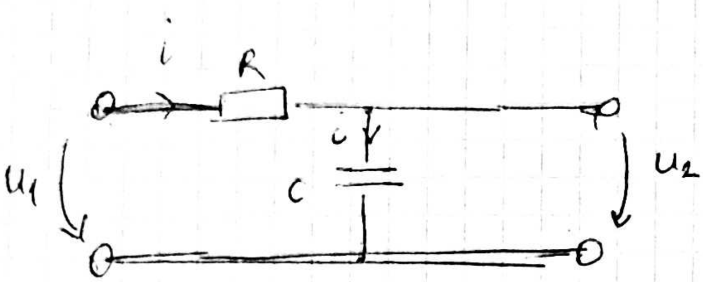
B (1)

a)



b) $$H(j\omega) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{i \cdot \frac{1}{j\omega C}}{i\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} =$$

$$\boxed{\frac{1}{a + j\omega} \circ\!\!-\!\!\circ\ e^{-at} \cdot \varepsilon(t)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{1/RC + j\omega}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)$$

d) Wenn $G(f) = |H(f)|^2$ ausrechnen das ergebnis von f also der frequenz abhängt -> Weißes signal hängt nicht von der frequenz ab -> hat konstantes spektrum. Gefiltertes weißes Rauschen ist kein weißes Rauschen mehr, man bezeichnet es als färbiges Rauschen.

(81)

c) $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{H}(f)|^2 \frac{N_0}{2} \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\omega RC)^2} \frac{N_0}{2} \, df$

$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad df = \frac{1}{2\pi} d\omega \qquad = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\omega RC)^2} d\omega$

$\underline{\omega RC} = \underline{x}$

$RC \, \underline{d\omega} = \underline{dx} \qquad = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{RC} = \frac{N_0}{4\pi RC} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \frac{N_0}{4\pi RC} \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] \cdot \frac{N_0}{4\pi RC}$

$= \frac{N_0}{4RC} = \frac{400 \cdot 10^{-12} \text{ W/Hz}}{4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = \frac{10^{-10}}{10^{-3}} \text{ W}$

$= \underline{10^{-7} \text{ W}}$

$=$

Bsp3

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_S(s)\,ds = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} b s^{n} ds = \int_{-a}^{a} b s^{n} ds$

$= b \cdot \frac{s^{n+1}}{(n+1)} \Big|_{-a}^{a} = b \left[\frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} \right]$

$\rightarrow$ n = ungerade $\quad 1 = b \cdot 0 \quad b = \frac{1}{0}$; undefiniert

$\rightarrow$ n = gerade $\in \{0, 2, 4 \ldots\}$ $\quad 1 = b \left[\frac{2 \cdot a^{n+1}}{n+1} \right]$

$b = \frac{n+1}{2 a^{n+1}}$ weil $a > 0$ auch $b > 0$

* Im angabe steht
$-a \leq s < a$
aber im Integrationsgrenzen
a ist inkludiert ?

b) $\hat{S}_k$ = gleichverteilt $\quad P_{\hat{s}}$ hängt nicht von $\hat{s}$ ab

$\sum_{k=1}^{m} P_k = 1 \quad m \cdot p = 1 \quad p = \frac{1}{m}$; $f_S = b s^{n} = \frac{n+1}{2 a^{n+1}} s^{n} = \frac{3}{2} s^2$

$\int_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k} f(s)\,ds = \int_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k} \frac{3}{2} s^2\,ds = \frac{1}{m} \qquad \frac{s^3}{2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{1}{m}$

$\frac{\hat{x}_k^3}{2} - \frac{\hat{x}_{k-1}^3}{2} = \frac{1}{m}$

$\hat{x}_k^3 - \hat{x}_{k-1}^3 = \frac{2}{m}$ $\longrightarrow$ In matlab einsetzen!

