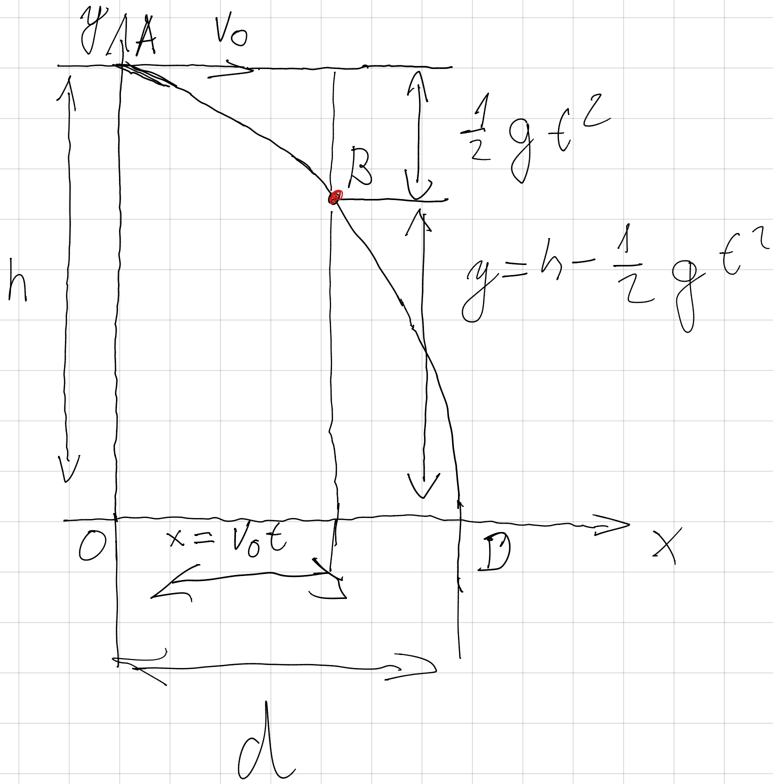
5.9

Vrh vodorovný

V čase t jsou souřadnice tělesa

$$\boxed{x = v_0 \cdot t}$$

$$\boxed{y = h - \frac{1}{2} g t^2}$$



$$\boxed{0 = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

doba vrhu je tedy: $\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

Celkovou dobu vrhu odvodíme z volného pádu

Při dopadu je $\boxed{y = 0}$ a platí

Platí vzorce

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$\boxed{d = v_x \cdot t = v_0 \cdot t = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Celkovou rychlost pohybu určíme složením obou rychlostí platí:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y}$$

Pro její velikost platí (Pythagorova věta)

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Těleso bylo vrženo vodorovně rychlostí $20\,m\cdot s^{-1}$ z věže vysoké 30 m

a) Za jakou dlouho dopadlo těleso na zem?
b) Jak daleko od paty věže dopadlo?
c) Jakou rychlostí dopadlo?

a)

$h = 30\,m$
$v_0 = 20\,m\cdot s^{-1} = v_x$
$t = ?$
$d = ?$
$v = ?$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9{,}81}} = \sqrt{6{,}12} = 2{,}47\,s$$

b)

$h = 30\,m$

$v_0 = 20\,m \cdot s^{-1} = v_x$

$t = 2{,}47\,s$ (z předchozího výpočtu)

$d = ?$

$d = v_0 \cdot t$

$d = 20 \cdot 2{,}47 = 49{,}4\,m$

$$d = v_0 \cdot t = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

c)

$h = 30\,m$

$v_0 = 20\,m \cdot s^{-1} = v_x$

$t = 2{,}47\,s$ (z b)

$v = ?$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_x = 20\,m \cdot s^{-1}$

$v_y = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 2{,}47 = 24{,}2\,m \cdot s^{-1}$

$v = \sqrt{20^2 + 24{,}2^2} = 31{,}4\,m \cdot s^{-1}$

těleso dopadlo rychlostí $31{,}4\,m \cdot s^{-1}$

Př 2:

Z okna výškového domu vyhodil chlapec vodorovným směrem tenisový míček, který dopadl za 3 s do vzdálenosti 15 m od domu

určete:

a) počáteční rychlost míčka

b) výšku okna nad zemí

a)

$d = 15\,m$

$t = 3\,s$

$h = ?$

$v_0 = ?$

$$d = v_0 \cdot t$$

$$v_0 = \frac{d}{t} = \frac{15}{3} = 5\,m \cdot s^{-1}$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \implies h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 = 44{,}15\,m$$

Př 3:

Letadlo letělo vodorovně stálou rychlostí 300 m na zemí a vypustilo náklad nad místem A na zemském povrchu. Náklad dopadl ve vzdálenosti 650 m od místa A.
Vypočítejte rychlost letadlo

$d = 650\ m$
$h = 300\ m$

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9{,}81}} = 7{,}82\ s$$

$$d = v_0 \cdot t \Rightarrow v_0 = \frac{d}{t} = \frac{650}{7{,}82} = 83{,}12\ m \cdot s^{-1} = 299{,}23\ \frac{km}{h}$$

rychlost letadlo je $299{,}23\ km \cdot h^{-1}$

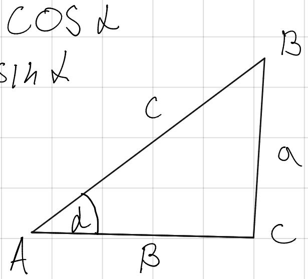
Šikmý vrh vzhůru

Těleso vržené počáteční rychlostí v_0 ve směru, který svírá s vodorovnou rovinou elevační úhel α

Počáteční rychlost ve směru osy x:

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ protilehlá odvěsna / přepona

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ přilehlá odvěsna / přepona

Okamžitá rychlost je ve směru osy x:

$$\boxed{v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$$

$$\boxed{v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt}$$

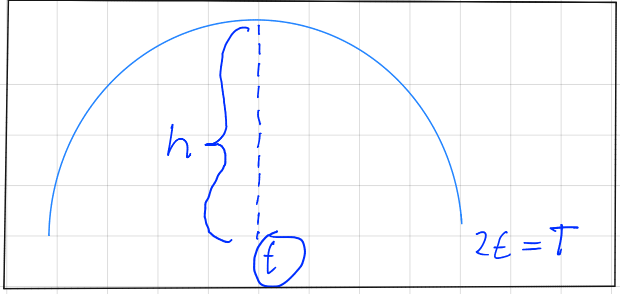
V maximální výšce h je rychlost ve směru osy y nulová

Celková rychlost v je tedy rovna rychlosti ve směru osy x

Pro rychlost v_y ve výšce h platí

$$\boxed{v_y = 0 = v_0 \sin\alpha - gt}$$

a odtud pro čas t je $\boxed{t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$



Pokud předpokládáme osovou symetrii trajektorie (při zanedbání odporových sil) je celková doba vrhu

Maximální výška, do které těleso vystoupá je

$$\boxed{h = v_y t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{h = v_0 \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}}$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

Z předchozích vztahů je délka vrhu

$$d = v_x T = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$d = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

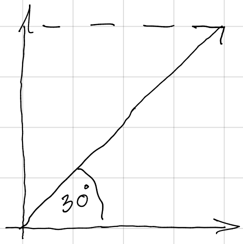
$2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

V mnoha případech nelze odpor vzduchu zanedbat. Pak je trajektorií tzv. balistická křivka

Př:

Fotbalista vykopl míč pod elevačním úhlem 30° počáteční rychlostí $20\,m\cdot s^{-1}$.
Určete jak daleko míč doletěl a do jaké maximální výšky vystoupal



$V_0 = 20 \sin(30°) = 10\,m\cdot s^{-1}$

$0 = V_{0y} - g\cdot t$

$t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{10}{9{,}81} = \underline{1{,}02\,s}$

$V_{0x} = 20\cdot\cos 30° = 17{,}82\,m\cdot s$

$y = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$d = (2\cdot t)\cdot v_x = 2\cdot 1{,}02\cdot 17{,}82$

$= 36{,}35\,m$

$h = y = 10\cdot 1{,}02 - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot 1{,}02^2$

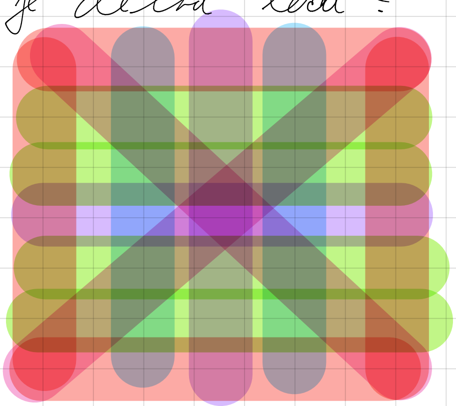
$= 5{,}097\,m$

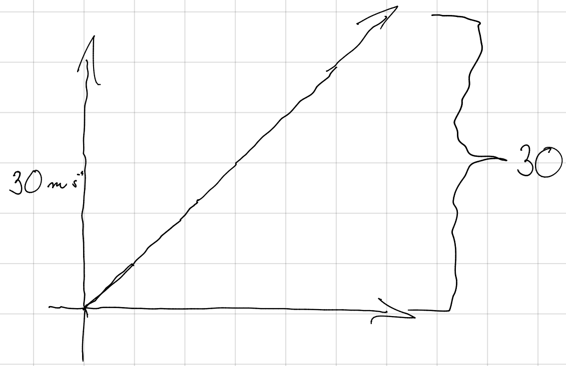
Př: 2

Těleso vržené pod elevačním úhlem 45° dosáhne max. výšky za 3 s

a) Jaká byla jeho počáteční rychlost?

b) Jaká je délka letu?





$V_{0y} = V_0 \sin\alpha$

$0 = V_{0y} - g\,t$

$V_{0y} = g\cdot t = 9{,}81\cdot 3 = 29{,}43\,m\,s$

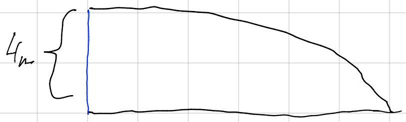
$V_0 = \frac{V_{0y}}{\sin\alpha} = \frac{29{,}43}{\sin 45} = 41{,}62\,m\cdot s^{-1}$

$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$

$V_{0x} = 41{,}62 \cdot \cos 45° = 29{,}43\,m\,s^{-1}$

$d = 2\cdot t\cdot V_{0x} = 6\cdot 29{,}43 = 176{,}58\,m$

1.



