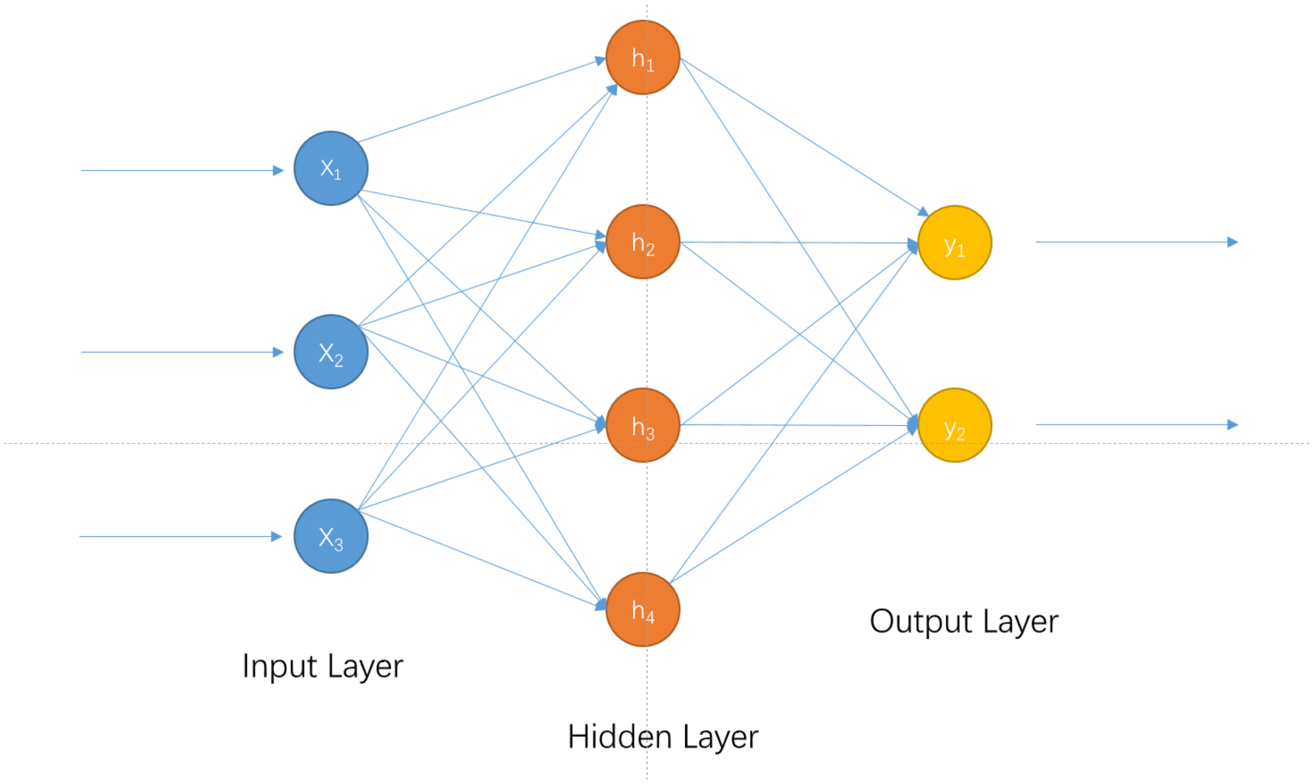
Author：Martinlwx

E-mail：Martinlwx@163.com

推导过程



如图中所示我们规定W_{ij}^k表示第k层与第k+1层之间神经元的权重值，z^k表示对应输入第k层的值，o^k表示对应第k层输出的值

定义**损失函数**为：

$$l = \frac{1}{2}(y-\hat{y})^2 \text{(}y\text{表示预期输出)}$$

比如图中**第2层和第3层**的**误差分配**如下：

$$l_{23} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \\ w_{41} & w_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \text{（省去}w\text{的上角标）}$$

我们可以发现：**此处的权重矩阵就是前向传播的时候第2层所乘的矩阵的转置矩阵，也就是**$(w^k)^T$

引出**记号**：

$\frac{\partial L}{\partial W^k}$（表示损失函数的值是如何根据权重矩阵变化的）

则**损失函数**改写为：

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(y-\hat{y})^2$$

暂时把$\sum$忽略可得：

$\frac{\partial L}{\partial W^k}=\frac{\partial }{\partial W^k}\frac{1}{2}(y-\widehat{y})^2$

又根据**链式法则**：

$$\frac{\partial L}{\partial W^k}=\frac{\partial L}{\partial \hat{y}}\cdot\frac{\partial \hat{y}}{\partial z^{k+1}}\cdot\frac{\partial z^{k+1}}{\partial W^k}$$（y_i为激活函数）

如果**取激活函数为sigmoid函数**可得其导函数为：

$$\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\qquad\sigma'(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x))$$

进一步**改写**得：

$\frac{\partial L}{\partial W^k}=-(y-\widehat{y})·\frac{\partial }{\partial W^k}\sigma(z^{k+1})$

$\frac{\partial L}{\partial W^k}=-(y-\widehat{y})·\sigma(z^{k+1})(1-\sigma(z^{k+1}))·\frac{\partial }{\partial W^k}\sigma(z^{k+1})$

$\frac{\partial L}{\partial W^k}=-(y-\widehat{y})·\sigma(z^{k+1})(1-\sigma(z^{k+1}))·o^k$

$\frac{\partial L}{\partial W^k}=(o^k)^T·(-(y-\widehat{y})·\sigma(z^{k+1})(1-\sigma(z^{k+1})))$

依次**倒推回去**即可

注：以上图的网络为例，$z^{k+1}=o^kW^k$对W^k来说o^k就是斜率