0.3m$
- tykkelse $d = 3cm = 0.03m$
- lengde $L = 2$
- gravitasjonskraften $g = 9.81m/s^2$

I likningen behøver vi å finne verdiene for h , E og I .

h kan sees på som lengden av hvert segment av bjelken, og er gitt ved $\frac{L}{n}$ som i dette tilfellet er $\frac{2}{10} = 0.2$.

E er Young's modulus (konstant) $= 1.3 \cdot 10^{10}$ Pascals eller Newton/ m^2 .

$I =$ treghetsmomentet $= \frac{wd^3}{12} = \frac{0.3 \cdot 0.03^3}{12} \approx 6.75 \cdot 10^{-7} kg \cdot m^2$.

Dermed kan vi finne faktoren b-matrisen ganges med:

$$\frac{h^4}{EI} = \frac{0.2^4}{(1.3 \cdot 10^{10}) \cdot (6.75 \cdot 10^{-7})} = 1.823361823361824 \cdot 10^{-7}$$

Vi får oppgitt av vi skal finne løsningen y_c på problemet når vi kun skal ta hensyn til egenmassen til bjelken. Dette gjør at $f(x)$ er gitt ved vekten til bjelken. Altså vil

$$f(x) = f = -480 \cdot g \cdot w = -480 \cdot 9.81 \cdot 0.3 \cdot 0.003 = -42.379200000000004kg$$

Med de kalkulerte verdiene kan vi sette opp følgende likningssystem, som vi ønsker å løse med hensyn på y

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \\ -7.72726154 * 10^{-6} \end{bmatrix}$$

I programmet oppgave3.py løser vi likningssystemet med hensyn på y , og får følgende løsning på problemet

$$y_1 = -0.00018062473846151627$$

$$y_2 = -0.0006748475076922225$$

$$y_3 = -0.0014169865846152012$$

$$y_4 = -0.0023490875076919967$$

$$y_5 = -0.0034209230769226117$$

$$y_6 = -0.004589993353845512$$

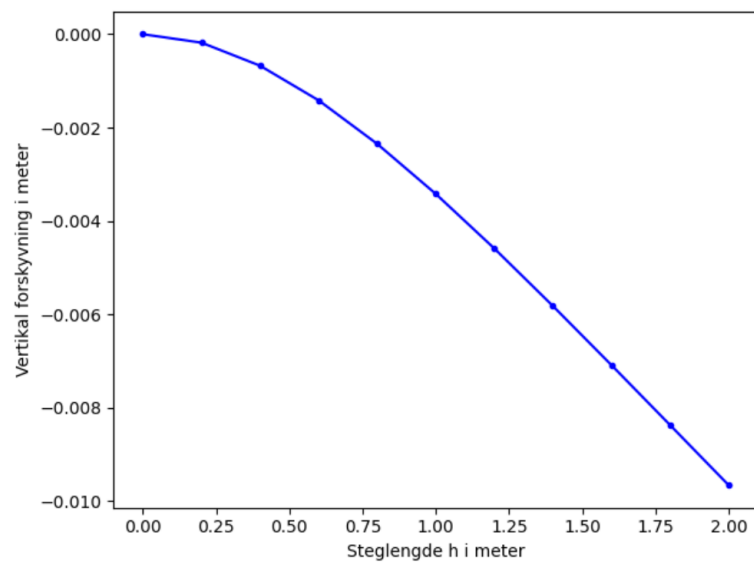
$$y_7 = -0.005821525661537625$$

$$y_8 = -0.007088474584614343$$

$$y_9 = -0.008371521969229514$$

$$y_{10} = -0.00965907692307545$$

y representerer altså den vertikale forskyvningen til bjelken på ulike punkter langs bjelken, der $0 \leq x \leq L$. I dette tilfellet vil dette være den vertikale forskyvningen til bjelken når ingen ekstra masse enn egenmassen er lagt til bjelken.



Figur 4: Illustrasjon av den vertikale forskyvningen

4.4 Oppgave 4

4.4.1 Oppgave a

Oppgaven forteller at den korrekte løsningen av Euler-Bernouilli-likningen, når $f(x) = f$ er konstant, er:

$$y(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right)x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$$

Euler-Bernouilli-likningen er som nevnt tidligere på følgende form:

$$EIy'''' = f(x)$$

Finner først den fjerdedederiverte av $y(x)$

$$y'(x) = \frac{fx(x^2 - 3Lx + 3L^2)}{6EI}$$

$$y''(x) = \frac{f(x - L)^2}{2EI}$$

$$y'''(x) = \frac{f(x - L)}{EI}$$

$$y''''(x) = \frac{f}{EI}$$

Setter deretter inn y'''' inn i Euler-Bernouilli-likningen

$$EI \frac{f}{EI} = f(x)$$
$$f = f(x)$$

Altså vil likningen $y(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right)x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$ være en løsning på Euler-Bernouilli-likningen med konstant $f(x) = f$.

4.4.2 Oppgave b

Den korrekte løsningen av likningen med konstant $f(x) = f$ er gitt ved

$$y(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right)x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$$

Finner den sjettederiverte av $y(x)$

$$y'(x) = \frac{fx(x^2 - 3Lx + 3L^2)}{6EI}$$

$$y''(x) = \frac{f(x - L)^2}{2EI}$$

$$y'''(x) = \frac{f(x - L)}{EI}$$

$$y''''(x) = \frac{f}{EI}$$

$$y^{(5)}(x) = 0$$

$$y^{(6)}(x) = 0$$

Vi bruker Taylors formel med feil-ledd:

$$\frac{y^{(6)}(c)}{6!}h^6 = \frac{0}{6!}0.2^6 = 0$$

Dermed har vi vist at den numeriske metoden for den fjerde-deriverte $\frac{1}{h^4}Ay$ er eksakt ettersom feilen er lik 0.

4.4.3 Oppgave c

Alle beregningene i denne oppgaven er gjort i oppgave4.py.

Regner først ut vektoren

$$y_e = [y(0.2), y(0.4), y(0.6), y(0.8), y(1.0), y(1.2), y(1.4), y(1.6), y(1.8), y(2.0)]^T$$

$$y_e = \begin{bmatrix} \frac{f}{24EI} 0.2^2(0.2^2 - 4L \cdot 0.2 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 0.4^2(0.4^2 - 4L \cdot 0.4 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 0.6^2(0.6^2 - 4L \cdot 0.6 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 0.8^2(0.8^2 - 4L \cdot 0.8 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 1.0^2(1.0^2 - 4L \cdot 1.0 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 1.2^2(1.2^2 - 4L \cdot 1.2 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 1.4^2(1.4^2 - 4L \cdot 1.4 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 1.6^2(1.6^2 - 4L \cdot 1.6 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 1.8^2(1.8^2 - 4L \cdot 1.8 + 6L^2) \\ \frac{f}{24EI} 2.0^2(2.0^2 - 4L \cdot 2.0 + 6L^2) \end{bmatrix}$$

$$y_e = \begin{bmatrix} -0.00018062473846153855 \\ -0.000674847507692308 \\ -0.0014169865846153853 \\ -0.0023490875076923093 \\ -0.0034209230769230775 \\ -0.004589993353846155 \\ -0.005821525661538462 \\ -0.0070884745846153865 \\ -0.00837152196923077 \\ -0.009659076923076923 \end{bmatrix}$$

Regner deretter ut numerisk den fjerdederiverte av $y(x)$ ved hjelp av den numerisk fjerde-deriverte $\frac{1}{h^4}Ay$

