TC2007 Métodos Cuantitativos y Simulación

M/M/S

Modelos de colas multicanal

1. Dos o más servidores

2. Los clientes forman una sólo fila y son atendidos por el servidor desocupado

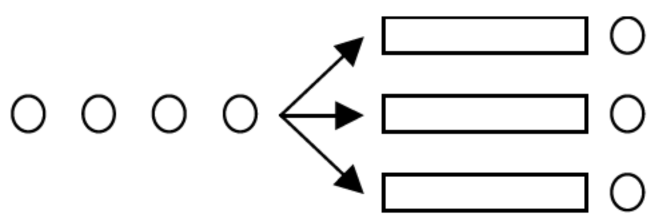
3. Las llegadas siguen una distribución de probabilidad de *Poisson*

4. Los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial

5. Los servicios se atienden de acuerdo a la política de primeros en llegar primeros en atenderse (FIFS)

6. La capacidad de la fila de espera es infinita

$$r = \frac{l}{sm}$$

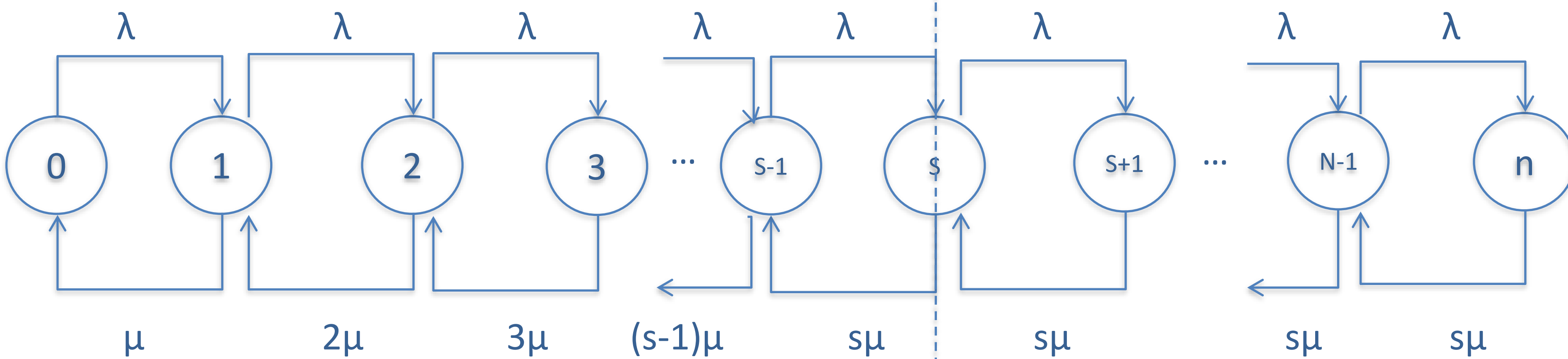


M/M/S

$$p_n = \rho^n p_0$$

X_t = número de clientes que hay en el sistema en el tiempo t

S= {*0,1,2,3,…, n*} conjuntos de estados



$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} p_0$$

¿Cuál es el valor de p_n, para los estados *s* al estado *s-1*?

$$p_s = \frac{\lambda^s}{s!\mu^s} p_0$$

$$\boxed{p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 \qquad \text{Si } n < s}$$

¿Cuál es el valor de p_s, para los estados de ***s*** a ***n***?

$$\boxed{p_n = \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} p_0 \qquad \text{Si } n \geq s}$$

M/M/S

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n < s \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n \geq s \end{cases}$$

¿cuál es el valor de p_0?

$$\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n} p_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n} \right)^{-1}$$

M/M/S

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\mu^n}\right)^{-1}$$

si $\rho_t=\dfrac{\lambda}{\mu}$

Si v=n-s

$$\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\mu^n}=\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\rho_t^n}{s!\,s^{n-s}}=\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\rho_t^n\rho_t^s\rho_t^{-s}}{s!\,s^{n-s}}=\frac{\rho_t^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\rho_t^{n-s}}{s^{n-s}}$$

n-s=0

$$=\frac{\rho_t^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{n-s}$$

Si v=n-s $\quad=\dfrac{\rho_t^s}{s!}\underbrace{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{v}}$

Corresponde a la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$$

$$=\frac{\rho_t^s}{s!}\frac{1}{\left(1-\frac{\rho_t}{s}\right)}$$

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho_t^n}{n!}+\frac{\rho_t^s}{s!\left(1-\frac{\rho_t}{s}\right)}\right)^{-1}$$

