

ROTASJON AV STIVE LEGEMER

PROSJEKTOPPGAVE I TDAT3024

Hans J. Rivertz

14. oktober 2020

Innhold

1	Praktisk	1
1.1	Innlevering	1
2	Introduksjon	2
3	Rotasjon av stivt legeme om dets massesenter	2
3.1	Koordinatsystem som følger og roterer sammen med legemet.	3
3.2	Trehetsmoment	4
3.3	Energien til et roterende legeme.	4
3.4	Bevegelsesligningene for det roterende koordinatsystemet	4
4	Numeriske metoder	5
4.1	Eulers metode	5
4.1.1	Feilanalyse av Eulers metode.	6
4.2	Midtpunkts-metoden	6
4.3	Trapes-metoden	7
4.4	Runge-Kutta RK4	7
4.5	Runge-Kutta-Fehlberg	7
5	Utleddning av formelen for $\exp(h\Omega)$	8
6	Litt om integraler over masser	8
7	Trehetsmoment til en T-nøkkel	9
8	Oppgaver	10
9	Evaluerings	10

1 Praktisk

1.1 Innlevering

En zip-fil som inneholder en rapport (pdf-fil) samt alle produserte filer Rapporten skal fortelle hva dere har gjort og hvordan dere har gjort det. Den skal være bygd opp med (minst) følgende kapitler.

- **Innledning** (Hvilken oppgave skal løses, og hvorfor)
- **Teori /Metode** (Hvordan er oppgaven løst – metode og teorien bak metoden. Her er det naturlig å ta utgangspunkt i dette dokumentet og læreboka, men bruk gjerne andre kilder også. Men ikke skriv av/oversett det som står, studer det slik at dere forstår det, og tenk dere deretter at dere skal forklare det til en medstudent. Husk referanser – og referanser til vitenskapelige artikler gjør seg ekstra godt.)
- **Resultater** (Gjerne inkludert tabeller og/eller figurer)
- **Diskusjon/Konklusjon** (Hvorfor blir resultatene slik som de blir? Hva ville dere forventet ut fra teorien, og hva skjer i praksis? Hva har dere lært? Har dere forslag til ting som kunne vært undersøkt videre og/eller ting som kunne vært gjort annerledes/bedre?)
- **Referanseliste** (Fullstendig URI (URL og/eller bok/artikkel-henvisning) til de og bare de referansene dere har nevnt tidligere i rapporten.)
- **Vedlegg** (Utskrift av alle programmer dere har laget)
- **Erklæring** Hver student skal levere en erklæring på at vedkommende har samarbeidet og bidratt konstruktivt i besvarelsen. Denne skal underskrives av de andre på gruppen.

2 Introduksjon

Kilden for denne fremstillingen er boken “Physics for Science and Engineering” av Marion og Hornyak. Matematikken er hentet fra Sauer [4] og en bok av Helgasson [2]. Andre fremstillinger av matematikken bak kan også finnes i artikler av Munthe Kaas [3] som er en pionerer på området. Geometrien i prosjektet bygger på arbeidene til Sophus Lie fra Nordfjordeid.

Det er ikke meningen at dere skal forstå alt som står i dette dokumentet eller i kildene som eg har oppgitt.

3 Rotasjon av stivt legeme om dets massesenter

Vi skal se på fysikken bak et roterende stivt legeme. Grunnlaget for teorien bak ble lagt av en student i 1666-67. Hans navn var Isaac Newton. En viktig anvendelse av Newtons lover er teorien for roterende legemer. Valg av koordinatsystem som er tilpasset fysikken er avgjørende for å få likninger som er enkle. For roterende legemer passer det å bruke et koordinatsystem med origo i massesenteret til legemet M . Om legemet ikke er i ro vil posisjonen til massesenteret være en funksjon av tiden.