Regner først ut $\frac{1}{h^4} \cdot A$

$$\frac{1}{0.2^4} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1000 & -5625 & 1666.67 & -156.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 625 & 2500 & 3750 & 2500 & 625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 588.24 & -2205.9 & 2657.1 & -1029.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -441.2 & 3529.4 & -5735.3 & 2647.1 \end{bmatrix}$$

Deretter multipliserer vi matrisen sammen med y_e som vi fant tidligere i oppgave

c. Dette gir oss at den numerisk fjerdederiverte $\frac{1}{h^4}Ay$ blir

$$\begin{bmatrix} -0.0048295384615375525 \\ -0.004829538461538441 \\ -0.004829538461535776 \\ -0.004829538461541105 \\ -0.004829538461535776 \\ -0.004829538461539329 \\ -0.004829538461531335 \\ -0.004829538461539329 \\ -0.0048295384615375525 \\ -0.004829538461539329 \end{bmatrix}$$

4.4.4 Oppgave d

Regner først ut vektoren $\frac{f}{EI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$. Bruker verdiene for f , E og I fra oppgave 3 og beregner $\frac{f}{EI}$

$$\frac{f}{EI} = \frac{-42.379200000000004}{(1.3 \cdot 10^{10}) \cdot (6.75 \cdot 10^{-7})} = -0.004829538461538463$$

Skal deretter sammenligne den numerisk fjerdederiverte $\frac{1}{h^4}Ay$ med den beregnede verdien over.

Fra Teori 3.6.1 har vi at definisjonen av forovereil er gitt ved

$$\|x - x_a\|_{\infty}$$

Finner først $x - x_a$, der x er $\frac{f}{EI}[1, 1, \dots, 1]^T$, og x_a er den numerisk fjerdederiverte regnet ut i oppgave c:

$$\begin{bmatrix} -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \\ -0.004829538461538463 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.0048295384615375525 \\ -0.004829538461538441 \\ -0.004829538461535776 \\ -0.004829538461541105 \\ -0.004829538461535776 \\ -0.004829538461539329 \\ -0.004829538461531335 \\ -0.004829538461539329 \\ -0.0048295384615375525 \\ -0.004829538461539329 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.107298248878237 \cdot 10^{-16} \\ -2.2551405187698492 \cdot 10^{-17} \\ -2.687086664288074 \cdot 10^{-15} \\ 2.6419838539126772 \cdot 10^{-15} \\ -2.687086664288074 \cdot 10^{-15} \\ 8.656270145124267 \cdot 10^{-16} \\ -7.1279787627887 \cdot 10^{-15} \\ 8.656270145124267 \cdot 10^{-16} \\ -9.107298248878237 \cdot 10^{-16} \\ 8.656270145124267 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Regner så ut foroverfeilen som blir:

$$\|x - x_a\|_\infty = 7.1279787627887 \cdot 10^{-15}$$

Relativ foroverfeil er gitt ved

$$\begin{aligned} & \|x - x_a\|_\infty / \|x\|_\infty \\ &= 1.4759130338343062 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

Feilforstøringsfaktor er gitt ved

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Relativ foroverfeil}}{\text{Relativ bakoverfeil}} \\ &= \frac{1.4759130338343062 \cdot 10^{-12}}{2^{-52}} \\ &= 6646.9213892074395 \end{aligned}$$

Kondisjonstallet finner vi ved å bruke `numpy.linalg` sin metode `cond(A,np.inf)`, og får at kondisjonstallet

$$\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 34895.833333328$$

Kondisjonstallet til A er den største feilforstøringsfaktoren vi kan få. I dette tilfellet er kondisjonstallet til A ≈ 34895 og feilforstøringsfaktoren ≈ 6647 . Dette betyr at den feilforstøringsfaktoren vi har fått er ca. $\frac{1}{5}$ av det verst mulige tenkelige scenarioet, altså at feilforstøringsfaktoren er den samme som kondisjonstallet. Vi har i dette tilfellet fått et relativt godt svar på problemet.

4.5 Oppgave 5

Denne oppgaven går ut på å løse oppgave 3 på nytt med forskjellige verdier for n og deretter lage en oversikt over feilen i punktet $x = L$. Til slutt skal vi finne hvilken n som gir størst feil. La n ta verdiene:

$$n = 20, 40, \dots, 10 \cdot 2^{11}$$

For hver n -verdi løser vi likningen $Ay = b$ for y og finner feilen og kondisjonstallet ved denne verdien for n . Feilen ved $x = L$ for hver n -verdi finner vi slik; la e være feilen i punktet $x = L$ og $y(x)$ være den eksakte løsningen for Euler-Bernoulli-likningen. Da har vi

$$e = |y_L - y(L)|$$

Fra avsnitt 3.6.5 har vi at kondisjonstallet til en matrise er gitt ved likningen:

$$\text{cond}(A) = |A|_{\infty} \cdot |A^{-1}|_{\infty}$$

Vi setter dette inn i en tabell over kondisjonstall og feil for hver n -verdi. Dette gir tabellen:

n	Feil	Kondisjonstall
20	$1.0443035325380378 \cdot 10^{-15}$	282259.21106604947
40	$1.5213524884316598 \cdot 10^{-15}$	4389447.784076795
80	$5.717318979359121 \cdot 10^{-13}$	69191086.49133745
160	$2.323525920278069 \cdot 10^{-11}$	1098636672.705694
320	$2.3183467298681926 \cdot 10^{-11}$	17510433680.879887
640	$1.2397836871708146 \cdot 10^{-9}$	279623693591.7076
1280	$9.209666019388552 \cdot 10^{-9}$	4469573975061.034
2560	$1.6181012371316306 \cdot 10^{-7}$	71472464527479.12
5120	$5.694818511876865 \cdot 10^{-6}$	1144553155215266.2
10240	$5.417423985390815 \cdot 10^{-6}$	$1.7415132903841022 \cdot 10^{16}$
20480	0.00015935092064280933	$4.316884803776462 \cdot 10^{17}$

Her ser man at feilen og kondisjonstallet øker i takt med n . Dette skjer fordi steglengden h som vi bruker i utregning av matriselikningen er avhengig av n ;

$$h = \frac{L}{n},$$

hvor L forblir konstant og n øker. Dermed blir steglengden h mindre og mindre og det vil føre til at matrisa vår blir dårlige kondisjonert og vi får avrundingsfeil

som blir større, jo mindre h blir. Grunnen er at h blir brukt som en divisor i formelen for den numerisk fjerdederiverte. Hvis vi går tilbake til utregningen av denne ser vi at h inngår slik i formelen:

$$\frac{1}{h^4},$$

Av disse to uttrykkene ser vi at en større n minker verdien av h . Dette får et betraktelig større utslag når h nå brukes i formelen for den numerisk fjerdederiverte ettersom den opphøyes i fjerde potens.

Eksempel:

La oss ta utgangspunkt i verdiene for n gitt i oppgave 5. Vi ser at n dobles for hver iterasjon. Dette gir:

$$n_{i+1} = 2n_i = 2^{i+1} \cdot n_0$$

Vi setter inn i formlene gitt ovenfor, som gir:

$$h_i = \frac{L}{2^i n_0}$$
$$h_{i+1} = \frac{L}{2^{i+1} n_0} = \frac{1}{2} h_i$$

Vi kan se at dette gjør at h halveres for hver iterasjon. Noe som får stor betydning når vi setter dette inn i formelen for den numerisk fjerdederiverte ettersom h opphøyes i fjerde potens.

$$\frac{1}{h_i^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2} h_{i-1})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} h_{i-1}^4}, \quad i > 0$$

Vi ser altså at hver iterasjon av løkken gjør at uttrykket under brøkstreken blir delt på 16 og den tidligere h -verdien blir også som sagt opphøyet i fjerde potens. For verdier under 1 vil dette føre til at vi får et veldig lite tall som divisor og vi kan oppleve avrundingsfeil når dette tallet nærmer seg maskin-epsilon.

