Tellende prosjekt i ISTx1002 høst 2025

Usikkerhet og støy i målinger

Generell informasjon

- Dette er oppgaveteksten til den tellende prosjektoppgaven. Besvarelsen teller 30% av karakteren i emnet.
- Det er 3-6 studenter i hver gruppe. Gruppene dere skal levere prosjektet i er de samme gruppene som ble etablert i forprosjektet.
- Prosjektet leveres gruppevis i Inspera.
- Alle studenter i samme gruppe får samme bokstavkarakter. Merk NTNUs regelverk for klage på karakter: Ved klage på karakterfastsettingen av gruppearbeid, der det gis en felles karakter, klager du individuelt. En eventuell endring etter klage vil kun gjelde for den/de gruppemedlemmene som har klaget.
- Informasjon om prosjektmodulen finnes i Blackboard, sammen med alt kursmateriellet.
- I oppgave 1 skal dere skrive maksimalt 3 sider, i oppgave 2 maksimalt 6 sider og i oppgave 3 maksimalt 6 sider.
- De ulike oppgavene (1, 2, 3) er vektet ulikt (30%, 30% og 40%). Karakteren settes med prosentvurderingsmetoden.

Dere skal levere **en pdf-fil**. Dere er selv ansvarlige for at alle svar er med. Fila skal være ryddig og oversiktelig.

Frist for innlevering er 17. november klokka 12:00 i Inspera.

Det kan ikke gis utsettelse på innleveringsfristen.

Oppgave 1: Enkelt måleforsøk med støy

I denne oppgaven skal dere gjennomføre 'støyete' målinger, regne på gjennomsnitt, standard usikkerhet og feilforplantning, samt reflektere rundt kilder til systematiske feil.

Del 1: Gjennomfør støyete målinger

Gruppa skal måle omkretsen til et sylinderformet objekt, for eksempel en flaske, en lyktestolpe, en blikkboks, en varmtvannsbereder etc. For å gjennomføre måleforsøket trenger dere

- En hyssing, tråd, et tau, eller lignende
- En målestokk, linjal, målebånd eller lignende
- Et sylinderformet objekt

En enkeltmåling gjøres ved at et gruppemedlem trekker hyssingen/tauet/etc rundt objektet, og med hver hånd markerer start og slutt av omkrets på hyssingen. Deretter strekkes hyssingen ut og lengden måles. Dere skal ikke klippe eller på annen måte markere lengden på hyssingen/tauet, kun bruke hendene som markører. Dette måleforsøket skal *med vilje* skape en del usikkerhet og støy i målingen av omkrets.

La alle studentene i gruppa gjennomføre minst to målinger hver, og rapporter resultatene. Regn ut gjennomsnitt og empirisk standardavvik for målingene. Forklar kort hva og hvordan dere utførte disse målingene.

Del 2: Usikkerhet og støy i målinger

La den stokastiske variabelen $\bar{X}$ representere måling av omkrets med metoden fra Del 1; snittet av enkeltmålingene X_1, X_2, ..., X_n. Anta at alle disse enkeltmålingene har samme standardavvik σ. Basert på deres observasjoner fra Del 1, hva blir estimert standardavvik $\mathrm{SD}(\bar{X})$ (standard usikkerhet) for en slik måling, $\bar{X}$?

Ved å anta normalfordelte målinger X_1, X_2, ..., X_n med forventning μ og ukjent standardavvik σ, regn ut et 95% konfidensintervall for μ.

Har dere grunn til å tro at det er en systematisk feil i målingene deres? Forklar hvordan dere kan gå frem for å undersøke og tallfeste en eventuell systematisk feil.

Del 3: Målefunksjon og feilforplantning

Vi er interessert i arealet av et tversnitt av det sylinderformede objektet. La den stokastiske variabelen $A = f(\bar{X})$ representere måling av tversnitt-arealet. Her er A en utgangsvariabel fra målefunksjonen f som har som inngangsvariabel målingen $\bar{X}$. Hva blir målefunksjonen f?

