Segundo Parcial de Introducción a la Investigación de Operaciones
Instituto de Computación - 4 de julio de 2024

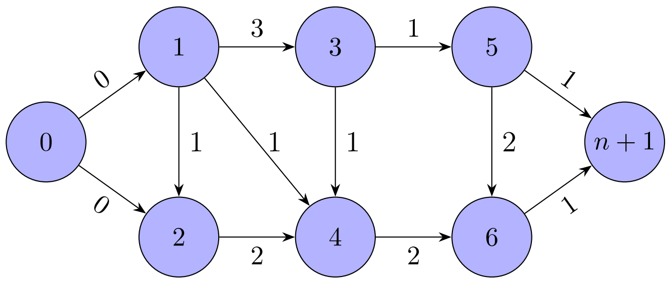
- Duración: 4 horas.
- Escribir las hojas de un solo lado. - No se permite el uso de material ni calculadora. - Numerar las hojas. - Poner nombre y número de cédula en el ángulo superior derecho de cada hoja. - **No responder en la hoja de la letra del parcial**. - Escribir en la primera hoja el total de hojas entregadas. - Las partes no legibles se considerarán no escritas - **Justifique todos sus razonamientos.**

$$\forall x \neq 1: \sum_{n=0}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \forall\, |x| < 1: \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ejercicio 1 - 10 puntos

a) Definir los ordenamientos de comienzo más temprano $R = \{r_i\}_0^{n+1}$ y más tardío $F = \{f_i\}_0^{n+1}$, solamente en términos de $V(i,j)$, siendo $V(i,j)$ el valor maximal de un camino de i a j en un grafo potencial-tareas $G = (X, U, W)$ de un problema de ordenamiento.

b) Aplique el algoritmo de Bellman para determinar los ordenamientos $R = \{r_i\}_0^{n+1}$ y $F = \{f_i\}_0^{n+1}$ del siguiente grafo potencial-tareas de un problema de ordenamiento. Indique todos los caminos críticos que existan. Justifique su respuesta.

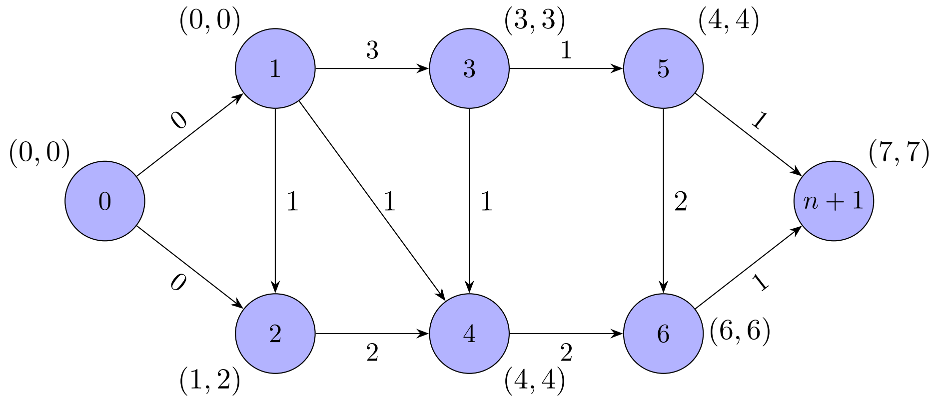


c) Calcular el margen libre y el margen seguro de cada una de las tareas no críticas del problema de ordenamiento de la parte b.

Solución

a) Ver páginas 73 a 75 de las notas de teórico de optimización.

b) Aplicando el algoritmo de Bellman se obtiene el siguiente grafo con las etiquetas (r_i, f_i) para cada nodo i, siendo $r_{n+1} = f_{n+1} = V(0, n+1)$ la duración mínima del proyecto.



Los caminos críticos son todos aquellos caminos del nodo 0 al nodo $n+1$ de largo maximal $V(0, n+1) = 7$, que son dos: $[0-1-3-4-6-n+1]$ y $[0-1-3-5-6-n+1]$.

c) Las tareas no críticas son aquellas tareas i para las cuales $r_i < f_i$. En el caso del problema de la parte b anterior, la única tarea crítica es la 2.