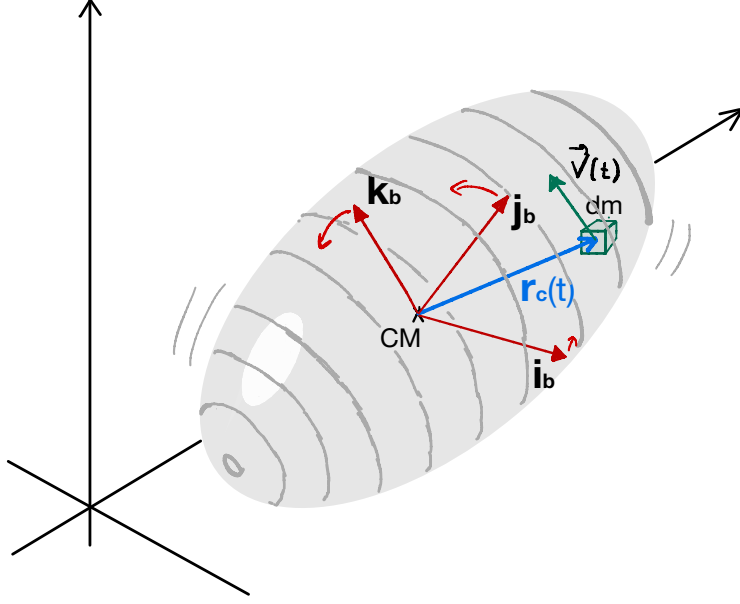
$$\vec{r}_{C.M}(t) = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r}(t) dm. \quad (1)$$

Dere trenger ikke å kjenne til hvordan man regner ut integralet \iiint_M i formelen. En forklaring av hva det betyr kan dere finne i avsnitt 6. Vektoren $\vec{r}(t)$ angir posisjonen til en liten masse dm og M angir legemets totale masse. Posisjonen til dm relativt til massesenteret er gitt ved $\vec{r}_c(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{C.M}(t)$. Dreiemomentet til legemet om massesenteret er gitt ved formelen

$$\vec{L}_c = \iiint_M \vec{r}_c(t) \times \vec{v}_c(t) dm, \quad (2)$$

der $\vec{v}_c(t)$ er hastighetsvektoren til dm relativt til massesenteret. Siden M er et stivt legeme så er hastigheten til dm gitt ved formelen

$$\vec{v}_c(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_c(t), \quad (3)$$



Figur 1: Figur av et roterende stivt legeme formet som en ellipsoide. Massesenteret er markert med CM og vektorene som utpepper det roterende koordinatsystemet som følger legemet.

der $\vec{\omega}(t)$ vinkelhastighetsvektoren til legemet. Vinkelhastighetsvektoren er produktet mellom enhetsvektoren $\hat{u}_\omega(t)$ normalt på rotasjonsplanet og vinkelfarten $\omega(t)$. Dreiemomentet til M er derfor

$$\vec{L}_c = \iiint_M \vec{r}_c(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_c(t)) dm, \quad (4)$$

Formelen for dreiemomentet er uavhengig av hvilket koordinatsystem vi velger med origo i massesenteret.

3.1 Koordinatsystem som følger og roterer sammen med legemet.

Det lønner seg derfor å velge et koordinatsystem der aksene er hovedaksene til treghetsmomentet til legemet. Merk at dette koordinatsystemet roterer sammen med legemet. Enhetsvektorene $\hat{i}_b(t)$, $\hat{j}_b(t)$ og $\hat{k}_b(t)$ for koordinatsystemet er derfor en funksjon av tiden. I dette koordinatsystemet er vinkelmomentet og vinkelhastighetsvektoren lik

$$\vec{L}_b = \iiint_M \vec{r}_b(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_b(t)) dm, \quad (5)$$

Vi skriver koordinatene til \vec{L}_b som

$$\vec{L}_b = L_x \hat{i}_b(t) + L_y \hat{j}_b(t) + L_z \hat{k}_b(t) \quad (6)$$

og

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i}_b(t) + \omega_y \hat{j}_b(t) + \omega_z \hat{k}_b(t) \quad (7)$$

Den deriverte av dreiemomentet er lik

$$\frac{d\vec{L}_b}{dt} = \frac{dL_x}{dt} \hat{i}_b + \frac{dL_y}{dt} \hat{j}_b + \frac{dL_z}{dt} \hat{k}_b + L_x \frac{d\hat{i}_b}{dt} + L_y \frac{d\hat{j}_b}{dt} + L_z \frac{d\hat{k}_b}{dt} \quad (8)$$

