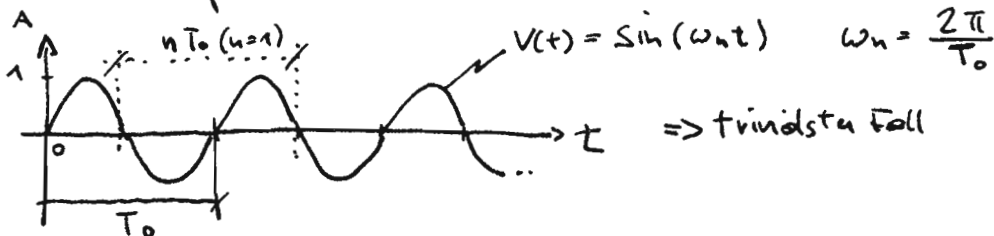


# TELEKOMMUNIKATION

## 2) Periodische & Transiente Signale

### a.) Periodische

- Signale, die eine gleiche Wellenform haben, wenn man sie um das  $n$ -fache ihrer Periode davon verschiebt. z.B.  $V(t) = \sin(\omega t)$



- In der Realität sind Periodische Signale meist aus mehreren Frequenzen zusammengesetzt.

JEDES PERIODISCHE SIGNAL LÄSST SICH DURCH EINE GEWICHTETE SUMME HARMONISCHER, SINUSOIDER SCHWINGUNGEN ZUSAMMENSETZEN.

$$V(t) = \underbrace{C_0}_{\text{DC-Teil}} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(\omega_0 \cdot i \cdot t + \varphi_i)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{z.B. } V(t) = [0,5 + \sin(\omega_0 t) + 2 \sin(2\omega_0 t)] V \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ C_0 = 0,5V \quad C_1 = 1V \quad C_2 = 2V \\ \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

### BERECHNUNG DER GEWICHTUNGSFAKTOREN $C_i$

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$$

$$\varphi_i = -\arctan\left(\frac{B_i}{A_i}\right)$$

Filterintegrale:

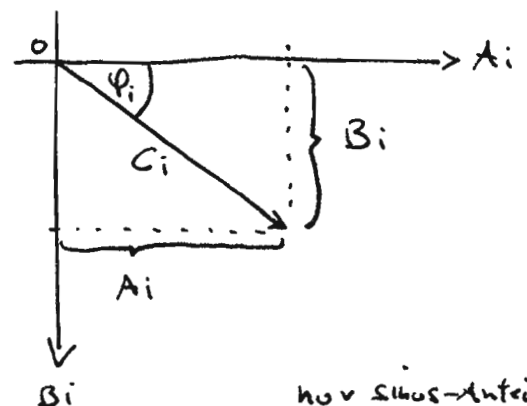
$$A_i = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} V(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot i \cdot t) dt \quad \dots \text{geraden Anteile}$$

$$B_i = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} V(t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot i \cdot t) dt \quad \dots \text{ungeraden Anteile}$$

$$\text{z.B. } V(t) = 2 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow A_i = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} 2 \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt = 0 \quad \checkmark$$

orthogonal!

$$B_i = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = 2 \quad \checkmark$$

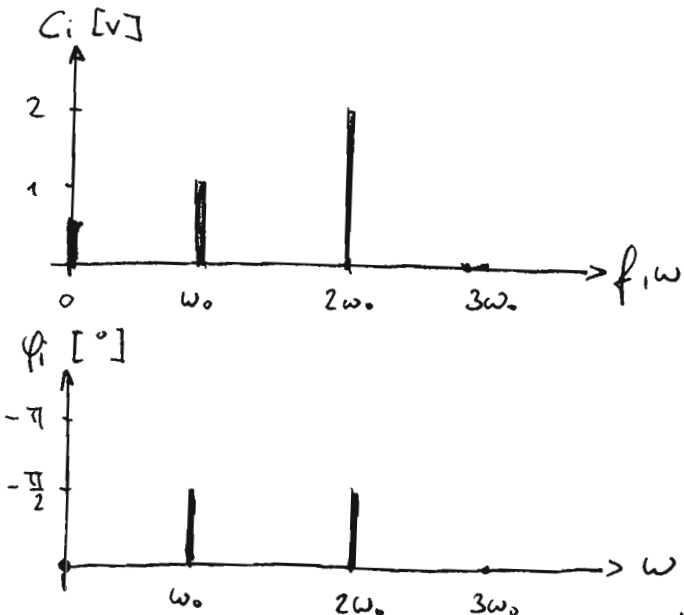


hier  $\sin$ -Anteil und ein "Spitze" mit der Höhe 2.

# Amplituden & Phasenspektrum

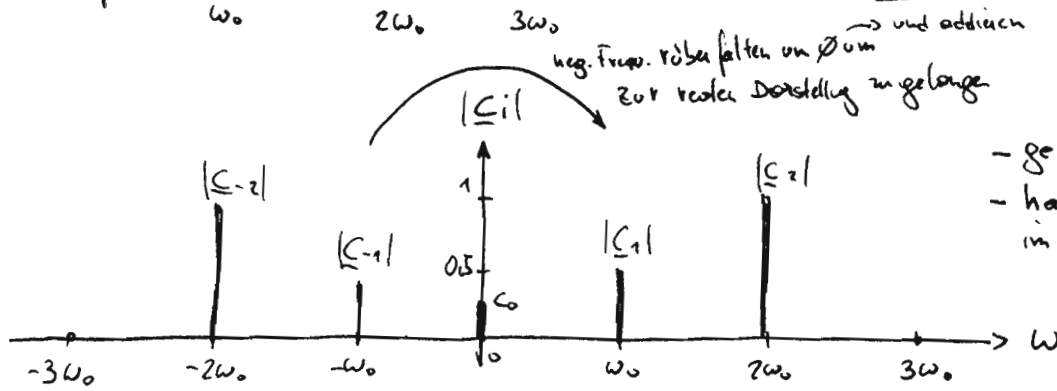
z.B.  $V(t) = [0,5 + \sin(\omega_0 t) + 2\sin(2\omega_0 t)]V$

Betrags-Phasen  
Darstellung

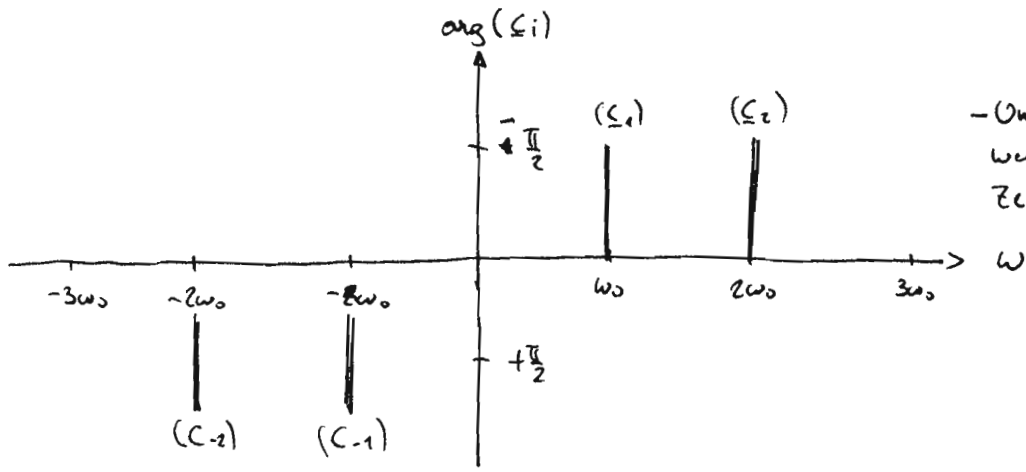


$C_0 = 0,5V$	$\varphi_0 = 0$
$C_1 = 1V$	$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$
$C_2 = 2V$	$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$
$C_3 = 0$	$\varphi_3 = 0$
$\vdots$	$\vdots$

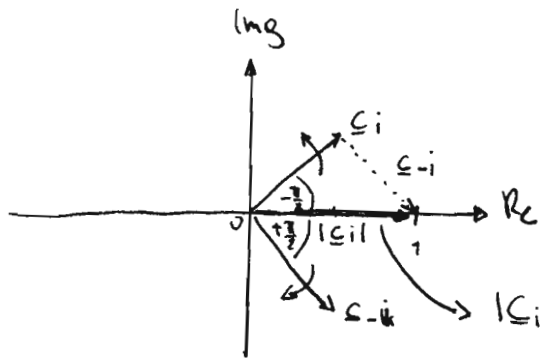
$C_i = 2|\underline{c}_i|$



- gerades Amplitudenspekt.
- halbe Größe der  $\underline{c}_i$ 's im Vergleich zu  $C_i$ 's.



- Ungerade Symmetrie wegen gegenläufigen Zeigen



$|\underline{c}_i| = |\underline{c}_i + \underline{c}_{-i}|$

$|\underline{c}_i| \dots$  Reale Amplitude des Signals  
=> Wandert auf der Re-Achse hin & her

# SPEKTREN

## 1) SPANNUNGEN

### PERIODISCH

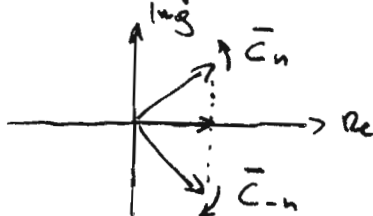
-  $V(f)$  .... Amplitudenspektrum

Kommt von der Fourierreihenentwicklung:

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_n e^{j\omega_n t}$$

wobei:  $\bar{C}_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_n + jB_n) & \text{für } n > 0 \\ C_0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(A_n - jB_n) & \text{für } n < 0 \end{cases}$

-as sind 2 gegenläufig rotierende Zeiger in der komplexen Ebene:



Die additiv sich auf die Re-Ebene projizieren, um wieder ein reelles Signal zu erzeugen.

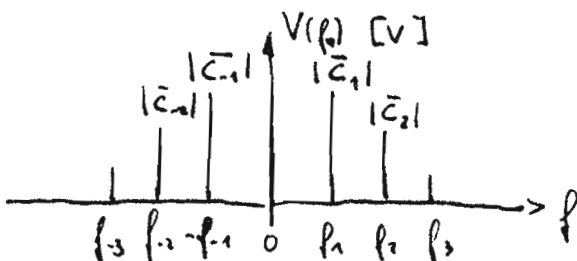
$$\bar{C}_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V(t) e^{-j\omega_n t} dt \dots \text{Filterintegral}$$

$\omega_n = n\omega_1$

$n = \text{pos}$ :  $\bar{C}_n$  berechnet

$n = 0$ :  $C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$

$n = \text{neg}$ :  $\bar{C}_{-n}$  berechnet



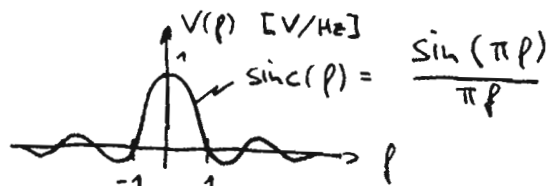
### TRANSIENT

-  $V(f)$  .... Spannungsdichtespektrum

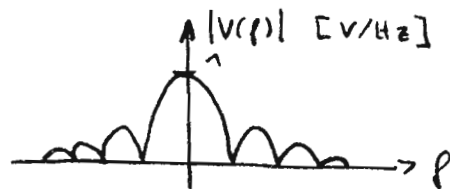
Kommt von der Fouriertransformation:

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-j\omega t} dt \quad [V/Hz]$$

z.B.  $\text{rect}(t) \rightarrow \text{sinc}(f) = V(f)$



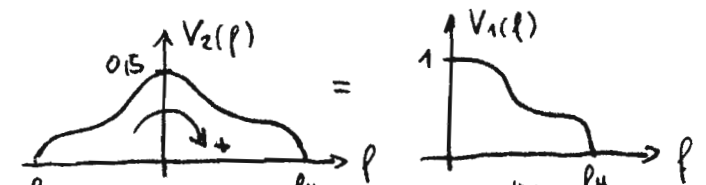
-  $|V(f)|$  ... Amplitudendichtespektrum



### Übung 2-seitiges Spektrum $\Rightarrow$ 1-seitiges

- gilt für periodische & transiente Signale  
Zusammenfalten um 0 Hz und addieren

$$V_2(f) + V_2(-f) = V_1(f)$$



neg. dreh. Zeiger  $\Rightarrow$  pos. dreh. Zeiger  
durch addit. Verschmelzung des komplexen Anteils, da die Zeiger konj. komplex sind!