La holgura o margen libre m_i es el tiempo que se puede retrasar una tarea i sin afectar el comienzo de las tareas sucesoras de i: $m_i = \min_{[j \in U(i)^+]}\{(r_j - (r_i + w_{ij})\}$. Mientras que el margen seguro u_i es el tiempo que se puede retrasar una tarea i asumiendo que las tareas predecesoras k empiezan lo más tarde posible y las sucesoras j lo más temprano posible: $u_i = \max\{0, \min_{[j \in U(i)^+]}\{(r_j - w_{ij})\} - \max_{[k \in U(i)^-]}\{(f_k + w_{kj})\}\}$. Tenemos entonces que:

$m_2 = \{r_4 - (r_2 + w_{24})\} = 4 - (1 + 2) = 1$

$u_2 = \max\{0, (r_4 - 2) - \max\{0, 1\}\} = \max\{0, 2 - 1\} = 1$

Ejercicio 2 - 20 puntos

Considere la CMTDH definida por la matriz de transición $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

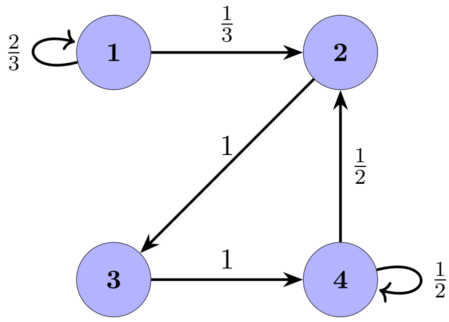
a) Dibuje el grafo asociado a la cadena, identifique sus componentes fuertemente conexas y clasifique los estados $E = \{1, \ldots, 4\}$ según recurrencia y periodicidad ¿Es ergódica la cadena? Calcular $d(i)$ (período), $\varphi(i)$ (probabilidad de retornar) y R_i (número esperado de retornos) con $i \in E$.

b) Calcule $f_{4,4}^{(n)}$ (probabilidad del primer retorno al estado 4 en n pasos) así como $\sum_{n=1}^{\infty} f_{1,1}^{(n)}$.

c) ¿Existe distribución límite para esta cadena? ¿Qué sucede con la distribución estacionaria? En caso de que exista alguna de ellas, calcule el vector de distribución de estados correspondiente ¿Cuánto vale $m_{3,3}$ (esperanza del primer retorno al estado 3)?

Solución

a) El grafo asociado a la cadena es:



Los nodos 2, 3 y 4 están en un ciclo ($2 \to 3 \to 4 \to 2$), por tanto todos se comunican entre sí. No hay arcos incidentes hacia al nodo 1 desde otros nodos pero sí desde él a 2, así que el estado 1 debe ser transitorio y define en sí mismo una componente conexa $\mathcal{C}_1 = \{1\}$, siendo la otra es $\mathcal{C}_2 = \{2, 3, 4\}$. Como la cadena es finita debe tener un estado recurrente en $\mathcal{C}_2$ (no en $\mathcal{C}_1$ que es transitorio) y todos los estados en $\mathcal{C}_2$ han de ser recurrentes por ser ésta una propiedad de clase.

Ambas clases tienen estados con un lazo que los hacen aperíodicos. Como el período es una propiedad de clase, $d(i) = 1$ para todo $i \in E$. La cadena no es ergódica porque no es irreductible. Los estados en $\mathcal{C}_2$ son recurrentes, así que $\varphi(i) = 1$ y $R_i = \infty$ si $i \in \mathcal{C}_2$. Para $i = 1$, la probabilidad de retornar es la de su lazo $\varphi(1) = \frac{2}{3}$. Como el estado es transitorio, $R_1 = \frac{1}{1-\varphi(1)} = 3$.

b) Observar que o bien se retorna a 4 en el primer paso ($p_{4,4} = \frac{1}{2}$), o se va a 2 con probabilidad $p_{4,2} = \frac{1}{2}$, forzando un retorno al estado 4 luego de otros dos pasos, así que $f_{4,4}^{(n)} = \frac{1}{2}$ si $n \in \{1, 3\}$ y vale 0 en otro caso. Como en general se cumple que $\varphi(i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$, se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{1,1}^{(n)} = \frac{2}{3}$.

