



IEL – protokol k projektu

Martin, Navrátil
xnavram00

17. prosince 2023

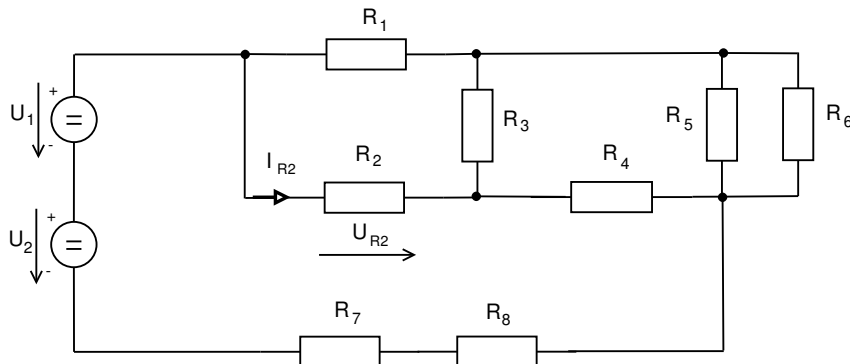
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	4
3	Příklad 3	6
4	Příklad 4	8
5	Příklad 5	10
6	Shrnutí výsledků	12

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

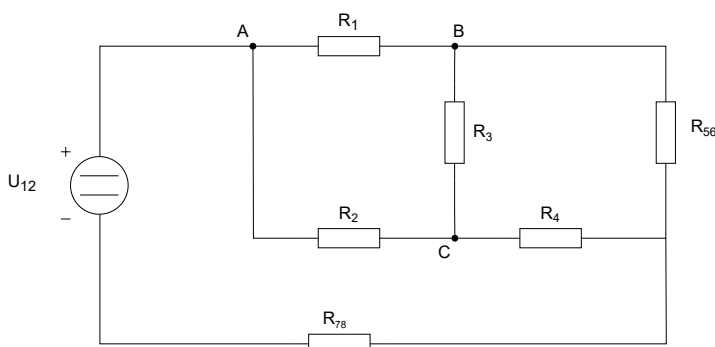
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
C	100	80	450	810	190	220	220	720	260	180



$$U_{12} = U_1 + U_2 = 100 + 80 = 180V$$

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{220 \cdot 720}{220 + 720} = 168.51063829787233\Omega$$

$$R_{78} = R_7 + R_8 = 260 + 180 = 440\Omega$$

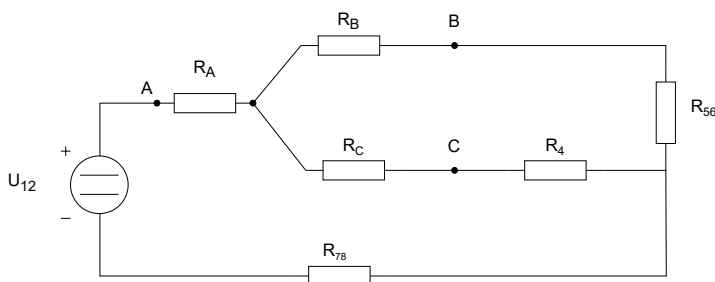


Nyní provedeme transfiguraci trojúhelník hvězda

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{450 \cdot 810}{450 + 810 + 190} = \frac{364500}{1450} = 251.3793103448276\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{450 \cdot 190}{450 + 810 + 190} = \frac{85500}{1450} = 58.96551724137931\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{810 \cdot 190}{450 + 810 + 190} = \frac{153900}{1450} = 106.13793103448276\Omega$$