Fra den generelle formelen $\frac{d\vec{r}_b}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_b$ får man $\frac{d\hat{i}_b}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}_b$, $\frac{d\hat{j}_b}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}_b$ og $\frac{d\hat{k}_b}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}_b$. Derfra får vi formelen

$$\frac{d\vec{L}_b}{dt} = \frac{dL_x}{dt} \hat{i}_b + \frac{dL_y}{dt} \hat{j}_b + \frac{dL_z}{dt} \hat{k}_b + \vec{\omega} \times \vec{L}_b. \quad (9)$$

På komponentform har vi derfor formelen for det ytre kraftmomentet

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dL_x/dt \\ dL_y/dt \\ dL_z/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Vi antar at ingen ytre krefter virker på legemet. Derfor er $\begin{bmatrix} \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

3.2 Trehetsmoment

Vi benytter oss av formelen $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{x}) = x^2 \vec{y} - \vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{y})$ og skriver om formelen for dreiemomentet til

$$\vec{L}_b = \iiint_M r_b^2 \vec{\omega} - \vec{r}_b(\vec{r}_b \cdot \vec{\omega}) dm. \quad (11)$$

Vi lar $\vec{r}_b = x_b \hat{\mathbf{i}}_b(t) + y_b \hat{\mathbf{j}}_b(t) + z_b \hat{\mathbf{k}}_b(t)$. Da er $r_b^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2$ og $\vec{r}_b \cdot \vec{\omega} = x_b \omega_x + y_b \omega_y + z_b \omega_z$. Vi får derfor at

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (12)$$

der I_{**} -ene er komponentene til treghetsmomentmatrisen I .

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_M (y_b^2 + z_b^2) dm, & I_{xy} &= I_{yx} = \iiint_M x_b y_b dm \\ I_{yy} &= \iiint_M (x_b^2 + z_b^2) dm, & I_{xz} &= I_{zx} = \iiint_M x_b z_b dm \\ I_{zz} &= \iiint_M (x_b^2 + y_b^2) dm, & I_{yz} &= I_{zy} = \iiint_M y_b z_b dm \end{aligned} \quad (13)$$

La $\hat{\mathbf{i}}_b$, $\hat{\mathbf{j}}_b$ og $\hat{\mathbf{k}}_b$ være egenvektorer til I . Da blir I diagonal.

3.3 Energien til et roterende legeme.

Den kinetiske rotasjonsenergien til et roterende legeme med dreiemomentmoment \vec{L} og rotasjonsvektor $\vec{\omega}$ er gitt ved formelen [1]

$$K = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}. \quad (14)$$

3.4 Bevegelseslikningene for det roterende koordinatsystemet

Bevegelseslikningene for legemet beskriver hvordan $\hat{\mathbf{i}}_b$, $\hat{\mathbf{j}}_b$ og $\hat{\mathbf{k}}_b$ endres med tiden. Definisjonen av $\vec{\omega}$ gir likningene

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{i}}_b/dt &= \omega_z \hat{\mathbf{j}}_b - \omega_y \hat{\mathbf{k}}_b \\ d\hat{\mathbf{j}}_b/dt &= \omega_x \hat{\mathbf{k}}_b - \omega_z \hat{\mathbf{i}}_b \\ d\hat{\mathbf{k}}_b/dt &= \omega_y \hat{\mathbf{i}}_b - \omega_x \hat{\mathbf{j}}_b. \end{aligned} \quad (15)$$

Om komponentene til alle likningene skrives ut, fås 9 koblede differensiallikninger. Det er lettere implementere likningene ved hjelp av matriser. La $X = [x_{ij}]$ være matrisen som har $\hat{\mathbf{i}}_b$, $\hat{\mathbf{j}}_b$ og $\hat{\mathbf{k}}_b$ som søylevektorer.

$$\hat{\mathbf{i}}_b = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}}_b = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}}_b = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

X har den spesielle egenskapen at $X^T X = Id_{3 \times 3}$ der $Id_{3 \times 3}$ er identitetsmatrisen og at $\det X = 1$. Mengden av slike matriser kalles den **spesielle ortogonale gruppen** og skrives

$$SO(3) = \{\text{Mengden av alle } 3 \times 3\text{-matriser } X \text{ slik at } X^T X = Id_{3 \times 3} \text{ og } \det X = 1\} \quad (17)$$

$SO(3)$ er det vi kaller en **Lie-Gruppe**, oppkalt etter den Norske matematikeren Sophus Lie.