$\rightarrow$  Amplitude für reelle Signale wandert auf der Reellen Achse hin & her.

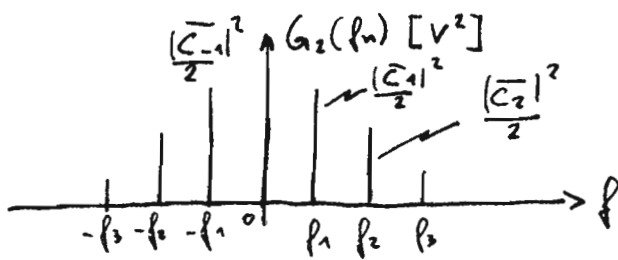
## 2) ENERGIE & LEISTUNGSDICHTE-SPEKTREN

• NORMIERT AUF  $1\Omega$   $\frac{V_{rms}^2}{R} \rightarrow V_{rms}^2$

### PERIODISCH

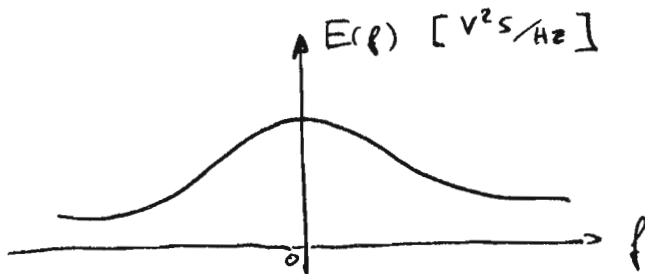
- $G(f_n)$  ..... Leistungsspektrum [ $V^2$ ]  
wird aus den Fourierreihen Koeffizienten berechnet.

$$G_2(f_n) = (V_{rms})^2 = \left( \frac{|\bar{C}_n|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{|\bar{C}_n|^2}{2}$$



- $E(f)$  .... immer kontinuierlich  $\Rightarrow$  Dichte!

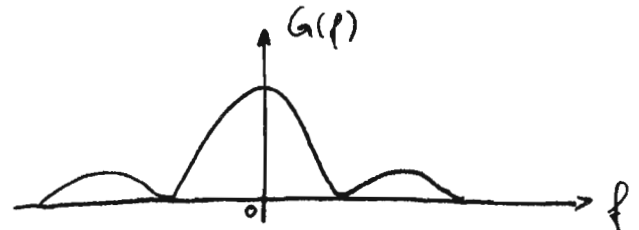
$$E(f) = |V(f)|^2 \left[ \frac{V^2}{Hz^2} \right] \Rightarrow \left[ V^2 s \frac{1}{Hz} \right]$$



### TRANSIENT

- $G(f)$  ... Leistungsdichte Spektrum [ $V^2/Hz$ ]  
wird aus dem Spannungsdichte Spektrum berechnet:

$$G(f) = (V_{rms}(f))^2 \quad [V^2/Hz]$$

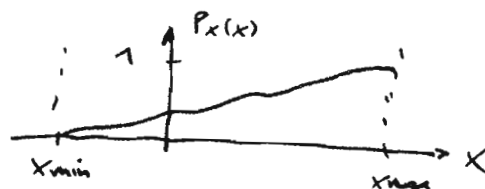


## Wahrv. dichte & Verteilung:

a.) Vert. (WVF)  $P_X(x) = P(X \leq x)$

b.) PDF:  $p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx}$

... gibt W. an, das  $X$  in den Intervall  $x, x+dx$  liegt.

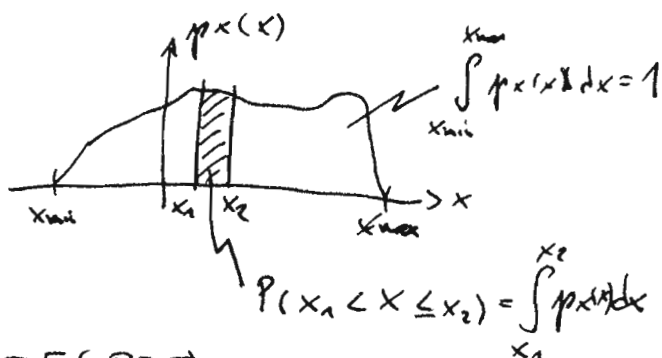


$$P_X(x) \leq 1$$

$$P_X(\infty) = 1$$

$$P_X(-\infty) = 0$$

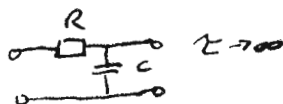
$$P_X(x_2) - P_X(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$$



## Momente

- geben Auskunft über die Form & Gestalt der WDF (PDF)

norm. Momente:



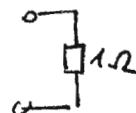
$$E(x) = \bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx$$

erstes  
(n=1)

allgemein:  $\bar{X}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx$

$\bar{X}$  ... DC-Anteil  
(SCHARMITTELWERT)

$\bar{X}^2$  ... Total Power (2tes Moment, n=2)  
(Quadratisches Mittelwert)

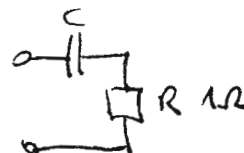


Zentrales Moment:

→ Befreit vom Erwartungswert  $E(x) = \bar{X}$

Varianz:  $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 p_X(x) dx$  ... Wechselleistung (in  $1\Omega$ )  
(2tes)

allgemein:  $\overline{(x - \bar{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^n p_X(x) dx$



Mittelwert allgemein:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

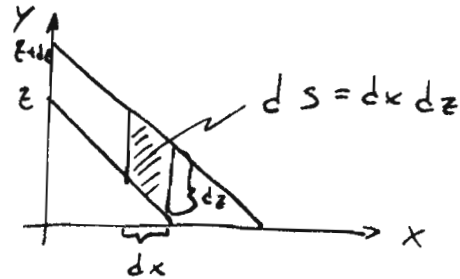
## GRENZWERTSATZ

- Was passiert wenn man 2 Zufallsvariablen addiert  $\rightarrow X+Y=Z$   
wie sieht die pdf (WDF) von Z aus?

$$Y = Z - X$$

$$Y = Z - X$$

$$Y = Z + dz - X$$



$$P(z < Z \leq z + dz) = \int_{\text{Strip}} p_{XY}(x, z-x) dS$$

$$= p_z(z) dz = dP_z$$

$$= p_z(z) dz = \int_{\text{Strip}} p_{XY}(x, z-x) dx dz$$

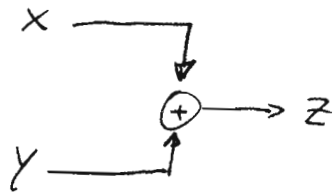
$$p_z(z) = \int_{\text{Strip}} p_{XY}(x, z-x) dx$$

$$\Rightarrow p_z(z) = \int_{\text{Strip}} p_X(x) p_Y(z-x) dx$$

... bei stat. unabh.:

$$p_{XY}(x, z-x) = p_X(x) \cdot p_Y(z-x)$$

"Faltungintegral"



$\Rightarrow$  Die WDF von 2 stat. unabhängigen Zufallsvariablen ist die Faltung derer.

- Da die Faltung eine Integraloperation ist, wird das Ergebnis "glatter"  $\Rightarrow$  bei  $N \rightarrow \infty$  wird Gaußförmige WDF

$\Rightarrow$  Die WDF mehr stat. un. ZV wird Gaußförmig

## KORRELATION & COVARIANZ

Korrelation beschreibt die Ähnlichkeit zweier Signalformen:

$$\overline{X^n X^m} = \iint_{-\infty}^{+\infty} X^n Y^m p_{XY}(X, Y) dx dy$$

$n, m = 1 \Rightarrow$  Korrelation

$$\overline{XY} = \iint_{-\infty}^{+\infty} XY p_{XY}(X, Y) dx dy$$

Die Korrelation besagt:

$\begin{cases} + \text{ hoher pos. Wert: High / High} \\ + \text{ hoher neg. Wert: High / Low} \\ + \text{ kleiner Wert: wenig informativ} \end{cases}$

$\downarrow$   
im Mittel gesehen!

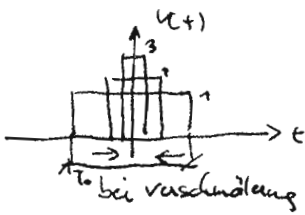
## COVARIANZ

Mittel (Erwartungswert) zweier definierte Zufallsvariablen

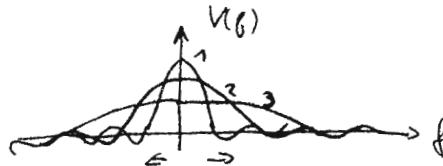
$$\overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) p_{XY}(x, y) dx dy \quad (\text{joint central moment})$$

$\Rightarrow$  Correlation der wechselseitigen Anteile von  $X$  &  $Y$

## Zeitgesetz der Nachrichtentechnik



bei Verschiebung  
der Pulsbreite (und gleichbleibender Fläche)  
(um Datenrate zu erhöhen)