$\hat{x}_k^3 = \frac{2}{8} + \hat{x}_{k-1}^3 \qquad \hat{x}_k = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \hat{x}_{k-1}^3}$

(B3)

b) $\hat{x}_k = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \hat{x}_{k-1}^3}$ $\qquad \hat{x}_0 = -1$

$\hat{x}_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + (-1)^3} = -0.9086$

$\hat{x}_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + (\hat{x}_1)^3} = -0.7937$

$\hat{x}_3 = -0.6300$

$\hat{x}_4 = (4.8) 10^{-6}$

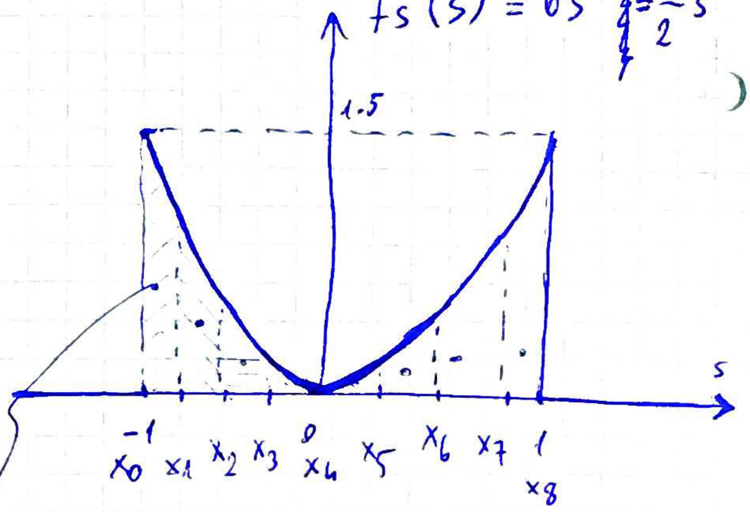
$\hat{x}_5 = 0.63$

$\hat{x}_6 = 0.7937$

$\hat{x}_7 = 0.9086$

$\hat{x}_8 = 1$

$f_S(s) = bs^{\cancel{n}} = \frac{3}{2} s^2$



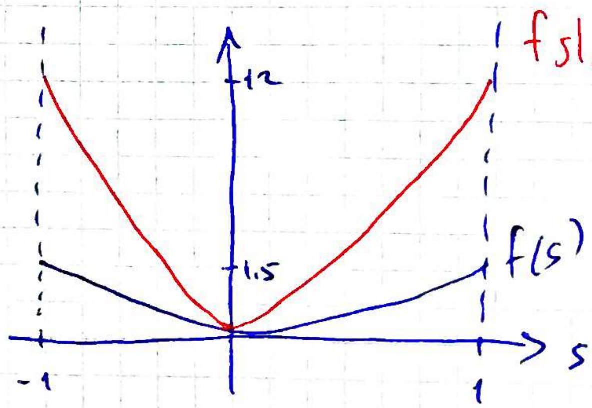
Gleiche Flächen inhalt

$f_S(s)$ und die Quantisierungsbreite $|\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}|$ sind indirekt proportional, je größer $f_S(s)$, desto schmäler die Breite

c) Skizze

$$f_{S|\hat{S}_k}(s|\hat{s}_k) = \begin{cases} m \cdot f(s) & \hat{x}_{k-1} < s < \hat{x}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$m \cdot f(s) = 8 \cdot \frac{3}{2} s^2 = 12 s^2$



$f_{S|\hat{S}_k}(s|\hat{s}_k)$ = WDF

= Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Bsp 3

c) Für ein bekanntes $\hat{S} = \hat{s_t}$ muss der Wert S am Eingang des Quantisierers im Intervall $[\hat{x}_{t-1}, \hat{x_t}]$ liegen.

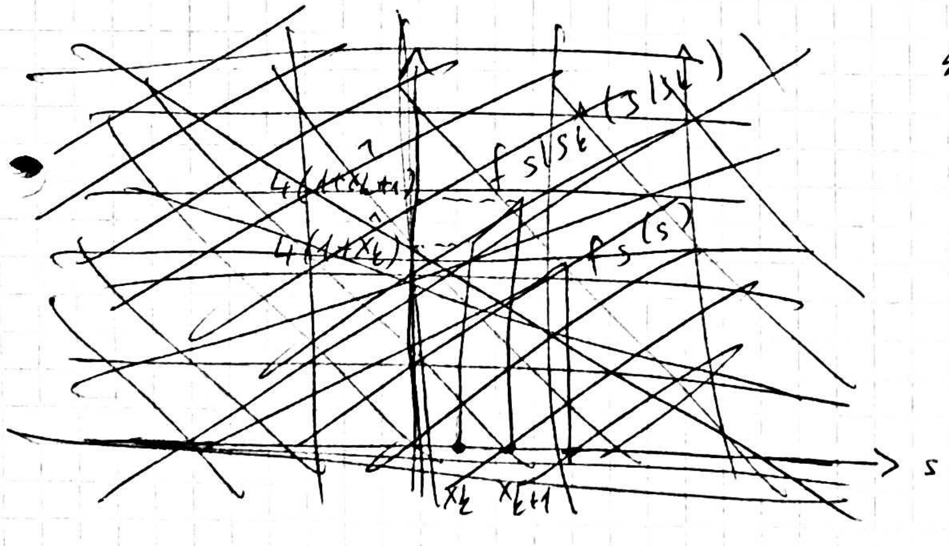
$$f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s_t}) = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb des Intervalls} \\ A \cdot f_S(s) & \hat{x}_{t-1} < s < \hat{x_t} \text{ innerhalb des Intervalls} \end{cases}$$