$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$
$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

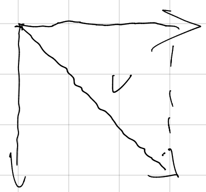
$$\frac{1}{2} g t^2 = h \quad / \cdot 2$$

$$g t^2 = 2h \quad / : g$$

$$t^2 = \frac{2h}{g} \quad / \sqrt{\ }$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = (0,9s)$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9,81}} \;||$$



$V_0 = 9 \ m \cdot s^{-1}$
$h = 4 \ m$

$t = ?$
$v = ?$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \begin{matrix} y = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{matrix}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{9,81}} = 0,9 s$$

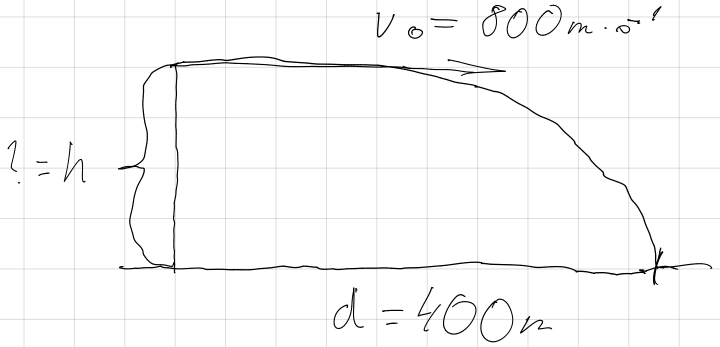
$$V_x = V_0 = 9 \ m \ s^{-1}$$

$$V_y = g \cdot t = 8,829 \ m \cdot s^{-1} \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9^2 + 8,83^2} = 12,6 \ m \cdot s^{-1}$$

$81 + 77,9$

2



$$t = \frac{d}{v_0} = \frac{400}{800} = 0{,}5 s$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5^2 = \underline{\underline{1{,}226 m}}$$

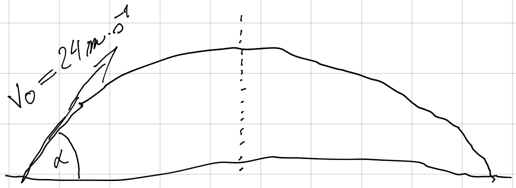
4

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 2 m \\ v &= 10 m \cdot s^{-1} \\ d &= ? \end{aligned}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{9{,}81}} = 0{,}64 s$$

$$d = t \cdot v = 0{,}64 \cdot 10 = 6{,}4 m$$

5



$\alpha_1 = 30°$

$\alpha_2 = 60°$

$t_1' = ?$

$t_2' = ?$

$d_1 = ?$

$d_2 = ?$

$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha$

$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$

V max h

$V_y = 0 = V_{0y} - gt$

$t_1 = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 \sin\alpha_1}{g}$

$t_1' = 2 \cdot t_1$ — celkový čas — doba dosažení max výšky

$\Rightarrow t_1' = 2 \cdot t_1 = \frac{2 \cdot V_0 \sin\alpha_1}{g}$

dostřel $= d = V_x \cdot t_1' = V_0 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin\alpha_1}{g}$

$d = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha_1}{g} = 50{,}85\,m$

nebo:

$V_{0y} = 24 \cdot \sin 30° = 12\,m\cdot s^{-1}$

$t_1 = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{12}{9{,}81} = 1{,}223\,s \Rightarrow t_1' = 2 \cdot 1{,}223 = 2{,}446\,s$

$V_x = V_{0x} = 24 \cdot \cos 30° = 20{,}785\,m\cdot s^{-1}$

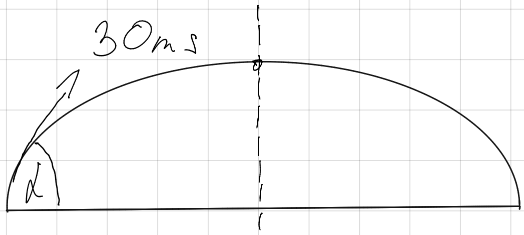
$\Rightarrow d = V_x \cdot t_1' = 20{,}785 \cdot 2{,}446 = 50{,}85\,m$

$d_2 = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha_2}{g} = \frac{24^2 \cdot \sin 120°}{9{,}81} = 50{,}85\,m$

$t_2 = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 \sin\alpha_2}{g} = \frac{24 \cdot \sin(60°)}{9{,}81} = 2{,}119\,s$

$t_2' = 2 \cdot t_2 = 4{,}24\,s$

6



$v_0 = 30 m \cdot s$

$\alpha = 45°$

$v_{0x} = ?$

$v_{0y} = ?$

$d = ?$

$h = ?$

$$v_y = 0 = v_{0y} - gt$$

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$h = y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$$

$$\left[h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin\alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \right]$$

$v_{0x} = 30 \cdot \cos \cdot (45°) = 21{,}213 \ m \cdot s^{-1}$

$v_{0y} = 30 \cdot \sin(45°) = 21{,}213 \ m \cdot s^{-1}$

$d = v_0^2 \sin$

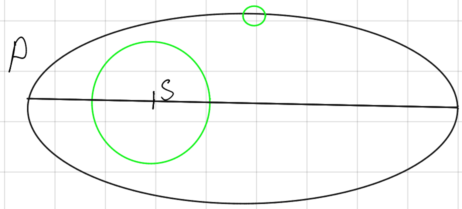
První kosmická rychlost je kruhová rychlost tělesa, jehož výška je vzhledem k poloměru Země zanedbatelná ($R_Z >> h$)

① << ②

$$\boxed{v_K = \sqrt{\frac{6{,}672 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}}} = 7{,}91\ km \cdot s^{-1}$$

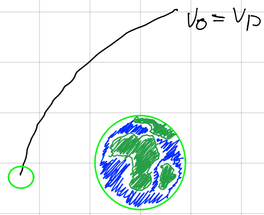
Eliptická a parabolická rychlost (2. kosmická)

Při $v_0 > v_K$ se těleso pohybuje po eliptické dráze



Jelikož je $v_0 = \sqrt{2} \cdot v_K$, tak jde o rychlost parabolickou (2. kosmickou, únikovou)

$$v_P = \sqrt{2} \cdot v_K = 11{,}2\ km \cdot s^{-1}$$



3. Kosmická rychlost

Rychlost potřebná k úniku z gravitačního pole Slunce

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot k \frac{M_S}{R_S + h}}$$

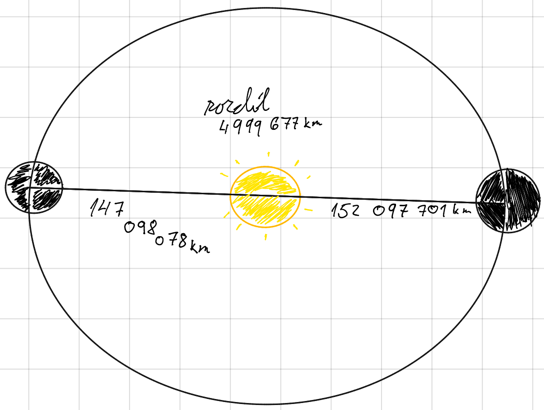
$$v_3(Z) = 16{,}7\ km \cdot s^{-1}$$
$$v_3(S) = 617{,}7\ km \cdot s^{-1}$$

pozn.:
$M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ kg$, $R_S = 695\ 700\ km$, $1\ AU = 149\ 597\ 850\ km$

Pohyb těles v centrálním gravitačním poli Slunce

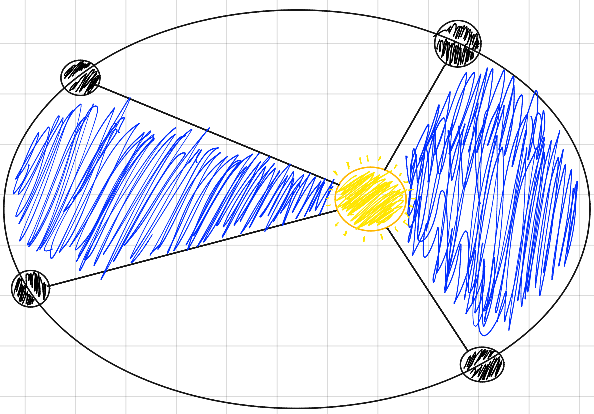
1. Keplerův zákon:

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je slunce



2. Keplerův zákon:

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní



3. Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorie

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$$

poloměr dráhy planety

Př: 1

Jak velkou rychlostí se pohybuje Měsíc kolem Země a jaká je doba jeho oběhu? Předpokládejme pohyb Měsíce po kružnici o poloměru $r = 3{,}84 \cdot 10^8 m$.

$$\boxed{v_k = \sqrt{k \cdot \frac{M_z}{R_z + h}}} \qquad \boxed{v = \sqrt{k \cdot \frac{M}{r}}}$$

$M_z = 5{,}977 \cdot 10^{24}\ kg$
$k = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
$r = 3{,}84 \cdot 10^8\ m$
$v = ?$
$t = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{O}{2r} &= \pi \\ O &= 2\pi r \end{aligned}}$$

$$v = \sqrt{k \cdot \frac{M_z}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}672 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^8}} = 1\ km \cdot s^{-1}$$

$$\boxed{t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{1000} = 2412743\ s = 27{,}9\ dní}$$

Př 2.

Jak je velká úniková rychlost měsíce

$$v_p = \sqrt{2} \cdot v_K = \sqrt{2} \cdot 1 = 1{,}4\ km \cdot s^{-1}$$

Př 3

Parabolická rychlost je pro zem. povrch je

$$v_Z = \sqrt{2R_Z g} \quad \text{kde } g = \frac{KM_Z}{R_Z^2}$$

Vypočítejte parabolickou rychlost pro povrch Měsíce

Hmotnost měsíce $M_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. Poloměr Měsíce $R_M = 1738$ km

$$v_p = \sqrt{2} \cdot \sqrt{k \cdot \frac{M_M}{R_M}} = \sqrt{2k \cdot \frac{M_M}{R_M}}$$

Pohyby těles v centrálním poli Země

Vypočítejte parabolickou rychlost pro povrch Měsíce

$$V_Z = \sqrt{2 R_Z g} \qquad g = \frac{k \cdot M_Z}{R_Z^2}$$

$$V_Z = \sqrt{2 \cdot \cancel{R_Z} \cdot \frac{k \cdot M_Z}{R_Z^{\cancel{2}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot M_Z}{R_Z}} = v_k$$

$$v_p = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\overbrace{6{,}672 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}^{4{,}90392 \cdot 10^{12}}}{1738 \cdot 10^{3}}} \quad 2821588{,}032 = 1679{,}76$$

1,41142

$v_p = 2375{,}52$

Mars obíhá slunce ve střední vzdálenosti 1,5 r dráhy země. Vypočítejte jeho oběžnou dobu

Mars: $T_1 = ?$

$r_1 = 1{,}5 r_2$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad / \cdot T_2^2$$

Země: $r_2 = 1 au$

$T_2 = 1$ rok

$\sqrt{3{,}375}$

$$T_1^2 = \frac{T_2^2 \cdot r_1^3}{r_2^3}$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 \cdot r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 1{,}5^3}{1^3}} = \sqrt{3{,}375} = 1{,}837 \text{ roku}$$

