Решения на задачи по Линейна Алгебра

Последна промяна на November 8, 2021

Contents

1 Линейни Системи

1.1 Метода на Гаус

Решаване на системи уравнения по Метода на Гаус, още познато като линейна елиминация.

Една линейна система запазва еднакво множеството от решения при трансформация чрез една от тези операции:

1. Един ред от системата може да се размени с друг.
2. Едно от уравненията може да се умножи по ненулева константа.
3. Уравнение на един ред, умножено с число, може да се прибави към уравнение на друг ред.

Тези операции се правят докато:

1. Се намери непротиворечива стойността на една от търсените променливи. **Тогава имаме решение.**
2. Се стигне до логическо противоречие, например $0 = -1$. **Тогава нямаме решение.**
3. Се останови, че нито една от стъпките не води до опростяване на коя от редовете. **Тогава имаме безкрайно много решения.**

1.1.1 Примерно уравнение 1 (подробно решение)

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + 2x_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

Първо разменяме ред 1 с ред 3:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + 2x_2 \qquad &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Ребалансираме уравнението на ред 1, като умножаваме с 3, за да премахнем дробната част:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad &= 9 \quad | \times 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Умножаваме 1-вия ред с -1 и добавяме резултата към 2-рия ред:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad &= 9 \qquad \text{(остава не променен)} \\ -\ x_2 - 2x_3 &= -7 \quad | + (-x_1 - 6x_2 = -9) \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Стигнахме до стъпка в която е лесно да се открие решение:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \quad &= 9 \\ - \; x_2 - 2x_3 &= -7 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 6x_2 \quad &= 9 \\ x_2 \quad &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 \quad &= 3 \\ x_2 \quad &= 1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Така множеството което е решение на системата е $\{3, 1, 3\}$

1.1.2 Примерно уравнение 2

Уравнение :

$$\begin{aligned} x + \; y \quad &= 0 \qquad p_1 \\ 2x - \; y + 3z &= 3 \qquad p_2 \\ x - 2y - \; z &= 3 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Използваме първия ред, за да премахнем $2x$ във втория ред и $1x$ в третия:

$$\xrightarrow[-p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \begin{aligned} x + \; y \quad &= 0 \\ -3y + 3z &= 3 \\ -3y - \; z &= 3 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-p_2+p_3} \begin{aligned} x + \; y \quad &= 0 \\ -3y + 3z &= 3 \\ -4z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \; y \quad &= 0 \\ -3y + 3z &= 3 \\ z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + y \quad &= 0 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x \quad &= 1 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

1.1.3 Задача 1.17 а)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \qquad p_1 \\ x - \; y &= -1 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{p_1 \div 2} \begin{aligned} x + \tfrac{3}{2}y &= \tfrac{13}{2} \\ x - \; y &= -1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-p_1+p_2} \begin{aligned} x + \tfrac{3}{2}y &= \tfrac{13}{2} \\ -\tfrac{5}{2}y &= -\tfrac{15}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \tfrac{3}{2}y &= \tfrac{13}{2} \\ y &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

1.1.4 Задача 1.17 b)

$$\begin{aligned} x \quad\quad - z &= 0 \quad p_1 \\ 3x + y \quad\quad &= 1 \quad p_2 \\ -x + y + z &= 4 \quad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{p_1+p_3} \begin{aligned} x \quad\quad - z &= 0 \\ 3x + y \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \quad\quad - z &= 0 \\ x \quad\quad &= -1 \\ y \quad\quad &= 4 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} z &= -1 \\ x \quad\quad &= -1 \\ y \quad\quad &= 4 \end{aligned}$$

1.1.5 Задача 1.18 from a) to j)

Задача 1.18 a)

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 0 \quad p_1 \\ -2y &= 0 \quad p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Отговор: **Уникално решение.**

Задача 1.18 b)

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 4 \quad p_1 \\ y - z &= 0 \quad p_2 \end{aligned}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

Задача 1.18 c)

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad\quad &= 4 \quad p_1 \\ y - z \quad\quad &= 0 \quad p_2 \\ 0 &= 0 \quad p_3 \end{aligned}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

Задача 1.18 d)

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 4 \qquad p_1 \\ 0 &= 4 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Отговор: Имаме противоречие $0 = 4$, следователно системата **Няма решения.**