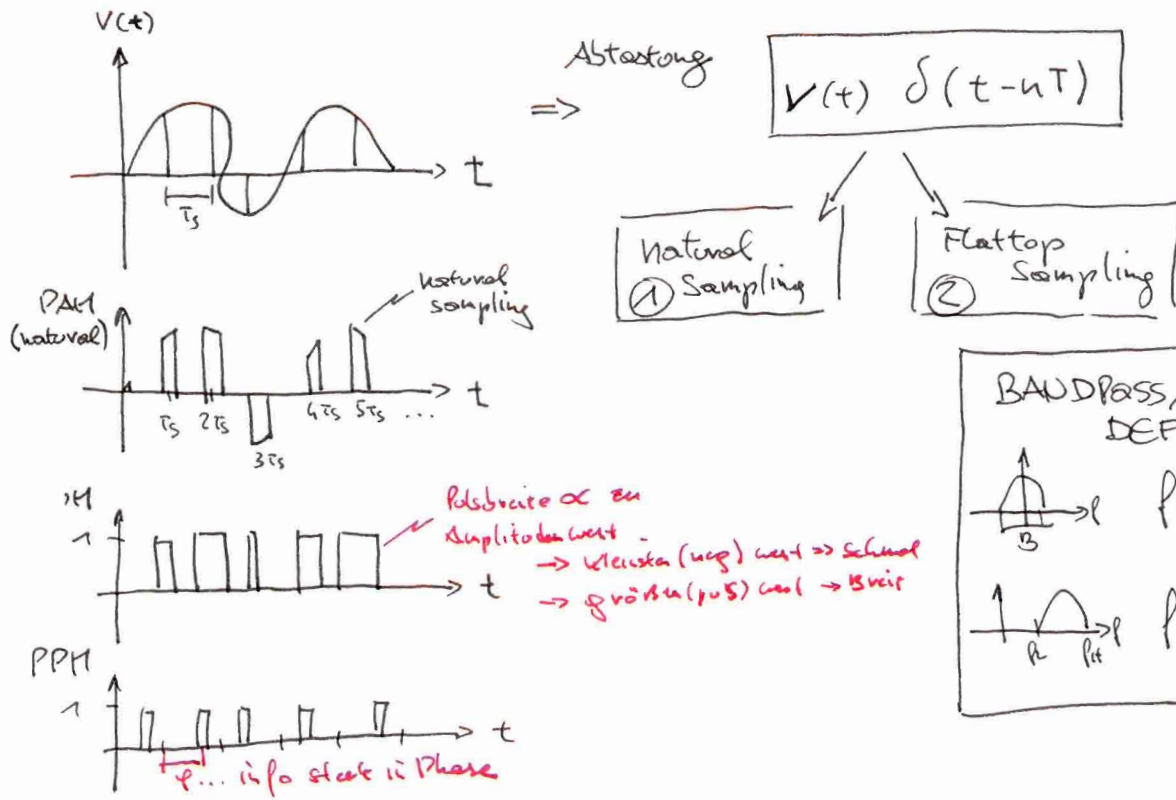


verbreitern sich die  
Spektralen Pulse  $\Rightarrow$  mehr Bandbreite

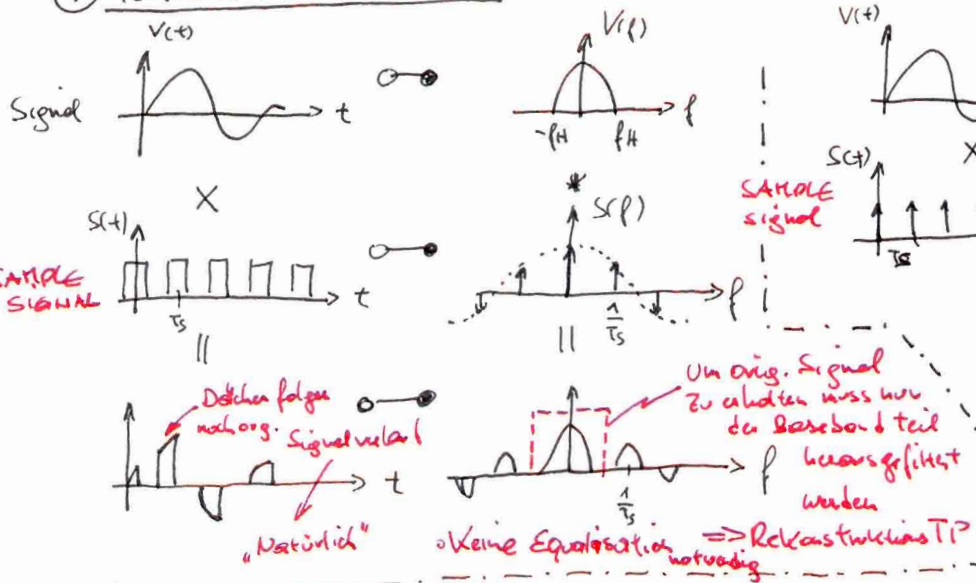
daraus folgt:  $T_0 B = 1$  fundamental wichtig!

# PCM Puls Code Modulation

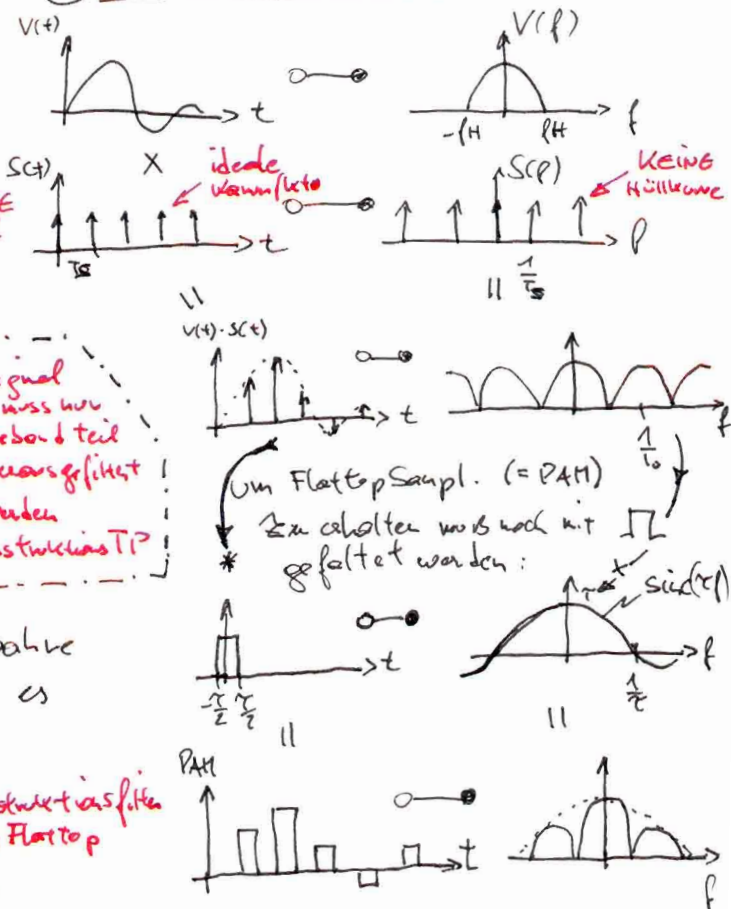
: vom analogen Signal  $\longrightarrow$  Binären Bitstrom



## ① NATURAL SAMPLING



## ② FLATTOP SAMPLING (=true PAM)



UM Beim Flat-Top-Sampling das wahre Signal wiederherstellen zu können muß es Equalisiert werden



## BAND PASS SAMPLING

- Bei Bandpass-Signalen ist das normale Nyquisttheorem  $f_s \geq 2 f_H$  nicht zu streng, es kann mit einer kleinere Frequenz abgetastet werden.

$$2B \left( \frac{Q}{n} \right) \leq f_s \leq 2B \left( \frac{Q-1}{n-1} \right)$$

- ist  $Q$  ganzzahlig:  $n = Q$
- ist  $Q$  nicht ganzzahlig  $\Rightarrow Q$  abrunden  $= n$

$n \dots$  Entwurfsparameter  
 $Q = \frac{f_H}{B}$  (falls nicht mehr einfällt  $\Rightarrow$  verknüpf. durch Nyquisttheorem bei  $n=1$ )  
 $\downarrow$   
 wird aus  $Q$  bestimmt.

## SIGNAL TO QUANTISATION NOISE - RATIO $SN_{QR}$

$$SN_{QR} = M^2 - 1$$

$M \dots$  Anzahl d. Quant. levels

## SETZT WIRKLICH PCM:

wird ein PAM-Quantisiert (z.B. 3bit)

$$SN_{QR} = 4.8 + 6n - \epsilon \quad [\text{dB}]$$

für Lineares PCM  $\uparrow$   $n$ -Bit Auflösung  $\rightarrow$  273 dB S/N bei 10 dB .. Spread

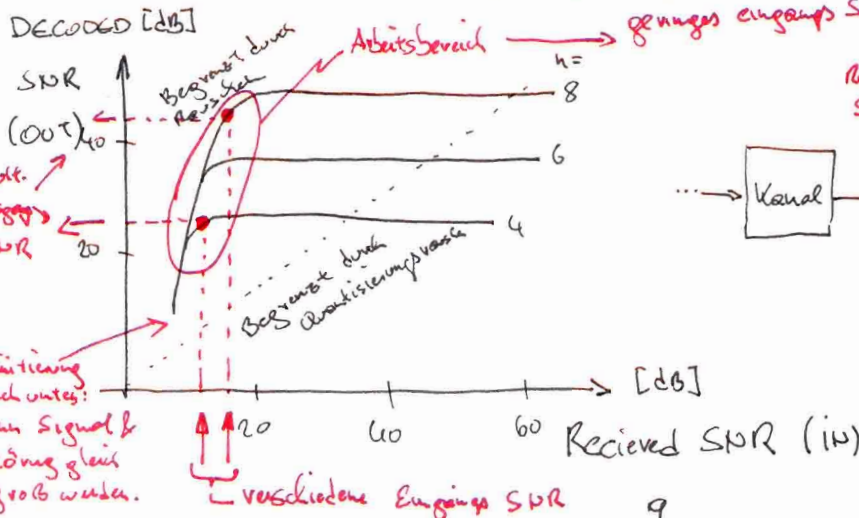
(nur quant. noise)

## SNR für kodiertes PCM

- $n$  gleichwahrscheinlich ekannte Fehlermöglichkeiten (nur 1 Fehlerhaftes Bit / word)  $\rightarrow P_e$

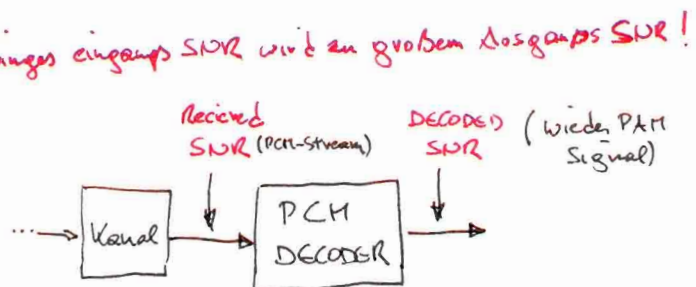
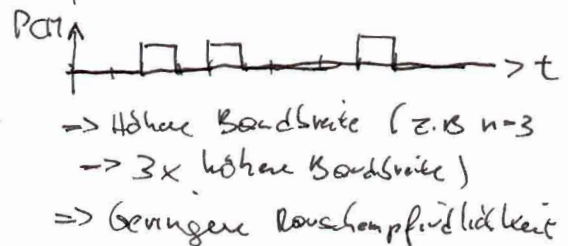
$$SNR_{\text{code}} = \frac{M^2 - 1}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

(quantisierungs & decodierungsnoise)



## PCM-stream

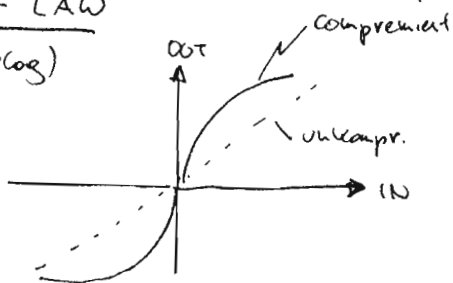
| 001 | 010 | 001 | ...



## COMPANDED PCM

- Ziel: Quantisierungsrauschen zu senken, SNR zu erhöhen

$\mu$ -LAW  
( $\rightarrow \log$ )



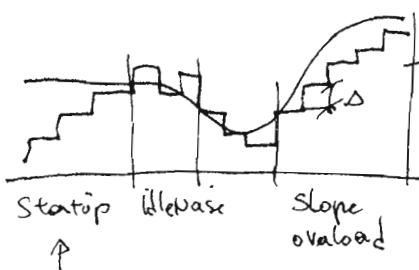
- kleine Signalwerte werden höher aufgelöst als große

## BAUBREITENREDUZIERENDE TECHNIKEN

- 1)  $\Delta$ -PCM: Es wird nur die Differenz vom vorhergehenden zum aktuellen übertragen (trägt viel weniger Information)
  - ⊕ Datenreduktion
  - ⊖ Schlechtere Dynamik als Lineares PCM (kann nicht so gut auf sich rasch ändernde Signale reagieren)
- 2) Differenzielles -PCM: Geht von starker Redundanz im Signal aus. Hat einen (transversales Filter) "Schätzer" = gewichtete Summe vorheriger im Sender & Empfänger und extrapoliert den nächsten Wert. (Die Koeffizienten der gew. Summe sind fixe Konstanten). Wenn das wirkliche Signal "auftaucht", wird die Abweichung gemessen & übertragen.
- 3) Adaptives Differenzielles -PCM: Ist eine Weiterentwicklung von 2): Die Koeffizienten der gew. Summe werden auch angepasst (und müssen natürlich auch übertragen werden).

Z.B. 64 kbit/s companded PCM  $\rightarrow$  32 kbit/s ADPCM

## 4) Delta-Modulation-PCM

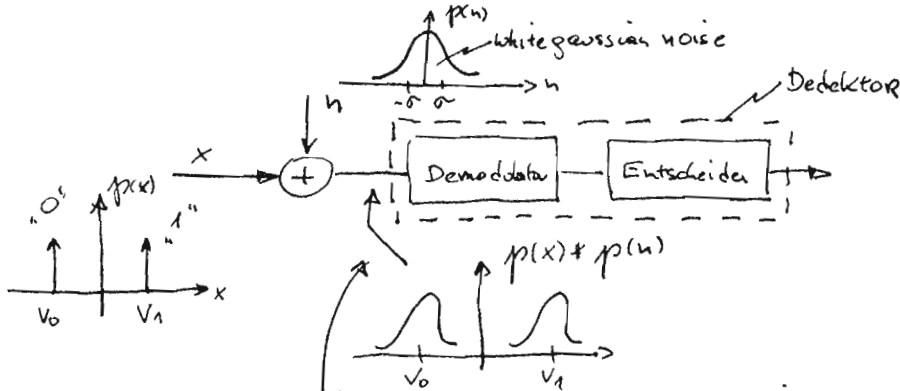


- Quantisieren "1bit"  $\rightarrow$  gibt nur rauf oder runter.
- Eine "Vorhersageeinheit" sagt, daß das nächste Sample gleich dem vorhergehenden (aktueller) ist = Delay
- Dieses verzögerte Sample wird mit dem aktuellen verglichen & ein Comparator entscheidet rauf oder runter  $\Delta$ .