c) Toda cadena tiene al menos una distribución estacionaria, pero no necesariamente distribución límite. Esta cadena no es ergódica, pero tiene una única componente recurrente $\mathcal{C}_2$ que tiende a concentrar toda la probabilidad, esto es: $\lim_{n\to\infty} \pi_1(n) \to 0$ y $\lim_{n\to\infty} (\pi_2(n) + \pi_3(n) + \pi_4(n)) \to 1$.

La subcadena definida por $\mathcal{C}_2$ sí es ergódica al ser finita, irreductible y aperiódica, y por lo tanto en ella existe distribución límite. Al ser $\mathcal{C}_1$ una clase transitoria, toda distribución estacionaria debe valer 0 en sus estados, haciendo que ambas distribuciones, la límite y la estacionaría, también coincidan en $\mathcal{C}_1$. Por lo tanto, la cadena entera también tiene distribución límite que coincide con su distribución estacionaria que es única.

Buscamos entonces $\pi = [0,\, \pi_2,\, \pi_3,\, \pi_4]$ tal que $\pi = \pi P$ con $\sum_{i=2}^{4} \pi_i = 1$, de donde $\pi_2 = \frac{\pi_4}{2}$, $\pi_2 = \pi_3$ y $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1) \cdot \pi_4 = 2\pi_4 = 1$. Concluimos que tanto la distribución estacionaria como la límite son $\pi = [0,\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{2}]$ y la esperanza del primer retorno a 3 es $m_{3,3} = \frac{1}{\pi_3} = 4$.

Ejercicio 3 - 15 puntos

Una estación meteorológica remota recolecta y procesa datos que se envían en tiempo real a sus usuarios. La estación consta de dos servidores en configuración espejo (activo/standby) a modo de protección ante fallas. Un solo servidor activo es suficiente para sostener el servicio en operación, que deja de estar disponible si ambos servidores están en falla. Los servidores son idénticos así como la probabilidad de falla en cada uno, que son exponenciales e independientes, dejando al servidor fuera de servicio en caso de producirse. El período medio entre fallas es 14 meses para cada servidor. Un técnico itinerante visita la estación siguiendo un proceso Poisson con una tasa de una visita al mes. La visita del técnico es independiente del estado operativo de los servidores, pero en caso de encontrar uno o ambos fuera de servicio, los mismos se reparan en ese momento y en un tiempo despreciable. Se pide:

a) Modelar la disponibilidad del servicio como una CMFTCH, indicando todos sus estados, los tiempos de permanencia en cada estado, las probabilidades de transición entre ellos, el grafo asociado y su generador infinitesimal.

b) Determinar si la cadena es ergódica. Indicar si existe distribución estacionaria y distribución límite. En caso de que exista alguna de ellas, calcule el vector de distribución de estados correspondiente.

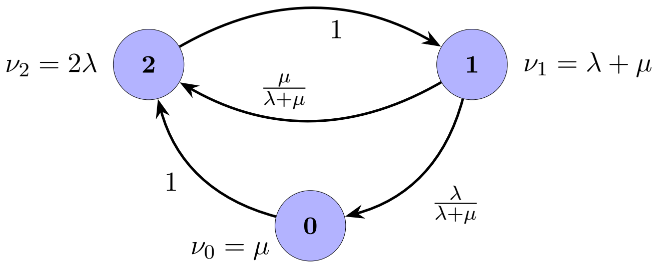
c) Estime qué fracción del tiempo está disponible el servicio. En caso de falla total, ¿cuál es tiempo esperado (en meses) antes de la recuperación del servicio?