Bruk regneregler for feilforplantning (lineærapproksimasjon av målefunksjon) til å finne et approksimert uttrykk for standardavviket $SD(A)$, og regn ut (approksimert) standard usikkerhet i måling av areal basert på tallene fra deres måleforsøk.

Rapporter målt areal og usikkerhet i målingen med en dekningsfaktor $k = 2$.

I stedet for å benytte en lineærappriksimasjon skal dere nå først regne ut målt areal for hele måleserien, altså $a_1 = f(x_1)$ der x_1 er første måling av omkrets, osv. Regn ut gjennomsnittlig areal, $\bar{a}$, og empirisk standard usikkerhet i $\bar{a}$. Basert på denne metoden, rapporter målt areal og usikkerhet i målingen med en dekningsfaktor $k = 2$. Kommenter og forklar eventuelle forskjeller fra resultatet over.

Oppgave 2: Feilforplantning og stokastisk simulering

I denne oppgaven skal dere bruke stokastisk simulering og feilforplantning for å illustrere hvordan usikkerhet 'forplanter' seg fra inngangsvariabler til utgangsvariabelen i en målefunksjon.

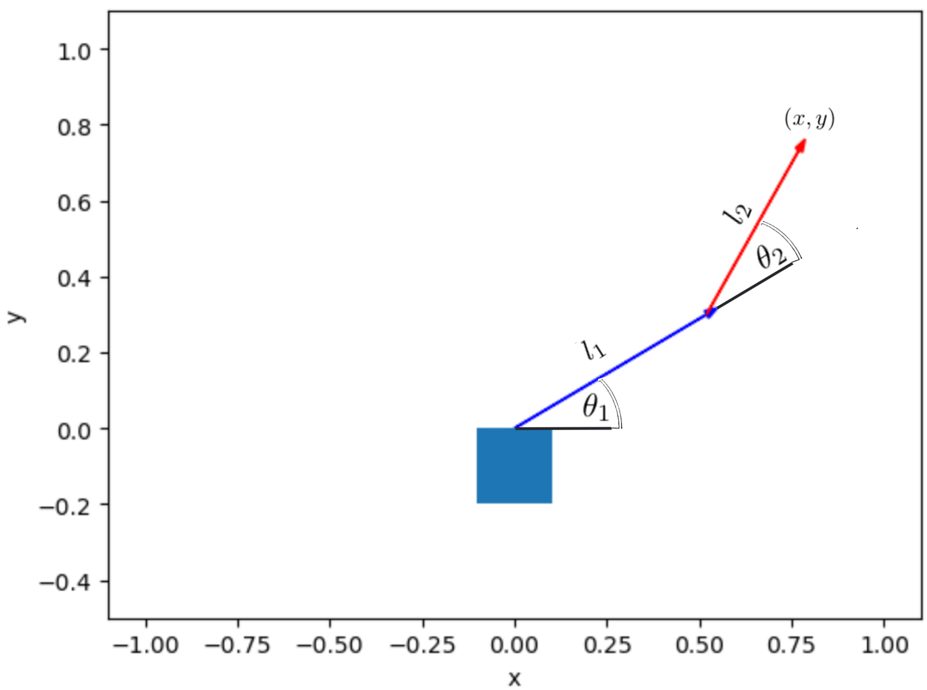

Figure 1: Robotarm med to ledd: overarm (blå pil) med lengde l_1 og underarm (rød pil) med lengde l_2. $\theta_1 \in (0^o, 180^o)$ er vinkelen mellom overarmen og den positive x-aksen, målt i grader, mens $\theta_2 \in (-180^o, 180^o)$ er vinkelen mellom overarm og underarm, også målt i grader

Del 1:

Figur 1 viser en enkel robotarm med to ledd. Lengdene på leddene, som vi vil kalle for overarm (blå pil i figuren) og underarm (rød pil i figuren), er $l_1 = 60\ cm$ og $l_2 = 50\ cm$ mens vinklene (målt i grader, ikke radianer!) θ_1 og θ_2 kan varieres. For robotarmen er $\theta_1 \in (0^o, 180^o)$ vinkelen mellom overarmen og den positive x-aksen mens $\theta_2 \in (-180^o, 180^o)$ er vinkelen mellom overarm og underarm. I Jupyter notatboka *Robotarm*, der vi bruker såkalte *homogene koordinater*, viser vi at sluttposisjonen av underarmen er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(\frac{\pi}{180^0} \cdot \theta_1) + l_2 \cdot \cos(\frac{\pi}{180^0} \cdot (\theta_1 + \theta_2)) \\ l_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{180^0} \cdot \theta_1) + l_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{180^0} \cdot (\theta_1 + \theta_2)) \end{bmatrix}.$$

a) Dere skal studere hvordan små endringer i vinklene 'forplanter' seg som endringer i sluttposisjonen. Som utgangsposisjon for robotarmen setter vi $\theta_1 = 95^o$ og $\theta_2 = -100^o$. Skisser robotarmen for valgt innstilling, f.eks. ved bruk av jupyter-notatboken *Robotarm*. Finn partiell-deriverte mhp θ_1 og θ_2 av sluttposisjonens x-koordinat og regn ut verdier for gitte lengder og vinkler. Vil små endringer i θ_1 eller θ_2 ha størst innvirkning på x-posisjonen? Gi også et numerisk eksempel på endring i x-koordinat ved små endringer i θ_1 og θ_2.

Videre skal vi anta at lengdene til overarm og underarm l_1 og l_2 er eksakte, mens innstillingen av vinklene θ_1 og θ_2 er påvirket av støy slik at de faktiske vinklene kan betraktes som stokastiske variabler. Vi lar μ_1 og μ_2 representere de valgte innstillingene for de to vinklene og med tilhørende stokastiske variabler V_1 og V_2. Anta videre at de realiserte vinklene av V_1 og V_2 er normalfordelte om de valgte verdiene μ_1 og μ_2 (ingen systematisk feil) mens standardavvikene er kjent til å være hhv. σ_1 og σ_2.

Som følge av de stokastiske vinklene, vil x-og y-koordinatene til endepunktet av underarmen også bli stokastiske variabler, hhv. X og Y, og kan uttrykkes som funksjoner av de stokastiske variablene V_1 og V_2:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(\frac{\pi}{180^0} \cdot V_1) + l_2 \cdot \cos(\frac{\pi}{180^0} \cdot (V_1 + V_2)) \\ l_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{180^0} \cdot V_1) + l_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{180^0} \cdot (V_1 + V_2)) \end{bmatrix}.$$

b) Bruk feilforplantningsformelen (lineærapproksimasjon av målefunksjonen om μ_1 og μ_2) til å finne formler for tilnærmede verdier for $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$ og $\mathrm{Var}(Y)$. Du skal oppgi svarene som en funksjon av μ_1, μ_2, σ_1 og σ_2.

c) Vi velger innstillinger $\mu_1 = 95^o$ og $\mu_2 = -100^o$ (som i oppgave a) og ønsker å minimere usikkerhet i x-posisjonen. Er det viktigst å redusere variansen i V_1, σ_1^2, eller variansen i V_2, σ_2^2?

d) Nå velger vi innstillingene $\mu_1 = 20^o$ og $\mu_2 = -30^o$. Skisser robotarmen med de valgte innstillingene. Hva blir forventet (x, y)-posisjon? Bruk partiellderiverte til å forklare i hvilken grad x- og y-posisjonene endrer seg som følge av liten endring i henholdsvis vinkel θ_1 og vinkel θ_2. Hvilken koordinat for sluttposisjonen, x eller y, er mest utsatt for usikkerhet i vinklene dersom $\sigma_1 = 1$ og $\sigma_2 = 0.5$?

e) Anta at $\mu_1 = 20^o$ og $\mu_2 = -30^o$, $\sigma_1 = 1^o$ og $\sigma_2 = 0.5^o$. Hva blir relativ usikkerhet i de to vinklene i robotarmen og (approksimert) de to posisjonskoordinatene til sluttposisjonen?