Urči střední vzdálenost Uranu od slunce, je-li jeho oběžná doba 84 let

Uran

$T_1 = 84$ let

$r_1 = ?$

Země

$r_2 = 1\,au$

$T_2 = 1$ rok

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad / \cdot r_2^3$$

$$\frac{T_1^2 \cdot r_2^3}{T_2^2} = r_1^3$$

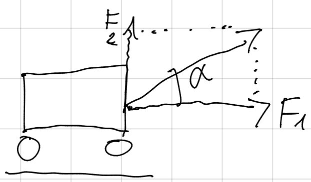
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2 \cdot r_2^3}{T_2^2}} = \sqrt[3]{\frac{84^2 \cdot 1^3}{1^2}} = \sqrt[3]{84^2} = 19{,}18\,AU$$

Mechanická práce, energie, výkon

Práce W

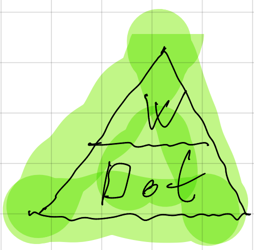
$$W = Fs$$

$$\boxed{W = F \cdot s \cdot \cos\alpha}$$



$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{[F]\cdot[s]}{[t]} = \frac{[m]\cdot[a]\cdot[s]}{[t]}$$

$$= \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m}{s} = kg\, m^2 \cdot s^{-3}$$

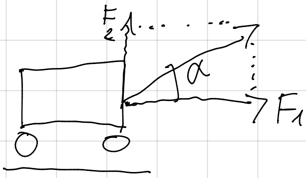


Působí-li stálá síla na těleso ve směru pohybu, pak platí vzorce

$W = Fs$ $\qquad P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F\frac{s}{t} = Fv$

$s = vt$ $\qquad P = Fv$

$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$



F = působí síla
s = dráha, kterou těleso vykoná
α = úhel, který svírá vektor síly s trajektorií pohybu tělesa

Výkon

Výkon P je práce vykonaná (spotřebovaná) za jednotku času

$[P] = W\ (watt) = J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$

$P = \frac{W}{t}$

1) Řešte úlohu

Automobil jel po vodorovné přímé cestě 15 minut. Jeho motor měl stálý výkon 120 kW. Jakou práci vykonal motor?

$P = 120\,kW = 120\,000\,W$

$t = 15\,min = 900\,s$

$W = ?$

$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t$

$W = 120000 \cdot 900 = 108 \cdot 10^6\,J$

2)

Elektromotor zvedá rovnoměrným pohybem kabinu výtahu s hmotností 380 kg rychlostí 3 m/s

$m = 380\,kg$

$v = 3\,m \cdot s^{-1}$

$P = ?$

$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{mg \cdot s}{t} = mgv$

$P = 380 \cdot 9{,}81 \cdot 3 = 11183{,}4 = 11{,}2\,kW$

Účinnost

výkon

užitečná práce

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{W}{W_0}$$

příkon

celková práce

3) Zaoceánská loď je tažena z přístavu remorkérem pomocí lana, které svírá s hladinou vody úhel 30°. Určete, jakou práci vykoná remorkér na dráze 450 m, působí-li silou 12 kN

$\alpha = 30°$
$F = 12\,000\,N$
$s = 450$

$W = ?$

$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$
$W = 12000 \cdot 450 \cdot \cos 30° = 4{,}7 \cdot 10^6\,J$

4) Buchar s kladivem o hmotnosti 400 kg pracuje s frekvencí 40 úderů za minutu. Určete jeho výkon, je-li zdvih bucharu 60 cm.

$m = 400\,kg$
$f = 40/min = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6/s^{-1} = 0{,}\overline{6}\,Hz$
$h = 60\,m$

$P = ?$

$T = \frac{1}{f}$

$F \cdot s \cdot \frac{1}{f}$

$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t}$

$P = 400 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{2}{3}$

$P = 1569{,}6\,W$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

$P = \frac{mg \cdot \frac{2}{3}h}{t}$

Pozn. 40 zdvihů za 1 min
$\frac{40}{60}$ zdvihů za 1 s
$\Rightarrow$ za 1 s se zvedne o $\frac{4}{6}$ z h (0,6) tedy o 40 cm

5) Vypočítejte, jaký příkon musí mít věžový jeřáb vhodný pro vyšší konstrukce, jestliže břemeno o hmotnosti 11 t zdvihne do výšky 30 m za dobu 4 min. Účinnost celého zařízení je 68 %

$m = 11\,t = 11\,000\,kg$
$h = 30\,m$
$t = 4\,min = 240\,s$
$\eta = 68\,\%$

$P = ?$

$\eta = \frac{P}{P_0}$

$P_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{\frac{W}{t}}{\eta} = \frac{\frac{F \cdot h}{t}}{\eta} = \frac{\frac{mg \cdot h}{t}}{\eta} = \frac{mgh}{t\eta}$

$P_0 = \frac{11000 \cdot 9{,}81 \cdot 30}{0{,}68 \cdot 240} = 19836{,}397\,W$

6) Vodná turbína s účinnosťou 92 % má výkon 750 kW. Určite objem vody, ktorá pretečie turbínou za 1 s pri využívaní rozdielu hladín vody 25 m

$\eta = 92\,\%$
$t = 1\,s$
$h = 25\,m$
$P = 750\,000\,W$

$V = ?$

$$\eta = \frac{P}{P_0}$$

$$P_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{W}{t} = \frac{F_G \cdot h}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{V \cdot \rho \cdot g \cdot h}{t}$$

$$\frac{P}{\eta} = \frac{V \cdot \rho \cdot g \cdot h}{t}$$

$$V = \frac{P \cdot t}{\eta \cdot \rho \cdot g \cdot h} = \frac{750\,000 \cdot 1}{0{,}92 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 25} = 3{,}32\,m^3$$

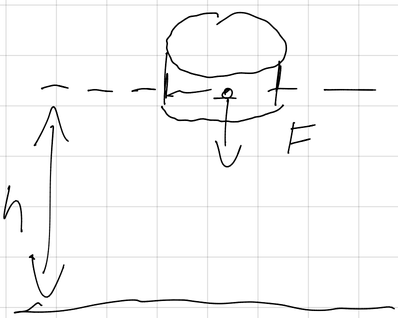
Pohybová energie tělesa

Kinetická energie je závislá na volbě vztažné soustavy

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

hmotnost tělesa — rychlost tělesa

Polohová energie tělesa



$$E_p = W$$

$$W = mgh$$

$$E_p = mgh$$

Velikost polohové energie tělesa E_p ve výšce h je rovna práci, kterou jsme vykonali při vyzvednutí tělesa do výšky h.

7) Panel hmotnosti 400 kg byl zvednut nahoru po dráze 13 m rovnoměrným pohybem. Jakou velkou práci vykonal přitom motor jeřábu? Jak se zvětšila polohová energie panelu? Jakou měl kinetickou energii, jestliže se pohyboval rychlostí $2\ m \cdot s$?

$v = 2\ ms$ $\quad g = 9{,}81\ m s^{-2}$
$m = 400\ kg$
$s = 13\ m$

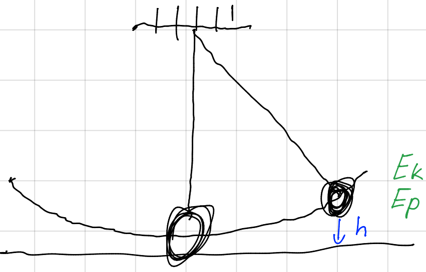
$W = ?$
$E_k = ?$
$\Delta E_k = ?$

$$W = \Delta E_k = m \cdot g \cdot s$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v$$

$$W = \Delta E_k = 400 \cdot 9{,}81 \cdot 13 = 51012\ J \doteq 51\ kJ$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 2^2 = 800\ J$$

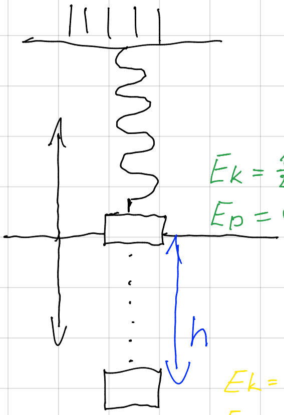


$E_k = 0$, $E_p = mgh$ $\Big\}$ $E = E_k + E_p = mgh$

$E_p = 0\,J$, $E_k = \frac{1}{2} m s^2$ $\Big\}$ $E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m s^2$

$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} s^2$

$v = \sqrt{2gh}$



$E_k = \frac{1}{2} m s^2$, $E_p = 0\,J$ $\Big\}$ $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m s^2$

$E_p = 0\,J$

$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} s^2$

$v = \sqrt{2gh}$

$E_k = 0\,J$, $E_p = mgh$ $\Big\}$ $E = E_p + E_k = mgh$

Zákon zachování mechanické energie

Při všech mechanických dějích se mění kinetická energie v potenciální energii a naopak, celková mechanická energie soustavy je vždy konstantní.

$$E = E_k + E_p = konst$$

Mechanika kapalin a plynech

$$p = \frac{F}{S}$$

F je velikost síly která působí kolmo
S obsah

Jednotka tlaku

$$[p] = Pa \text{ (pascal)} = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

Pascalův zákon

Tlak vyvolaný vnější silou, která působí na kapalné těleso v uzavřené nádobě, je ve všech místech kapaliny stejný.