4.6 Oppgave 6

I denne oppgaven skal vi ikke lenger kun tenke på egenmassen til bjelken, men ta med ekstra vekt på bjelken. Vi legger en sinusformet haug på bjelken, der vekten av haugen ved x er gitt ved funksjonen

$$s(x) = -pq \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

4.6.1 Oppgave a

Får oppgitt funksjonen:

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{gpL}{EI\pi}\left(\frac{L^3}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2}\right)$$

Oppgaven ønsker at vi skal bevise at $y(x)$ tilfredstiller Euler-Bernoulli-likningen og randbetingelsene for en bjelke som er festet i den ene enden og fri i den andre enden. For å bevise at likningen tilfredstiller Euler-Bernoulli-likningen må vi vise at

$$EIy'''' = f + s(x)$$

ettersom vi legger til en sinusformet haug, som gjør at den totale massen må være egenmassen summert med massen til haugen. Regner så ut den deriverte, andrederiverte, tredjederiverte og fjerdedderiverte til $y(x)$.

$$y' = i \frac{6(-L^3gp + L^3gpcos(\frac{\pi x}{L})) + 3\pi^3(-L^2fx + Lfx^2) - \pi^3fx^3 - 3\pi^2Lx^2gp + 6\pi^2L^2xgp}{6\pi^3E}$$

$$y'' = I \frac{\pi^2(-L^2f - fx^2) + 2\pi(L^2gp - Lxgp) - 2L^2gpsin(\frac{\pi x}{L}) + 2\pi^2Lfx}{2\pi^2E}$$

$$y''' = i \frac{\pi(Lf - fx) - Lgp - Lgpcos(\frac{\pi x}{L})}{E\pi}$$

$$y'''' = \frac{f}{EI} - \frac{pq}{EI} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{f - pg \cdot \sin(\frac{\pi}{L}x)}{EI} = \frac{1}{EI}(f - pg \cdot \sin(\frac{\pi}{L}x)) = \frac{1}{EI}(f + s(x))$$

Dermed får vi ved å multiplisere med EI på begge sider av likhetstegnet at

$$EIy'''' = f + s(x),$$

og vi har vist at likningen tilfredstiller Euler-Bernoulli-likningen.

For å vise at likningen tilfredstiller randbetingelsene for en bjelke som er festet i den ene enden, men er fri i den andre må vi vise at

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

Setter inn $x = 0$ i y og y' og $x = L = 2$ i y'' og y'''

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{f}{24EI} 0^2(0^2 - 4L0 + 6L^2) - \frac{gpL}{EI\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi}{L}0\right) - \frac{0^3}{6} + \frac{L0^2}{2} - \frac{L^20}{\pi^2} \right) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= I \frac{6(-L^3gp + L^3gpcos(\frac{\pi}{L}0)) + 3\pi^3(-L^2f0 + Lf0^2) - \pi^3f0^3 - 3\pi^2L0^2gp + 6\pi^2L^20gp}{6\pi^3E} \\ &= I \frac{6(-L^3gp + L^3gp)}{6\pi E} \\ &= I \frac{0}{6\pi E} \\ &= 0 \end{aligned}$$

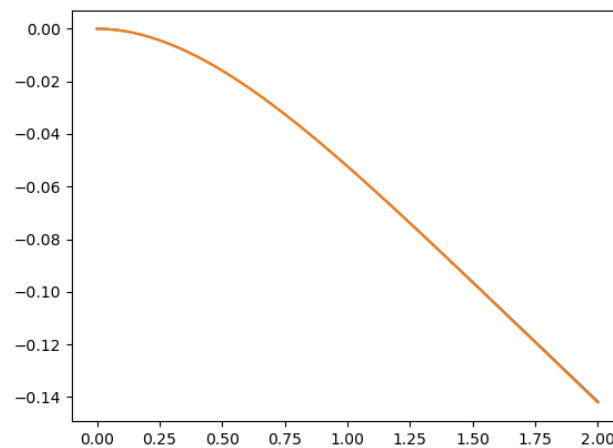
$$\begin{aligned} y''(L) &= I \frac{\pi^2(-L^2f - fL^2) + 2\pi(L^2gp - LLgp) - 2L^2gpsin(\frac{\pi}{L}L) + 2\pi^2LfL}{2\pi^2E} \\ &= I \frac{-2\pi^2L^2f + 2\pi(L^2gp - L^2gp) - 2L^2gpsin(\pi) + 2\pi^2L^2f}{2\pi^2E} \\ &= I \frac{-2\pi^2L^2f + 2\pi \cdot 0 - 2L^2gp \cdot 0 + 2\pi^2L^2f}{2\pi^2E} \\ &= I \frac{-2\pi^2L^2f + 2\pi^2L^2f}{2\pi^2E} \\ &= I \frac{0}{2\pi^2E} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'''(L) &= I \frac{\pi(Lf - fL) - Lgp - Lgp \cos(\frac{\pi L}{L})}{E\pi} \\&= I \frac{\pi \cdot 0 - Lgp - Lgp \cdot \cos(\pi)}{E\pi} \\&= I \frac{-Lgp - Lgp \cdot -1}{E\pi} \\&= I \frac{-Lgp + Lgp}{E\pi} \\&= I \frac{0}{E\pi} \\&= 0\end{aligned}$$

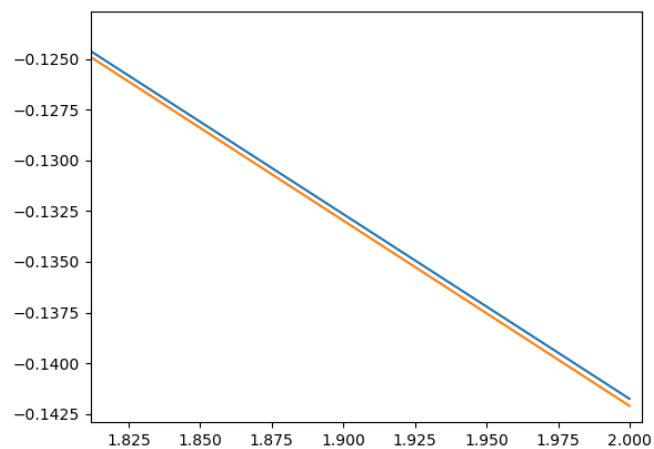
Ettersom $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$ har vi vist at randbetingelsene er tilfredsstilt for bjelken.