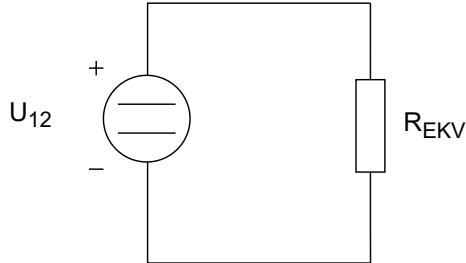


$$R_{B56} = R_B + R_{56} = 58.96551724137931 + 168.51063829787233 = 227.47615553925164\Omega$$

$$R_{C4} = R_C + R_4 = 106.13793103448276 + 220 = 326.13793103448276\Omega$$

$$R_{B56C4} = \frac{R_{B56}R_{C4}}{R_{B56} + R_{C4}} = \frac{227.47615553925164 \cdot 326.13793103448276}{227.47615553925164 + 326.13793103448276} = 134.00779446635116\Omega$$

$$R_{EKV} = R_A + R_{B56C4} + R_{78} = 251.3793103448276 + 134.00779446635116 + 440 = 825.3871048111787\Omega$$



Celkový proud I

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{180}{825.3871048111787} = 0.21807949136929883A$$

$$U_{RA} = I \cdot R_A = 0.21807949136929883 \cdot 251.3793103448276 = 54.82067214076514V$$

$$U_{B56C4} = I \cdot R_{B56C4} = 0.21807949136929883 \cdot 134.00779446635116 = 29.224351656743398V$$

$$I_{RC4} = \frac{U_{B56C4}}{R_{C4}} = \frac{29.224351656743398}{326.13793103448276} = 0.08960733749688714A$$

$$U_{RC} = I_{RC4} \cdot R_C = 0.08960733749688714 \cdot 106.13793103448276 = 9.510737407428229V$$

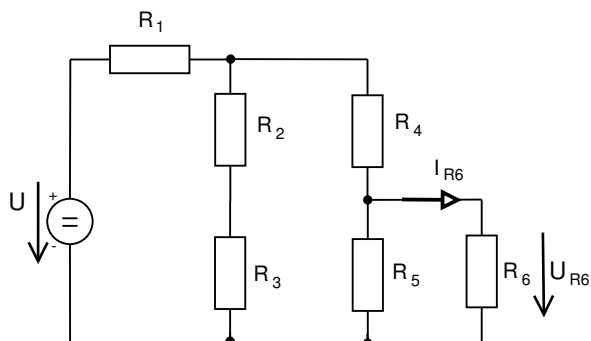
$$U_{R2} = U_{RA} + U_{RC} = 9.510737407428229 + 54.82067214076514 = \mathbf{64.33140954819336V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \mathbf{0.07942149326937452A}$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu Théveninovy věty.

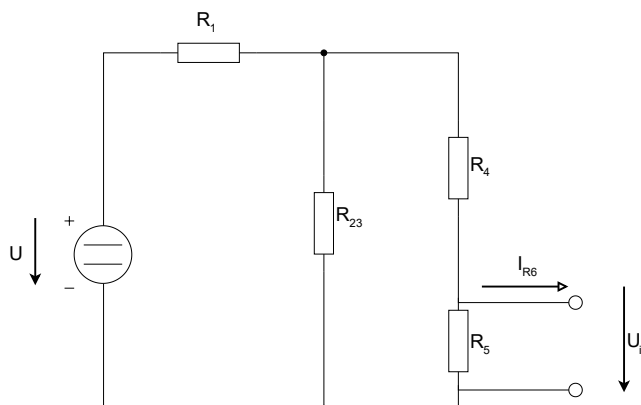
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
G	180	250	315	615	180	460	120



Vyřešíme za využití Theveninovy věty.