Využití Pascalova zákona:
Např. hydraulický zvedák, lis

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Příklad č. 1.
Písty hydraulického lisu mají obsah průřezu 5 cm² a 400 cm². Na užší píst působíme silou 500 N.
a) Jaký tlak tato síla v kapalině vyvolá?
b) Jak velkou tlakovou silou působí kapalina na širší píst

$S_1 = 5\,cm^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,m^2$
$S_2 = 400\,cm^2 = 400 \cdot 10^{-4}\,m^2$
$F_1 = 500\,N$

a) $p = ?$ $\quad p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{\cancel{500}^{100}}{\cancel{5} \cdot 10^{-4}}\ Pa = \frac{100}{10^{-4}} = 100 \cdot 10^4 = 1\,MPa$

b) $F_2 = ?$ $\quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ $\quad \frac{\cancel{500}^{100}}{\cancel{5} \cdot \cancel{10^{-4}}} = \frac{F_2}{400 \cdot \cancel{10^{-4}}} = 100 \cdot 400 = F_2$

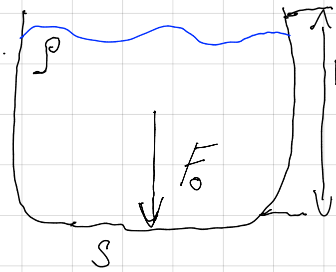
$F_2 = 40000\,N = 40\,kN$

Tlak v kapalinách vyvolaný tíhovou silou

V tíhovém poli Země působí na všechny částice kapalného tělesa tíhová síla

Výsledkem tohoto působení je hydrostatická tlaková síla F_h

Tlaková síla působící na dno

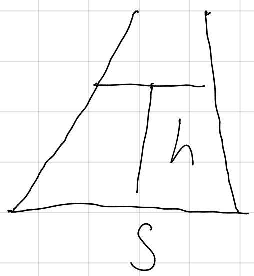


$$\boxed{F_h = S \cdot h \cdot \rho \cdot g}$$

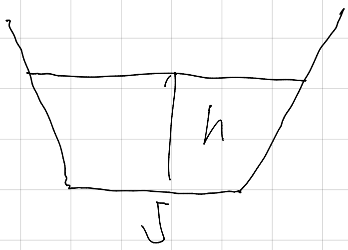
$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

$$\boxed{m = \rho \cdot S \cdot h = \rho \cdot V}$$

Hydraulický paradox – hydrostatická tlaková síla nezávisí na objemu kapaliny a na její hmotnosti, závisí pouze na její hustotě, výšce hladiny a obsahu dna



$F_{h1} = F_{h2}$



Př. 2

Okénko potápěčské kabiny má obsah povrchu asi 7 dm². Vypočítejte, jaká tlaková síla působí na okénko v hloubce 20 m pod hladinou vody

$S = 7\,dm^2 = 0{,}07\,m^2$

$h = 20\,m \quad \rho = 1000\,kg \cdot m^{3}$

$F_h = ?$

$F_h = S \cdot h \cdot \rho \cdot g$

$F_h = 0{,}07 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 = 13\,734\,N$

Hydrostatický tlak p_h je tlak vyvolaný hydrostatickou tlakovou silou

pro jeho velikost platí

$$p_h = \frac{F_h}{S} = \frac{S \cdot h \cdot \rho \cdot g}{S} = h \cdot \rho \cdot g$$

$$p_h = h \cdot \rho \cdot g$$

Př. 3

V roce 1960 dosáhlo ponorná koule (batyskaf) dna oceánu nejhlubšího Mariánského příkopu. Do jaké hloubky se ponořila, byla-li vystavena tlaku 1152 atmosfér

$1\ \mathrm{atm} = 101\,325\ \mathrm{Pa}$

řešení

$$p = h \cdot \rho \cdot g \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g}$$

$$h = \frac{1{,}167 \cdot 10^8\ \mathrm{Pa}}{1030\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 11552$$

• Tlak vzduchu vyvolaný tíhovou silou

▷ Tíhu atmosféry, která působí kolmo k dané rovině, se nazývá atmosférická tlaková síla F_a.

▷ Tlak jí vyvolaný se nazývá atmosférický tlak p_a. Měříme ho barometrem

▷ Normální atmosférický tlak u hladiny moří je 101,325 kPa

▷ Každých 100 m do výšky se zmenší asi o 1,3 kPa kPa

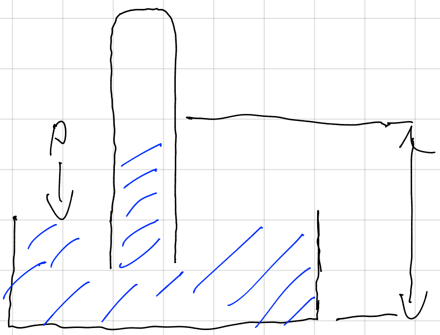
Torricelliho pokus

Atmosférický tlak je v rovnováze s hydrostatickým tlakem sloupce rtuti. Platí:

$$p_a = p_h = h\cdot\rho\cdot g$$

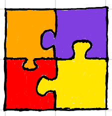
$$p_a = 0{,}75\cdot 13{,}6\cdot 10^3\,kg\cdot m^{-3}\cdot 9{,}81\,m\cdot s^{-2}$$

$$p_a = 100000\,Pa$$



Archimedův zákon

velikost vztlakové síly



$$F_{vz} = F_2 - F_1$$

$$F_{vz} = S\cdot h_2\cdot\rho\cdot g - S\cdot h_1\cdot\rho\cdot g$$

$$F_{vz} = S\cdot(h_2 - h_1)\cdot\rho\cdot g$$

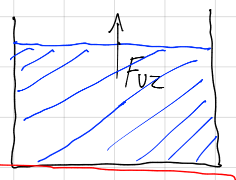
$$F_{vz} = V\cdot\rho\cdot g$$

objem ponořené části tělesa

hustota kapaliny

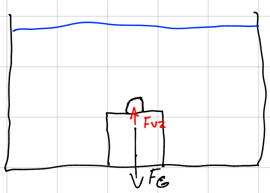
Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu jako je objem ponořené části tělesa

Chování tělesa v kapalině



$$F_{vz} = m\cdot g = F_G$$

ocelové závaží

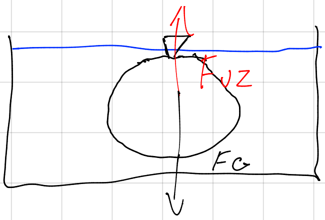


$$F_{vz} < F_g$$

$$V\cdot\rho_k\cdot g < V\cdot\rho_T\cdot g$$

$$\rho_k < \rho_T$$

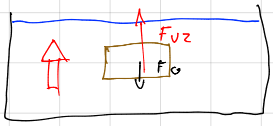
sáček s vodou



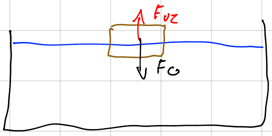
$$F_{vz} = F_G$$

$$\rho_K = \rho_T$$

Korková zátka



$$F_{vz} > F_G$$
$$\rho_K > \rho_T$$



$$F_{vz} = F_G$$
$$\rho_K = \rho_T$$

$$V' \cdot \rho_K \cdot \cancel{g} = m g = V \rho_T \cancel{g}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_T}{\rho_K}$$

Př 1

Jak velkou silou je nadlehčován ve vodě předmět objemu 20 cm³

$V = 20\ cm^3 = 20 \cdot 10^{-6}\ m^3$
$\rho = 1000\ kg$
$g = 9{,}81\ m\ s^{-2}$

$F_{vz} = ?$

$F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g$

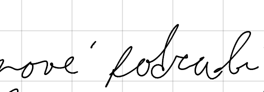
$F_{vz} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 9{,}81 = \underline{0{,}1962\ N}$

Př 2

Jaká vztlaková síla působí na plynové potrubí, které je umístěno na dně řeky široké 20 m?
Plošný průřez potrubí je 0,1 m². Osa potrubí je kolmá na břehy

$d = 20\ m$
$S = 0{,}1\ m^2$

$\rho = 1000\ kg\ m^{-3}$
$g = 9{,}81\ m\ s^{-2}$

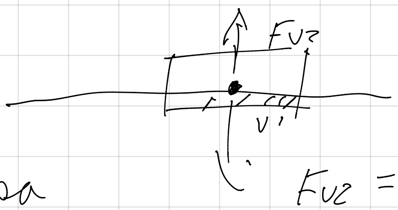


$F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g = S \cdot d \cdot \rho \cdot g$
$F_{vz} = 0{,}1 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 =$
$= 19\,620\ N$
$\underline{19{,}62\ kN}$

Pr. 3

V kapalině o hustotě $900\ kg\cdot m^{-3}$ plave těleso o hustotě $800\ kg\cdot m^{-3}$.
Kolik procent objemu tělesa je vynořeno

$\rho_K = 900\ kg\cdot m^{-3}$
$\rho_T = 800\ kg\cdot m^{-3}$



$F_{vz} = F_G$

$V'\cdot\rho\cdot g = mg$

$V'\cdot\rho\cdot g = \rho_T\cdot V\cdot g$

V.... objem tělesa
V'.... objem ponořené části tělesa

% ponořené části $\frac{V'}{V}$

$$\boxed{\frac{V'}{V} = \frac{\rho_T}{\rho_K}}$$

pod hladinou bude

$$\frac{V'}{V} = \frac{800}{900} = \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8} = 88{,}\overline{8}\,\% \Rightarrow \text{vynořeno je } 100\% - 88{,}\overline{8} = 11{,}1\%$$

Pr. 4

Jak velkou silou zvedneme ve vodě kámen o objemu 6 dm³ a hmotnosti 15 kg?

$V = 6\ dm^3 = 6\cdot 10^{-3}\ m^3$
$m = 15\ kg$
$\rho = 1000\ kg\cdot m^{-3}$
$g = 9{,}81\ m\cdot s^{-2}$

$F = ?$

$F = F_G - F_{vz}$

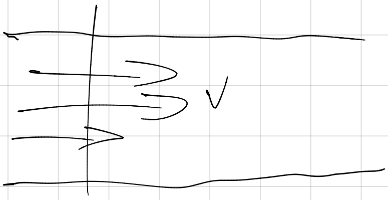
$F = mg - V\cdot\rho\cdot g$

$F = 15\cdot 9{,}81 - 6\cdot 10^{-3}\cdot 1000\cdot 9{,}81$

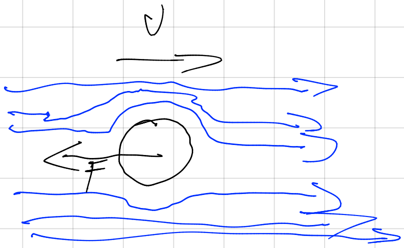
$F = 147{,}15 - 58{,}86 = \underline{88{,}29\ N}$

Proudění reálné tekutiny

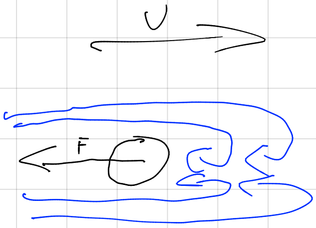
U reálné tekutiny se částice v trubici nepohybují stejnou rychlostí v celém průřezu



Při malých rychlostech proudění jsou proudnice stále ještě rovnoběžné → Laminární proudění



Při vyšších rychlostech se kvůli rozdílným rychlosti pohybu částic tvoří víry → turbulentní proudění



Hydrodynamická (v kapalině) a aerodynamická (v plynu) odporová síla

$$F = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot S \cdot v^2$$

C je součinitel odporu, ρ hustota tekutiny
S obsah průřezu tělesa kolmého ke směru pohybu a v relativní rychlost

Př 1

Voda přitéká potrubím o průměru $d_1 = 0{,}2$ m rychlostí $v_1 = 1 m \cdot s^{-1}$ do zúžené části potrubí, kterou pak protéká rychlostí $v_2 = 4 m \cdot s^{-1}$. Určete průměr zúžené části potrubí d_2