Del 2:

Tips: Bruk siste del av Jupyter notatboka *Robotarm* for å løse denne oppgaven med python.

a) Anta at $\sigma_1 = 1$ og $\sigma_2 = 0.5$ og velg innstillingene $\mu_1 = 20^o$ og $\mu_2 = -30^o$. Sett deretter opp en stokastisk simulering der dere generer 10.000 målinger av θ_1 og θ_2 (realisasjoner av normalfordelte stokastiske variabler) og regner ut tilhørende simulerte (x, y)-posisjoner. Forklar kort fremgangsmåten.

b) Visualiser de simulerte (x, y)-posisjonene fra a-oppgaven i et kryssplott. Regn ut gjennomsnitt og standardavvik av x- og y-posisjonene fra a-oppgaven og sammenlign resultatene med utregninger gjort i Del 1. Regn ut korrelasjonen mellom x og y for de simulerte (x, y)-posisjonene fra a-oppgaven.

Oppgave 3: Sammenligning mellom forsøk

I denne oppgaven får dere færre instrukser enn i foregående oppgaver, og dere må selv gjøre gode valg når det gjelder gjennomføring av måleforsøket. Hvordan vil dere finne og kvantifisere usikkerhet i målinger? Hvordan vil dere rapportere resultatet av måleforsøket? Bruk Python til å visulisere måleresultater og sammenligne mellom to ulike forsøk med to-utvalgs t-test. Presenter oppgaven som en kortfattet rapport som inneholder innledning, gjennomføring, resultater og diskusjon.

Del 1: Velg et måleforsøk

Gruppa skal bestemme seg for et måleforsøk. Måleforsøket skal kunne gjennomføres under to ulike 'omstendigheter' og skal ha som formål å estimere og sammenligne en 'egenskap' mellom disse to 'omstendighetene'. Her er en liste med forslag:

1. *Lydhastighet i luft.* Lydens hastighet i luft kan estimeres ved bruk av to smart-telefoner. Gjennomfør forsøket innendørs og utendørs - ser dere en forskjell?

2. *Diameter på kjeks.* Med en bestemt oppskrift på kjeks kan forventet diameter estimeres fra et utvalg. Gjør kun én endring i oppskrift eller fremgangsmåte, ser dere en forskjell?

3. *Måleinstrumenter*. Finn to måleinstrumenter som i teorien skal gi samme måling, gjør de det? Her er det lurt å forsikre seg om at det faktisk er noe variasjon/støy i målingene (måling av motstand i en krets gir f.eks. erfaringsmessig alltid samme svar pga lav oppløsning i målinger). Forsøket kan også gjøres med to ulike målemetoder - se forslag fire:

4. *Måling av høyde til et tre*. Finn to metoder for å måle høyden av et tre (eller en høy bygning eller noe annet høyt). Sammenlign metodene - gir de ulike svar?

Del 2: Gjennomføring 1

Gjennomfør den ene varianten av forsøket deres. Dere kan selv velge n, antall målinger. Skriv kort om forsøket, diskuter usikkerhet i forsøket, og presenter måleresultatet, inkludert usikkerhet.

Del 3: Gjennomføring 2 og sammenligning

Gjennomfør den andre varianten av forsøket deres, også her et valgt antall ganger. Regn ut et estimat på det dere studerer, samt diskuter usikkerhet i estimatet deres. Gjennomfør en hypotesetest ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$ for å sammenligne forsøkene. Hva er hypoteser, antagelser for og resultat av testen? Diskuter grundig hvordan usikkerhet og støy i målesituasjonen bidrar til konklusjonen.