Задача 1.18 e)

$$\begin{aligned} 3x + 6y + z &= -0.5 \qquad p_1 \\ -z &= 2.5 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Отговор: Ако заместим z то x и y не остават неизвестни, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

Задача 1.18 f)

$$\begin{aligned} x - 3y \qquad &= 2 \qquad p_1 \\ 0 &= 0 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

Задача 1.18 g)

$$\begin{aligned} 2x + 2y \qquad &= 4 \qquad p_1 \\ y \qquad &= 1 \qquad p_2 \\ 0 &= 4 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Отговор: Имаме противоречие $0 = 4$, следователно системата **Няма решения.**

Задача 1.18 h)

$$2x + y = 0 \qquad p_1$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

Задача 1.18 i)

$$\begin{aligned} x - y \qquad &= -1 \qquad p_1 \\ 0 &= 0 \qquad p_2 \\ 0 &= 4 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Отговор: Имаме противоречие $0 = 4$, следователно системата **Няма решения.**

Задача 1.18 j)

$$\begin{aligned} x + y - 3z \qquad &= -1 \qquad p_1 \\ y - \ z \qquad &= 2 \qquad p_2 \\ z \qquad &= 0 \qquad p_3 \\ 0 &= 0 \qquad p_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= -3 \quad p_1 \\ y \qquad &= 2 \quad p_2 \\ z &= 0 \quad p_3 \\ 0 &= 0 \quad p_4 \end{aligned}$$

Отговор: **Уникално решение.**

1.1.6 Задача 1.19 a)

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 5 \quad p_1 \\ x - 4y &= 0 \quad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}p_1+p_2} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 5 \\ y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 5 \\ y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

1.1.7 Задача 1.19 b)

$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \quad p_1 \\ x + y &= 2 \quad p_2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{p_1+p_2} \quad \begin{aligned} -x + y &= 1 \\ y &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ y &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x \quad &= \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

1.1.8 Задача 1.19 c)

$$\begin{aligned} x - 3y + \ \ z &= 1 \quad p_1 \\ x + \ \ y + 2z &= 14 \quad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-p_1+p_2} \quad \begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 4y + z &= 13 \end{aligned}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

1.1.9 Задача 1.19 d)

$$\begin{aligned} -x - \ \ y &= 1 \qquad p_1 \\ -3x - 3y &= 2 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-3p_1+p_2} \begin{aligned} -x - y \qquad &= 1 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

Отговор: Имаме противоречие $0 = -1$, следователно системата **Няма решения.**

1.1.10 Задача 1.19 e)

$$\begin{aligned} 4y + z &= 20 \qquad p_1 \\ 2x - 2y + z &= 0 \qquad p_2 \\ x \qquad + z &= 5 \qquad p_3 \\ x + \ \ y - z &= 10 \qquad p_4 \end{aligned}$$

Пренареждаме уравнението:

$$\begin{aligned} x + \ \ y - z &= 10 \qquad p_1 \\ 2x - 2y + z &= 0 \qquad p_2 \\ x \qquad + z &= 5 \qquad p_3 \\ 4y + z &= 20 \qquad p_4 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow[-p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z &= 10 \\ -4y + 3z &= -20 \\ - \ \ y + 2z &= -5 \\ 4y + \ \ z &= 20 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{4p_3+p_4} \begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z &= 10 \\ -4y + 3z &= -20 \\ - \ \ y + 2z &= -5 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z &= 10 \\ -4y + 3z &= -20 \\ - \ \ y + 2z &= -5 \\ z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z &= 10 \\ -4y + 3z &= -20 \\ y \qquad &= 5 \\ z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + y - z \qquad &= 10 \\ 20 &= 20 \\ y \qquad\qquad &= 5 \\ z \qquad &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x \qquad\qquad\qquad &= 5 \\ 20 &= 20 \\ y \qquad\qquad &= 5 \\ z \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Отговор: отговора е $\{x, y, z\} = \{5, 5, 0\}$

1.1.11 Задача 1.19 f)

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & & +\ \ z & +w = 5 & p_1 \\ & y & & -w = -1 & p_2 \\ 3x & & -\ \ z & -w = 0 & p_3 \\ 4x & +y & +2z & +w = 9 & p_4 \end{array}$$