## 5) Adaptive Delta-Modulation-PCM

- Um Slope overload zu bekämpfen wird der  $\Delta$ -Anstieg variabel gemacht.

# BASISBANDTRANSMISSION



addition von 2 unabhängigen Zufallsvariablen ist gleich der Faltung bei der Wkvt. Dichte fkt

Krit

Gaussian Noise Power  $N = \sigma^2$

Normalised Peak Power  $SNR_{Z, uni} = \frac{\Delta V^2}{2}$

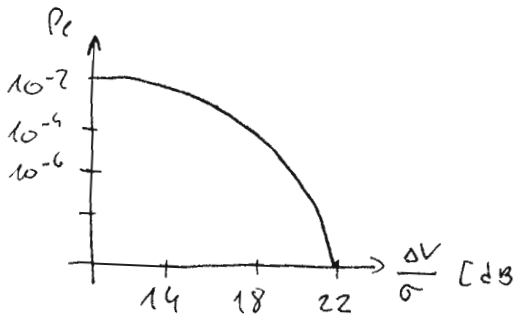
$$\frac{\Delta V}{\sigma} = \sqrt{2} \left( \frac{SNR_{Z, uni}}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{in } P_e \text{ Formel einsetzen}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{SNR_{Z, uni}}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

Für Polare Signalisierung

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{SNR_{Z, Polar}}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

Abhängigkeit  $P_e$ :  $\frac{\Delta V}{\sigma}$

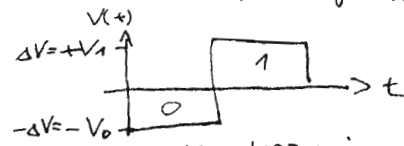


$$P_{e1} = P_{e0} = P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\Delta V^2}{2\sigma^2} \right) \right]$$

Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_e$

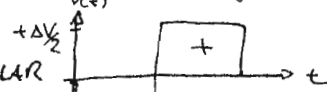
- für unipolare
  - für Polare
- } signale

$\Delta V$ ... Spannungsdiff.  $V_1 - V_0$



$$S = \frac{S_1^2 + S_0^2}{2} = \frac{\Delta V^2}{2}$$

~~$S = \frac{\Delta V^2}{2}$~~



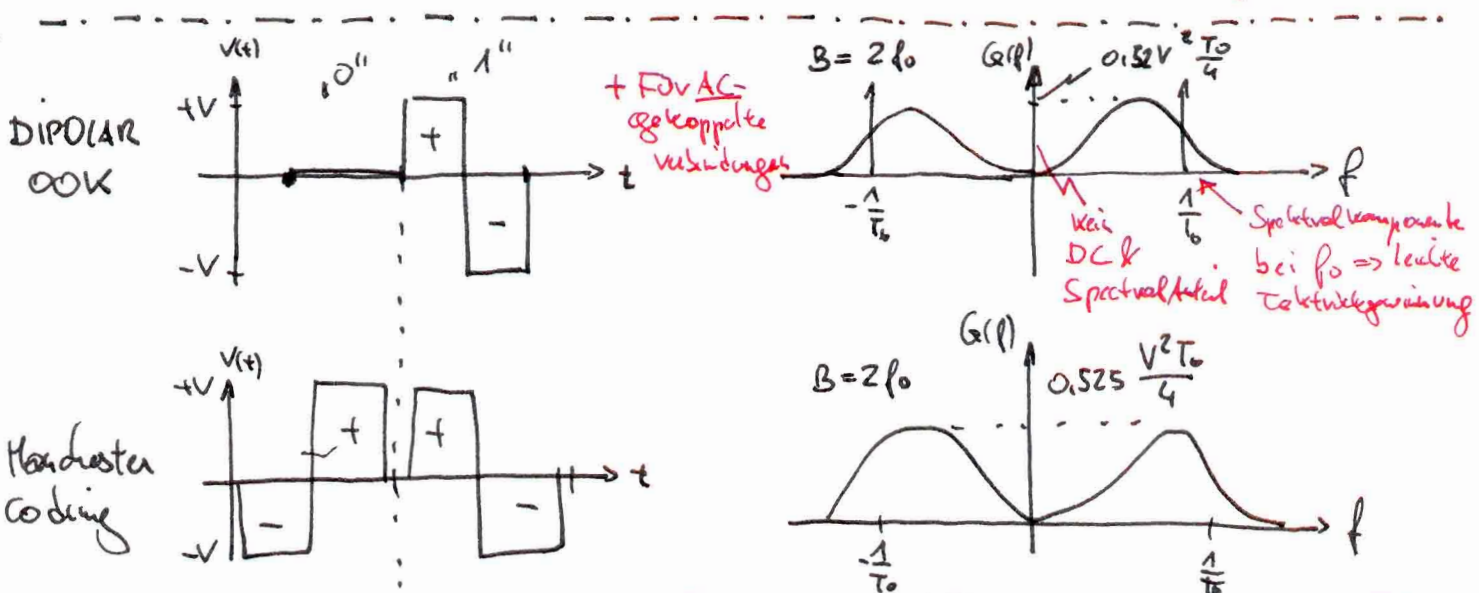
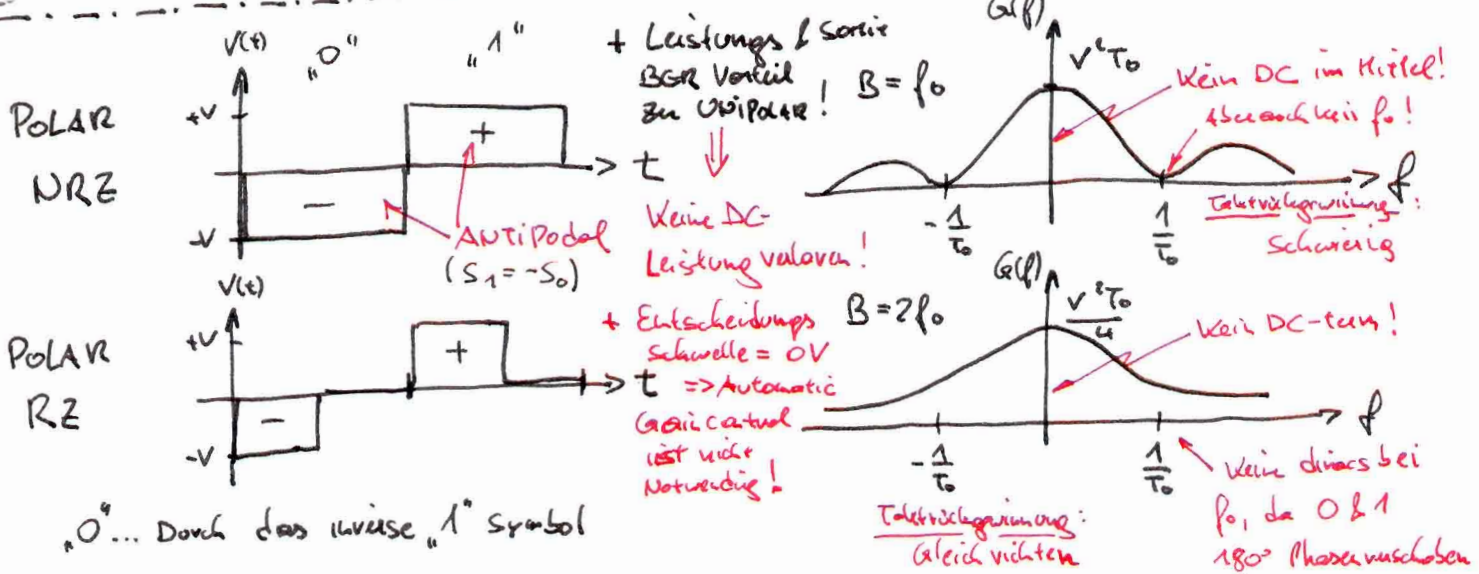
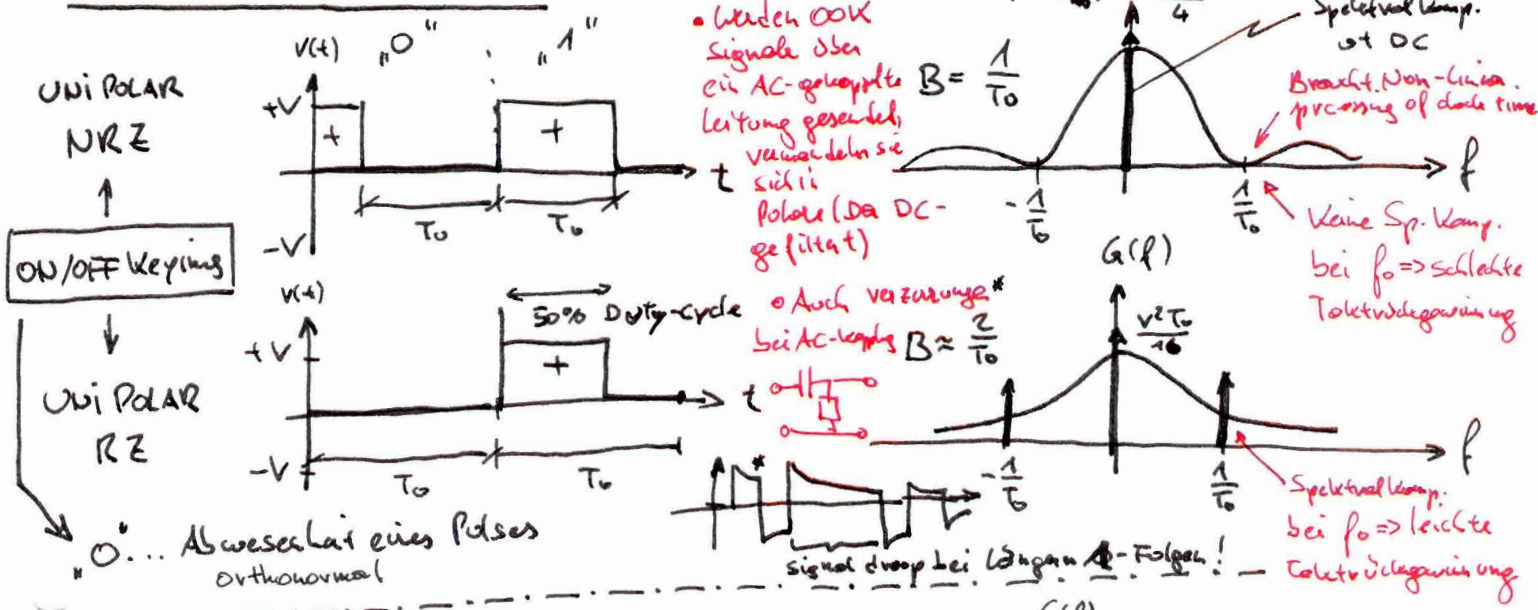
$$S = \frac{S_1^2 + S_0^2}{2} = \frac{\left(\frac{\Delta V}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta V}{2}\right)^2}{2} = \frac{\Delta V^2}{2}$$

$$S = \left(\frac{\Delta V}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{N} = ?$$

$$\frac{\Delta V}{\sigma} = 2 \left( \frac{S}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$$

LINE CODING: Wahl der  
Hauptform für 0 & 1  
= Basisband Modulation

## LINE CODE SYMBOLS


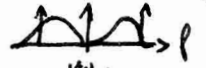

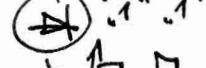
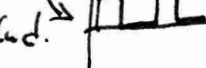
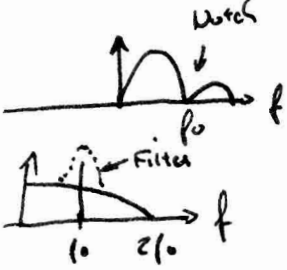


Atti... Alternate Mark Inversion, HDB3, wechseln die Polarität des 1-Symbols & lassen Code-Verluste ein bei zu langer 0 oder 1 Folgen.