La $\vec{\omega}_b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$. Ved å bruke at $\vec{L} = X I \vec{\omega}_b$ er en konstant fås $\vec{\omega}_b = (X I)^{-1} \vec{L}$.

La Ω være matrisen

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Da er likningene for X og $\vec{\omega}_b$

$$\dot{\vec{\omega}}_b = (X I)^{-1} \dot{\vec{L}} \quad (19)$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X) = X \Omega. \quad (20)$$

Husk at \vec{L} er konstant og at $\vec{\omega}_b$ må skrives om til Ω . En enkel måte å finne en tilnærming av $X(t+h)$ er lineariseringen $X(t+h) \approx X(t) + X(t)h\Omega$. En ulempe med lineariseringen er at søylene i $X(t) + X(t)h\Omega$ ikke er ortogonale. Dette kan rettes på ved å bruke en annen tilnærming av $X(t)$. Det viser seg at Ω er den deriverte i $h=0$ av følgende matrisefunksjon

$$\exp(h\Omega) = I + (1 - \cos \omega h) \frac{\Omega^2}{\omega^2} + (\sin \omega h) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (21)$$

der $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$. Denne formelen tilfredstiller likningen $\exp(h\Omega) \exp(h\Omega)^T = I$. Det betyr at $X \exp(h\Omega)$ har ortogonale søylevektorer. Faktisk, så er

$$X \exp(h\Omega) (X \exp(h\Omega))^T = X \exp(h\Omega) \exp(h\Omega)^T X^T = X I X^T = X X^T = I. \quad (22)$$

4 Numeriske metoder

4.1 Eulers metode

Eulers metode er den ekleste metoden for løsning av differensiallikninger. En likning $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ løses numerisk ved å finne $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{y}(t_i)$ der $t_i = t_0 + hi$ ved hjelp av den rekursive metoden

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \mathbf{y}(t_0) \\ \mathbf{w}_{i+1} &= \mathbf{w}_i + h \mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i). \end{aligned} \quad (23)$$

Anvendt på eksempelet over setter vi $W_0 = X_0$ og regner videre ut $W_{i+1} = W_i + h W_i \Omega_i$.

$$\begin{aligned} W_0 &= X_0 \\ W_{i+1} &= W_i + h W_i \Omega_i \end{aligned} \quad (24)$$

I hvert ledd danner vi Ω_i fra $\vec{\omega}_i = (W_i I)^{-1} \vec{L}$. En av mange svakheter med Eulers metode at W_i ikke er ortogonal. Det kan rettes opp ved å bruke en variant av Eulers metode ved følgende skjema

$$\begin{aligned} W_0 &= X_0 \\ W_{i+1} &= W_i \exp(h\Omega_i) \end{aligned} \quad (25)$$

Vi må fortsatt regne ut $\vec{\omega}_i = I^{-1} W_i^T \vec{L}$ i hvert ledd. For små h er det svært lite som skiller disse to metodene.