$$f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s_t}) = A \cdot f_S(s) \cdot \mathrm{rect}\left(\underbrace{\frac{1}{\hat{x_t} - \hat{x}_{t-1}}}_{\text{Breite}} \cdot \left(s - \frac{\hat{x}_{t-1} + \hat{x_t}}{2} \right) \right)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S|\hat{S_t}}(s|s_t)\, ds = \int_{\hat{x}_{t-1}}^{\hat{x_t}} A \cdot f_S(s)\, ds = A \underbrace{\int f_S(s)\, ds}_{1/m} = \frac{A}{m}$$

$A = m$

$$f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s_t}) = \begin{cases} m\, f_S(s) & \hat{x}_{t-1} < s < x_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



---

* $\mathrm{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$: Eine Rechteckfunktion, die bei t_0 zentriert ist und eine Dauer von T hat.

d) $I_k = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k)$: Quantisierungsintervall

$\hat{s}_k$: Reproduktionswert

$E[(s-r)^2 | s \in I_k]$ Mittlere quadratische Quantisierungsfehler

"Bedingte Erwartungswert; braucht man als Gewichtsfunktion auch die bedingte Dichte. Die Bedingung hat also nur einen Einfluss auf die zugrundeliegende Verteilung."

$$E[(s-r)^2 | s] = \int_{-\infty}^{\infty} (s-r)^2 f_{s|\hat{s}}(s|\hat{s}_k)\, ds$$

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx}$$

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dr} E[(s-r)^2 | s] = \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} (s-r)^2 f_{s|\hat{s}}(s|\hat{s}_k)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dr}(s-r)^2 f(\dots)\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -2(s-r) f(\dots)\, ds = -2\int_{-\infty}^{\infty} s f(\dots) ds + 2r \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\dots)\, ds}_{1}$$

$$= r = \int_{-\infty}^{\infty} s f_{s|\hat{s}}(s|\hat{s}_k)\, ds = \hat{s}_k$$

$$\frac{d^2}{dr^2} E[(s-r)^2 | s] = \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} -2(s-r) f(\dots)\, ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_{s|\hat{s}}(s|\hat{s}_k)\, ds = 2$$

$\Rightarrow$ min

$$\hat{s}_k = \int_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k} s f_{s|\hat{s}}(s|\hat{s}_k)\, ds = \int_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k} s \cdot 12 s^2\, ds = \int 12 s^3 = \frac{12 s^4}{4} \Big|_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k} = 3 s^4 \Big|_{\hat{x}_{k-1}}^{\hat{x}_k}$$

$\hat{x}_k$ Werte aus b)

$\hat{s}_1 = -0.9554$ $\quad$ $\hat{s}_6 = 0.7180$

$\hat{s}_2 = -0.8541$ $\quad$ $\hat{s}_7 = 0.8541$

$\hat{s}_3 = -0.7180$ $\quad$ $\hat{s}_8 = 0.9554$

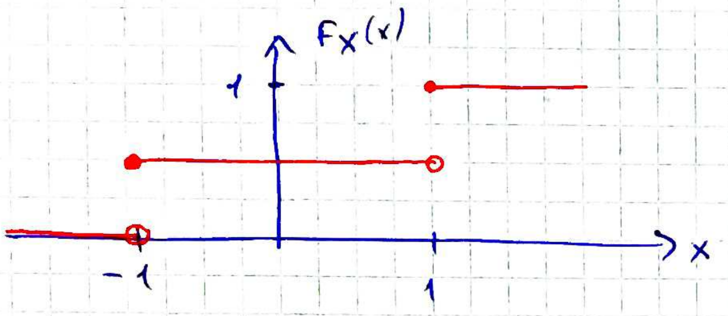
$\hat{s}_4 = -0.4726$

$\hat{s}_5 = 0.4726$

$\boxed{B6}$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$: Wahrscheinlichkeitsverteilung