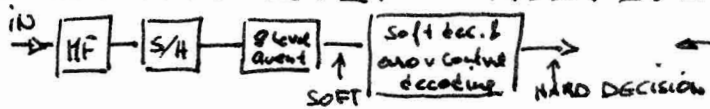
$\rightarrow$  Bi POLAR RZ

noch!

## TAKTRÜCKGEWINNUNG (TRG)

- Wird im Empfänger implementiert, um zusätzliche Clock-Leitung zu vermeiden.
  - Unterschiedlich bei den verschiedenen Line-Codierungsarten.
  - Line Codes mit Spektralen peak (Sinusanteil) lassen sich leicht durch schmalbandiges Filter zurückgewinnen. z.B.
    - UNIPOLAR RZ 
    - DIPOLAR OOK 
  - Bei BIPOLAR (Polar) RZ: 
    - Wird gleichgerichtet für TRG 
    - wie bei HDB3 1-Sym. abwechselnd. 
- 
- In anderen System TRG durch Null-Durchgang -detektion des Signals
  - TIME-SITTER: Zeitversatz der Symbole
  - Allgemein wird ein Oszillator auf den Takt eingestrichen, um in längeren 0-Pausen den Takt mit seiner natürlichen Schwingung aufrecht zu erhalten

## ENTSCHEIDUNGSTHEORIE



- SOFT: ~~2 Stufen (0, 1)~~ Mehrere Stufen (multilevel) (z.B. 8)
- HARD: 2 Stufen (0, 1)

### 2 Haupt-Entscheidungskriterien

#### 1) BAYES: Für binäre Kommunikation

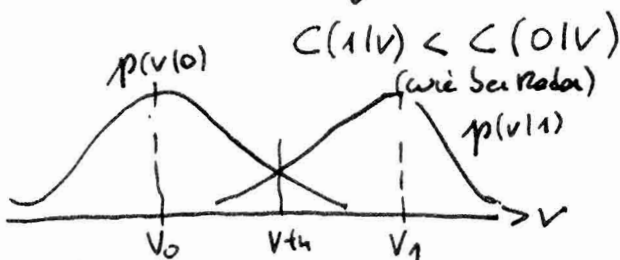
- Setzt a priori -Verteilung des Datenstromes voraus (Quellen-Statistik)

$$\frac{p(V|0)}{p(V|1)} < \frac{C_0 P(1)}{C_1 P(0)} = L_{th}$$

Likelihood threshold (z.B. 1 bei Max. Likelihood)

$C_0 \dots$  Kosten für Falsche Null  
 $P(1) \dots$  Wahsch. dass 1 geschickt wurde  
 $C_1, P(0) \dots$

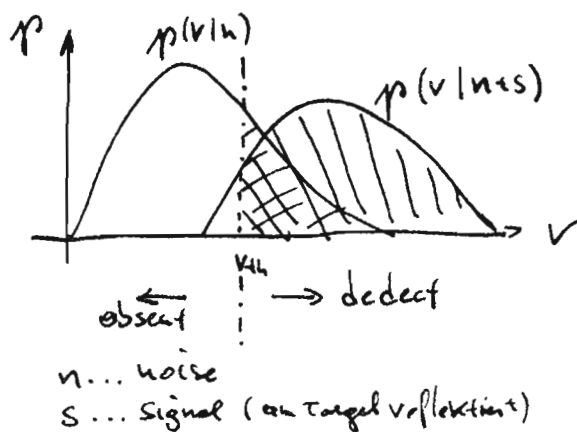
$p(V|0) \dots$  bedingte W. dichte, dass Spannung  $V$  gemessen wenn 0 geschickt





## 2) Nayman-Pearson

- Keine „Vorhersage (a priori)“ notwendig, nur a posteriori ( $P(0, v)$ )
- Spannung  $v$  gemessen, sollte eine Null sein
- Wird bei Radar eingesetzt, wo natürlich keine Quellen-Verteilungs-Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. (auch bei  $C_0 \gg C_1$ )
- Schlimme einen zu übersehen!



$$P_D = \int_{v_{th}}^{\infty} p(v|h+s) dv$$

$$P_{FA} = \int_{v_{th}}^{\infty} p(v|h) dv$$

## OPTIMUM FILTERING

### 2 Techniken:


1) PULS SHAPING

vor der Übertragung  $\Rightarrow$  ISI frei

2) SNR Max.

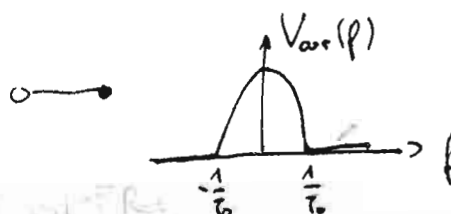
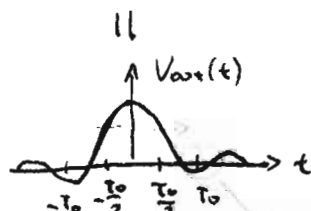
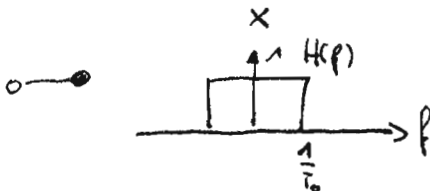
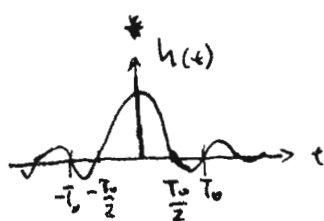
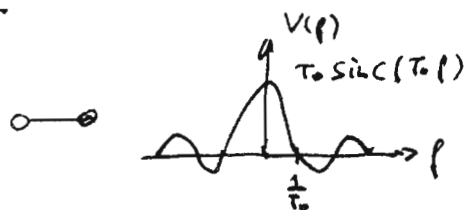
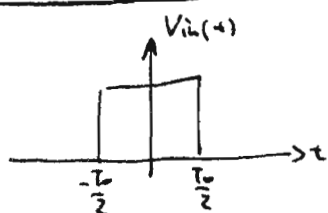
bei der Abtastung beim Empfänger  $\Rightarrow$  MF Kanal

### Motivation:

Bandlimitierung durch schlechten Kanal (RC-Tiefpass )

$$V_{out}(t) = V_{in}(t) * h(t)$$

$h(t) \dots$   $\sqrt{f}$ -Filter (RC)



o An den Abtastzeitpunkten  
würde ein vorhergegangener  
Puls einen Beitrag liefern

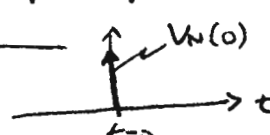
BER  $\downarrow$

ideale Bandlimitierung

## ISI-FREIES SIGNAL:

- Hat bei allen Abtastzeitpunkten (bis auf einen) den Wert 0.  
( $\Rightarrow$  für alle anderen Zeitpunkte ist's ja egal)

$V_N(t)$  ... ISI free signal       $nT_0$  ... Abtastzeitpunkte

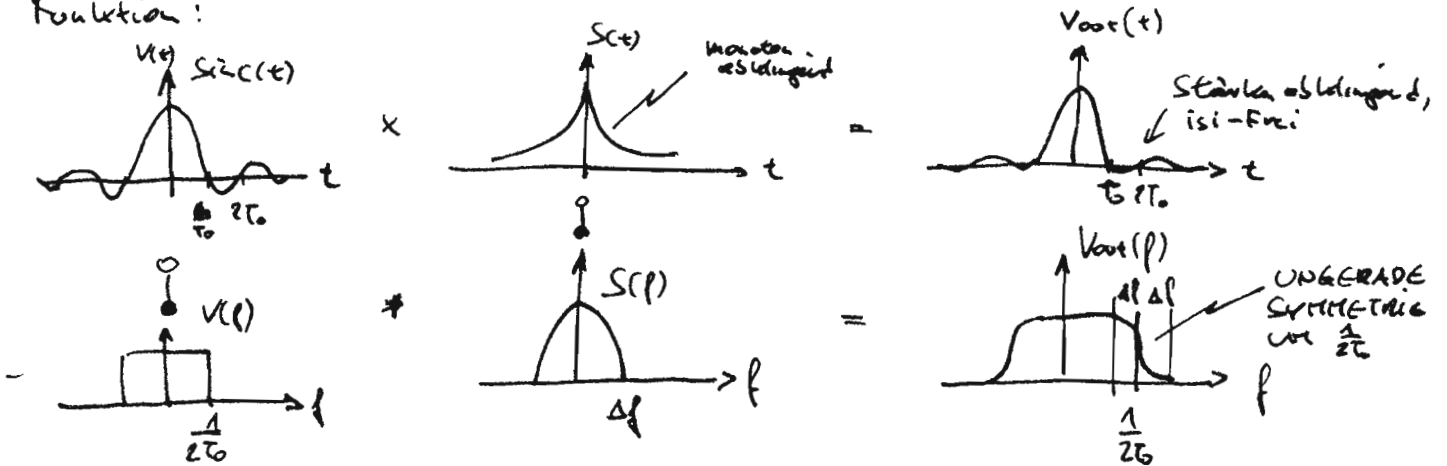
$$V_N(t) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)}_{\text{Abtastung von}} = V_N(0) \delta(t) \quad \text{ergibt}$$


Beispiel für ISI-freies Signal: Sinc(t)

- sind aber nicht realisierbar  $\rightarrow$  kein linearphase Lowpass Filter möglich
- klingt nur mit  $1/t$  ab

Praktischere Form, die schneller abklingt:

Kombination des Sinc(t) - Pulses mit einer streng monoton abklingenden Funktion:



$\Rightarrow$  Andere, besser def. für ISI-freie Signale:

ISI-freies Signal hat im Frequenzbereich ungerade Symmetrie um  $\frac{1}{2T_0}$ .

Man "baut" aus einem Low-pass-Filter & der ungeraden Symmetrie die ISI-freien Signale

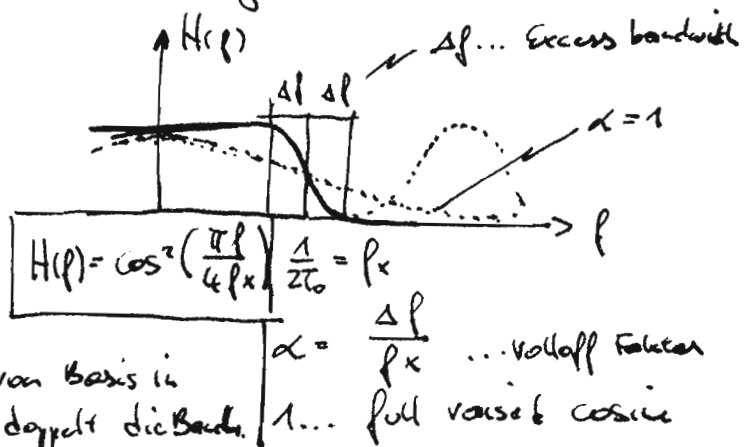
$\Rightarrow$  Raised Cosine Filter

$$B = \frac{1}{2T_0} (1 + \alpha) \quad \dots \text{Bandbreite}$$

$$B = 2 \cdot \frac{B_s}{2} (1 + \alpha) \quad \dots \text{Bandpass}$$

o Phase ist linear

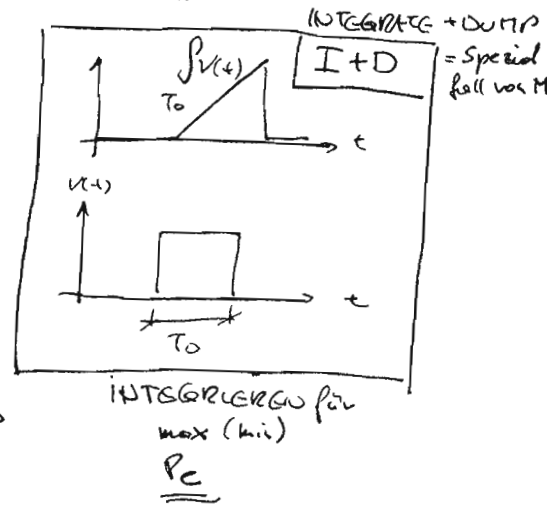
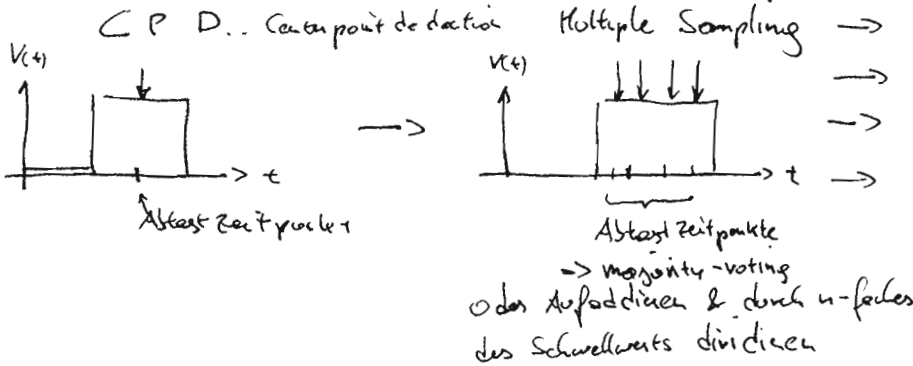
$\hookrightarrow$  transf. von Basis in Bandpass doppelt die Bandw.