4.1.1 Feilanalyse av Eulers metode.

Om vi lar $Z(t)$ være den eksakte løsningen av rotasjonsproblemet med startverdi $Z(0) = W_i$, så kan vi bruke likningen til å finne alle deriverte av $Z(t)$ for $t = 0$.

$$Z'(0) = W_i \Omega \quad (26)$$

$$Z''(0) = W_i (\Omega^2 + \Omega'(0)) \quad (27)$$

$$Z'''(0) = W_i (\Omega^3 + \Omega'(0)\Omega + 2\Omega\Omega'(0) + \Omega''(0)) \quad (28)$$

Den deriverte av $\Omega(t)$ fås ved å regne ut den deriverte av $\vec{\omega}(h) = I^{-1}Z(h)^T \vec{L}$.

$$\vec{\omega}'(0) = -I^{-1}\Omega W_i^T \vec{L} \quad (29)$$

$$\vec{\omega}''(0) = I^{-1}(\Omega^2 - \Omega'(0))W_i^T \vec{L} \quad (30)$$

$$\vec{\omega}'''(0) = I^{-1}(-\Omega^3 + \Omega'(0)\Omega + 2\Omega\Omega'(0) - \Omega''(0))W_i^T \vec{L} \quad (31)$$

Taylorrekken for $Z(h)$ er da

$$Z(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}W_i(\Omega^2 + \Omega'(0)) + O(h^3). \quad (32)$$

Leddene $O(h^3)$ står for alle ledd av tredje eller høyere grad i h . Taylorrekken for $W_{i+1}(h) = W_i \exp(h\Omega_i)$ er

$$W_i(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 + O(h^3). \quad (33)$$

Feilen i Eulers metode i hvert trinn er derfor

$$W_i(h) - Z(h) = \frac{h^2}{2}W_i\Omega'(0) + O(h^3). \quad (34)$$

4.2 Midtpunkts-metoden

I midtpunkts-metoden tas det utgangspunkt i Eulers metode. Den brukes til å finne $\vec{\omega}$ midtveis mellom W_i og W_{i+1} . Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er som følgende

1. Regn ut $\vec{\omega}_i = I^{-1}W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\omega}_{i+1/2} = I^{-1} \exp\left(-\frac{h}{2}\Omega_i\right)W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp(h\Omega_{i+1/2})$

For å regne ut feilen i midtpunkts-metoden så regner vi ut noen deriverte av W_{i+1} med hensyn på h . Vi har

$$W'_{i+1}(0) = W_i\Omega_i \quad (35)$$

$$W''_{i+1}(0) = W_i(\Omega_i^2 + \Omega'(0)). \quad (36)$$

Vi har brukt at $\vec{\omega}'_{i+1/2}(0) = \frac{1}{2}\vec{\omega}'(0)$. Vi får derfor Taylorutvikling for $W_{i+1}(h)$ lik

$$W_i(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}(\Omega^2 + \Omega'(0)) + O(h^3). \quad (37)$$

Feilen i midtpunktmetoden blir derfor

$$W_i(h) - Z(h) = O(h^3). \quad (38)$$

Det er det samme som feilen i den klassiske midtpunktmetoden som dere finner i Sauer.

4.3 Trapez-metoden

Trapez-metoden tar også utgangspunkt i Eulers metode. Den brukes til å finne et gjennomsnitt av $\vec{\omega}$ mellom W_i og W_{i+1} . Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er som følgende

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1}W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp(-h\Sigma_1)W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp\left(\frac{h}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)\right)$

4.4 Runge-Kutta RK4

Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er beskrevet i punktene 1–5 nedenfor. I hvert ledd regnes Σ_i fra $\vec{\sigma}_i$ på samme måte som Ω utregnes fra $\vec{\omega}$.

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1}W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp(-(h/2)\Sigma_1)W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $\vec{\sigma}_3 = I^{-1} \exp(-(h/2)\Sigma_2)W_i^T \vec{L}$.
4. Regn ut $\vec{\sigma}_4 = I^{-1} \exp(-h\Sigma_3)W_i^T \vec{L}$.
5. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp\left(\frac{h}{6}(\Sigma_1 + 2\Sigma_2 + 2\Sigma_3 + \Sigma_4)\right)$

4.5 Runge-Kutta-Fehlberg

Akurat som for standard Runge-Kutta-Fehlberg så regner vi ut to verdier og aproksimerer feilen. Skjemaet for Runge-Kutta-Fehlberg er gitt ved $\frac{\mathbf{c}}{B} \Big| \frac{A}{B} =$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & & \\
 \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
 \frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
 \frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
 1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
 \frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
 \hline
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & \\
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
 \end{array} \tag{39}$$