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 315 + 615 = 930\Omega$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 180 + 460 = 640\Omega$$



$$R_{EKV} = R_1 + \frac{R_{23}R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = 250 + \frac{930 \cdot 640}{930 + 640} = 629.1082802547771\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{180}{629.1082802547771} = 0.28611926698390194A$$

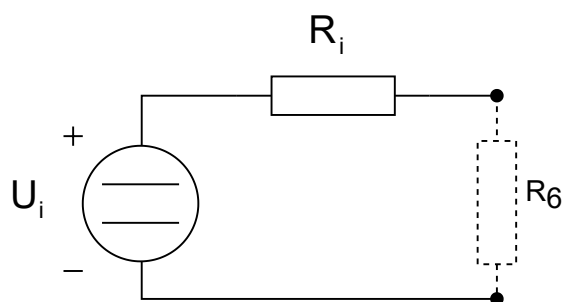
$$U_{R45} = U - (IR_1) = 180 - (0.28611926698390194 \cdot 250) = 108.47018325402452V$$

$$I_{R45} = \frac{U_{R45}}{R_{45}} = \frac{108.47018325402452}{640} = 0.1694846613344133A$$

$$U_i = I_{R45}R_5 = 0.1694846613344133 \cdot 460 = 77.96294421383013V$$

$$R_i = \frac{(\frac{R_{23}R_1}{R_{23}R_1} + R_4)R_5}{\frac{R_1R_{23}}{R_1 + R_{23}} + R_{45}} = \frac{(\frac{930 \cdot 250}{930 + 250} + 180) \cdot 460}{\frac{250 \cdot 930}{250 + 930} + 640} = 207.20259188012557\Omega$$

Ekvivalentní obvod dle Théveninovy věty



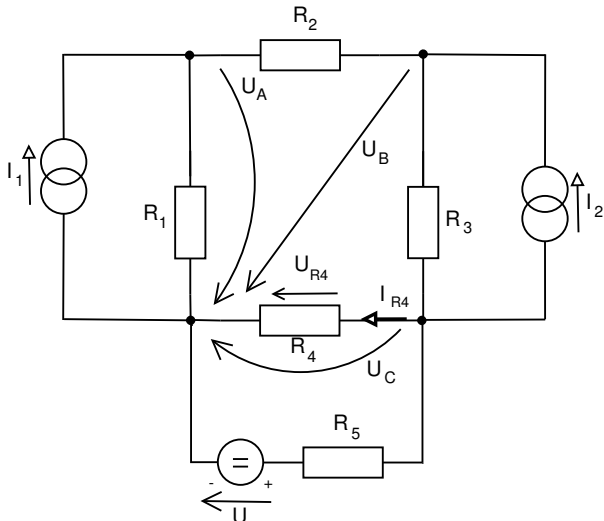
$$I_{R6} = \frac{U_i}{R_i + R_6} = \frac{77.96294421383013}{207.20259188012557 + 120} = \mathbf{0.23827116944841545\,A}$$

$$U_{R6} = R_6 I_{R6} = 120 \cdot 0.23827116944841545 = \mathbf{28.592540333809854\,V}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{47} S$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{39} S$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{58} S$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{28} S$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{25} S$$

$$I_3 = \frac{U}{R_4 + R_5} = \frac{130}{28 + 25} = \frac{130}{53} A = 2.452830188679245 A$$

Nyní sestavíme rovnice pro jednotlivé uzly

$$A) -G_1 U_A + G_2 (U_B - U_A) = -I_1$$

$$B) G_2 (U_A - U_B) + G_3 (-U_B + U_C) = -I_2$$

$$C) G_3 (U_B - U_C) - G_4 U_C - G_5 U_C = I_2 - \frac{U}{R_5}$$

Nyní si vytvoříme matici za jejíž pomocí vypočteme napětí na jednotlivých uzlech

$$\begin{pmatrix} -G_1 - G_2 & G_2 & 0 \\ G_2 & -G_2 - G_3 & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_3 - G_4 - G_5 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -I_1 \\ -I_2 \\ I_2 - \frac{U}{R_5} \end{pmatrix}$$