a) $X \in \{-1, 1\}$



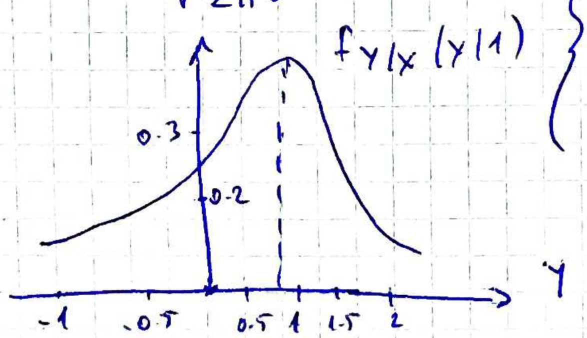
b) $f_{Y|X}(y \mid 1) \longrightarrow Y = N_1 + N_2$

$N_1 = 0$: $Y = N_2 \longrightarrow \frac{1}{5} \cdot f_{N_2}(y)$
$\left(p = \frac{1}{5}\right)$

$N_1 = 1$ $\quad y = 1 + N_2 \longrightarrow \frac{4}{5}\, f_{N_2}(y-1)$
$\left(p = \frac{4}{5}\right)$

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{1}{5} \cdot f_{N_2}(y) + \frac{4}{5} \cdot f_{N_2}(y-1)$$: Gesetz der totale w·keit

$$F_{N_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

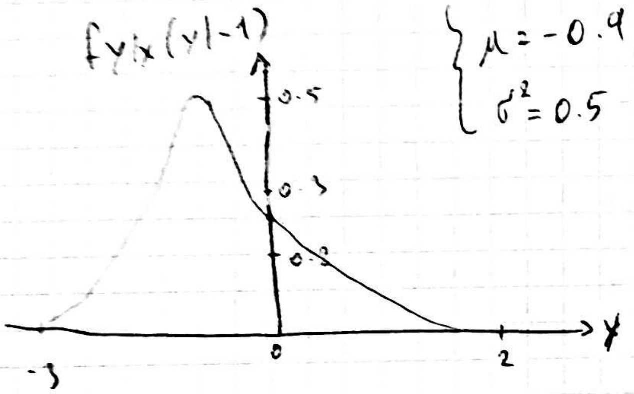


$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 0.9 \\ \sigma^2 = 0.5 \end{array} \right.$

$f_{Y|X}(y|-1)$ $\quad Y = -N_1 + N_2$

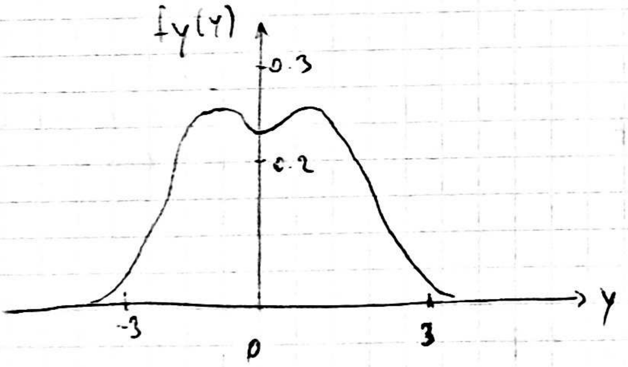
$N_1 = 0 \quad Y = N_2$ $\quad\left(p = \frac{1}{5}\right)$ $\qquad N_1 = 1 \quad Y = -1 + N_2$ $\quad\left(p = \frac{4}{5}\right)$