Пренареждаме уравнението:

$$\begin{array}{rrrrl} 4x & +y & +2z & +w = 9 & p_1 \\ 2x & & +\ \ z & +w = 5 & p_2 \\ 3x & & -\ \ z & -w = 0 & p_3 \\ & y & & -w = -1 & p_4 \end{array}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}p_1+p_2} \begin{array}{rrrr} 4x & +y & +2z & +w = 9 \\ & y & & -w = -1 \\ 3x & & -\ \ z & -w = 0 \\ & y & & -w = -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-p_2+p_4} \begin{array}{rrrrr} 4x & +y & +2z & +w & = 9 \\ & y & & -w & = -1 \\ 3x & & -\ \ z & -w & = 0 \\ & & & & 0 = 0 \end{array}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

1.1.12 Задача 1.20 a)

$$\begin{array}{rl} x + y + \ \ z = 5 & p_1 \\ x - y \qquad = 0 & p_2 \\ y + 2z = 7 & p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-p_1+p_2} \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 5 \\ -2y - \ \ z = -5 \\ y + 2z = 7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}p_2+p_3} \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 5 \\ -2y - \ \ z = -5 \\ \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \implies z = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + \ \ y + z &= 5 \\ -2y - z &= -5 \\ z &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ y \qquad &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x \qquad\quad &= 1 \\ y \qquad &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

1.1.13 Задача 1.20 b)

$$\begin{aligned} 3x \qquad + \ \ z &= 7 \qquad p_1 \\ x - \ \ y + 3z &= 4 \qquad p_2 \\ x + 2y - 5z &= -1 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Пренаписваме уравнението:

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 4 \qquad p_1 \\ x + 2y - 5z &= -1 \qquad p_2 \\ 3x \qquad + \ \ z &= 7 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow[-3p_1+p_3]{-p_1+p_2} \begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 4 \\ 3y - 8z &= -5 \\ 3y - 8z &= -5 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-p_1+p_2} \begin{aligned} x - \ \ y + 3z \quad &= 4 \\ 3y - 8z \quad &= -5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Отговор: Не може да се извърши заместване, следователно имаме **Безкрайно много решения.**

1.1.14 Задача 1.20 c)

$$\begin{aligned} x + 3y + \ \ z &= 0 \qquad p_1 \\ -x - \ \ y \qquad &= 2 \qquad p_2 \\ -x + \ \ y + 2z &= 8 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow[p_1+p_2]{p_1+p_2} \begin{aligned} x + 3y + \ \ z &= 0 \\ 2y + \ \ z &= 2 \\ 4y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-2p_2+p_3} \begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2y + z &= 2 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 4 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x \quad &= -1 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

1.1.15 Задача 1.21

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + \ \ y &= -3 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Решение по метода от училище.

Първо првим това което пише в подточка a:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ 2x + y &= -3 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ 2(1 - 3y) + y &= -3 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ y &= 1 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 1 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 1 \\ -2 &= 0 \end{aligned}$$

Виждаме противоречие $-2 = 0$, което можем да хванем само ако заместим в 3тото уравнение.

Првим това което пише в подточка b:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ 2x + y &= -3 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 1 - 3y$$
$$2x + y = -3$$
$$2(1 - 3y) + 2y = 0$$

$$x = 1 - 3y$$
$$2x + y = -3$$
$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 - 3y$$
$$x = -7$$
$$y = \frac{1}{2}$$

$$-7 = -\frac{1}{2}$$
$$x = -7$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Отново виждаме противоречие $-7 = -\frac{1}{2}$ след изришна проверка.

1.1.16 Задача 1.22

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= 1 \qquad p_1 \\ 3x - 3y &= k \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow{-3p_1+p_2} \begin{aligned} x - y \qquad &= 1 \\ 0 &= k - 3 \end{aligned}$$

Отговор:

Ако $k = 3 \implies$ **Безкрайно много решения.**

Ако $k \neq 3, k \in \mathbb{R} \implies$ **Няма решение.**

Няма стойност на k за която системата да има само едно решение.