Dosadíme hodnoty do matice a vypočteme napětí na uzlech

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{47} - \frac{1}{39} & \frac{1}{39} & 0 \\ \frac{1}{39} & -\frac{1}{39} - \frac{1}{58} & \frac{1}{58} \\ 0 & \frac{1}{58} & -\frac{1}{58} - \frac{1}{28} - \frac{1}{25} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -0.95 \\ -0.50 \\ 0.50 - \frac{130}{25} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -32.94851176 & -21.2887662 & -3.94863178 \\ -21.2887662 & -38.95391263 & -7.22515602 \\ -3.94863178 & -7.22515602 & -12.09793567 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.95 \\ -0.5 \\ -4.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.50403865 \\ 73.65951752 \\ 64.22407585 \end{pmatrix}$$

$$U_A = 60.50403865V$$

$$U_B = 73.65951752V$$

$$U_C = U_{R4} = \mathbf{64.22407585V}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{64.22407585}{28} = \mathbf{2.2937169946428573A}$$

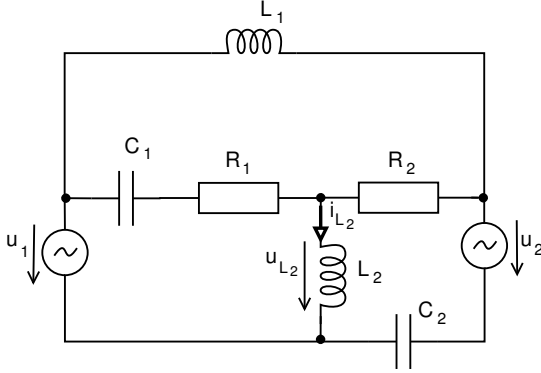
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
C	3	4	10	13	220	70	230	85	75



Nejprve si převedeme hodnoty na základní jednotky

$$L_1 = 220 \text{ mH} = 0.22 \text{ H}$$

$$L_2 = 70 \text{ mH} = 0.07 \text{ H}$$

$$C_1 = 230 \text{ } \mu\text{F} = 0.00023 \text{ F}$$

$$C_2 = 85 \text{ } \mu\text{F} = 0.000085 \text{ F}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi 75 = 150\pi \text{ rad/s}$$

$$Z_{L1} = 1j\omega L_1 = 1j \cdot 150\pi \cdot 0.22 = 103.67255756846318j \text{ } \Omega$$

$$Z_{L2} = 1j\omega L_2 = 1j \cdot 150\pi \cdot 0.07 = 32.98672286269283j \text{ } \Omega$$

$$Z_{C1} = -\frac{1j}{\omega C_1} = -\frac{1j}{150\pi \cdot 0.00023} = -9.226373512573643j \text{ } \Omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{1j}{\omega C_2} = -\frac{1j}{150\pi \cdot 0.000085} = -24.965481269316918j \text{ } \Omega$$

Nyní si sestavíme matici s jejíž pomocí vypočteme napětí v jednotlivých uzlech

$$M = \begin{pmatrix} R_2 + R_1 + Z_{C1} + Z_{L1} & -Z_{C1} - R_1 & -R_2 \\ -R_1 - Z_{C1} & Z_{C1} + R_1 + Z_{L2} & -Z_{L2} \\ -R_2 & -Z_{L2} & Z_{L2} + R_2 + Z_{C2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 + 94.44618406j & -10 + 9.22637351j & -13 \\ -10 + 9.22637351j & 10 + 23.76034935j & -32.98672286j \\ -13 & -32.98672286j & 13 + 8.02124159j \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00124782 - 0.01105699j & 0.003308 - 0.00297538j & 0.00518173 - 0.00586036j \\ 0.003308 - 0.00297538j & 0.01542931 + 0.00262558j & 0.01373693 + 0.02769962j \\ 0.00518173 - 0.00586036j & 0.01373693 + 0.02769962j & 0.02151782 + 0.01571938j \end{pmatrix}$$

$$P = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0108029 + 0.01451527j \\ -0.00865979 - 0.10292173j \\ -0.04486051 + 0.02022134j \end{pmatrix}$$