Skjemaet brukes på følgende måte

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1}W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp(-ha_{21}\Sigma_1)W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $\vec{\sigma}_3 = I^{-1} \exp(-h(a_{31}\Sigma_1 + a_{32}\Sigma_2))W_i^T \vec{L}$.
4. Regn ut $\vec{\sigma}_4 = I^{-1} \exp(-h(a_{41}\Sigma_1 + a_{42}\Sigma_2 + a_{43}\Sigma_3))W_i^T \vec{L}$.
5. Regn ut $\vec{\sigma}_5 = I^{-1} \exp(-h(a_{51}\Sigma_1 + a_{52}\Sigma_2 + a_{53}\Sigma_3 + a_{54}\Sigma_4))W_i^T \vec{L}$.

6. Regn ut $\vec{\sigma}_6 = I^{-1} \exp \left(-h(a_{61}\Sigma_1 + a_{62}\Sigma_2 + a_{63}\Sigma_3 + a_{64}\Sigma_4 + a_{65}\Sigma_5) \right) W_i^T \vec{L}$.
7. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp \left(h(b_{11}\Sigma_1 + b_{12}\Sigma_2 + b_{13}\Sigma_3 + b_{14}\Sigma_4 + b_{15}\Sigma_5 + b_{16}\Sigma_6) \right)$
8. Regn ut $Z_{i+1} = W_i \exp \left(h(b_{21}\Sigma_1 + b_{22}\Sigma_2 + b_{23}\Sigma_3 + b_{24}\Sigma_4 + b_{25}\Sigma_5 + b_{26}\Sigma_6) \right)$
9. Regn også ut $\Delta W = W_{i+1} - Z_{i+1}$ og $E = \sqrt{\text{trace}(\Delta W^T \Delta W)}$. Der sporet (trace) av en matrise er summen av diagonalelementene ($\text{trace } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$). E er da et tilnærmet mål på feilen i utregningen av W_{i+1} .

Dere kan bruke samme metode som i Sauer til å oppdatere steglengden h ved hjelp av E og en toleranse.

5 Utledning av formelen for $\exp(h\Omega)$

For de spesielt interesserte gir jeg en slags utledning av formelen over. Vi bruker rekkeutviklingen til eksponentialfunksjonen e^x og erstatter x med $h\Omega$.

$$\begin{aligned}
 \exp(h\Omega) &= I + h\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 + \frac{h^3}{3!}\Omega^3 + \frac{h^4}{4!}\Omega^4 + \frac{h^5}{5!}\Omega^5 + \frac{h^6}{6!}\Omega^6 + \frac{h^7}{7!}\Omega^7 + \dots + \frac{h^n}{n!}\Omega^n + \dots \\
 &= I + t\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 - \frac{h^3}{3!}\omega^2\Omega - \frac{h^4}{4!}\omega^2\Omega^2 + \frac{h^5}{5!}\omega^4\Omega + \frac{h^6}{6!}\omega^4\Omega^2 - \frac{h^7}{7!}\omega^6\Omega + \dots + \frac{h^n}{n!}\Omega^n + \dots \\
 &= I + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} + \frac{h^2}{2}\Omega^2 - \frac{h^4}{4!}\omega^2\Omega^2 + \frac{h^6}{6!}\omega^4\Omega^2 + \dots \\
 &\quad + t\Omega - \frac{h^3}{3!}\omega^2\Omega + \frac{h^5}{5!}\omega^4\Omega - \frac{h^7}{7!}\omega^6\Omega + \dots \\
 &= I + (1 - \cos \omega h) \frac{\Omega^2}{\omega^2} + (\sin \omega h) \frac{\Omega}{\omega}.
 \end{aligned}$$

6 Litt om integraler over masser

Tyngdepunktet til en kule ligger i dets senter. Om man har to like tunge kuler vil tyngdepunktet ligge i punktet midt mellom disse. Matematisk kan vi beskrive dette ved hjelp av vektorregning. Hvis posisjonene til de to kulene er bestemt av vektorene \vec{r}_1 og \vec{r}_2 så er det felles massesenteret lik $\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Om massene er forskjellige så er det felles massesenteret lik

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (40)$$

For flere masser $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ er massesenteret lik

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \vec{r}_i. \quad (41)$$

For et kontinuerlig legeme med masse M så tenker vi oss at vi deler opp legemet i mange små deler Δm_i , hver med massesenter \vec{r}_i .