$d_1 = 0{,}2 m$
$v_1 = 1 m \cdot s^{-1}$
$v_2 = 4 m \cdot s^{-1}$

$d_2 = ?$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\pi \cdot \frac{d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2$$

$$d_1^2 \cdot v_1 = d_2^2 \cdot v_2$$

$$\frac{d_1^2 \cdot v_1}{v_2} = d_2^2$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{d_1^2 \cdot v_1}{v_2}} = d_1 \cdot \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$$

$$d_2 = 0{,}2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1 m$$

Př 2

Vodovodním potrubím s průřezem o obsahu $50 cm^2$ proudí voda rychlostí $4 m \cdot s^{-1}$ při tlaku 200 kPa. Určete rychlost a tlak vody v zúženém průřezu o obsahu $10 cm^2$

$S_1 = 50 cm^2$
$v_1 = 4 m \cdot s^{-1}$
$p_1 = 200\,000 Pa$
$S_2 = 1 cm^2$

$v_2 = ?$
$p_2 = ?$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + p_2$$

$$50 \cdot \cancel{10^{-4}} \cdot 4 = 10 \cdot \cancel{10^{-4}} \cdot v_2$$

$$v_2 = 20 m \cdot s^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 4^2 + 200\,000 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 20^2 + p_2$$

$$500 \cdot 16 + 200\,000 = 500 \cdot 400 + p$$

$$208\,000 = 200\,000 + p_2$$

$$8000 = p_2$$

Př 3

Jak velkou odporovou sílu překonává motor automobil při rychlosti 72 km·h⁻¹? Čelní průřez má obsah 2 m², součinitel odporu je 0,3 a hustota vzduchu 1,3 kg·m⁻³

$v = 72\ km\cdot h^{-1} = 20\ m\cdot s^{-1}$
$S = 2\ m^2$
$C = 0{,}3$
$\rho = 1{,}3\ kg\cdot m^{-3}$

$F = ?$

$F = \frac{1}{2}\cdot C\cdot S\cdot \rho\cdot v^2$

$F = \frac{1}{2}\cdot 0{,}3\cdot 2\cdot 1{,}3\cdot 20^2$

$F = 156\ N$

Př 4

Potrubím o obsahu kolmého řezu 30 cm² protéká kapalina rychlostí 0,5 m·s⁻¹.

Určete a) objemový průtok kapaliny b) objem kapaliny, která proteče průřezem potrubí za 1 minutu.

$S_1 = 30\ cm^2$
$v_1 = 0{,}5\ m\cdot s^{-1}$ $t = 1\ min$

$Q_V = ?$
$V = ?$

$Q_V = S\cdot v = 30\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}5 = 15\cdot 10^{-4}\ m^3\cdot s^{-1} = 1{,}5\ l$

$Q_V = S\cdot v = \frac{V}{t}$ $V = \frac{S\cdot h}{t}$

$V = Q_V\, t$
$V = 1{,}5\cdot 60 = 90\ l\cdot s^{-1}$

Př 5

Obsah plochy průřezu vodorovného potrubí se zmenšuje z 50 cm^2 na 15 cm^2. V širší části potrubí je rychlost protékající vody 3 m$\cdot$s^{-1} a tlak 85 kPa.

Jak velkou rychlostí a při jakém tlaku proudí voda v užší části potrubí?

$S_1 = 50\ \text{cm}^2$
$S_2 = 15\ \text{cm}^2$
$v_1 = 3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$p_1 = 85000\ \text{Pa}$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} \qquad \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 + p_2$$

$$v_2 = \frac{50\cdot\cancel{10^{-4}}\cdot 3}{15\cdot\cancel{10^{-4}}} = \frac{150}{15} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 3^2 + 85000 = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 10^2 + p_2$$
$$500\cdot 3^2 + 85000 = 500\cdot 10^2 + p_2$$
$$500\cdot 9 + 85000 = 500\cdot 100 + p_2$$
$$4500 + 85000 = 50000 + p_2$$
$$39500\ \text{Pa} = p_2$$

Základy poznatky molekulové fyziky a termodynamiky

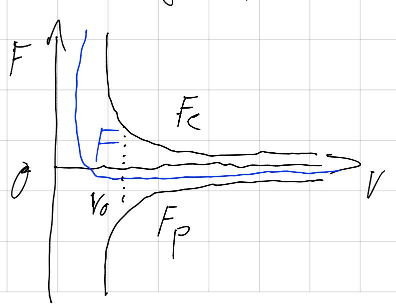
Kinetická látka teorie

Látka libovolného skupenství je složena z částic (atomů, molekul nebo iontů)

Tepelný pohyb

Částice se v plynech a kapalinách neuspořádaně a nepřetržitě pohybují, v pevných látkách vykonávají kmitavé pohyby

Částice na sebe navzájem působí současně přitažlivými a odpudivými silami



Vnitřní Energie

Vnitřní energie tělesa (soustavy) je součet celkové kinetické energie všech neuspořádaně se pohybujících částic tělesa a celkové potenciální energie vzájemné polohy těchto těles

Teplota a teplota

teplota
Skalární veličina, která charakterizuje stav fyzikálního objektu

tepelná výměna
Přenos tepla z jedné termodynamické soustavy na druhou

Způsoby přenosu tepla
Vedením, prouděním, zářením (vyzařováním)

Izolovaná soustava
Nedochází k výměně energie s okolím, chemické složení a hmotnost soustavy zůstává konstantní

Teplo Q
Určeno energií předanou při tepelné výměně

Celsiova teplotní stupnice
Určena teplotami 0°C (rovnovážný stav ledu a vody za normálního tlaku) a 100°C (rovnovážný stav vody a vodní páry)

Termodynamická stupnice
Určena trojným bodem vody (rovnovážný stav vody, ledu a vodní páry, 0,01°C)

Převod mezi termodynamickou a Celsiovou teplotou

$$t = (\{T\} - 273{,}15)\,°C$$

$$T = (\{t\} + 273{,}15)\,K$$

$20°C = 293,15 K$ $25 K = -248,15 °C$
$-32,14 °C = 241,01 K$ $34,14 K = -239,01 °C$
$-127,23 °C = 145,95 K$ $275,23 K = 2,08 °C$
$273,15 °C = 546,3 K$ $273,16 K = 0,01 °C$
$73,52 °C = 346,67 K$ $123,31 K = -149,84 °C$

Teplota 0K (absolutní nula) je počátkem termodynamické stupnice

Vnitřní energie, Práce a teplo

Měrná tepelná kapacita

Tepelnou kapacitu tělesa definujeme vztahem

$$C = \frac{Q}{\Delta t} \text{ resp. } C = \frac{Q}{\Delta T}$$

(množství tepla potřebné ke zvýšení teploty látky o 1°C resp. 1K)

Měrnou tepelnou kapacitu tělesa definujeme vztahem

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} \text{ resp } c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

(množství tepla potřebné ke zvýšení teploty 1 kg látky o 1°C resp 1K).

$$c = \frac{C}{m} \qquad [c] = J \cdot kg \cdot K^{-1}$$

$$[C] = J \cdot K^{-1}$$

Na základě předchozích vztahů

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \text{resp.} \quad Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

$T_1 < T_2$ $\qquad\qquad$ $T_1 < T < T_2$

teplo přijaté $\qquad\qquad$ teplo odevzdané

$$Q_1 = Q_2$$

$$c_1 m_1 (T - T_1) = c_2 m_2 (T_2 - T)$$

Jestliže probíhá tepelná výměna mezi teplejší a studenější látkou v kalorimetru platí

$$c_1 m_1 (T - T_1) + C_K (T - T_1) = c_2 m_2 (T_2 - T)$$

Př 1

V kalorimetru, jehož tepelná kapacita je $0{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}}$, je voda o hmotnosti $0{,}47\,\mathrm{kg}$ a teplotě $14\,°\mathrm{C}$. Vložíme-li do kalorimetru mosazné těleso o hmotnosti $0{,}4\,\mathrm{kg}$ ohřáté na teplotu $100\,°\mathrm{C}$, ustálí se v kalorimetru teplota $20\,°\mathrm{C}$.
Určete měrnou tepelnou kapacitu mosazi.

kalorimetr: $C_K = 0{,}1\ \mathrm{kJ\cdot K^{-1}} = 100\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$

voda: $m_1 = 0{,}47\,\mathrm{kg}$

$t_1 = 14\,°\mathrm{C}$

mosaz $m_2 = 0{,}4\,\mathrm{kg}$

$t_2 = 100\,°\mathrm{C}$

$c_m = ?$

$t = 20\,°\mathrm{C}$

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1 c_v (t - t_1) + C_k (t - t_1) = m_2 \cdot c_m (t_2 - t)$$

$$c_m = \frac{m_1 \cdot c_v \cdot (t - t_1) + C_k (t - t_1)}{m_2 \cdot (t_2 - t)} = \frac{0{,}47 \cdot 4180 \cdot (20 - 14) + 100 \cdot (20 - 14)}{0{,}4 \cdot (100 - 20)}$$

$$c_m = \frac{0{,}47 \cdot 4180 \cdot 6 + 100 \cdot 6}{0{,}4 \cdot 80}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} = 387\ \mathrm{J kg^{-1}}$$

Př 2.

Hliníkový předmět o hmotnosti 0,8 kg a teplotě 250 °C byl vložen do vody o hmotnosti 1,5 kg a teplotě 15 °C. Jaká je teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu? Předpokládáme, že tepelná výměna nastala jen mezi hliníkovým předmětem a vodou

hliník: $m_1 = 0{,}8\ \mathrm{kg}$
$t_1 = 250\ °\mathrm{C}$
$c_1 = 896\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

$$Q_1 = Q_2$$

voda: $m_2 = 1{,}5\ \mathrm{kg}$
$t_2 = 15\ °\mathrm{C}$
$c_2 = 4180\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K}$

$$m_1 \cdot c_1 (t_1 - t) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t - t_2)$$

$t = ?$

$$m_1 c_1 t_1 - m_1 c_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2$$

$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = m_2 c_2 t + m_1 c_1 t$$

$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = t \cdot (m_2 c_2 + m_1 c_1)$$

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_2 c_2 + m_1 c_1}$$

$$t = \frac{0{,}8 \cdot 896 \cdot 250 + 1{,}5 \cdot 4180 \cdot 15}{1{,}5 \cdot 4180 + 0{,}8 \cdot 896}\ °\mathrm{C} = 39\ °\mathrm{C}$$

Struktura a vlastnosti plynného skupenství látek.