$$I_A = -0.0108029 + 0.01451527j A$$

$$I_B = -0.00865979 - 0.10292173j A$$

$$I_C = -0.04486051 + 0.02022134j A$$

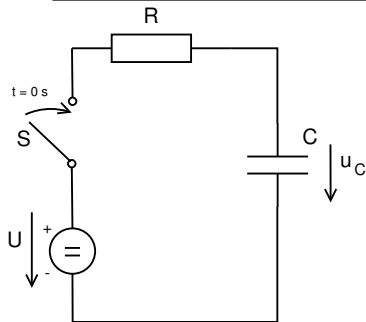
$$\begin{aligned} |U_{L2}| &= |Z_{L2} \cdot (I_B - I_C)| = \\ &= |32.98672286269283j \cdot ((-0.008659790520641808 - 0.10292173483319066j) - (-0.044860513630751414 + 0.020221343855072654j))| = |4.062086609148517 + 1.1941432206622653j| = \mathbf{4.233972797701627} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(U_{L2})}{\text{Re}(U_{L2})} = \arctan \frac{1.1941432206622653}{4.062086609148517} = 0.28591817765805744 \text{ rad} = \mathbf{16.381904865878358^\circ}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	C [F]	R [Ω]	$u_C(0)$ [V]
G	20	8	100	5



Známe U , R , C , $U_{C(0)}$

1) Ohmův zákon:

$$I = \frac{U_R}{R}$$

2) Kirchhoffův zákon:

$$U = U_R + U_C$$

$$U - U_C - U_R = 0$$

3) Axiom:

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot I$$

$$U_C(0) = U_{CP}$$

1.krok

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{R} \cdot U_R$$

$$U_R = U - U_C$$

$$u'_C = \frac{1}{RC} \cdot (U - u_C)$$

Jedná se o diferenciální rovnici 1. řádu

počáteční podmínka: $u_C(0) = U_{CP}$

$$u'_C + \frac{u_C}{RC} = \frac{U}{RC}$$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

Očekávané řešení $u_C(t) = K(t)e^{\lambda t} = K(t)e^{-\frac{t}{RC}}$

Zderivujeme $u_c(t)$:

$$u_c(t) = K(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u'_c(t) = K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC} \cdot K(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nyní $u_C(t)$ a $u'_C(t)$ dosadíme do $u'_C + \frac{u_C}{RC} = \frac{U}{RC}$

$$K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{K(t)}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{K(t)e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} = \frac{U}{RC}$$

$$K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{RC}$$

Nyní zjistíme $K(t)$

$$K'(t)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{RC} \quad / e^{\frac{t}{RC}}$$

$$K'(t) = \frac{U}{RC} e^{\frac{t}{RC}} \quad / \int$$

$$K(t) = \frac{U}{RC} (RC e^{\frac{t}{RC}})$$

$$K(t) = U e^{\frac{t}{RC}} + k$$

k je integrační konstanta

Nyní dosadíme do původní rovnice

$$u_C(t) = (U e^{\frac{t}{RC}} + k) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(t) = U + k e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dosadíme $u_C(0) = u_{CP} \implies k = 0$

$$u_{CP} = U + k e^0$$

$$u_{CP} - U = k$$

Analytické řešení

$$u_C(t) = U + (u_{CP} - U) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Kontrola dosazením hodnot v $u_C(0)$

$$u_c(0) = 20 + (5 - 20) e^{-\frac{0}{100 \cdot 8}}$$

$$u_c(0) = 20 + (-15) e^{-\frac{0}{800}}$$

$$u_c(0) = 20 - 15 \cdot e^0$$

$$u_c(0) = 5$$

$$5 = 5$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	C	$U_{R2} = 64.33140954819336V$ $I_{R2} = 0.07942149326937452A$
2	G	$U_{R6} = 28.592540333809854V$ $I_{R6} = 0.23827116944841545A$
3	H	$U_{R4} = 64.22407585V$ $I_{R4} = 2.2937169946428573A$
4	C	$ U_{L2} = 4.233972797701627V$ $\varphi_{L2} = 16.381904865878358^\circ$
5	G	$u_C = 5V$