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)}\right)^{-1}$$

M/M/S

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n < s \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n \geq s \end{cases}$$

¿cuál es el valor de p_0?

$$\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n} p_0 = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n} \right)^{-1}$$

$$\boxed{p_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)} \right)^{-1}}$$

M/M/S

Medidas de desempeño

Sólo habrá fila de espera después de que los ***s*** servidores estén ocupados

$\rho^n = \rho^n \rho^s \rho^{-s} = \rho^{n-s}\rho^s$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\frac{\rho_t^{\,n}}{s!\,s^{n-s}}p_0$$

$$L_q = \frac{p_0\rho_t^{\,s}}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{n-s} = \frac{p_0\rho_t^{\,s}}{s!}\sum_{v=0}^{\infty}v\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{v} = \frac{p_0\rho_t^{\,s}}{s!}\sum_{v=0}^{\infty}v\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{v}\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{-1}\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{+1}$$

n-s=0

Si v=n-s

$$L_q = \frac{p_0\rho_t^{\,s}}{s!}\left(\frac{\rho_t}{s}\right)\underbrace{\sum_{v=0}^{\infty}v\left(\frac{\rho_t}{s}\right)^{v-1}}_{serie}$$

serie $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho_t^{\,n-1} = \dfrac{1}{(1-\rho_t)^2}$

si $\rho_t = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$L_q = \frac{\rho_t^{\,s}}{s!}\,\frac{\rho_t}{s}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\rho_t}{s}\right)^2}p_0$$

$$\boxed{L_q = \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s}\,\frac{\lambda}{s\mu}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}p_0}$$

M/M/S

Medidas de desempeño

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

M/M/S Síntesis de medidas de desempeño

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n < s \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n}\, p_0 & \text{Si } n \geq s \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \left(\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right) + \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s\left(1 - \dfrac{\lambda}{s\mu}\right)} \right)^{-1}$$

$$L_q = \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s}\,\frac{\lambda}{s\mu}\,\frac{1}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^2}\, p_0$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad W_q = W - \frac{1}{\mu} \qquad W = \frac{L}{\lambda}$$

M/M/S

Ejemplo

Los clientes llegan a un lavado de autos con una distribución de exponencial a una razón de 10 autos por hora y el tiempo de servicio es de 8 autos por hora. Si Se cuenta con 2 estaciones para el lavado de autos, calcular.

a) Número de autos en el sistema
b) Número de autos en la fila de espera
c) Tiempo invertido en el sistema
d) Tiempo invertido en la fila de espera

M/M/S

Ejemplo

Los clientes llegan a un lavado de autos con una distribución de exponencial a una razón de 10 autos por hora y el tiempo de servicio es de 8 autos por hora. Si Se cuenta con 2 estaciones para el lavado de autos, calcular.

a) Número de autos en el sistema
   L = 2.0510 autos
b) Número de autos en la fila de espera
   Lq = 0.8010 autos
c) Tiempo invertido en el sistema
   W = 0.20510 hr.
d) Tiempo invertido en la fila de espera
   Wq = 0.0801 hr.

M/M/S

Ejemplo

Un banco tiene 2 cajeros para atender a los clientes, llegan en promedio 80 clientes por hora. Los clientes al llegar hacen una sola fila de espera al cajero desocupado.

El tiempo promedio que le toma al cajero atender un cliente es de 1.2 minutos.

Considera que los tiempos de llegada y tiempos de servicio siguen una distribución exponencial, calcule:

a) El número esperado de clientes en el banco
b) El tiempo esperado que un cliente invierte en el banco
c) El tiempo esperado que un cliente invierte en la fila de espera
d) El número esperado de clientes en la fila de espera

M/M/S

Ejemplo

Un banco tiene 2 cajeros para atender a los clientes, llegan en promedio 80 clientes por hora. Los clientes al llegar hacen una sola fila de espera al cajero desocupado.

El tiempo promedio que le toma al cajero atender un cliente es de 1.2 minutos.