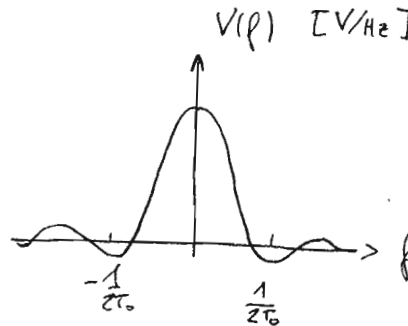
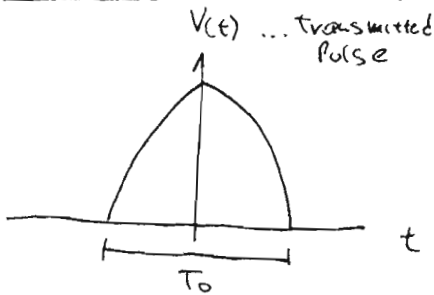
# MATCHED FILTER

S 280

- Der MF liegt vor dem S & H - Glied im Empfänger und maximiert das SNR



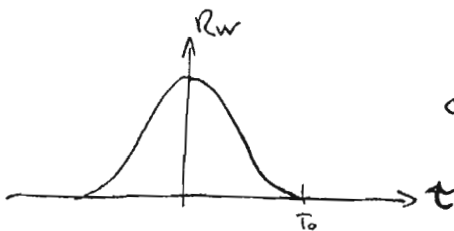
## Herleitung:



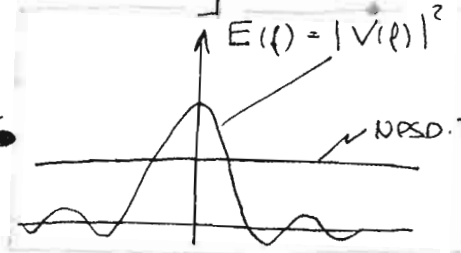
FÜR max. SNR muss das Quadrat des Ampl. resp. des MF gleich der Form des Energiedichtespektrums des Pulses sein:

$$|H(f)|^2 = K^2 |V(f)|^2$$

Auto-Korrelationsfkt.  $R_W(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V(t) V(t-\tau) dt$  [V<sup>2</sup>] ← für periodische, Puls ist aber transient:



Wiederkehrende



$$R_W(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) V(t-\tau) dt$$
 [V<sup>2</sup>s]

NPSD · T<sub>0</sub> = EDS des Rauschens

## Einschub: AKF, KF

1) Korrelationsfunktion: Ähnlichkeitsmaß zweier Funktionen (TRANSIENT)

$$R_{vw}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) w(t-\tau) dt \Rightarrow \text{Ähnlichkeit von } v \text{ und } w \text{ um } \tau \text{ verschoben}$$

⇒ ist aber von der Amplitude und der Ähnlichkeit abhängig. Um die Amplitudenabh. wegzuschaffen wird die KF normiert, ⇒ div. durch (normalisierte) Energien

$$g_{vw}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v(t) w(t-\tau) dt}{\sqrt{\int |v(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int |w(t)|^2 dt}}$$

Signalenergie

$\begin{cases} +1 \dots \text{bei exakter Gleichheit} \\ 0 \dots \text{orthogonale Funktionen (z.B. sin, cos)} \\ -1 \dots \text{bei exakter Gleichheit wenn 1 fkt negativ} \end{cases}$

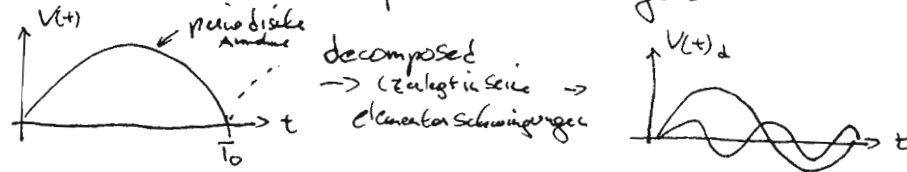


# Übertragungsfunktion HF:

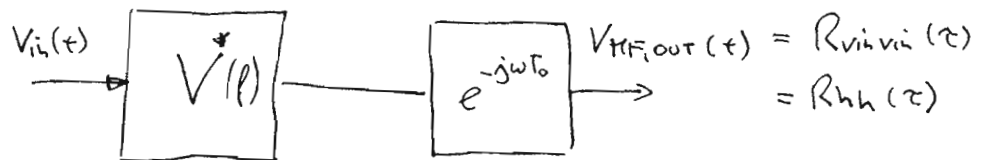
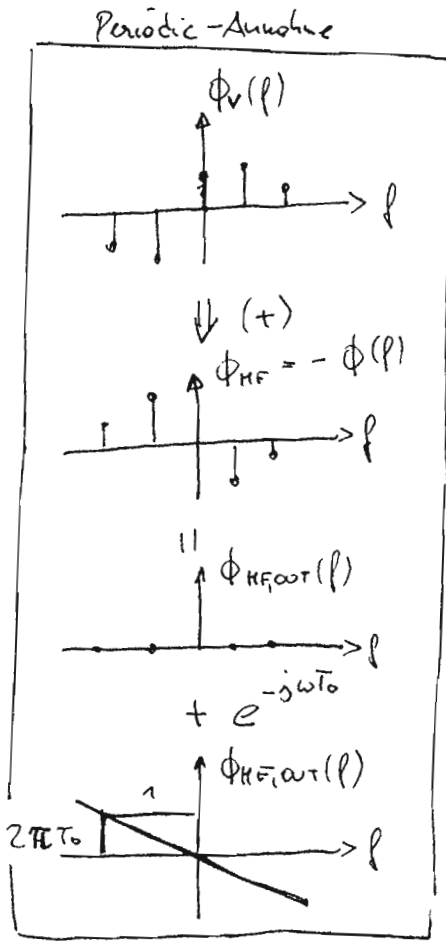
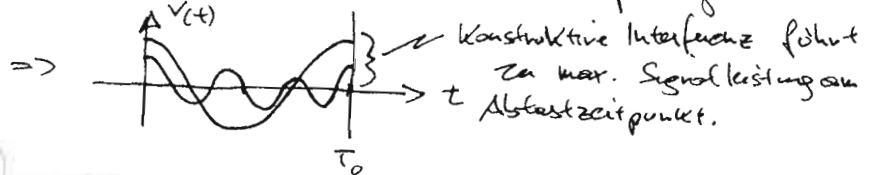
$$|H(f)|^2 = \kappa^2 |V(f)|^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} H(f) = \kappa V^*(f) e^{-j\omega T_0}$$

$$\phi_{HF} = \underbrace{-\phi_V}_{\text{Phasenverschiebung um } T_0, \text{ um den Filter realisierbar zu machen}} - \underbrace{2\pi f T_0}_{\text{Phasenverschiebung um } T_0, \text{ um den Filter realisierbar zu machen}}$$

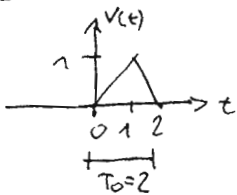
Erzeugung eines Nullphasenspektrums am Ausgang des HF um konstruktive Interferenz zu erzeugen



mit  $-\phi_V$  werden alle Phasen in  $f$  gelöst



BSP: HF-Ampl. response of  $\sim(t-1)$



$$V(f) = \text{sinc}^2(f) e^{-j\omega T_0} = 1$$

$$H(f) = \kappa V^*(f) e^{-j\omega T_0} = \text{sinc}^2(f) e^{j\omega} e^{-j\omega 2} = \underline{\underline{\text{sinc}^2(f) e^{-j\omega}}}$$

Die Impulsantwort  $h(t)$  des HF ist:

mit der inv. Fouriertransformation:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j\omega t} df$$

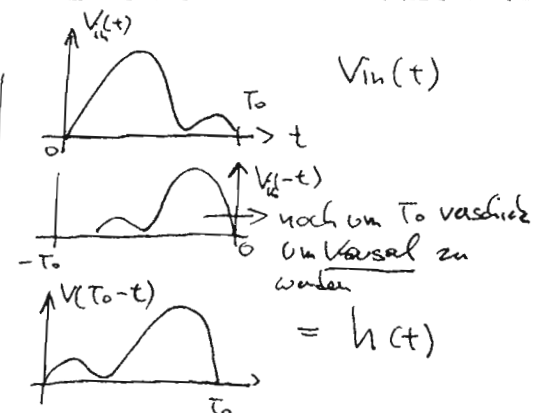
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j\omega t} df \quad \text{mit } H(f) = \kappa V^*(f) e^{-j\omega T_0}$$

$$h(t) = \kappa \left[ \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j\omega (T_0 - t)} df \right]^* = \kappa V^*(T_0 - t)$$

$$h(t) = \kappa V_{in}^*(T_0 - t)$$

Verzögerung  $\uparrow$  Zeitinvers

$\Rightarrow$  Faltung von  $V_{in}(t) * h(t) = R_{HH}(t) = V_{out} = R_{HH}(t) = R_{HH}(t)$   
Ausgang des HF ist die Autokorrelationsfkt.  
17



2) Kreuzkorrelation: Ähnlichkeitsmaß zweier Funktionen (PERIODISCH)

$$R_{pq}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) q(t-\tau) dt$$

Normalisierte Version:

$$g_{pq}(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) q(t-\tau) dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |p(t)|^2 dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |q(t)|^2 dt}} \quad \left. \begin{array}{l} g_{pq}(\tau) \text{ ist wie} \\ \text{die } R_{pq}(\tau) \text{ bei} \\ p, q \text{ normalisiert auf 1 Weiss} \end{array} \right\}$$

Norm. Leistung von  $q$

### 3) AUTOKORRELATIONSfunktion

-Ähnlichkeit des Signals mit einer um  $\tau$  verschobenen Kopie v. sich selbst.

$$R_W(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) v(t-\tau) dt \quad \dots \text{ für Transiente Signale } [V^2 s] \Rightarrow \text{Energie}$$

$$R_W(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} v(t) v(t-\tau) dt \quad \dots \text{ für periodische Signale } [V^2] \Rightarrow \text{norm. Leistung}$$

Eigenschaften:

- 1)  $R_W(\tau)$  ist real
- 2)  $R_W(\tau)$  ist symmetrisch um  $\tau=0$
- 3)  $R_W(\tau)$  hat sein Maximum bei  $\tau=0$
- 4)  $R_W(\tau)$  Zusammenhänge:

TRANSIENT  $[V^2 s] \Rightarrow$  Energiesignale

$$R_W(\tau) \longleftrightarrow E_W(f)$$

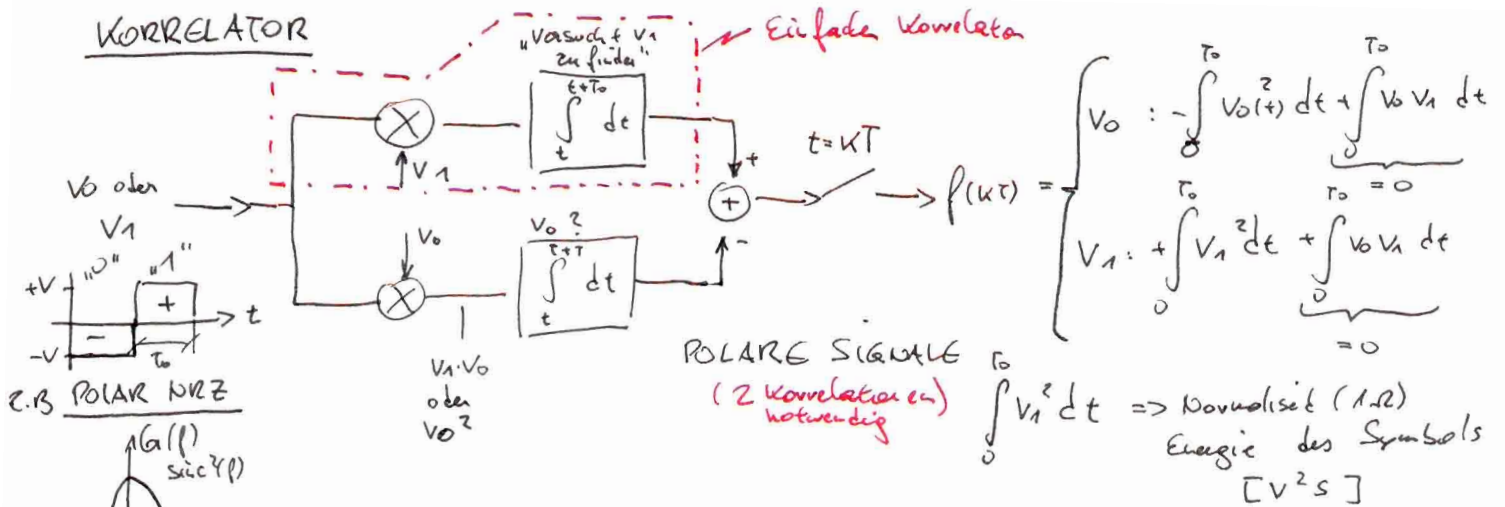
PERIODISCH  $[V^2] \Rightarrow$  Leistungssignale

$$R_W(\tau) \longleftrightarrow G_W(f)$$

WIEGNER-KINTCHING  
Theorem  
(S123)

weiter matched Filter

## KORRELATOR



SNR :  $\frac{S}{N} = \frac{2 E_s}{N_0}$

$N_0 \dots$  LDS des Rauschens (z.B. white PSD =  $10 \text{ nV}^2/\text{Hz}$ )

$\Rightarrow$  SNR hängt NUR von der Signalenergie des Symbols ab und vom LDS des Rauschens.

Gewinn HF zu CPD :

$$\frac{\left(\frac{\Delta V}{\sigma}\right)_{\text{HF}}}{\left(\frac{\Delta V}{\sigma}\right)_{\text{CPD}}} = \sqrt{2} (T_0 B)^{\frac{1}{2}}$$

• Vorteil: Einsparung an Sendeleistung (z.B. 3dB) mit d

Unterschied HF & Korrelator



- Wenn perfekt synchronisiert bieten beide das selbe Ergebnis
- Korrelator braucht unsetzung ins Reisband.

## ROOT RAISED COSINE

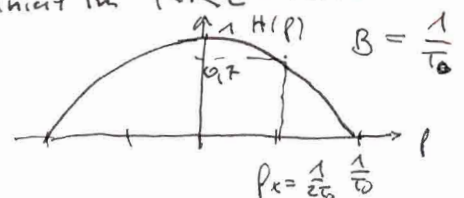
Da bei vernachlässigung des Übertragungskanals ( $H_K(f) = 1$ ) die Nyquist-Filtrung für ISI-Freiheit zwischen Sender & Empfänger aufgeteilt werden kann (also nicht nur beim Sender) und kann

$$H_T^*(f) = H_R(f) \quad \text{wähle kann,}$$

Kann man Nyquist-Filtrung und Matched Filter-Filtrung kombinieren im RRC-Filter realisieren

$$H_T(f) = H_R(f) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi f}{4 f_x}\right)}$$

$$f \leq 2 f_x$$

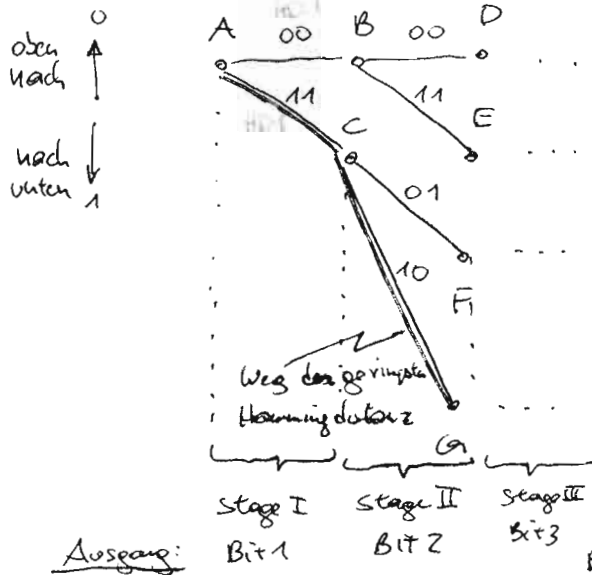


# VITERBI DEKODIERUNGSLGORITHMUS

- Dekodiert Faltungscodes (entstehen durch die Faltung des Eingangssignals mit den (sind keine systematischen impulsantwort des encoders)
- Dekodiert große Datenblöcke auf einmal mit der nearest neighbour Strategie

minimale Hammingdistanz (HD)

Ablauf: (über Trellis Diagramm)



Code Folge am Eingang:

Eingangs: 10 10 00 ...  
Ausgangs: 1011 211 3111 4111 ...  
aufteilen in 2er Blöcke

stellen(bit)weise vgl.  
und zählen 1010010  
0101010  
111111 = 6

=> wird nach dem decodieren nur mehr halb so lang  
10 bits -> 5 bits

Bit I: Block 10: war es eine 0 (oben Zweig) -> zu B  
-> HD 00 - 10 = 1  
war es eine 1 (unten Zweig) -> zu C  
-> HD 11 - 10 = 1  
=> Beide HD übertragen  
(da beide HD gleich => beide Pfade gleichwahrsch.)

Bit II: Block 10: ausgehend von B & dem von C  
①: war es eine 0 (oben) -> D HD = 1  
1 (unten) -> E HD = 1  
②: war es eine 0 (oben) -> F HD = 2  
1 (unten) -> G HD = 0 !

Bit III: etc.

Das decodierte Ausgangs bitmuster setzt sich nun aus dem Weg durch das Trellis-Diagramm zusammen. In diesem Fall: A -> C (nach unten): 1  
C -> G (nach unten): 1  
: (nach oben): 0  
:

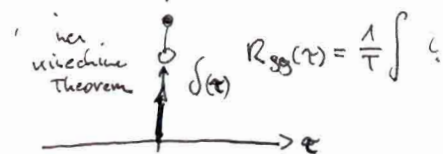
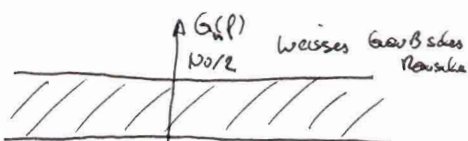
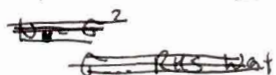
# BAUDPASS MODULATION eines Trägersignals

- Sinus Signale werden moduliert auf verschiedenste Arten

Informationssignal moduliert Träger

Einschub Rauschen:

Noise Power Spectral Density  $N_0$



$N_0$  ... Normalisierte Gaußsche Noise Power

$$N = \sigma^2$$

$\sigma$  ... Standardabweichung der Noise-Spg  
(da die Noise-Spg keinen DC-Wert hat ist  $\sigma = \sqrt{N_{RMS}} \Rightarrow N = V_{RMS}^2 = \sigma^2$ )

- Beweggründe für die Modulation auf

(IF) ... Intermediate Frequency (Zwischen-Freq)

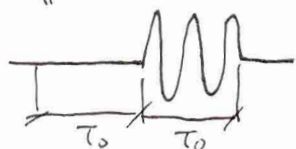
(RF) ... Radio Frequency

- ⊕ Günstigere Filter
- ⊕ Freq. Multiplex
- ⊕ effiziente Antennen
- ⊕ erlaubte Bänder, gekaufte Bandbreite irgendwo

1) BASK Binary Amplitude Shift Keying (+OOK)

"0" "1"

OOK:

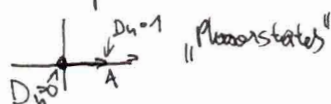


$$V_1(t) = A \sqrt{\left(\frac{t}{T_0}\right)} \cos(\omega t)$$

$$V_0(t) = 0$$

Allgemein: 2 verschiedene Amplituden.

Phasendiagramm OOK:

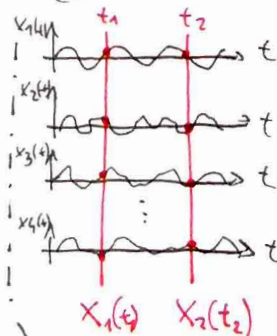


Random Prozess  $X(t)$

Aus einer Schaar von Samplefunktionen  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$

Wird zu einem Zeitpunkt jeweils der Wert der Funktionen zusammengefasst ist  $X(t)$

(besteht aus  $n$  Werten (der Ensemble))



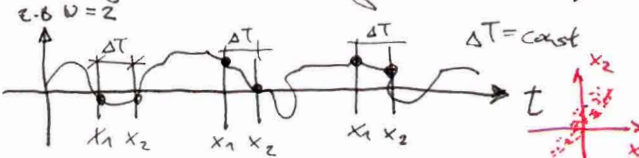
$X_1(t_1)$   $X_2(t_2)$

Verschiedene Rand. Prozesse

## Gaußsche Prozesse:

im trugen Sinne: (thermisches Rauschen)

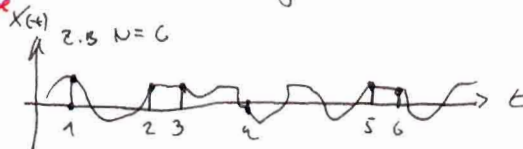
- Wenn alle Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  eine  $N$ -Dimensionale gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung haben strenger Gauß = ergodischer Gauß



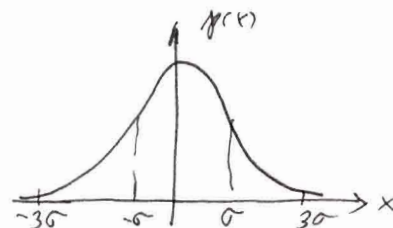
Die Samples  $X_1, X_2$ , die immer mit dem gleichen Abstand  $\Delta T$  voneinander den Zufallssignal entnommen wurden haben eine  $N$ -D.H. gemeinsame Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung - (Kontingenzplot) SCATTERGRAMM

im weiteren Sinne:

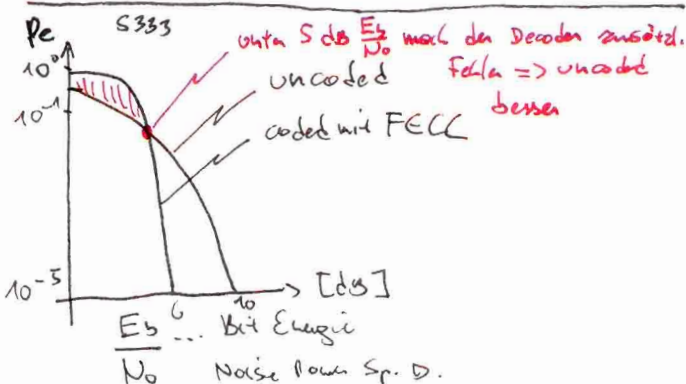
- Es werden nicht mehr in gleichen Abstand für die  $N$ -sten Zufallsvariablen Werte entnommen, sondern einfach  $n$ -Stücke an einem beliebigen Zeitpunkt:



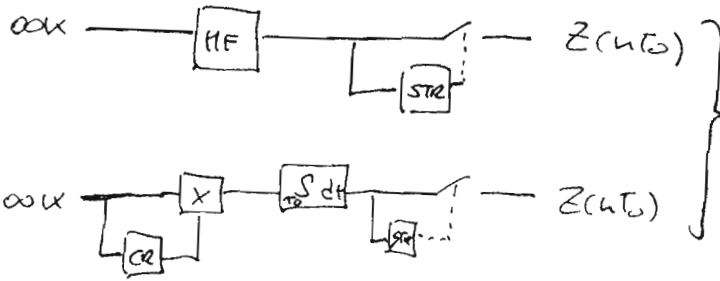
Sind diese  $N$ -Stück Werte normal (Gauß) verteilt ist die gesamte Sample funkt  $X(t)$  ein Gauß-Prozess.