4.6.2 Oppgave b

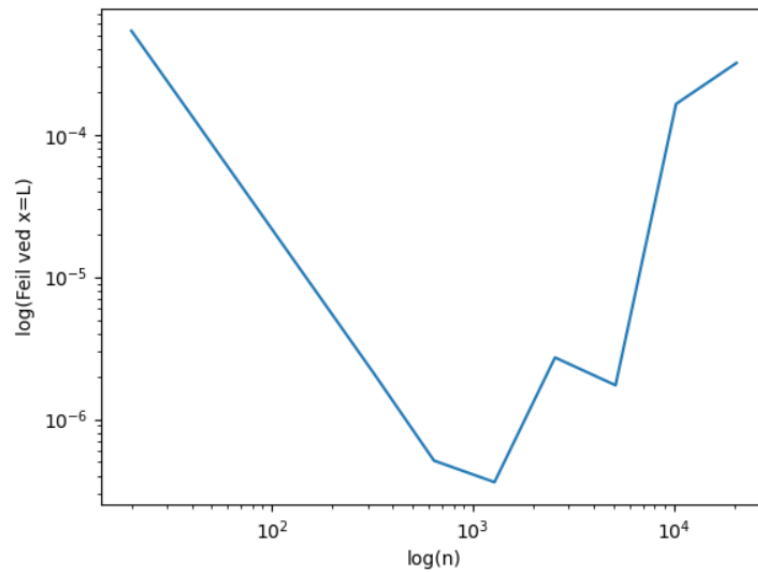
Her plotter vi den numeriske løsningen mot den eksakte løsningen. Vi ser at de følger hverandre godt og at den numeriske løsningen dermed er en god tilnærming for den vertikale forskyvningen.



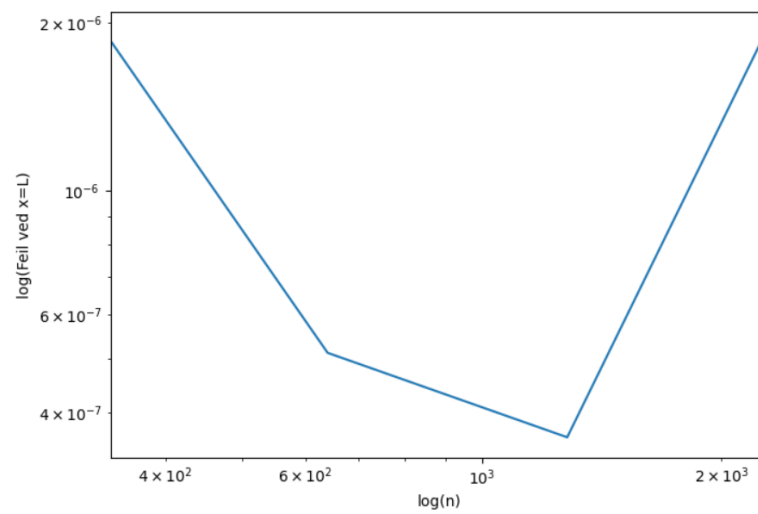
Figur 5: Illustrasjon av den eksakte mot den numeriske forskyvningen.



Figur 6: Samme graf, bare forstørret for å se at kurvene ikke ligger helt oppå hverandre.

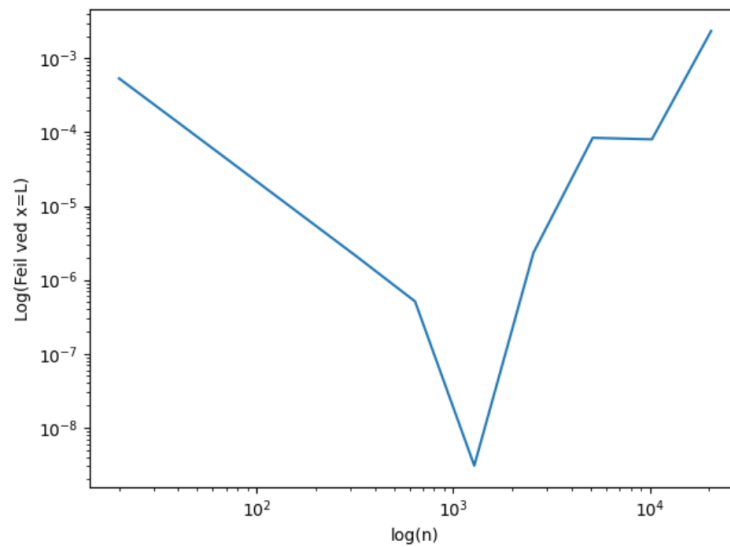
4.6.3 Oppgave c

Figur 7: Illustrasjon av feil i den numeriske løsningen vs. den eksakte.



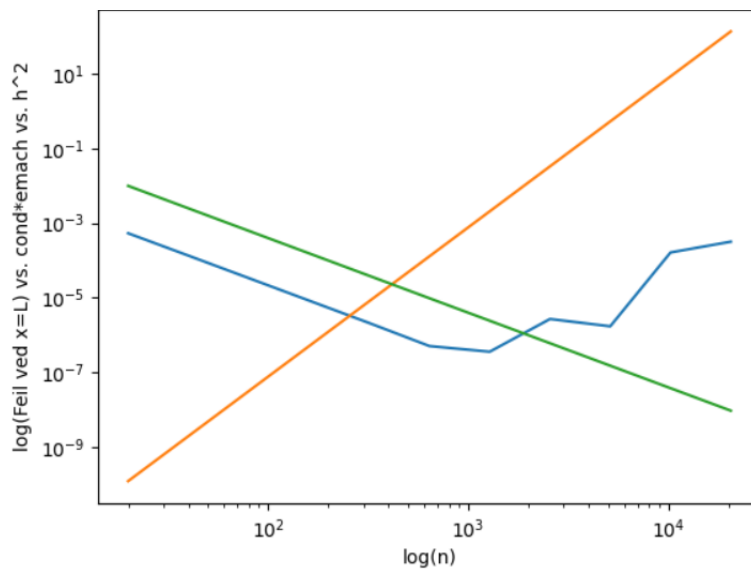
Figur 8: Forstørret versjon.

Vi ser at feilen lik $|\text{nummerisk} - \text{eksakt}|$ minker med økende n , men skyter opp igjen etter $n = 1280$. Dette gjelder også for den alternative grafen som er resultatet av å kjøre utregningene på en annen maskin. Dette kommer vi tilbake til i deloppgave e og f.



Figur 9: Alternativ versjon.

4.6.4 Oppgave d



Figur 10: Samme graf som i c, nå med kondisjonstall*e-mach (oransje) og den teoretiske feilen h^2 (grønn).

Her ser vi at h^2 minker med økende n og kondisjonstallet stiger som forventet med økende n som allerede er diskutert i oppgave 5. Man kan se at feilen "følger" de to linjene og at den begynner å øke ved $n = 1280$. Om vi ser på kondisjonstallet og sammenlikner det med den teoretiske minkingen i feil, kan vi tenke oss at dette punktet er hvor det økende kondisjonstallet endelig gjør opp for den minkende h -verdien. Da blir det stadig vanskeligere å få riktig svar og feilen vil øke.

4.6.5 Oppgave e

Til å begynne med ser vi at feilen blir mindre og mindre for økende n i både oppgave 7 og 5. Dette er grunnet at h , segmentet av bjelken vi regner med, er proporsjonal med n gjennom uttrykket $h = L/n$. Når vi da får mindre segmenter av bjelken å jobbe med til enhver tid, og det også blir flere av disse, vil vi kunne regne ut stadig mer nøyaktige løsninger. Vi bruker altså diskretisering og prøver å få de individuelle bitene av bjelka til å ligge så tett inntil hverandre som mulig, slik at vi nærmest får et kontinuerlig uttrykk for $y(x)$. I begynnelsen funker dette bra, men så ser vi at feilen allikevel begynner å øke igjen fra $n = 1280$. Dette går imot det vi skulle forvente fra observasjonene av den teoretiske feilen h^2 som vi ser minker for mindre h -verdier. Grunnen til at dette skjer kan vi se av kondisjonstallet til A -matrisa. Vi ser at jo større n blir, jo større blir kondisjonstallet til A . Dette er fordi at ved dette punktet vil det høye kondisjonstallet overveie fordelene vi får fra å minke den teoretiske feilen. Dermed vil eventuelle feil bli forstørret mer og mer ettersom A blir verre kondisjonert for hver gang vi øker n herfra, noe som til slutt vil gjøre at feilene dominerer den endelige løsningen.