$$f_{Y|X}(y|-1) = \frac{1}{5} \cdot f_{N_2}(y) + \frac{4}{5} f_{N_2}(y+1)$$



$\begin{cases} \mu = -0.4 \\ \sigma^2 = 0.5 \end{cases}$

c) $f_Y(y) = \frac{1}{2}\left[f_{Y|X}(y|1) + f_{Y|X}(y|-1) \right]$



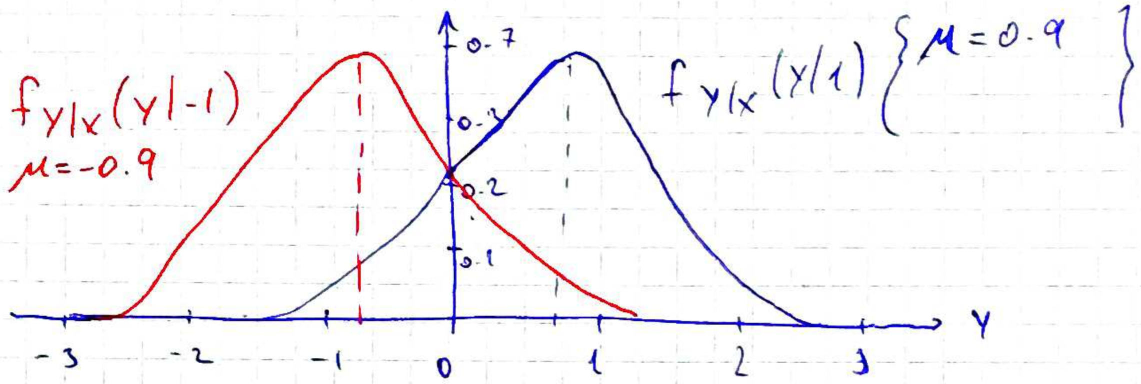
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$$

$\boxed{B6}$ $x_0 = 1$ $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ $p = \frac{1}{4}$

d)

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{1}{4} f_{N2}(y) + \frac{3}{4} f_{N2}(y-1)$$

$$f_{Y|X}(y|-1) = \frac{1}{4} f_{N2}(y) + \frac{3}{4} f_{N2}(y+1)$$



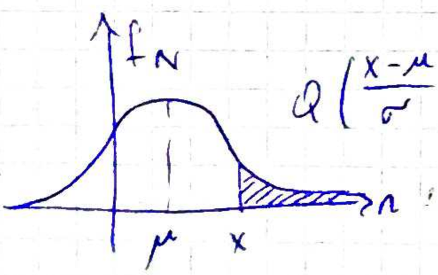
g => Entscheidungsfunktion; Kontrolliert ob empfangssignal gleich zum sendesignal ist

(iii) $P(g(y) = -1 \mid X = 1)$: Bedingte W.keit. gewählte W.D.F => $f_{Y|X}(y|1)$ weil $X=1$ bereits aufgetreten.

$g(y) = -1$

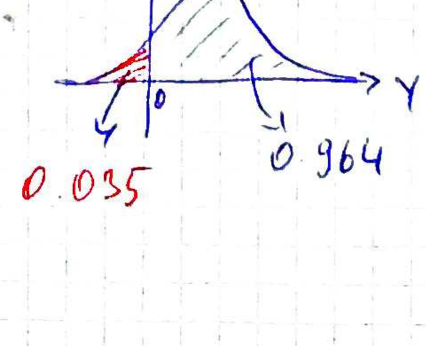
→ Nur möglich wenn $y < 0$ ist. Dann $P(g(y) = -1)$ $= P(y < 0)$

Dafür benutzen wir Q - Funktion



$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$: Gibt die W.keit dass Zufallsvariable $X > x$.

$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $x = 0$, $\mu = 0.9$, $\sigma = 0.5$ => $Q\left(\frac{-0.9}{0.5}\right) = 0.964$



$P(g(y) = -1 \mid X = 1) = 1 - Q$
$= 0.035$

(ii) $P\big(\underset{y>0}{g(Y)=1} \mid X=-1\big) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $x=0$, $\mu=-0.9$, $\sigma=0.5$

$= 0.035$

(i) $P\big(\underset{y>0}{g(Y)=1} \mid X=1\big) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \mu=0.9\\ \sigma=0.5}} = 0.964$

(iv) $P\big(\underset{y<0}{g(Y)=-1} \mid X=-1\big) = 1-Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Big|_{\substack{x=0\\ \mu=-0.9\\ \sigma=0.5}} = 0.964$

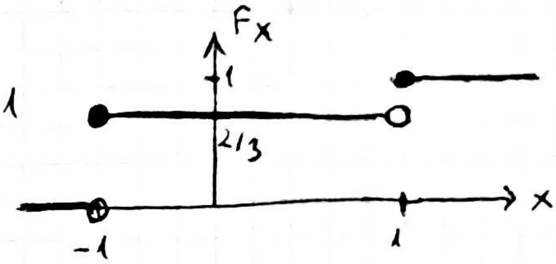
(v) $P\{g(Y)\neq X\} = P\{g(Y)=1 \wedge X=-1\} + P\{g(Y)=-1 \wedge X=1\}$