1.1.17 Задача 1.23

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha \quad &- \quad \cos\beta \quad &+ 3\tan\gamma &= 3 \qquad p_1 \\ 4\sin\alpha \quad &+ 2\cos\beta \quad &- 2\tan\gamma &= 10 \qquad p_2 \\ 6\sin\alpha \quad &- 3\cos\beta \quad &+ \quad \tan\gamma &= 9 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Пренаписваме уравнението, като преди това приемаме, че $x = \sin\alpha, y = \cos\beta, z = tan\gamma$

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y + 3z &= 3 \quad & p_1 \\ 4x + 2y - 2z &= 10 \quad & p_2 \\ 6x - 3y + \ \ z &= 9 \quad & p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\xrightarrow[-3p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \quad \begin{aligned} 2x - \ \ y + 3z &= 3 \\ 4y - 8z &= 4 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 3 \\ y \qquad &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x \qquad &= 2 \\ y \qquad &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Намиране на множеството от решения

1.2.1 Примерно Уравнение 1

$$\begin{aligned} 2x \qquad + z &= 3 \quad & p_1 \\ x - y - z &= 1 \quad & p_2 \\ 3x - y \qquad &= 4 \quad & p_3 \end{aligned} \quad \xrightarrow[-(\frac{3}{2})p_1+p_3]{-(\frac{1}{2})p_1+p_2} \quad \begin{aligned} 2x \qquad + \ \ z &= 3 \\ -y - \tfrac{3}{2}z &= -\tfrac{1}{2} \\ -y - \tfrac{3}{2}z &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \xrightarrow{-p_2+p_3} \quad \begin{aligned} 2x \qquad + \ \ z \qquad &= 3 \\ -y - \tfrac{3}{2}z \qquad &= -\tfrac{1}{2} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Така разбираме, че едното от уравненията не е определящо за множеството от решения. Множеството на решенията може да бъде описано като:

$$\{(x, y, z) \mid 2x + z = 3 \text{ and } -y - \frac{3z}{2} = -\frac{1}{2}$$

Което е по-дборе, защото уравнения са 2 вместо 3, но има и по-добър начин. Използвайки **свободната променливата** z, която **не води уравнение**, за да опишем променливите, които **водят уравнение**, x и y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \\ x &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

Така можем да опишем решението като:

$$\{\left(\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}z\right), \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}z\right), z\right) \ \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Предимството е, че z може да бъде всяко реално число. Това значително улеснява работата по определяне на елементите в множеството от решения. Например, ако приемем $z = 2$ тогава веднага виждаме, че $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 2)$ е решение.

1.2.2 Примерно Уравнение 2

Една система може да има повече от една **свободна променлива**:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x & +y & +z & -w=1 & p_1 \\
 & y & -z & +w=-1 & p_2 \\
3x & & +6z & -6w=6 & p_3 \\
 & -y & +z & -w=1 & p_4
\end{array}
\xrightarrow{-3p_1+p_3}
\begin{array}{rrrr}
x & +y & +z & -w=1 \\
 & y & -z & +w=-1 \\
 & -3y & +3z & -3w=3 \\
 & -y & +z & -w=1
\end{array}
\xrightarrow[p_2+p_4]{3p_2+p_3}
\begin{array}{rrrr}
x & +y & +z & -w \\
 & y & -z & +w
\end{array}
$$

Остава x и y водещи и z и w свободни. Първо изразяваме водещата променлива y чрез z и w:

$$y = -1 + z - w$$

След това изразяваме x чрез z и w:

$$x = 2 - 2z + 2w$$

А това дава следното множество от решения:

$$\{((2 - 2z + 2w), (-1 + z - w), z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}$$

1.2.3 Примерно Уравнение 3

Списъкът с водещи променливи може да пропусне някои колони:

$$
\begin{array}{rrrrl}
2x & -2y & & =0 & p_1 \\
 & & z & +3w=2 & p_2 \\
3x & -3y & & =0 & p_3 \\
x & -y & +2z & +6w=4 & p_4
\end{array}
\xrightarrow[-(\frac{1}{2})p_1+p_4]{-(\frac{3}{2})p_1+p_3}
\begin{array}{rrrr}
2x & -2y & & =0 \\
 & z & +3w & =2 \\
 & & & 0=0 \\
 & 2z & +6w & =4
\end{array}
\xrightarrow{-2p_2+p_4}
\begin{array}{rr}
2x & -2y
\end{array}
$$

Тук x и z са водещите променливи. Свободните променливи са y и w и затова можем да опишем набора от решения като $\{(y, y, 2 - 3w, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\}$. Ако вземем списъкът $(1, 1, 2, 0)$ удовлетворява системата, но $(1, 0, 5, 4)$ не, тъй като първата и втората стойност не са равни.