Solución

a) El estado del sistema queda capturado por la cantidad de servidores activos $E = \{0, 1, 2\}$. Los tiempos entre fallas en cada servidor son exponenciales de media $\frac{1}{\lambda} = 14$ meses, así que $\lambda = \frac{1}{14}\text{mes}^{-1}$. La tasa de reparación es la de visita del técnico, que pasa por el sitio según un proceso de Poisson de media 1 visita al mes, de donde el tiempo entre visitas es exponencial de parámetro $\mu = 1\text{mes}^{-1}$.

Estando en el estado "0" (ambos servidores rotos), el único cambio de estado posible es hacia "2" y se da con la visita del técnico, de donde $TP_0 \sim Exp(\nu_0)$, con $\nu_0 = \mu$ y $p_{02} = 1$. Estando en el estado "2" (ambos servidores activos), el único cambio de estado posible es hacia "1" y se da con la rotura de uno de los servidores, de donde $TP_2 \sim Exp(\nu_2)$, con $\nu_2 = 2\lambda$ (cada servidor tiene tasa λ) y $p_{21} = 1$.

El caso que merece más elaboración es el del estado "1" (un servidor en falla), ya que en éste hay dos eventos que producen cambios de estado: i) la llegada del técnico ($LT \sim Exp(\mu)$) que repara el servidor roto, llevando el sistema al estado "2"; o ii) la rotura del único servidor activo ($RS \sim Exp(\lambda)$), que lleva el sistema al estado "0". Así, el tiempo de permanencia en "1" es $TP_1 = \min(LT, RS) \sim Exp(\lambda + \mu)$, de donde $\nu_1 = \lambda + \mu$. En cuanto a las probabilidades de transición: $p_{12} = P(LT < RS) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ y $p_{10} = P(RS < LT) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. A partir de lo anterior, el grafo asociado y su generador infinitesimal correspondiente son:



$$Q = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \mu \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{bmatrix}$$

b) Todos los estados se comunican porque están sobre el ciclo $0 \to 2 \to 1 \to 0$, así que la cadena es ergódica (es finita e irreductible). Luego, la distribución límite existe y coincide con la estacionaria que en este caso es única. Para calcularla resolvemos $\pi Q = 0$ con $\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$.

De las tres ecuaciones en $\pi Q = 0$ elegimos $\pi_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}\pi_0$ y $\pi_2 = \dfrac{\lambda+\mu}{2\lambda}\pi_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}\dfrac{(\lambda+\mu)}{2\lambda}\pi_0$, que en junto con $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ nos lleva a $\pi = \dfrac{[2\lambda^2,\ 2\lambda\mu,\ \mu(\lambda+\mu)]}{2\lambda^2 + 3\lambda\mu + \mu^2}$. Substituyendo por los valores de λ y μ llegamos a $\pi = [\frac{1}{120},\ \frac{7}{60},\ \frac{7}{8}]$.

c) El servicio está disponible siempre que el proceso esté en los estados $\{1, 2\}$, cuya probabilidad combinada es $\pi_1 + \pi_2 = 1 - \pi_0 = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120} > \frac{99}{100} = 99\%$ del tiempo.

El tiempo esperado antes de la recuperación del servicio es la esperanza del tiempo de permanencia en el estado "0", esto es $E[TP_0] = \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{\mu} = 1\text{mes}$.

Ejercicio 4 - 15 puntos

Considere el mercado de puestos de venta callejera de Choripanes y Hamburguesas (de aquí en más "carritos de chorizo") en las inmediaciones del Parque Rodó. Los estudios muestran que la tasa anual de aparición de nuevos carritos coincide con el precio de venta al público (PVP) en dólares, que por la competencia y proximidad es el mismo para todos los carritos e igual a $PVP = 4 - CCC$, siendo CCC la cantidad de carritos de chorizo en actividad. La supervivencia comercial de los carritos también depende del precio de venta, resultando la tasa anual de desaparición de cada carrito igual a $\frac{10}{2+PVP}$.

Se pide:

a) Modelar el problema de mercado anterior como un Proceso de Nacimiento Muerte (PNM). A esos efectos, definir con precisión: su conjunto de estados E, calcular las tasas de nacimiento/muerte, y dibujar el diagrama de tasas (grafo incluyendo las tasas).