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec{r}_i \Delta m_i. \quad (42)$$

Når N går mot uendelig, kaller vi grensen for et trippel integral. Vi skriver dette på formen som

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r}_i dm. \quad (43)$$

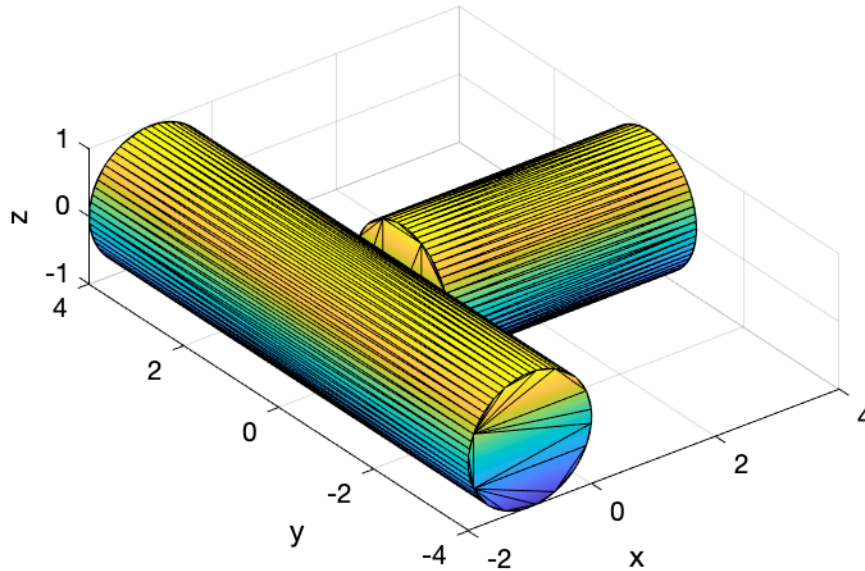
På komponent form får er massesenteret gitt ved

$$\left[\frac{1}{M} \sum_i^N x_i \Delta m_i, \frac{1}{M} \sum_i^N y_i \Delta m_i, \frac{1}{M} \sum_i^N z_i \Delta m_i \right]. \quad (44)$$

Et legeme som roterer om x aksen med vinkelhastighet ω har hastigheten $\vec{v} = \omega(0, -z, y)$. Dreiemomentet om origo til massen m er $m\vec{r} \times \vec{v} = m(x, y, z) \times (0, -z, y) = m(y^2 + z^2, -xz, -xy)$. Samlet dreiemoment for et legeme som roterer om x -aksen er

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \omega(y_i^2 + z_i^2, -x_i z_i, -x_i y_i) \Delta m_i. \quad (45)$$

7 Trehetsmoment til en T-nøkkel



Figur 2: Figuren viser en modell av T-nøkkelen. Målene på aksene er i cm.

En T-nøkkel har følgende dimensjoner. Håndtaket har form av en sylinder med lengde $L_1 = 8$ cm og radius $R_1 = 1.0$ cm. En sylinder med lengde $L_2 = 4.0$ cm og radius $R_2 = 1.0$ cm er festet midt på håndtaket og står vinkelrett på dette. Massetettheten til begge sylindrene er $\rho = 6.7$ gram per kubikkcentimeter. La håndtakets akse ligge parallelt langs y -aksen og la den andre sylindren akse ligge langs x -aksen. Massesenteret til håndtaket ligger i punktet $x = -1.0$ cm på x -aksen og massesenteret til den andre sylindren ligger i punktet $x = 2.0$ cm på x -aksen. Massen til T-nøkkelen er $M = 12\pi\rho \approx 253$ gram. Massesenteret til T-nøkkelen ligger i origo. Trehetsmomentet til nøkkelen er gitt ved