Променлива, която използваме за описване на семейство от решения, е параметър. Казваме, че решението, зададено в предишния пример, е параметризирано с y и w.

Термините **параметър** и **свободна променлива** не означават едно и също нещо. В предишния пример y и w са свободни, тъй като в системата на ешелонната форма те не водят. Те са параметри, защото ги използвахме за описание на набора от решения.

1.2.4 Нотация са описване на множеството от решения

Първата нотация, която използваме, е тази за матрица. Бележи се с голяма латинска буква, а елементите в нея се бележат с малка латинска буква:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2.2 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \text{ we say that the matrix is a 2 by 3 matrix}$$
$$a_{2,1} = 3$$
$$a_{1,2} = 2.2$$
$$a_{3,3} = -7$$

Можем да използваме матричния запис при решаване на уравнение чрез метода на Гаус.

Например, следната система може да се изрази с матрична нотация:

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\;\; &= 4 \\ y - \;\; z &= 0 \\ x \quad\;\; + 2z &= 4 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Стъпките по метода на Гаус:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_1+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Така множеството решения е $\{(4–2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, което може да се разпише чрез векторена нотация:

$$\{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z \mid z, w \in \mathbb{R}\}$$

Векторите се бележат с малко по различна нотация:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Задача 2.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

a) $a_{2,1} = 2$
b) $a_{1,2} = 3$
c) $a_{2,2} = -1$
d) $a_{3,1}$ не е дефинирано

1.2.6 Задача 2.16

a)

$$M_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$M_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2.7 Задача 2.17

a)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$5\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 52 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{NOT DEFINED}$$

f)

$$6\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.2.8 Задача 2.18 a)

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 18 \qquad p_1 \\ x + 2y &= 6 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}p_1+p_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \quad x = 6 - 2y, \quad y = y$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y \mid y \in \mathbb{R}\}$$

1.2.9 Задача 2.18 b)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \qquad p_1 \\ x - y &= -1 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \quad x = 0, \quad y = 1$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

1.2.10 Задача 2.18 c)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \ x_3 &= 4 \qquad p_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \qquad p_2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 17 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow[-4p_1+p_3]{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x_1 = 4 - x_3, \\ x_2 = -1 + x_3, \\ x_3 = x_3 \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

1.2.11 Задача 2.18 d)

$$\begin{aligned} 2a + b - c &= 2 \qquad p_1 \\ 2a \qquad + c &= 3 \qquad p_2 \\ a - b \qquad &= 0 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}p_1+p_3]{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

1.2.12 Задача 2.18 e)

$$\begin{array}{rrrrll} x & +2y & -z & & =3 & p_1 \\ 2x & +\ y & & +w & =4 & p_2 \\ x & -\ y & +z & +w & =1 & p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Водещите променливи са x, y, изразяваме ги чрез w и z:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w \\ y &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}w \\ z &= z \\ w &= w \end{aligned}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(1/3) \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -(2/3) \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \mid z,\ w \in \mathbb{R}\}$$

1.2.13 Задача 2.18 f)

$$\begin{array}{rrrrll} x & & +z & +w & =4 & p_1 \\ 2x & +y & & -w & =2 & p_2 \\ 3x & +y & +z & & =7 & p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-3p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Множеството от решения е:

$$\varnothing \text{ empty set}$$

1.2.14 Задача 2.19 a)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \qquad p_1 \\ 4x - y \qquad &= 3 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = 2/3 + 1/6z \\ y = -(1/3) + (2/3)z \\ z = z \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -(1/3) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} z \mid z \in \mathbb{R}\}$$

1.2.15 Задача 2.19 b)

$$\begin{array}{rrrrl} x & & - \; z & = 1 & \quad p_1 \\ & y & + 2z & - w = 3 & \quad p_2 \\ x & + 2y & + 3z & - w = 7 & \quad p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_1+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = 1 - z \\ y = 3 - 2z \\ z = z \\ w = 0 \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z \mid z \in \mathbb{R}\}$$