4.6.6 Oppgave f

Om vi sjekker feilen for $x = L$ slik som i oppgave 5 kan vi danne oss et bilde av hvordan feilene ser ut for hver n -verdi. Fra grafen i deloppgave e kan vi se at den optimale n -verdien i dette tilfellet er $n = 1280$ ettersom feilen er minst her før den begynner å øke med økende n etter dette.

4.7 Oppgave 7

I denne oppgaven vil det bli lagt til en person som veier 50 kg på bjelken. Personen står ytterst på bjelken, og man kan anta at all vekt er fordelt likt langs foten som er 30 cm lang.

Oppgaven blir gjort på tilsvarende måte som i oppgave 3, med unntak av at b-matrisen blir annerledes i denne oppgaven da vi legger til kraft per enhetslengde som er gitt ved

$$s_2(x) = \begin{cases} -g \cdot \frac{50}{0.3} \text{kgm}^{-1} & L - 0.3m \leq x \leq L \\ 0 \text{Nm}^{-1} & 0m \leq x \leq L - 0.3m \end{cases}$$

Bruker de samme verdiene fra oppgave 3 slik at det eneste vi behøver å finne ut for å løse likningssystemet er b-matrisen. Vi lager derfor en tilsvarende matrise som i oppgave 3, men gjør noen justeringer i koden for å ta hensyn til kraft per enhetslengde hva angår personen som står ytterst på brettet.

Ettersom foten er $30\text{cm} = 0.3\text{m}$ lang må vi ta hensyn til kraft per enhetslengde når $1.7 \leq x \leq L$. Da vil kraft per enhetslengde være

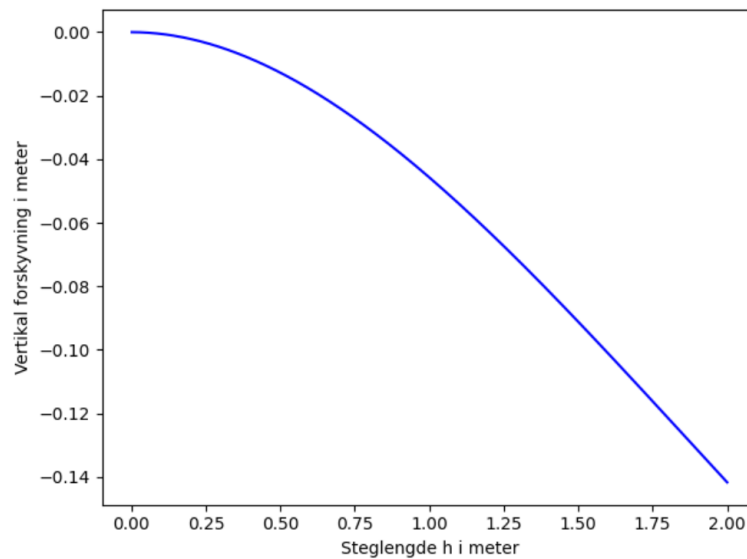
$$-g \cdot \frac{50}{0.3} \text{kgm}^{-1} = -9.81 \cdot \frac{50}{30} \approx 1645 \text{kgm}^{-1}$$

Illustrer dette ved å vise når $n = 10$. Da vil vi få følgende b-matrise:

$$\begin{bmatrix} -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -7.727261538461541 \cdot 10^{-06} \\ -3.058469196581198 \cdot 10^{-04} \end{bmatrix}$$

Som matrisen viser vil siste elementet i matrisen være forskjellig fra de resterende elementene da det er her vi tar hensyn til kraft per enhetslengde. Altså hvor vi tar hensyn til personen som står på brettet.

Videre løser vi likningssystemet med hensyn på y , og får at den vertikale forskyvingen ytterst på bjelken (element nummer $n - 1$ i løsningen) er -0.1417110079952485 m.



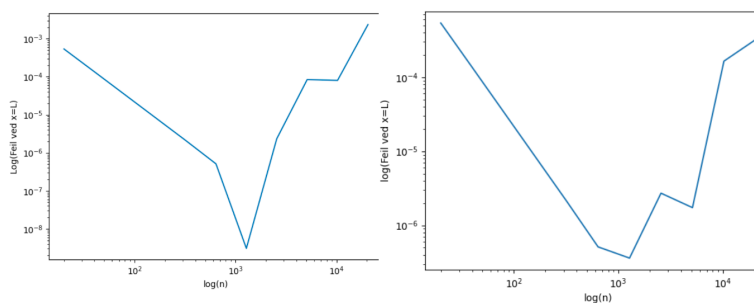
Figur 11: Illustrasjon av den vertikale forskyvningen

Fra oppgave 6 f) har vi at den mest optimale verdien for n vil være **1280**. Dette er grunnen til at vi hele oppgave 7 har benyttet $n = 1280$ for å gjøre de nødvendige beregningene.

5 Konklusjon

I dette prosjektet har vi sett på Euler-Bernoullibjelken og Euler-Bernoullilikningen for å kunne regne på den vertikale forskyvningen til et stupebrett, både med og uten ekstra vekt på enden.

Gjennom prosjektet har vi benyttet oss av ulike verdier for n for å gi oss et mer nøyaktig svar på oppgaven. Det har derimot vært vanskelig å konkludere med hvor nøyaktig svarene blir da avrundingsfeilen på datamaskinen har en stor betydning. Vi har erfart at helt identisk kode kan gi relativt forskjellige utslag på ulike datamaskiner.



Figur 12: Forskjellige grafer på ulike datamaskiner

Kondisjonstallet har også vært et viktig konsept i løpet av prosjektet. Vi har sett at dette påvirker nøyaktigheten vi får ved utregning av den numeriske løsningen. Som observert i oppgave 5 og 6 vil økende kondisjonstall føre til at eventuelle feil input vil forstørres og lede til større feil i output. Først vil ikke dette ha så stor betydning, men vil etter hvert ha mer å si når kondisjonstallet blir tilstrekkelig stort.

Når det gjelder hva vi kunne undersøkt videre, så kunne vi gjerne sett på hva som skjer dersom man løser oppgavene på datamaskiner med svært høy ytelse. Da kunne vi svart på spørsmålet om bedre datamaskiner hadde gitt mer nøyaktig svar eller ikke. Dersom vi hadde gjort dette flere ganger kunne vi ha analysert i hvor stor grad nøyaktigheten til svarene avhenger av god maskinvare.

Vi har brukt programmeringsspråket Python med pakkene numpy og scipy, og føler vi har fått masse erfaring i det å bruke et programmeringsspråk til å løse matematiske problemstillinger. I tillegg sitter vi selvfølgelig også igjen med masse kunnskap om fagfeltet vi har fokusert på, som feilanalyse, kondisjonstall, Taylors teorem og numerisk analyse generelt.