$$I_{xx} = \frac{M_1 R_1^2}{4} + \frac{M_1 L_1^2}{12} + \frac{M_2 R_2^2}{2} \quad (46)$$

$$I_{yy} = M_1 R_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{4} + \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_2^2}{4} + \frac{M_2 L_2^2}{12} \quad (47)$$

$$I_{zz} = M_1 R_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{4} + \frac{M_1 R_1^2}{4} + \frac{M_1 L_1^2}{12} + \frac{M_2 R_2^2}{4} + \frac{M_2 L_2^2}{12} \quad (48)$$

og $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

8 Oppgaver

Oppgave 1 I denne oppgaven skal dere implementere funksjoner dere trenger.

- Implementer eksponentfunksjonen i likning (21). Input skal være en matrise på formen (18). Funksjonen bør ta inn både h og Ω som input. Lag et testprogram som sjekker om output X er en matrise som oppfyller kravet $X^T X = Id_{3 \times 3}$.
- Implementer en funksjon som regner ut energien til et roterende legeme som har treghetsmoment I og rotasjonsvektor $\vec{\omega}$. Denne vil dere trenge til å sjekke om simuleringene bevarer energien til T -nøkkelen.
- Regn ut treghetsmomentet til T -nøkkelen ved å bruke formelen i forrige avsnitt.

Oppgave 2 Gitt spesialtilfellet der legemet er en kule. Dere kan da anta at treghetsmomentet er lik identitetsmatrisen. La også startbetingeslen til $X(t)$ være lik identitetsmatrisen. La $\vec{L} = (1, 0, 0)$. Løs likningene (19) og (20) eksakt.

Oppgave 3 Implementer varianten av Eulers metode gitt i likning (25) i avsnitt 4.1. Og test metoden på systemet som består av likningene (19) og (20).

Oppgave 4 Implementer varianten av RK4-metoden beskrevet i avsnitt 4.4. Dere kan om dere vil implementere varianten av Runge Kutta Fehlberg-metoden (RK45) som er beskrevet i avsnitt 4.5. Vær nøye på å implementere metoden nøyaktig slik den står. En liten feil i koefisientene vil gjøre metoden omtrent like unøyaktig som Eulers metode.

Oppgave 5 Bruk implementeringen av RK4 eller RK45 til å løse systemet. Benytt treghetsmomentet til T -nøkkelen som ble utregnet i tidligere oppgave. Bruk $X(0) = Id_{3 \times 3}$, (3×3 identitetsmatrisen). Beregn \vec{L} slik at $\vec{\omega}(0)$ har lengde ca lik 1 ved tiden 0. Kjør eksperimentet med

- $\vec{\omega}(0) = [1, 0.05, 0]^T$
- $\vec{\omega}(0) = [0, 1, 0.05]^T$
- $\vec{\omega}(0) = [0.05, 0, 1]^T$

Steglengden lar dere være så liten at energien ikke endrer seg nevneverdig.

Oppgave 6 Tegn opp komponentene til løsningene X fra oppgave 5 som ni funksjoner av tiden. Gi en tolkning av disse grafene. Alternativt kan dere lage en 3-D animasjon av T -nøkkelen som roterer.

9 Evaluering

Prosjektet teller 20 %¹ av karakteren, og det er rapporten (både innhold og form) som danner grunnlaget for prosjektkarakteren.

¹Eksamen i matematikkdelen teller 30%, Eksamen i fysikkdelen teller 50%

Referanser

- [1] Feynman, R.P. med flere: The Feynman Lectures in Physics, bind I, side 20-8 i kapittel 20, (1963) Basic Books, New York.
- [2] Helgason, S.: Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Pure and Applied Mathematics. Academic Press (1978)
- [3] Munthe-Kaas, H.Z., Zanna, A.: Numerical integration of differential equations on homogeneous manifolds. In: F. Cucker, M. Shub (eds.) Foundations of Computational Mathematics, pp. 305–315. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (1997)
- [4] Sauer, T.: Numerical Analysis. Pearson Education Ltd., Harlow, Essex, (2014).