$= P\{g(Y)=1 \mid X=-1\}P\{X=-1\} + P\{g(Y)=-1 \mid X=1\}P\{X=1\}$

$= \frac{1}{2}\left(P\{g(Y)=1 \mid X=-1\} + P\{g(Y)=-1 \mid X=1\}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.035) = 0.035$

e) $q=\frac{1}{3}$, $x_0=1$



$P(X=x_0)=\frac{1}{3}$

$P(X=-x_0)=\frac{2}{3}$

$f_{Y|X}(y|1) \to Y=N_1+N_2$

$N_1=0$ $\left(p=\frac{1}{5}\right)$ $Y=N_2$: $\frac{1}{5}\cdot f_{N_2}(y)$

$N_1=1$ $\left(p=\frac{4}{5}\right)$ $Y=1+N_2$: $\frac{4}{5}\cdot f_{N_2}(y-1)$

$f_{Y|X}(y|1) = \frac{1}{5}\cdot f_{N_2}(y) + \frac{4}{5}\cdot f_{N_2}(y-1)$

$f_{Y|X}(y|-1)$ $Y=-N_1+N_2$

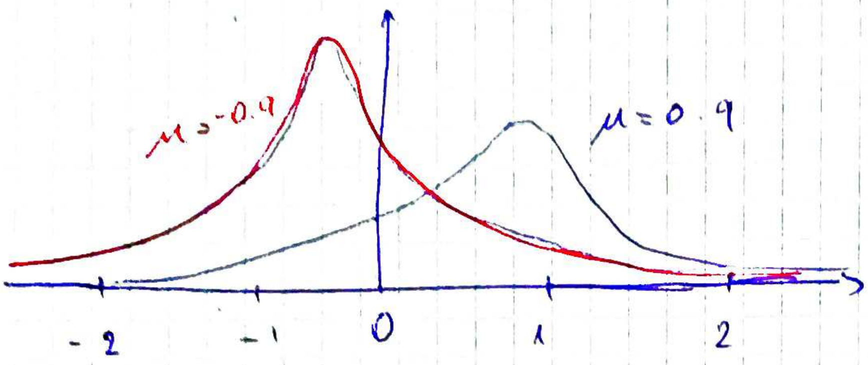
$N_1=0$ $\left(p=\frac{1}{5}\right)$ $Y=N_2$

$N_1=1$ $\left(p=\frac{4}{5}\right) \Rightarrow Y=-1+N_2$

$f_{Y|X}(y|-1) = \frac{1}{5} f_{N_2}(y) + \frac{4}{5} f_{N_2}(y+1)$

B6

c) $f_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot f_{Y|X}(y|1) + \frac{2}{3} f_{Y|X}(y|-1)$



$P(\underset{y<0}{g(Y) = -1} \mid X = 1)$ für $x_0 = 1$ $\sigma^2 = p = \frac{1}{4}$

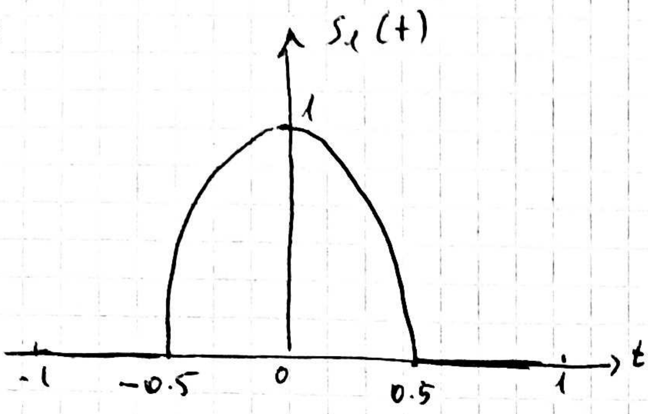
$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} x = 0 \\ \mu = 0.9 \\ \sigma = 1/2 \end{cases} = 0.96$ $1 - Q = 0.035$