Nestálý tvar a objem
Stlačitelné
Rozpínavé
Vzájemné přitažlivé síly jsou velmi malé
Tepelný pohyb
Celková vnitřní potenciální energie částic je zanedbatelná oproti energii tepelného pohybu

Při odvozování vlastností se skutečný plyn nahrazuje ideálním plynem, který má tyto vlastnosti

1) Rozměry molekul ideálního plynu jsou ve srovnání se střední vzdáleností molekul od sebe zanedbatelně malé

2) Molekuly ideálního plynu mimo vzájemné srážky na sebe navzájem nepůsobí

3) Vzájemné srážky molekul ideálního plynu a srážky těchto molekul se stěnou nádoby jsou dokonale pružné

Stavová rovnice pro ideální plyn

$$\frac{p \cdot V}{T} = konst.$$

$$p \cdot V = konst. \cdot T$$

$$p \cdot V = n \cdot N_A kT$$

$$p \cdot V = nRT$$

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J \cdot K^{-1}$

$R = 8{,}3\, J \cdot K^{-1}$

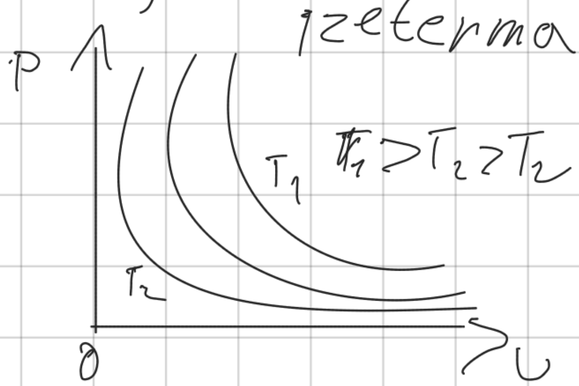
$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = konst$$

Stavové změny ideálního plynu

Izotermický děj

Při izotermickém ději je součin tlaku a objemu plynu stálé hmotnosti konstantní (Boylův-Mariottův zákon)

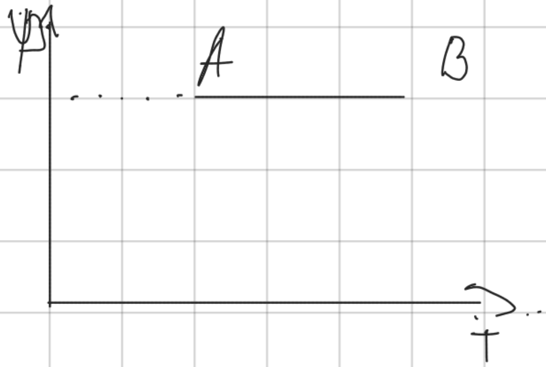
$$p \cdot V = konst$$



Izobarický děj

Při izobarickém ději je objem plynu stálé hmotnosti přímo úměrný termodynamické teplotě (GAY-LUSSACŮV zákon)

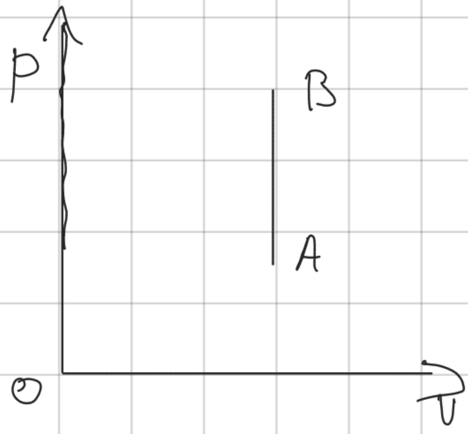
$$V = konst \cdot T \quad \text{nebo} \quad V/T = konst$$



Izochorický děj

Při izochorickém ději je tlak plynu stálé hmotnosti přímo úměrný termodynamické teplotě. (Charlesův zákon)

$$p = konst \cdot T \quad \text{nebo} \quad p/T = konst$$



Adiabatický děj

Při adiabatickém ději neprobíhá tepelná výměna mezi tělesem a okolím

Pro tento děj platí Poissonův zákon:

$$p \cdot V^{\varkappa} = \text{konst}$$

kde $\varkappa$ je Poissonova konstanta

$$\varkappa = c_p / c_V$$

(=5/3 pro 1 atomové nebo 7/5 pro 2 atomové molekuly)

1) Když určitý objem vzduchu izotermicky stlačíme o 20 l, vzroste tlak na pětinásobek. Určete objem vzduchu před stlačením

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst}$$

V_1

p_1

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \text{konst}$$

$$V_2 = V_1 - 20$$

$$p_2 = 5 \cdot p_1$$

$$T_2 = T_1$$

$$\frac{V_1 \cdot \cancel{p_1}}{\cancel{T_1}} = \frac{5 \cancel{p_1} \cdot (V_1 \cdot 20)}{\cancel{T_1}}$$

$$V_1 = 5 \cdot (V_1 - 20)$$

$$V_1 = 5 V_1 - 100$$

$$100 = 4 \cdot V_1$$

$$V_1 = 25 \, l$$

2) Přetlak v ocelové láhvi stoupl zahřátím z 5,8 MPa na 6,3 MP. Vypočítejte původní teplotu plynu, vzrostla na teplotu 32 °C.

$p_1 = 5{,}8\ MP$
V_1
$T_1 = ?$
$p_2 = 6{,}3\ MP$
$V_2 = V_1$
$t_2 = 32\,°C \xrightarrow{+273{,}15} T_2 = 305{,}15\ K$

$$\frac{p_1 \cancel{V_1}}{T_1} = \frac{p_2 \cancel{V_1}}{T_2}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$T_1 = \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2}$$

$$T_1 = \frac{5{,}8 \cdot 305{,}15}{6{,}3} = 280{,}9$$

$$\Longrightarrow t_1 = 7{,}78\,°C$$

3) Plyn má při teplotě 20 °C a tlaku 97,5 kPa objem 240 cm³. Vypočítejte jeho objem za normálních podmínek.

$t_1 = 20\,°C \quad T_1 = 293{,}15\ K$
$p_1 = 97{,}5\ kPa = 97500\ Pa$
$V_1 = 240\ cm^3 = 240 \cdot 10^{-6}\ m^3$

$t_2 = 0\,°C \quad T_2 = 273{,}15\ K$
$p_2 = 101325\ Pa$
$V_2 = ?$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad / \cdot T_2 \,/ : p_2$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} = V_2$$

$$\frac{97500 \cdot 240 \cdot 10^{-6} \cdot 273{,}15}{293{,}15 \cdot 101325} = m^3$$

$$2{,}15 \cdot 10^{-4}\ m^3 = \underline{\underline{215\ cm^3}}$$

4) Plyn uzavřený v nádobě o objemu 40 l ochladíme z 90°C na 10°C. Na jakou hodnotu je nutné zmenšit objem, aby tlak zůstal stejný?

$V_1 = 40\,l = 40\,dm^3 = 40 \cdot 10^{-3}\,m^3$
$t_1 = 90\,°C$
p_1

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$V_2 = ?$
$t_2 = 10\,°C = T_2 = 283{,}15\,K$
$p_2 = p_1$

$$\frac{40}{363{,}15} = \frac{V_2}{283{,}15}$$

$$V_2 = \frac{283{,}15 \cdot 40}{363{,}15}\,l = 31{,}18\,l$$

Práce plynu

$$W = F \cdot \Delta s = p \cdot S \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

Izobarický děj ($p = konst.$)

Př

Plyn ve válci spalovacího motoru při stálém tlaku 4 MPa prudce zvětšil svůj objem o 110 cm³. Jakou práci vykonal?

$$W = p \cdot V$$
$$4 \cdot 110$$
$$W = 440\,J$$

Kruhový děj

Děj, při kterém počáteční stav soustavy je totožný s konečným stavem, se nazývá kruhový děj

2. Termodynamický zákon

1. formulace
Není možné vytvořit takové cyklicky pracující stroj, jehož jediným výsledkem by bylo odebírání tepla ze zdroje tepla a jeho úplná přeměna v práci.

2. formulace
Teplo nikdy samovolně nepřechází z chladnějšího tělesa na teplejší.

Př. 1

Termodynamická soustava přijala od ohřívače během jednoho cyklu teplo 9 MJ a odevzdala do chladiče teplo 5,6 MJ. Jakou práci vykonala? Jaká je účinnost tohoto cyklu?

$Q_1 = 9\ \mathrm{MJ}$

$Q_2 = 5{,}6\ \mathrm{MJ}$

$W = Q_1 - Q_2$

$W = 9\ \mathrm{MJ} - 5{,}6\ \mathrm{MJ}$

$W = 3{,}4\ \mathrm{MJ}$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{9 - 5{,}6}{9} = 0{,}378$$

$$\eta = 37{,}8\ \%$$

Př 2

Určete teoretickou účinnost vznětového motoru nákladního automobilu, je-li teplota chladiče 22°C a nejvyšší teplota po vznětu 1600°C

Je výsledek shodný se skutečností?

$t_2 = 22°C$

$T_2 = 292{,}15\,K$

$t_1 = 1600°C$

$T_1 = 1873{,}15\,K$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\eta = \frac{1873{,}15 - 295{,}15}{1873{,}15}$$

$$\eta = 0{,}84 = 84\,\%$$

Struktura a vlastnosti kapalin

Vlastnosti

Stálý objem, ale ne tvar
Volná hladina
Malá stlačitelnost
Vnitřní tření

Krátkodosahové uspořádání, podobné amorfním látkám

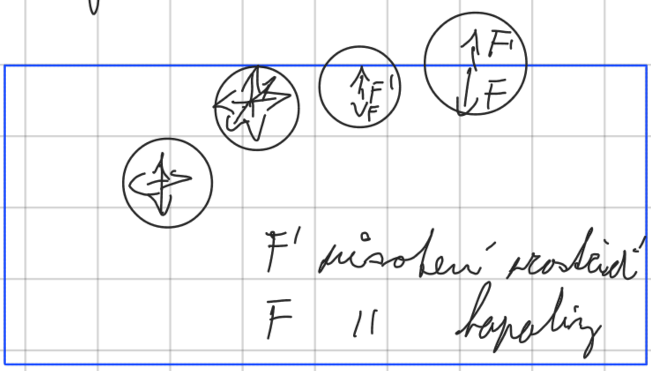
Molekuly se krátký časový úsek pohybují v kmitech kolem jedné rovnovážné polohy, která se v čase mění

Povrchová vrstva

Volný povrch kapaliny se chová jako pružná blána

Je to způsobeno vzájemnými silovými působením molekul

sféra molekulového působení



Na každou molekulu ležící v povrchové vrstvě kapaliny působí sousední molekuly výslednou přitažlivou silou směřující do kapaliny