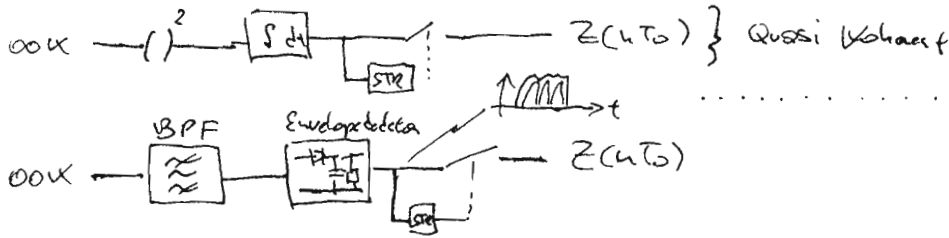
Threshold-Phänomen bei Forward Error Control Cod.



## OOK-Empfänger

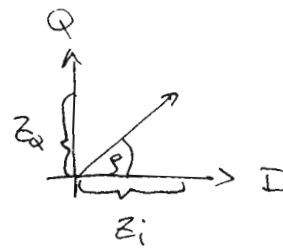
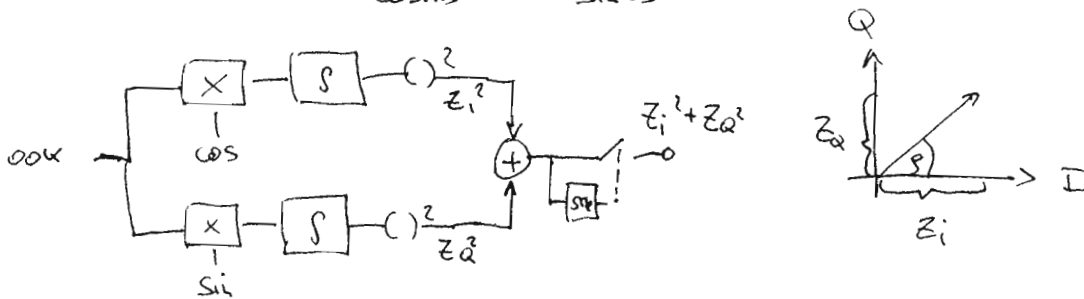


Detektor:



Kohärente Receiver  
↳ Benötigt info über Phase

1/Q-Receiver: Inphase / Quadraturphase (ähnlich wie bei Polar NRZ Korrelator)  
cosinus sinus



Inkohärent  
→ keine info über die Phasenlage des Trägersignals notwendig,  
S: 1 dB schlechter als kohärent  
⇒ trotzdem vorteilhaft!

- Scheint wesentlich aufwendiger, ist aber in Vgl. zu Filter, etc. kosten günstiger zu implementieren.

Erwartungswert  
mittl. Energie

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} [E_1 + E_0] \quad \text{bei OOK} = \frac{E_1}{2}$$

$$N = N_0 B$$

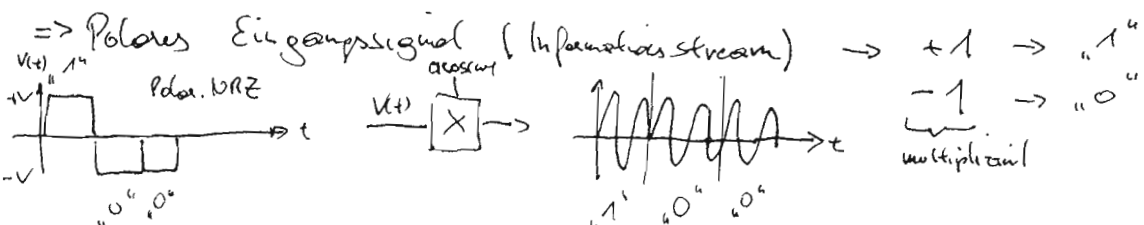
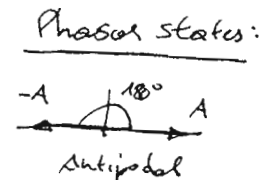
$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\langle E \rangle}{N_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{OOK, IF Modulation BPSK}$$

Für minimale Bandbreite:  $T_0 B = 1 \Rightarrow \frac{\langle E \rangle}{N_0} = \frac{C}{N} \quad \text{C... Mittlere Carrier Power}$

2) BPSK & PRK ⇒ Benötigt natürlich kohärente Detektion (auf Trägersignalsphase ausgepasst)

- Information 0 & 1 wird in Trägerphasenmodulation verpackt

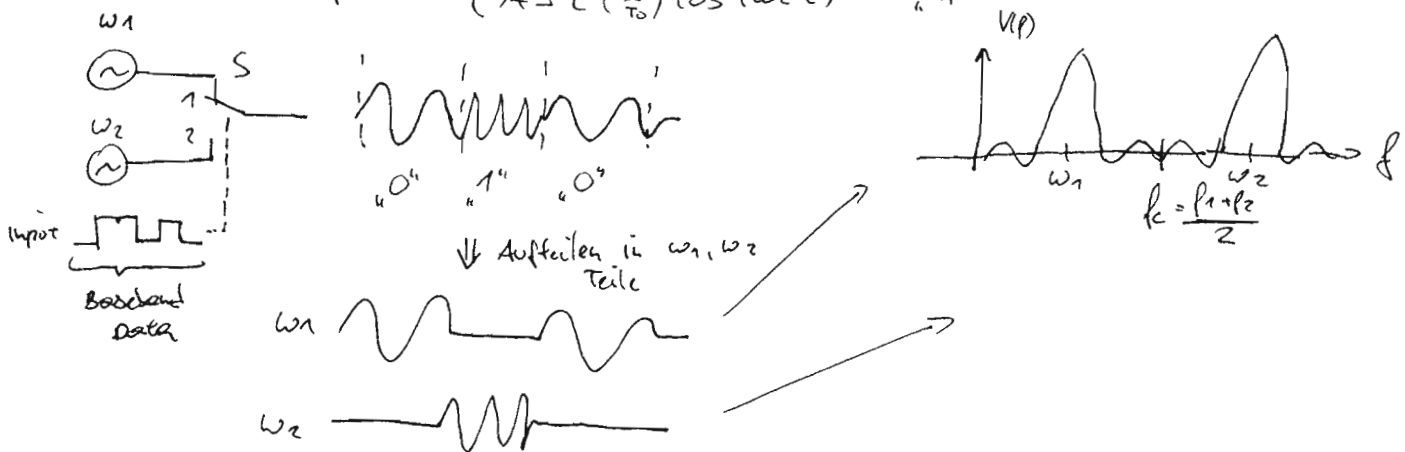
$$f(t) = \begin{cases} A \sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos(\omega t) & \text{"1"} \\ A \sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos(\omega t + \varphi) & \text{"0"} \end{cases}$$



### 3) BINARY FREQUENCY SHIFT KEYING

- 0 & 1 als 2 verschiedene Frequenzen darstellen:

$$p(t) = \begin{cases} A \sqrt{\frac{1}{B}} \cos(\omega_1 t) & \text{"0"} \\ A \sqrt{\frac{1}{B}} \cos(\omega_2 t) & \text{"1"} \end{cases}$$



0 kann kohärent und inkohärent detektiert werden (meist inkohärent)  $\rightarrow$  CNR degradation 1dB

- Shannon Hartley channel - Kapazitätstheorem (siehe Datenkomm.)

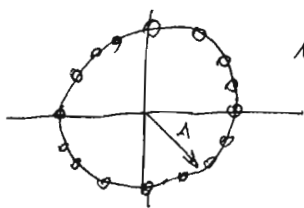
$$R_{max} = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s}$$

$\uparrow$  Kanal mit Bandbreite  $b$

### 4) M PSK M-Phase SHIFT KEYING

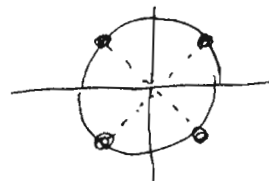
Anstatt 2 Phase States gibt es nun  $M$ -Stück.

Dies wird üblicherweise in einem Konstellationsdiagramm visualisiert:



16-PSK

oder auch 4-PSK = QPSK



realisiert aus 2 PAM Signalen, die Quadratur Signale  $\cos \omega t$  &  $\sin \omega t$

Bitrate:

$$P_b = \frac{P_e}{H} = \frac{P_e}{\log_2(M)}$$

Häufigster Fehler ist natürlich die Verwechslung von 2 benachbarten States



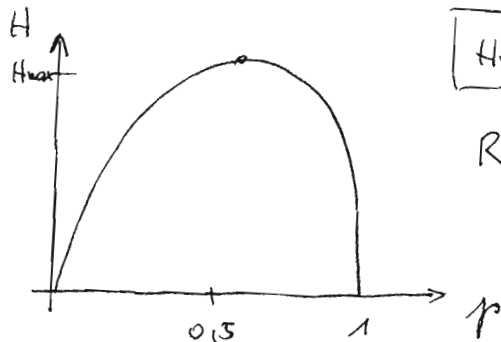
# SOURCE CODING

Informationsinhalt einer message  $I_m = -\log P(m)$

$P(m) = 1 \dots$  kein Informationsgehalt  
 $P(m) = 0 \dots \infty$  viel Info

## Entropie einer binären Quelle (H)

L > Mittlere Menge an Information pro Symbol



$$H_{\max} = \log_2(M)$$

M... Anzahl der Symbole

$$\text{Redundanz } R = H_{\max} - H$$

- Source Coding ändert den Quellen Informationsinhalt nicht. (Dies ist eine Eigenschaft der Quelle)

aber es maximiert die Entropie der Symbole

- & reduziert Fluktuationen in der Informationsrate

- Codeeffizienz:  $\eta_{\text{code}} = \frac{H_{\text{max}}}{H_{\text{max}}} \cdot 100\%$

## HUFFMAN-CODE

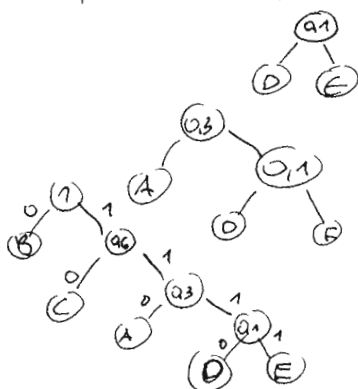
2 Schritte: 1) REDUKTION  
 2) AUFTEILEN

a) Ordnen der Symbole (Stirnreihe) nach Wahrscheinlichkeiten

z.B. M=5 A, B, C, D, E  
 0,2 0,4 0,3 0,05 0,05

B C A D E  
 0,4 0,3 0,2 0,05 0,05

B	C	A	D	E
0,4	0,3	0,2	0,05	0,05
0,4	0,3	0,2	0,1	
0,4	0,3	0,3		
0,4	0,6			
1				



Codewort  
 B: 0 ← kleinstes Symbol für das wahrscheinlichste Symbol.  
 C: 10  
 A: 110  
 D: 1110  
 E: 1111