1.2.16 Задача 2.19 c)

$$\begin{array}{rrrrl} x & - \; y & + \; z & = 0 & \quad p_1 \\ & y & & + w = 0 & \quad p_2 \\ 3x & - 2y & + 3z & + w = 0 & \quad p_3 \\ & - \; y & & - w = 0 & \quad p_4 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-3p_1+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[p_2+p_4]{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = -w - z \\ y = -w \\ z = z \\ w = w \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \mid z,\ w \in \mathbb{R}\}$$

1.2.17 Задача 2.19 d)

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c + d - e &= 1 \qquad p_1 \\ 3a - \ \ b + \ \ c + d + e &= 3 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -8 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} a = 1 - 5/7c - 3/7d - 1/7e \\ b = -8/7c - 2/7d + 4/7e \\ c = c \\ d = d \\ e = e \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/7 \\ -8/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} -3/7 \\ -2/7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} -1/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e \mid c,\ d,\ e \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Общото решение = Специфичното решение + хомогенното решение

Всяка линейна система, която е в ешелонна форма, има множество от решения в следната форма:

$$\{\vec{p} + c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_k\vec{\beta}_k \mid c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\}$$

Където вектора $\vec{p}$ е специфично решение и броя на векторите $\vec{\beta}_1 ... \vec{\beta}_k$ е равен на броя **свободни променливи**.

Линейните уравнения са **хомогенни** ако имат константа равна на 0, а една система е **хомогенна** когато всички уравнения са **хомогенни**:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Когато системата е хомогенна тя няма специфично решение $\vec{p} = 0$, а множеството от решения има следната форма:

$$\{c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_k\vec{\beta}_k \mid c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\}$$

Друго характерно за хомогенните системи е, че те винаги имат едно уникално решение или безброй много решения.

1.3.1 Задача 3.14

$$\begin{aligned} x + \ \ y - 2z &= 0 \qquad p_1 \\ x - \ \ y \qquad &= -3 \qquad p_2 \\ 3x - \ \ y - 2z &= -6 \qquad p_3 \\ 2y - 2z &= 3 \qquad p_4 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-3p_1+p_3]{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[p_2+p_4]{-2p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = -\frac{3}{2} + z, \\ y = \frac{3}{2} + z, \\ z = z \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} -(3/2) \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Ако конвертираме системата към хомогенна:

$$\begin{aligned} x + \ \ y - 2z &= 0 \qquad p_1 \\ x - \ \ y \qquad &= 0 \qquad p_2 \\ 3x - \ \ y - 2z &= 0 \qquad p_3 \\ 2y - 2z &= 0 \qquad p_4 \end{aligned}$$

Стъпките по метода на Гаус са същите, но множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z \mid z \in \mathbb{R}\}$$

1.3.2 Задача 3.15 а)

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 18 \qquad p_1 \\ x + 2y &= 6 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}p_1+p_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = 6 - 2y \\ y = y \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Специфичното решение и множеството от решения на асоциираната хомогенната система са:

$$\{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \text{and} \quad \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y \mid y \in \mathbb{R}\}$$

1.3.3 Задача 3.15 b)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \qquad p_1 \\ x - y &= -1 \qquad p_2 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \end{array}$$

Специфичното решение и множеството от решения на асоциираната хомогенната система са:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \text{and} \quad \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

1.3.4 Задача 3.15 c)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \quad x_3 &= 4 \qquad p_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \qquad p_2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 17 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow[-4p_1+p_3]{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x_1 = 4 - x_3 \\ x_2 = -1 + x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Специфичното решение и множеството от решения на асоциираната хомогенната система са:

$$\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \text{and} \quad \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

1.3.5 Задача 3.15 d)

$$\begin{aligned} 2a + b - c &= 2 \qquad p_1 \\ 2a \qquad + c &= 3 \qquad p_2 \\ a - b \qquad &= 0 \qquad p_3 \end{aligned}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}p_1+p_3]{-p_1+p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}p_2+p_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}$$

Специфичното решение и множеството от решения на асоциираната хомогенната система са:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \text{and} \quad \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

1.3.6 Задача 3.15 e)

$$\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -z & & = 3 \quad p_1 \\ 2x & +\ y & & +w & = 4 \quad p_2 \\ x & -\ y & +z & +w & = 1 \quad p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{5 - z + 2w}{3}, \quad y = \frac{2 + 2z + w}{3}, \quad z = z, \quad w = w$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \mid z, w \in \mathbb{R}\}$$