6 Referanseliste

1. Lærebøker

- (a) T. Sauer - Numerical Analysis, 2. utgave (2012)
- (b) J. Stewart - Early Transcendentals, 8. utgave (2014)

2. Taylors Teorem og fremgangsmetode til oppgave 1

- (a) Finite-difference method (forelesning fra Dortmund Tekniske Universitet), hentet ut 14.03.20 fra <https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~kuzmin/cfdintro/lecture4.pdf>
- (b) Numerical Differentiation (forelesning fra Universitetet i Notre Dame), hentet ut 14.03.20 fra <https://www3.nd.edu/~zxu2/acms40390F15/Lec-4.1.pdf>
- (c) Finite Difference Approximations (Forelesning fra Ludwig-Maximilians Universitet i Munchen), hentet ut 15.03.20 https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/Lectures/NMG/02_finite_differences.pdf

3. Randbetingelser

- (a) Boundary Conditions (nettside fra University of Illinois at Urbana-Champaign), hentet 15.03.20 fra <http://www.geom.uiuc.edu/education/calc-init/static-beam/boundary.html>
- (b) Dynamics Of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories (vitenskaplig artikkel fra Journal of Sound and Vibration, 1999, s. 939 - 942), hentet ut 29.03.29 fra <https://web.archive.org/web/20110720040107/http://csxe.rutgers.edu/research/vibration/51.pdf>

4. Feilanalyse

- (a) Numerical and Error Analysis (notat fra Stanford University), hentet 06.04.20 fra <https://graphics.stanford.edu/courses/cs205a-13-fall/assets/notes/chapter1.pdf>
- (b) Conditioning, Stability and Finite Precision Arithmetic (notat fra Emory University), hentet 06.04.20 fra http://www.mathcs.emory.edu/~nagy/courses/fall12/515/Conditioning_and_FLOPS.pdf
- (c) Notes on Error Analysis (notat fra Whitman College), hentet 06.04.20 fra

5. Euler-Bernoulli likningen

- (a) Ordforklaring av Youngs Modulus, hentet ut den 09.03.20 fra <https://www.britannica.com/science/Youngs-modulus>
- (b) Forklaring av Euler-Bernoulli-likningen, hentet ut den 01.04.20 fra <http://www.learnaboutstructures.com/Bernoulli-Euler-Beam-Theory>

6. Definisjonen av den deriverte

- (a) Definisjonen av den deriverte (artikkel fra Matematikk.org), hentet 01.04.20 https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=187434&within_tid=154780

7. Python-biblioteker

- (a) math — Bibliotek for bruk av diverse matematiske funksjoner
- (b) numpy — Bibliotek for støtte for større, flerdimensjonale matriser og tabeller
- (c) scipy — Bibliotek for optimalisering og lineær algebra
- (d) matplotlib — Bibliotek for plotting og utskrift av grafer

7 Vedlegg

7.1 Oppgave 2

```
Lager strukturmatriksen med n = 10
16.0, -9.0, 2.6666666666666665, -0.25, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
-4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -4.0, 6.0, -4.0, 1.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.9411764705882353, -3.5294117647058822, 4.235294117647059, -1.6470588235294117,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.7058823529411765, 5.647058823529412, -9.176470588235293, 4.235294117647059,
```

Figur 13: Utskrift oppgave2.py

7.2 Oppgave 3

```
Løsning av likningssystemet:  
-0.00018062473846151627  
-0.0006748475076922225  
-0.0014169865846152012  
-0.0023490875076919967  
-0.0034209230769226117  
-0.004589993353845512  
-0.005821525661537625  
-0.007088474584614343  
-0.008371521969229514  
-0.00965907692307545
```

Figur 14: Utskrift oppgave3.py

7.3 Oppgave 4

Numerisk fjerdederiverte:

-0.0048295384615375525

-0.004829538461538441

-0.004829538461535776

-0.004829538461541105

-0.004829538461535776

-0.004829538461539329

-0.004829538461531335

-0.004829538461539329

-0.0048295384615375525

-0.004829538461539329

Foroverfeil:

7.1279787627887e-15

Relativ foroverfeil:

1.4759130338343062e-12

Feilforstøringsfeil:

6646.9213892074395

Kondisjonstallet til A:

34895.833333328

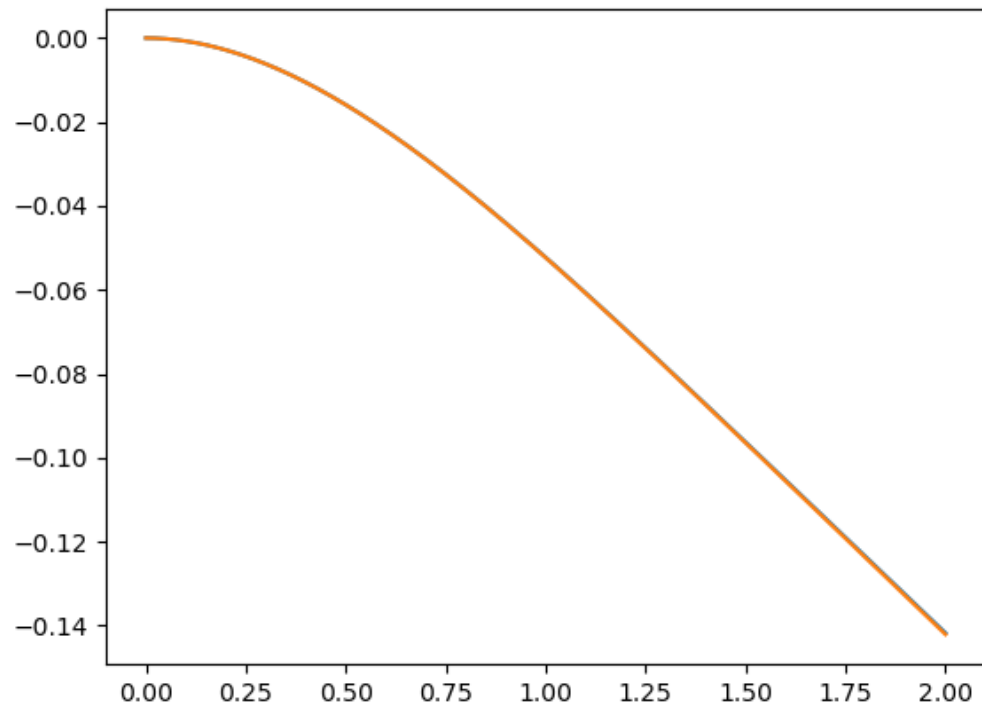
Figur 15: Utskrift oppgave4.py

7.4 Oppgave 5

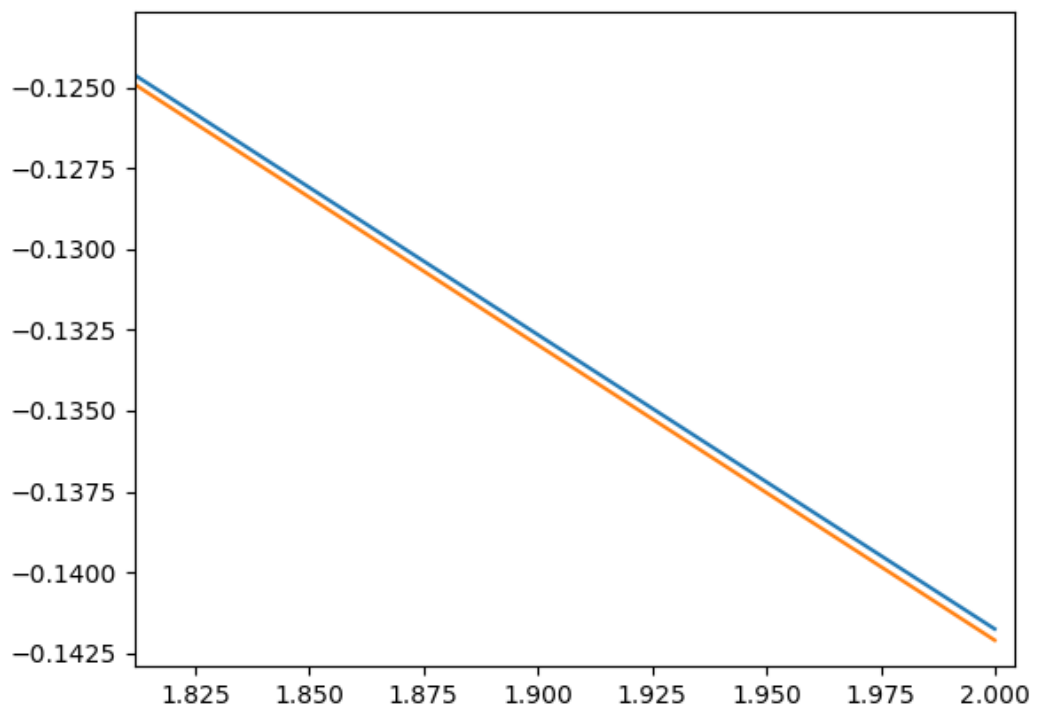
n	error	condition number
[20]	[1.04430353e-15]	[558333.33333327]
[40]	[1.52135249e-15]	[8933333.33333192]
[80]	[5.71731898e-13]	[1.42933333e+08]
[160]	[2.32352592e-11]	[2.28693333e+09]
[320]	[2.31834673e-11]	[3.65909332e+10]
[640]	[1.23978369e-09]	[5.85454858e+11]
[1280]	[9.20966602e-09]	[9.36727e+12]
[2560]	[1.61810124e-07]	[1.49873952e+14]
[5120]	[5.69481851e-06]	[2.39660958e+15]
[10240]	[5.41742399e-06]	[3.83468551e+16]
[20480]	[0.00015935]	[6.03766257e+17]