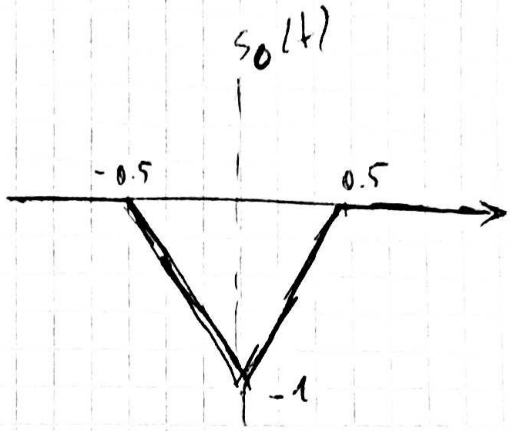
-d) (i) bis (iv) dieselbe

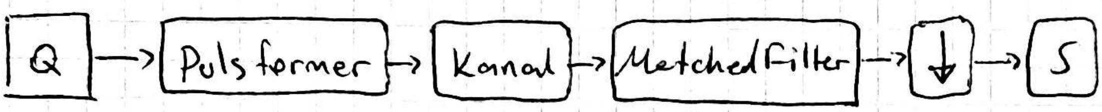
(v) $P(g(Y) \neq X) = \frac{1}{3} P\{g(Y) = -1 | X = 1\} + \frac{2}{3} P\{g(Y) = 1 | X = -1\}$

B7

a)







Blockschaltbild des Kommunikationssystem

b) Durch die Dämpfung d berechnet sich die Signalenergie am Sender durch $E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} | s(t)^2 | \, dt$ und am

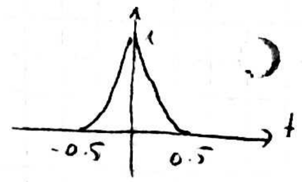
Empfänger durch $E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} | d \, s(t) |^2 dt$

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} | d \, s_i(t) |^2 dt = d^2 \int_{-0.5}^{0.5} | \cos(\pi t) |^2 dt = \frac{d^2}{2}$$

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} | d \, s_0(t) |^2 dt = d^2 \int | s_0(t) |^2 dt = \frac{d^2}{3}$$

c) $$R_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_0(t)\, dt$$

$\cos(\pi t)\, tri(2t)$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} -d^2\, rect(t) \cos(\pi t)\, tri(2t)\, dt$$

$$R_{10} = -0.4053\, d^2$$

R_{10}: Kreuzkorrellationsfkt.

ϱ_{10}: Normierte Kreuz. korrelationsfkt.

$$\varrho_{10} = \frac{R_{10}}{\sqrt{E_1 \cdot E_0}} = -0.9927$$

* Kreuzkorrelation entspricht einem Ähnlichkeitsmaß, wie es nach dem Skalar-produkt sein soll.

d) Durch die Verwendung von nur 2 Symbolen und der Linearität der Korrelation kann man das Matched Filter auf die Einkorrelator-Variante reduzieren. Somit lautet das Referenz signal $s_{ref}(t) = s_1(t) - s_0(t)$.

e) $$\Delta V = E_0 + E_1 - 2\varrho_{10}\sqrt{E_0 E_1} = \frac{d^2}{3} + \frac{d^2}{2} - 2\cdot(-0.9927)\sqrt{\frac{d^4}{6}}$$

$$d^2 = \left(10^{-\frac{50}{20}}\right)^2 = 10^{-5} \qquad \Delta V = d^2 \cdot 1{,}6439 = 1{,}6439 \cdot 10^{-5}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}\Delta V}$$

$$P_e = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}}\right) \overset{!}{=} 10^{-5} \qquad \sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}} = 4.2649$$

Q-Nomogramm

$$N_0 = \frac{\Delta V}{2\cdot(4.2649)^2} = \frac{1.6439\, 10^{-5}}{2\cdot(4{,}2649)^2} = 4.5188\, 10^{-7}$$