Considera que los tiempos de llegada y tiempos de servicio siguen una distribución exponencial, calcule:

a) El número esperado de clientes en el banco

$L = 4.44 \approx 5$ clientes

b) El tiempo esperado que un cliente invierte en el banco

$W = 3.33$ minutos

c) El tiempo esperado que un cliente invierte en la fila de espera

$Wq=2.138$ minutos

d) El número esperado de clientes en la fila de espera

$Lq= 2.844 \approx 3$ clientes

M/M/S

Tarea 9:

Elaborar un programa para calcular las métricas de un modelo M/M/s

Proporcionar los valores de λ y μ. Probar con $\lambda = 5$ y $\mu = 7.5$ y enviar un *screenshot* con los resultados obtenidos

Crear una tabla con los siguientes datos:

Server	L	L_q	W	W_q	ρ	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

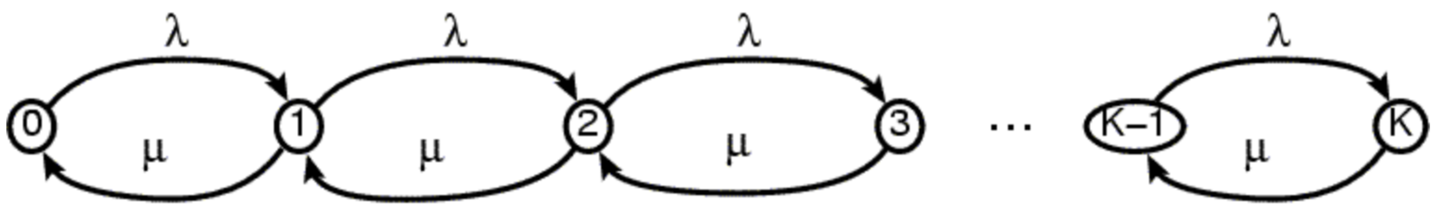
M/M/1/k

Características

- Los tiempos de llegadas son de acuerdo con un proceso de Poisson con una distribución Exp(λ)
- Los tiempos de servicio son distribuidos de manera exponencial Exp(μ)
- Un solo Servidor en el sistema
- La capacidad del sistema es finita, indicada por k
- La disciplina del sistema en FIFS

En este modelo el número de clientes en la fila de espera es limitado, en el momento que la capacidad se alcance, los clientes que llegan posteriormente son rechazados

M/M/1/k



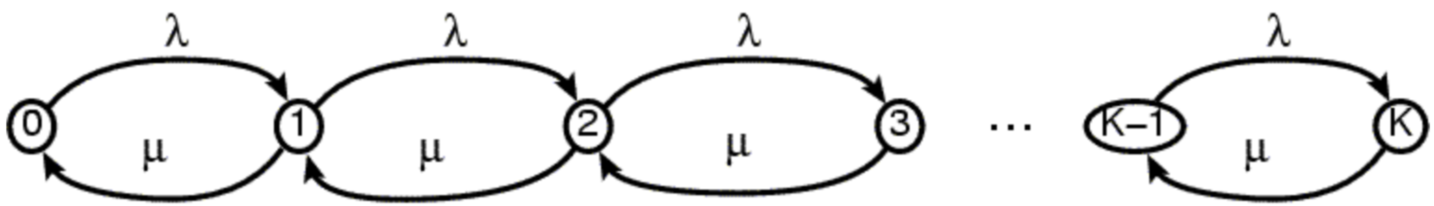
No existen estado mayores que k

$$r = \frac{l}{m}$$

La tasa efectiva de llegadas no es constante y varía con el tiempo, dependiendo si el sistema está lleno o no

$$l_{ef} = l(1 - p_k)$$

M/M/1/k



$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$$

$$r = \frac{l}{m}$$

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1 - r}{1 - r^{k+1}} & para \quad l \,^1\, m \\ p_0 = \dfrac{1}{k+1} & para \quad l = m \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{r^n(1 - r)}{1 - r^{k+1}} & para \quad l \neq m \\ \dfrac{1}{k+1} & para \quad l = m \end{cases}$$

$$p_n = 0 \quad si\; n > k$$

M/M/1/k

Medidas de desempeño

$$L = \frac{\rho(1-(k+1)\rho^k + k\rho^{k+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}, \quad \text{si } \lambda \neq \mu$$

$$L = \frac{k}{2}, \quad \text{si } \lambda = \mu.$$

$$L_q = L - (1 - p_0)$$

$$l_{ef} = l(1 - p_k)$$

$$W = \frac{L}{\lambda_{ef}}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{r^n(1-r)}{1-r^{k+1}} & para \quad l \neq m \\[2ex] \dfrac{1}{k+1} & para \quad l = m \end{cases}$$

M/M/1/k

Ejemplo:

A un autoservicio llegan en promedio 40 vehículos por hora, si hay una fila de espera superior a 4 vehículos, el próximo que llega no puede esperar y se marcha. En promedio la tasa de servicio es de 4 minutos por vehículo. Determine:

a) Probabilidad de que el sistema este vacío
b) Probabilidad de que el sistema este lleno
c) Número promedio de vehículos en el sistema
d) Número promedio de vehículos en fila de espera
e) Tiempo promedio de un vehículo en fila de espera
f) Tiempo promedio de espera en el sistema

M/M/1/k

Ejemplo:

A un autoservicio llegan en promedio 40 vehículos por hora, si hay una fila de espera superior a 4 vehículos, el próximo que llega no puede esperar y se marcha. En promedio la tasa de servicio es de 4 minutos por vehículo. Determine:

a) Probabilidad de que el sistema este vacío
b) Probabilidad de que el sistema este lleno
c) Número promedio de vehículos en el sistema
d) Número promedio de vehículos en fila de espera
e) Tiempo promedio de un vehículo en fila de espera
f) Tiempo promedio de espera en el sistema

k=4

λ = 40 vehículos / hr.

μ= ¼ minutos/vehículo = 1/15 hrs/vehículo = 15 vehículos/hr

$\lambda_{ef} = \lambda(1-p_k) = 14.94$

a) $P_0 = 0.124 = 1.24\%$
b) $P_4 = 0.6264 = 63\%$
c) $L = 3.43 \approx 5$ vehículos
d) $L_q = 2.44 \approx 3$ vehículos
e) $W_q = W - 1/\mu = 0.162$ hrs = 9.72 minutos
f) $W = L/\lambda_{ef} = 0.229$ hrs = 13.74 minutos

M/M/1/k

Ejemplo:
Si tenemos un gateway que recibe paquetes a una razón de 125 paquetes por minuto. Estos paquetes son almacenados en el buffer hasta que pueden ser transmitidos. El buffer del gateway cuenta con una capacidad para almacenar hasta 13 paquetes y los paquetes que llegan cuando el buffer está lleno se pierden, al no poder ser almacenados. El gateway le toma en promedio 2 milisegundos en transmitir un paquete.
Se desea saber si la capacidad del buffer es suficiente para asegurar que menos de un paquete por cada millón de paquetes recibidos se pierde.

M/M/1/k

Ejemplo:
Si tenemos un gateway que recibe paquetes a una razón de 125 paquetes por segundo. Estos paquetes son almacenados en el buffer hasta que pueden ser transmitidos. El buffer del gateway cuenta con una capacidad para almacenar hasta 13 paquetes y los paquetes que llegan cuando el buffer está lleno se pierden, al no poder ser almacenados. El gateway le toma en promedio 2 milisegundos en transmitir un paquete.
Se desea saber si la capacidad del buffer es suficiente para asegurar que menos de un paquete por cada millón de paquetes recibidos se pierde.

λ=125 paquetes / seg

μ = ½ miliseg / paquete = 1/0.002 seg / paquete = 500 paquetes / seg

Calcular la probabilidad de que el buffer se llene

$$r = \frac{l}{m}$$

$$p_n = \frac{r^n(1- r)}{1- r^{k+1}} \quad = 0.00000001117587$$

n=13

Si se pierde un paquete cada millón, tenemos una probabilidad de 0.000001

Por el valor calculado 0.00000001117587 < 0.000001, concluimos que el gategay cumple con el requerimiento

M/G/1

Características

- Los tiempos de llegadas son de acuerdo con un proceso de Poisson con una distribución Exp(λ)
- Una distribución general de tiempos de servicio con ***media μ*** y una ***desviación estándar σ***
- Un servidor
- Una línea de espera infinita

M/G/1

Medidas de desempeño

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}$
L	$\rho + \dfrac{\lambda^2(1/\mu^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \dfrac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
w	$\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\lambda(1/\mu^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)}$
w_Q	$\dfrac{\lambda(1/\mu^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)}$
L_Q	$\dfrac{\lambda^2(1/\mu^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} = \dfrac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
P_0	$1-\rho$

M/G/1

Un auto lavado puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 autos por hora con una desviación estándar de σ= 2 minutos.

L_q=

L_s=

W_q=

W_s=

p_0=

M/G/1

Un auto lavado puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 autos por hora con una desviación estándar de σ= 2 minutos.

$$r = \frac{l}{m} = \frac{9}{12} = 0.75$$

L_q=1.3 clientes

L_s=2.05 clientes

W_q=0.144 hrs = 8.69 min

W_s=0.227 hrs = 13.64 min

p_0=1-0.75 = 0.25