Специфичното решение и множеството от решения на асоциираната хомогенната система са:

$$\{\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +\} \quad \text{and} \quad \{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \mid z, w \in \mathbb{R}\}$$

1.3.7 Задача 3.15 f)

$$\begin{array}{rrrrl} x & & +z & +w & = 4 \quad p_1 \\ 2x & +y & & -w & = 2 \quad p_2 \\ 3x & +y & +z & & = 7 \quad p_3 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-3p_1+p_3]{-2p_1+p_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-p_2+p_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

Множеството от решения е:

$\emptyset$ empty set

Ако довършим решението с асоциираната хомогенната система:

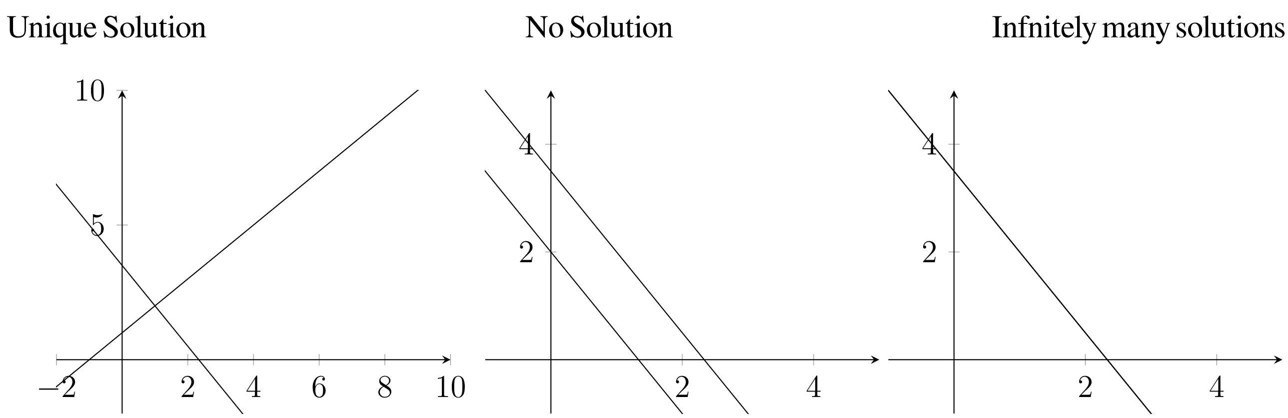
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} x = 3 - z - w \\ y = 2z + 3w \\ z = z \\ w = w \end{array}$$

Множеството от решения е:

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \mid z, w \in \mathbb{R}\}$$

2 Линейна Геометрия

Трите видя решения (които разгеждахме в предишната глава) на една система от линейни уравнения могат да се представят геометрично:



$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ x - y &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 6x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

2.1 Вектори

Векторите са обекти с посока и величина/магнитут. Два вектора с еднаква посока и еднакъв магнитут са еднакви, **дори когато имат различна начална точка**.

Можем да опишем вектор (x_1, y_1) до (x_2, y_2) по следния начин:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

или по-генерализирано:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

където $\overrightarrow{v}$ започва в някоя избрана начална точка и приключва на (v_1, v_2) разтояние от тази точка.

Можем да дефинираме множеството от реалните числа по следния начин (тук **нарочно** не правим голяма разлика между вектор и точка):

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_1, \ \ldots \ , v_n \in \mathbb{R} \}$$

2.2 Линия

Линия в $\mathbb{R}^2$ от $(1,2)$ до $(3,1)$ може да се представя с два вектора в следното множеството:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

след сметките:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

2.3 Равнина (plain)

Равнина в $\mathbb{R}^3$ през точките $(1,0,5)$, $(2,1,-3)$ и $(-2,4,0.5)$ може се представи с три вектора в множеството:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ -3-5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-0 \\ 0.5-5 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \}$$

след сметките:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \}$$

Генерелазираната дефиниция:

Множество в слдната форма $\{ \vec{p} + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \ldots t_k \vec{v}_k \mid t_1, \ \ldots \ , t_k \}$ където $v_1, \ \ldots \ , v_k \in \mathbb{R}^n$ и $k \leq n$, то това е k-мерна линейна повърхност (k-dimentional linear serfice) или k-flat (няма превод тва).

TODO: Продължи с решаване на задачите сапочващи на 41-ва страница.