Povrchová vrstva = vrstva molekul, jejichž vzdálenost od povrchu kapaliny je menší než r_m

r_m = poloměr sféry molekulového působení

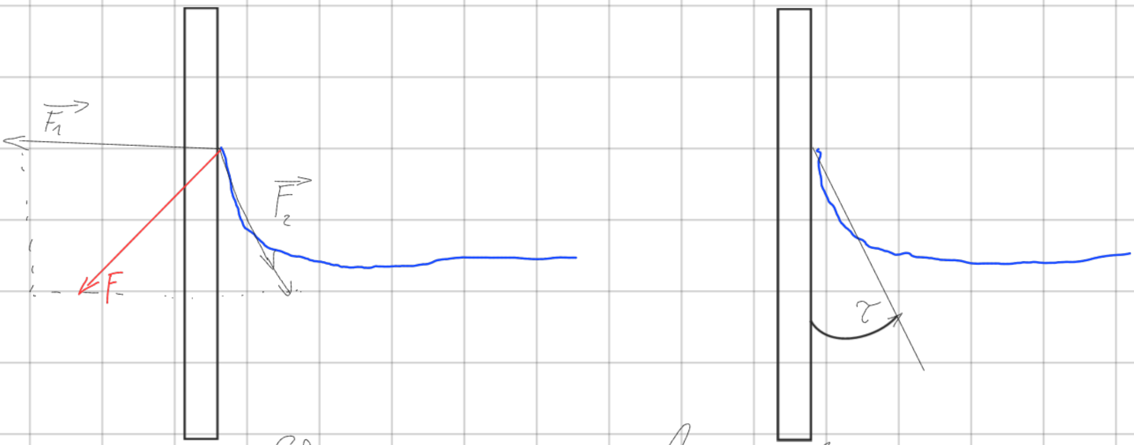
Povrchová energie

Molekuly povrchové vrstvy mají větší energii než molekuly uvnitř kapaliny

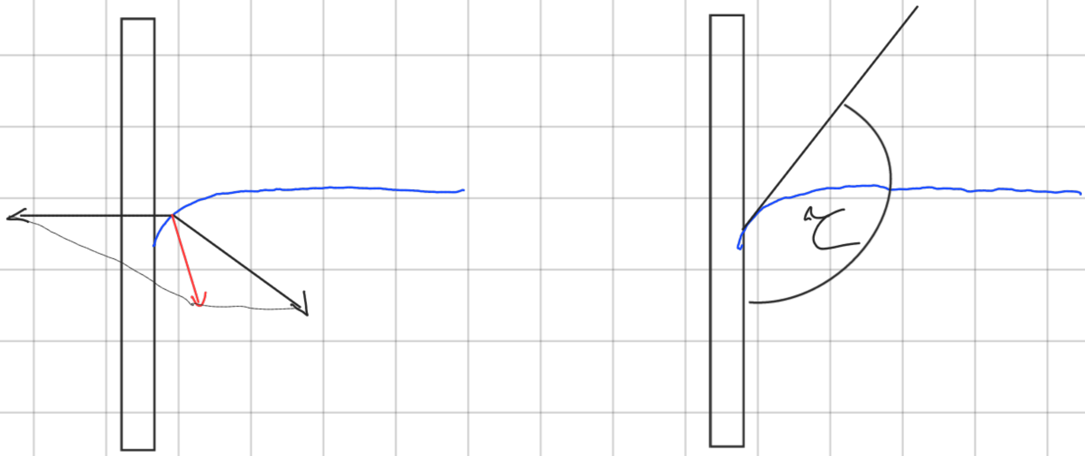
Rozdíl těchto energií představuje povrchovou energii E

Povrchové napětí závisí na kapalině, teplotě a látce nad povrchovou vrstvou kapaliny

Jevy na rozhraní kapaliny a pevné látky



Smáčivé kapaliny



Nesmáčivé kapaliny

Kapilární jevy

Účinkem povrchového napětí na zakřivený povrch vzniká tlak a síly vyvolané tímto tlakem míří do středu křivosti.

Jestliže má povrch kapaliny tvar kulového vrchlíku, je kapilární tlak dán vztahem

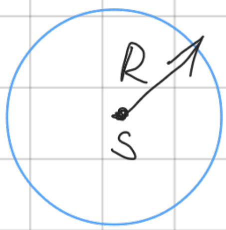
$$p_k = \frac{2\sigma}{R}$$

povrchové napětí

poloměr kulového povrchu

Kapilární tlak uvnitř tenké kulové bubliny poloměru R je roven

$$p_k = \frac{4\sigma}{R}$$



Kapilární elevace a deprese

Kapilární elevace je jev, kdy volná hladina kapaliny v kapiláře stoupá

Nastává u smáčivých kapalin

Využití

Vzlínání rostlin
Knoty v lampách
Vzlínání vody v půdě

Př 1
Jaký vnitřní průměr má kapilára, v níž je velikost kapilárního tlaku rtuti 2450 Pa

$p_k = 2450\,Pa$
$d = ?$
$\sigma = 491$

$$p_k = \frac{2\sigma}{R}$$

$$R = \frac{2\sigma}{p_k} \qquad R = \frac{2 \cdot 0{,}491}{2450}\,m$$

$$R = 4 \cdot 10^{-4}\,m \Rightarrow d = 2R = 8 \cdot 10^{-4}$$

$0{,}8\,mm$

Př. 2

Skleněná kapilára má vnitřní průměr 0,6 mm. Kapiláru ponoříme nejprve do vody, pak do rtuti. Vypočítej:

a) jak vysoko v ní vystoupí voda
b) o kolik mm klesne v kapiláře hladina rtuti

$d = 0{,}6\ mm$
$R = 0{,}3\ mm$
voda $\sigma = 73$
rtuť $\sigma = 491$

$$h = \frac{2\sigma}{R \cdot \rho \cdot g}$$

$$h_v = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}0496 = 49{,}6\ mm$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot 491 \cdot 10^{-3}}{0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 13600 \cdot 9{,}81} = 0{,}0245 = 24{,}5\ mm$$

Př. 3

V kapiláře o vnitřním průměru 0,4 mm vystoupil petrolej o hustotě 860 $kg \cdot m^{-3}$ do výšky 32 mm.
Jaké bylo povrchové napětí petroleje?

$d = 0{,}4\ mm = 0{,}4 \cdot 10^{-3}\ m \Rightarrow R = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\ m$
$\rho = 860\ kg \cdot m^{-3}$
$h = 32\ mm = 32 \cdot 10^{-3}\ m$
$\sigma = ?$

$$h = \frac{2\sigma}{R \cdot \rho \cdot g} \qquad \sigma = \frac{R \cdot \rho \cdot g \cdot h}{2} =$$

$$\sigma = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 860 \cdot 9{,}81}{2}$$

$$\sigma = 0{,}027\ N m^{-1} = 27\ mN m^{-1}$$

Př. 4.

Ve skleněné kapiláře vystoupila voda do výšky 37 mm.

Vypočítejte velikost kapilárního tlaku

$h = 37\,mm$

$\sigma = 73\,mNm$; $\rho = 1000\,kg\,m^{-3}$

$p_k = ?$

$p_k = \frac{2\sigma}{R}$

$h = \frac{2\sigma}{R \cdot \rho \cdot g}$

$p_k = \frac{2\sigma}{\frac{2\sigma}{h \cdot \rho \cdot g}}$

$R = \frac{2\sigma}{h \cdot \rho \cdot g} = \frac{2 \cdot 73}{37 \cdot 1000 \cdot 9{,}81}$ 145

$R = \frac{143}{362970} = 900039$

$p_k = h \cdot \rho \cdot g$

$37 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 = 362{,}97$

Př. 5

Na obdélníkovém drátěném rámečku s pohyblivou příčkou o délce 6 cm je napjata mýdlinová blána. Povrchové napětí mýdlového roztoku je $0{,}04\,N.m^{-1}$.

Vypočítejte:

a) jak velkou silou udržíme příčku v rovnováze

b) jaký je přírůstek povrchové energie obou stran blány, posuneme-li příčku o 5 cm?

$l = 6\,cm = 0{,}06\,m$

$\sigma = 0{,}04\,Nm^{-1}$

a) $F = ?$

b) $= \Delta E = ?$

$\Delta x = 0{,}05\,m$

1\. povrch $\sigma = \frac{F}{l} \Rightarrow F = \sigma \cdot l$

2\. povrchy $F = 2 \cdot \sigma \cdot l$

$F = 2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}06\,N = 4{,}8 \cdot 10^{-3}\,N$

b)

$$\sigma = \frac{\Delta E}{S}$$

2 povrchy $\Delta E = 2\sigma \cdot S = l \cdot \Delta x = 2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}05 =$
$240 \cdot 10^{-6}\,J$

Př 6

$d = 10\,cm$

$\sigma = 40 \cdot 10^{-3}\,Nm^{-1}$

$W = ?$

(1. povrch $W = \Delta E = \sigma \cdot \Delta S$)

2\. povrchy $W = \Delta E = 2 \cdot \sigma \cdot \Delta S = 2 \cdot \sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 0{,}05^2\,J = 2{,}51$

Př 7

Jaký průměr kulové dešťové kapky, která má povrchovou energii $0{,}01\,mJ$?

$\sigma = 73\,mNm^{-1}$

$E = 0{,}01\,mJ$

$d = ?$

$$\sigma = \frac{E}{S} = \frac{E}{4\pi R^2}$$

$$R^2 = \frac{E}{4\pi\sigma}$$

$$d = 2 \cdot R = 2\sqrt{\frac{E}{4\pi \cdot \sigma}} = 6{,}6 \cdot 10^{-3}\,m = 6{,}6\,m$$

Př 8 Jakou povrchovou energii má voda? Hladina vody v nádrži tvaru kvádru, jehož rozměry dna jsou 4m a 2,5m a voda sahá do výšky 180cm

$4 \times 2{,}5 \times 1{,}8\ m$

$\sigma = 73 \cdot 10^{-3}\ N \cdot m^{-1}$

$E = ?$ $\quad E = \sigma \cdot S$

$E = 73 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 2{,}5 = \underline{\underline{73 \cdot 10^{-2}\ J}}$

Př 9

Jak velká povrchová energie se uvolní, jestliže při dešti z kapek o průměru 10^{-3} mm se vytvoří kapka o průměru 3 mm?

malá

$d_1 = 10^{-3}\ mm \Rightarrow R_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ mm = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ m$

velká $d_2 = 3\ mm \Rightarrow R_2 = 1{,}5\ mm = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m$

počet malých kapek v jedné velké kapce

malá

povrch: $S_1 = 4\pi R_1^2$

objem: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$N = \frac{V^2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{(1{,}5 \cdot 10^{-3})^3}{(0{,}5 \cdot 10^{-6})^3} = 27 \cdot 10^9$$

Velká
povrch: $S_2 = 4\pi R_2^2$
objem: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_2^3$

$S = N \cdot S_1 - S_2 = N \cdot 4\pi R_1^2 - 4\pi \cdot R_2^2$
$4\pi(N \cdot R_1^2 - R_2^2) = 4\pi[27 \cdot 10^9 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-6}) - (1{,}5 \cdot 10^{-3})] =$
$4\pi(6{,}75 \cdot 10^{-3} - 2{,}25 \cdot 10^{-6}) = \underline{\underline{0{,}085\,m^2}}$

$E = S \cdot \sigma = 0{,}085 \cdot 73 \cdot 10^{-3}\,J = 6{,}2 \cdot 10^{-3}\,J$