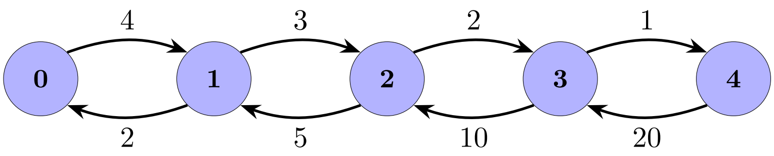
b) Estudiar la estabilidad del sistema y en caso de existir distribución estacionaria, plantee y resuelva las ecuaciones de balance para determinar las probabilidades en estado estacionario p_i con $i \in E$.

c) ¿Cuál es el número esperado de carritos activos? ¿Cuál es el precio esperado de venta al público? En media, ¿cuántos meses en actividad continua tiene un carrito?

Solución

a) El problema es equivalente a un PNM de cinco estados $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ya que cuando el número de carritos CCC llega a 4, desaparece la tasa de nacimiento de nuevos carritos. Algo análogo sucede con la tasa de muertes en el estado 0. Según indica la letra, las tasas de nacimiento para cada estado $i \in E$ son los precios de venta al público $PVP(CCC) = 4 - CCC$, así que serían 4, 3, 2, 1 y 0 carritos nuevos por año, respectivamente. La tasa de muerte para cada carrito sería $\frac{10}{2+PVP(CCC)}$, así que la tasa para cada estado se calcula como $\frac{10 \cdot CCC}{6-CCC}$, y serían 0, 2, 5, 10 y 20 carritos menos por año, respectivamente.

El diagrama de tasas asociado es:



b) Como el proceso es finito entonces es estable y las ecuaciones de balance permiten calcular la distribución límite a través de la estacionaria. Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} 4 \cdot p_0 &= 2 \cdot p_1 \\ 3 \cdot p_1 &= 5 \cdot p_2 \\ 2 \cdot p_2 &= 10 \cdot p_3 \\ p_3 &= 20 \cdot p_4 \end{aligned}.$$

Y sabiendo que $\sum_{k=0}^{4} p_k = 1$, podemos resolver el sistema. En primer lugar, llegamos a $p_1 = 2p_0$, $p_2 = \dfrac{3}{5}p_1 = \dfrac{6}{5}p_0$, $p_3 = \dfrac{1}{5}p_2 = \dfrac{6}{25}p_0$ y $p_4 = \dfrac{1}{20}p_3 = \dfrac{6}{500}p_0$. Luego $p_0 \cdot (1 + 2 + \frac{6}{5} + \frac{6}{25} + \frac{6}{500}) = p_0 \cdot (500 + 1000 + 600 + 120 + 6)/500$ y llegamos a $p_0 = \dfrac{250}{1113}$, $p_1 = \dfrac{500}{1113}$, $p_2 = \dfrac{300}{1113} = \dfrac{100}{371}$, $p_3 = \dfrac{60}{1113} = \dfrac{20}{371}$ y $p_4 = \dfrac{3}{1113} = \dfrac{1}{371}$.

c) El número esperado de carritos activos (que es igual al número esperado de clientes en un sistema de esos parámetros) se calcula con $\bar{n} = \sum_{i=1}^{4} i \cdot p_i$. Esto es $\bar{n} = (500 + 600 + 180 + 12)/1113 = \dfrac{1292}{1113}$. El precio medio de venta al público coincide con la tasa media de nacimientos $\bar{\lambda} = 4p_0 + 3p_1 + 2p_2 + p_3 = (1000 + 1500 + 600 + 60)/1113 = \dfrac{3160}{1113} = \dfrac{1377}{485} \approx 2.84$USD.

Observar que el tiempo medio en actividad de un carrito coincide con $\bar{t}_s$: el tiempo medio de un cliente en un sistema de filas de espera con estos parámetros, que por las ecuaciones de Little cumple $\bar{n} = \bar{\lambda}\bar{t}_s$, así que $\bar{t}_s = \dfrac{\bar{n}}{\bar{\lambda}} = \dfrac{1292}{3160} = \dfrac{323}{790}$ años, que equivalen a unos 4.9 meses.