Figur 16: Utskrift oppgave5.py

7.5 Oppgave 6b

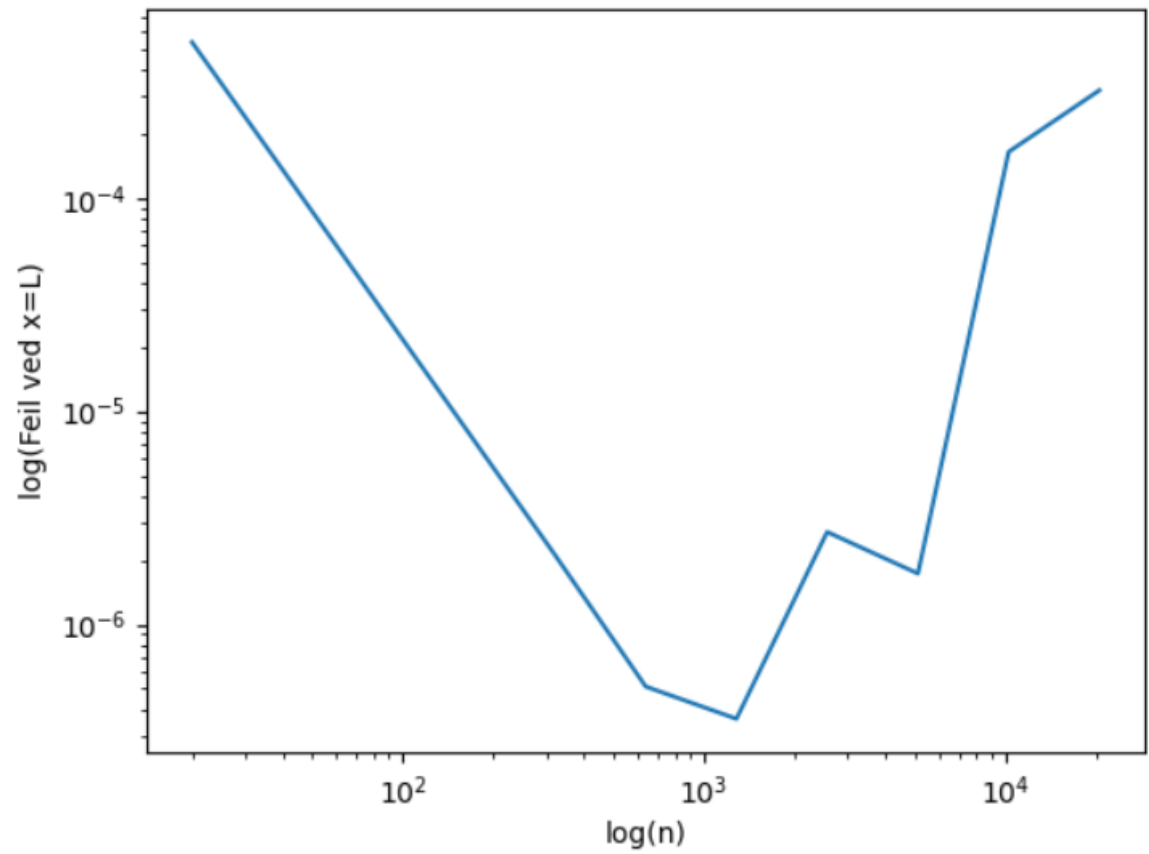


Figur 17: Utskrift oppgave6b.py

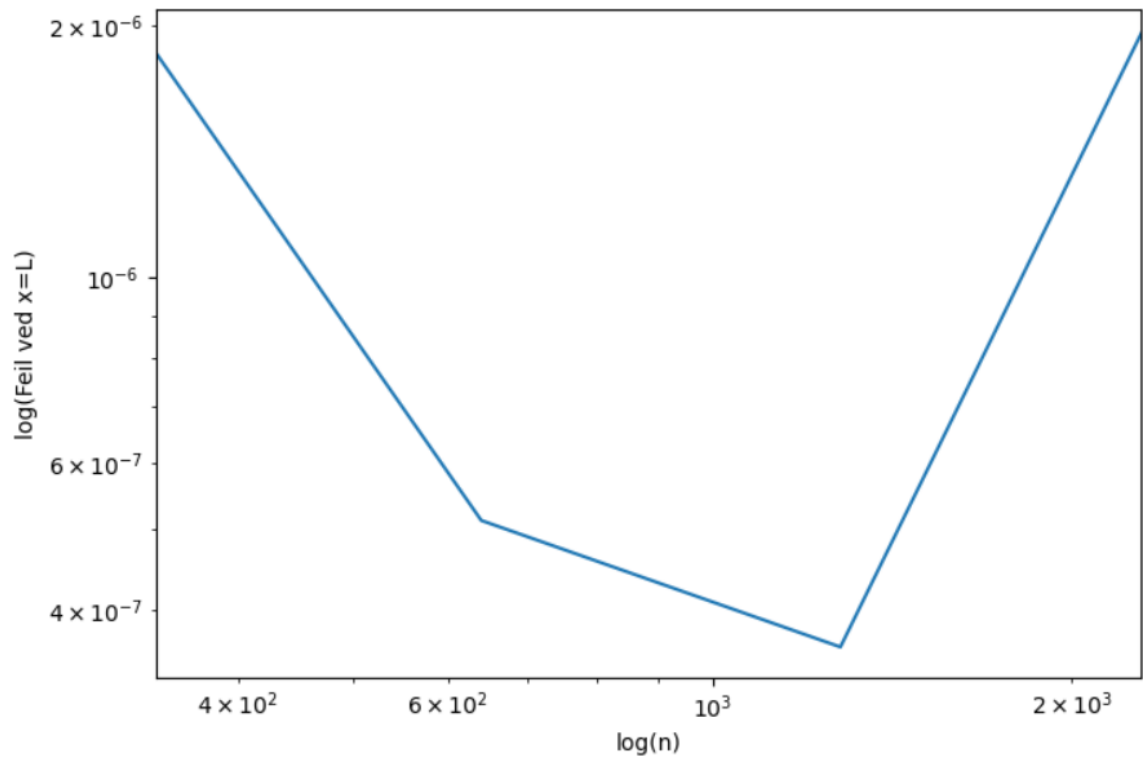


Figur 18: Utskrift oppgave6b.py

7.6 Oppgave 6c

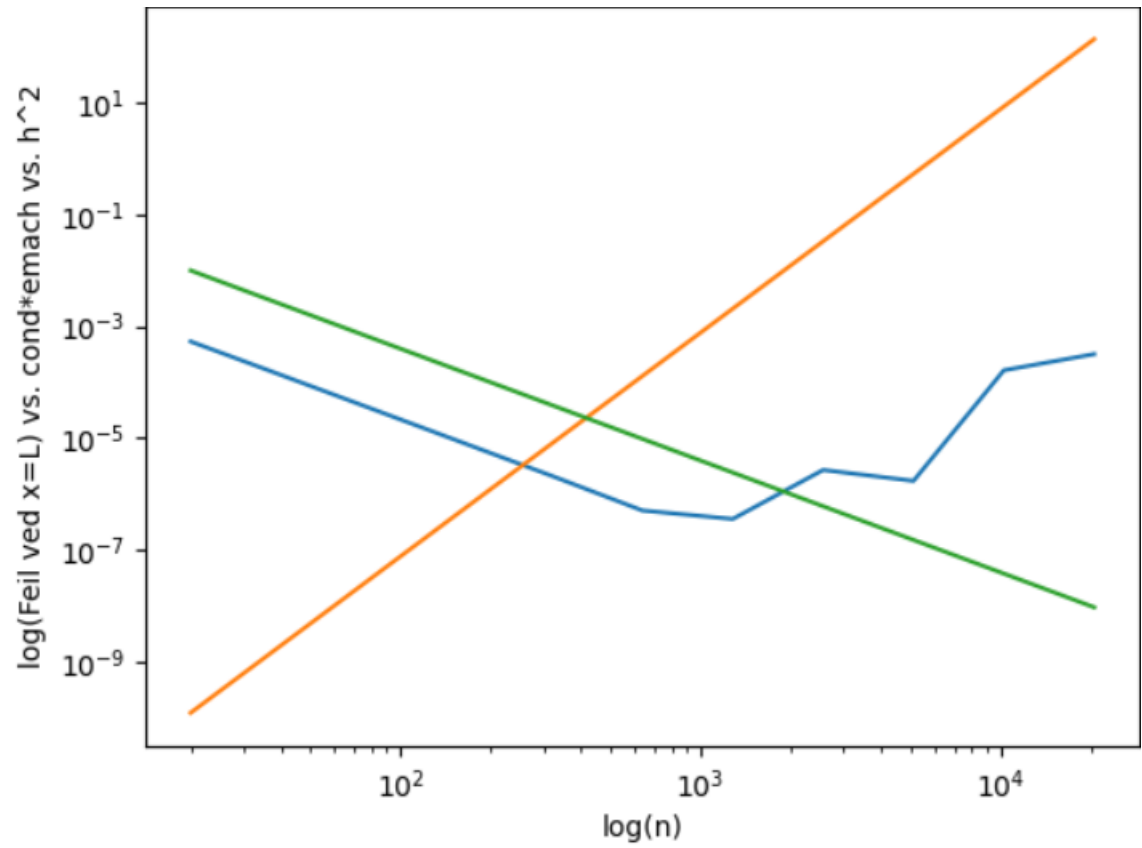


Figur 19: Utskrift oppgave6c.py



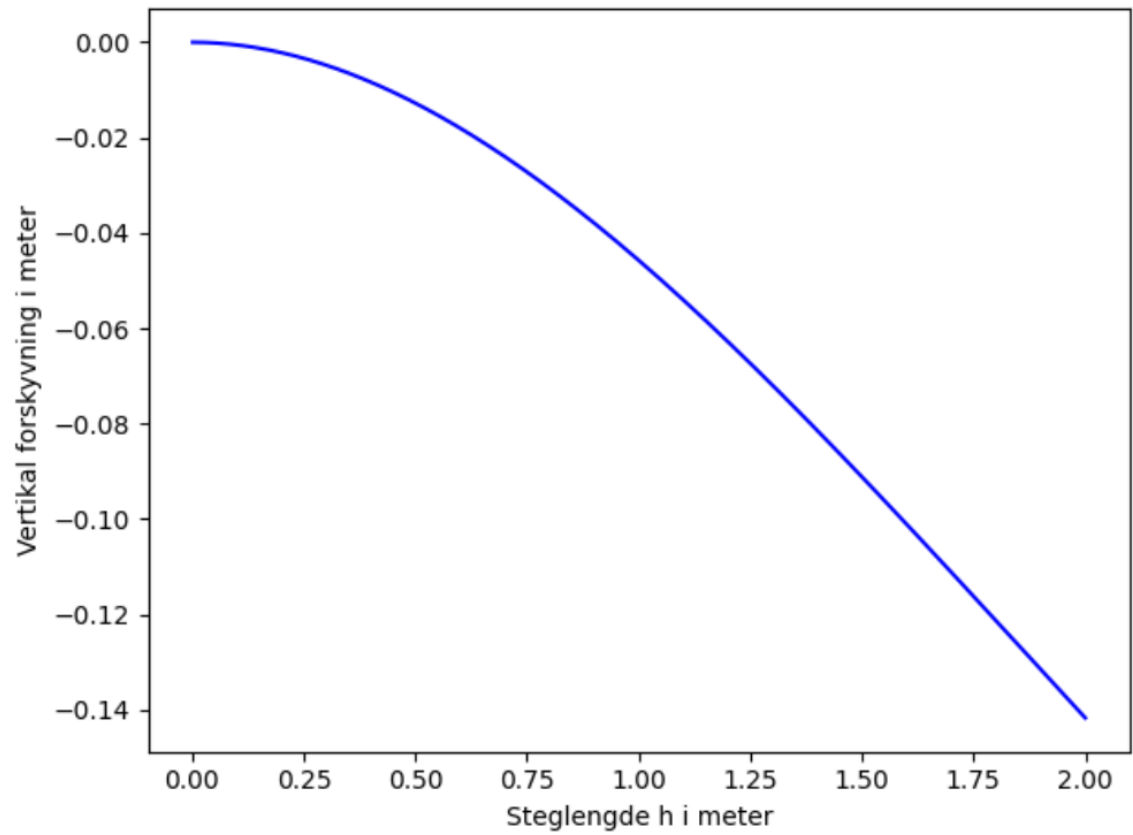
Figur 20: Utskrift oppgave6c.py

7.7 Oppgave 6d



Figur 21: Utskrift oppgave6d.py

7.8 Oppgave 7



Figur 22: Utskrift oppgave7.py