Struktura a vlastnosti pevných látek

Krystalické látky - pravidelné uspořádání částic

- Monokrystaly - určité rozložení částic se opakuje v celém krystalu

- Polykrystaly - velký počet zrn, v kterých jsou částice uspořádány pravidelně (kovy)

Amorfní látky - kolem vybrané částice jsou nejbližší uspořádány pravidelně, vzdálenější už ne (sklo, jantar, vosk, asfalt, pryskyřice, plasty)

Polymery – makromolekuly spojené v dlouhých řetězcích, amorfní, každý jsou jejich podskupiny

Jsou to např.: kaučuk, dřevo, barva, kůže, plasty, proteiny

Deformace tělesa

- Změna rozměrů, tvaru nebo objemu tělesa způsobená vnějšími silami
- Deformace může být pružná (elastická) nebo trvalá (plastická)

Hookův zákon

Normálové napětí

Normálové napětí σ_n charakterizuje, do jaké míry má těleso snahu vrátit se do původní polohy

Pro jeho výpočet platí

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$

F – síla pružnosti

S – plocha příčného řezu

Jednotka normálového napětí je $N/m^2 = Pa$

Relativní prodloužení

pro relativní prodloužení ε platí

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}}$$

$$\boxed{\Delta l = l' - l}$$

prodloužení — konečná délka — původní délka

Normálové napětí je přímo úměrné relativnímu prodloužení

$$\boxed{\sigma_n = \varepsilon \cdot E}$$ ← modul pružnosti

pro potřeby řešení úloh můžeme rozepsat

$$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E$$

Drát délky 2m o obsahu průřezu $5 \cdot 10^{-6}\,m^2$ je napínán silou o velikosti 700N, přičemž se prodlouží o $3 \cdot 10^{-3}\,m$. Deformace je pružná. Určete

a) normálové napětí drátu,
b) relativní prodloužení drátu,
c) modul pružnosti v tahu materiálu, z něhož je drát zhotoven

$l = 2m$
$S = 5 \cdot 10^{-6}\,m^2$
$F = 700\,N$
$\Delta l = 3 \cdot 10^{-3}\,m$

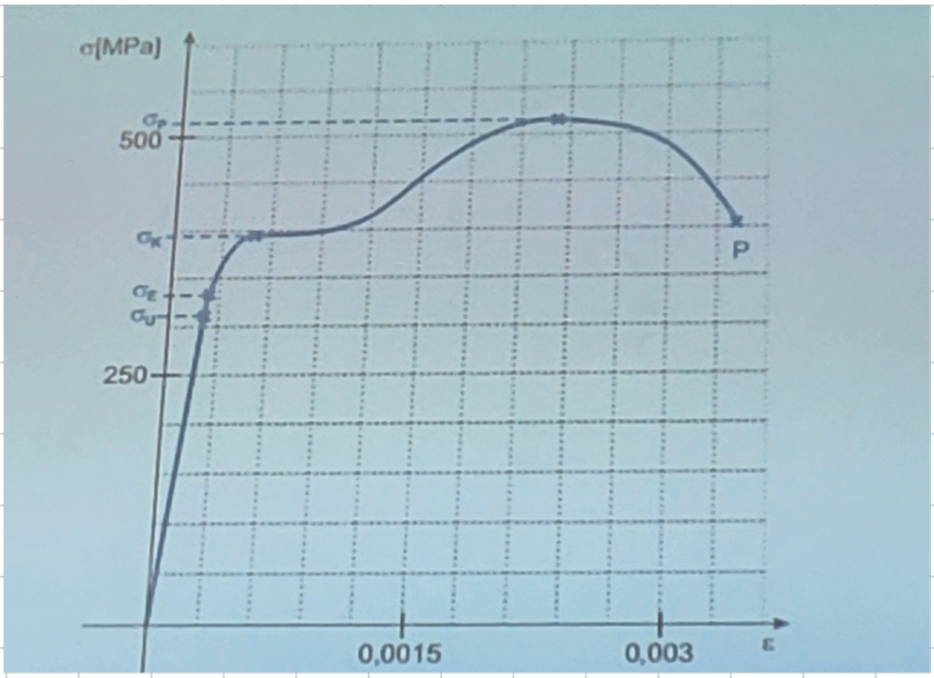
a) $\sigma_n = ?$
b) $\varepsilon = ?$
c) $E = ?$

a) $\sigma_n = \frac{F}{S} = \frac{700}{5 \cdot 10^{-6}} = 140\,MPa$
$140 \cdot 10^{-6}\,m$

b) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}15 \cdot 10^{-2}$
$= 0{,}15\,\%$

c)
$\sigma_n = \varepsilon \cdot E$

$$E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S} = \frac{700 \cdot 2}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 9{,}\overline{3} \cdot 10^{10}\,Pa$$



Hookův zákon platí do σ_U - mez úměrnosti

σ_E - mez pružnosti - deformace dále není pružná a materiál už se nevrátí do původního stavu

σ_K - mez kluzu - zvětšuje se relativní prodloužení aniž by se zvětšovalo normálové napětí - tečení materiálu, mění se fyzikální vlastnosti materiálu

σ_P = mez pevnosti - dále se materiál přetrhne

$\sigma_p = 2 \cdot 10^7\ Pa$
$\rho = 11\ 340\ kg\ m^{-3}$

$l = ?$

$$\sigma_p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho \cdot V g}{S} = \frac{\rho \cdot \cancel{S} \cdot l \cdot g}{\cancel{S}}$$

$$\sigma_p = \rho \cdot l \cdot g$$

$$l = \frac{\sigma_p}{\rho \cdot g} = \frac{2 \cdot 10^7}{11340 \cdot 9{,}81} = 179{,}8\ m$$

Pr 3. 117

$\sigma_n = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}$

$\varepsilon = 0,1\%$

$l_1 =$

$E_1 =$

$\sigma_n =$

a) $\varepsilon_2 = ?$

$\sigma_{n2} = 2 \cdot \sigma_{n1}$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{n1}}{E_1} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_{n2}}{E_2} = \frac{2 \cdot \sigma_{n1}}{E_1} \end{array}\right\} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{2 \cdot \sigma_{n1}}{E_1}}{\frac{\sigma_{n1}}{E_1}} = 2 \Rightarrow \varepsilon_2 = 2 \cdot \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 = 2 \cdot 0,1\% = 0,2\%$

b) $\varepsilon_2 = ?$

$l_2 = 2 l_1$

$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}$

$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2}$

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{\Delta l_2}{l_2}}{\frac{\Delta l_1}{l_1}} = \frac{\frac{2 \cdot l_2}{2 \cdot l_2}}{\frac{2 \cdot \Delta l_1}{2 \cdot l_1}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \varepsilon_2 = 1 \cdot \varepsilon_1 = 0,1\%$

c) $E_2 = 2 \cdot E_1$

$\varepsilon_2 = ?$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{n1}}{E_1} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_{n2}}{E_2} = \frac{\sigma_{n1}}{2 \cdot E_1} \end{array}\right\} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{\sigma_{n1}}{E_1}}{\frac{\sigma_{n1}}{2 \cdot E_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1\% = 0,05\%$

3. 118

$l = 2\,m$

$S = 4 \cdot 10^{-6}\,m^2$

$F = 800\,N$

$\Delta l = 2 \cdot 10^{-3}\,m$

a) $\sigma_n = ?$

b) $\varepsilon = ?$

c) $E = ?$

$\sigma_n = \frac{F}{S} = \frac{800}{4 \cdot 10^{-6}} = 200 \cdot 10^6 = 200\,MPa = 0,2\,GPa$

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} = 1 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-2} = 0,1\%$

$E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{F \cdot l}{S \cdot \Delta l} = \frac{\cancel{800}^{200} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot 10^{-6} \cdot \cancel{2} \cdot 10^{-3}} = 200 \cdot 10^9 = 200\,GPa$

3.119

$E = 2 \cdot 10^{11}\,Pa$

$\sigma_n = 5 \cdot 10^{9}\,Pa$

$\varepsilon = ?$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E} = \frac{5 \cdot 10^{9}}{2 \cdot 10^{11}} = 2{,}5 \cdot 10^{-2} = \underline{2{,}5\%}$$

3.120

$l = 2\,m$

$S = 3\,mm^2 = 3 \cdot 10^{-6}\,m^2$

$F = 90\,N$

$\Delta l = 0{,}5\,mm = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,m$

$E = ?$

$$\sigma_n = \varepsilon \cdot E \Rightarrow E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S} = \frac{\overset{30}{\cancel{90}} \cdot \overset{4}{\cancel{2}}}{\cancel{0{,}5} \cdot 10^{-3} \cdot \cancel{3} \cdot 10^{-6}} = 120 \cdot 10^{9}\,Pa = 120\,GPa$$

3.121

$m = 10t = 10^{4}\,kg$

$S = 8\,cm = 8 \cdot 10^{-4}\,m^2$

$l = 400\,m$

$E = 2{,}2 \cdot 10^{11}\,Pa$

$\Delta l = ?$

$$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{S \cdot E} = \frac{m \cdot g \cdot l}{S \cdot E}$$

3. 122

$r = 0{,}32\ mm = 32 \cdot 10^{-6}\ m$

$l = 0{,}65\ mm$

$\Delta l = 4{,}5\ mm - 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ m$

$E = 220\ GPa = 220 \cdot 10^{9}\ Pa$

$F = ?$

$$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \qquad S = 4\pi r^2$$

$$F = \frac{\Delta l \cdot S \cdot E}{l} = \frac{\Delta l \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E}{l} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi (32 \cdot 10^{-5}) \cdot 220 \cdot 10^9}{0{,}65}$$

$$F = \underline{490\ N}$$

Teplotní roztaženost látek

Délková teplotní roztažnost

teplotní součinitel délkové roztažitosti α udává poměrné prodloužení $\frac{\Delta l}{l_0}$ při zahřátí o 1 °C

Pro teplotní délkou roztažnost platí

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

Pro změnu délky platí

$$l = l_0 + l_0 \cdot \alpha \Delta t$$
$$l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \Delta t$$
$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$$

Anizotropní látky mají v různých směrech různé součinitele roztažitosti

OBJEMOVÁ roztažnost

Uvažujeme izotropní těleso tvaru kvádru o hranách a_0, b_0, c_0 při teplotě t_1

$$V = a \cdot b \cdot c = a_0(1+\alpha\Delta t)\cdot b_0(1+\alpha\Delta t)\cdot c_0(1+\alpha\Delta t)$$
$$V = a \cdot b \cdot c \cdot (1+\alpha\Delta t)^3$$
$$V = V_0(1+3\alpha\Delta t)$$

$\beta = 3\alpha$ ~~teplotní~~ součinitel objemové roztažnosti

udává, o kolik m^3 se zvětší $1\,m^3$ tělesa při zahřátí o $1\,°C$