ΔV: Abstand der Schwelle

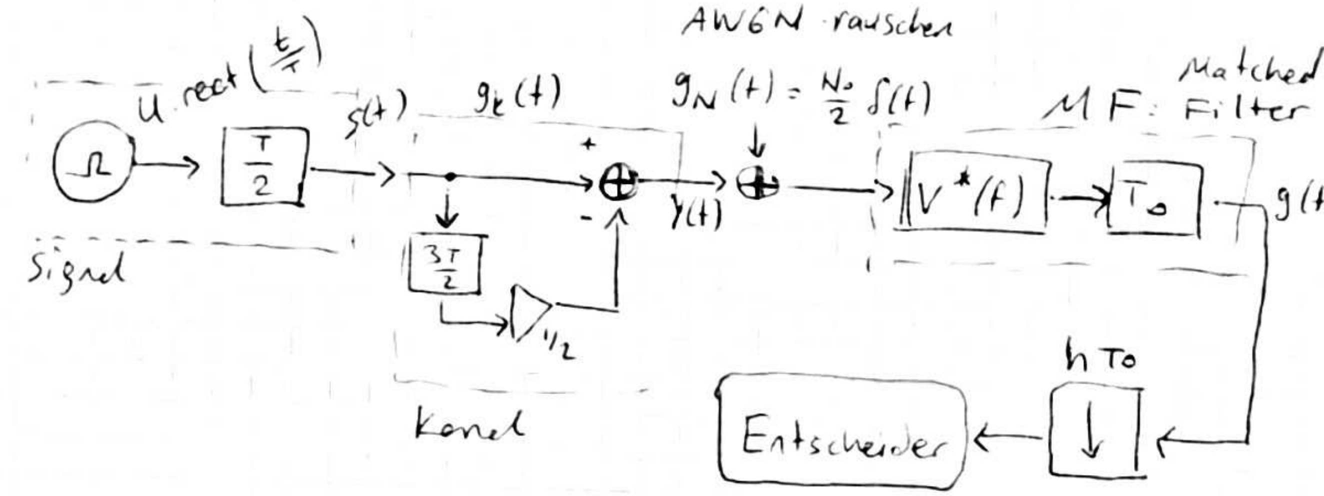
σ: Standardabweichung

N_0: Rauschleistungsdichte

P_e: Bitfehlerwahrscheinlichkeit

158

a)



b) $y(t) = s(t) * g_k(t)$

$$= U\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) * \left[\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t-2T)\right]$$

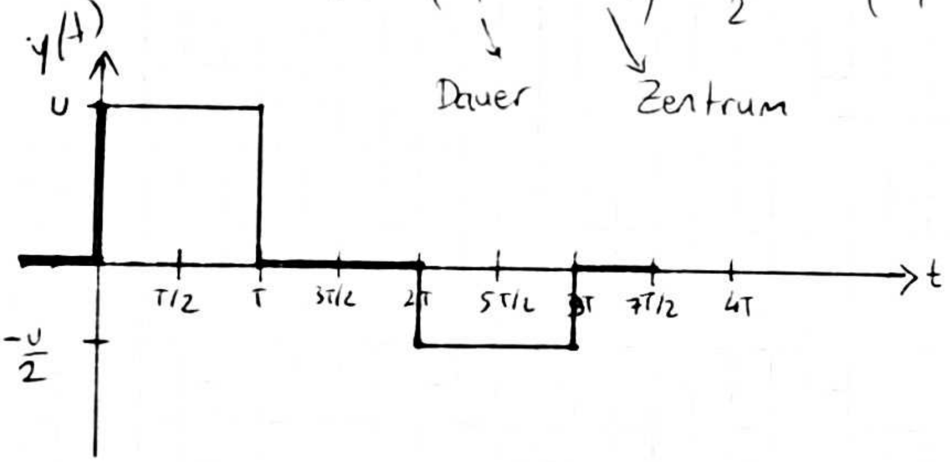
$$= U\,\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) * \delta(t) - \frac{1}{2}U\,\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) * \delta(t-2T)$$

$\mathrm{rect}(x) * \delta(x-a) = \mathrm{rect}(x-a)$

$$= U\,\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}-2T\right)\right)$$

$$= U\,\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{5}{2}T\right)\right)$$

Dauer Zentrum



c) $$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)^2|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| U\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{5T}{2}\right)\right)\right|^2 dt$$

$$= \int_0^T U^2\,dt + \int_{2T}^{3T} \frac{U^2}{4}\,dt = U^2 t\Big|_0^T + \frac{U^2}{4}t\Big|_{2T}^{3T} = U^2T + \frac{U^2}{4}(3T-2T)$$

$$= \frac{5}{4}U^2T$$

B8

d) Impulsantwort des Matched Filter gemäß Gleichung (8.31) von Glover, Dig. Com.

$$h(t) = k \cdot s_0^*(T_0 - t) = k \; s_0(T_0 - t)$$

$\longrightarrow$ wenn $s_0(t)$ reelles Signal

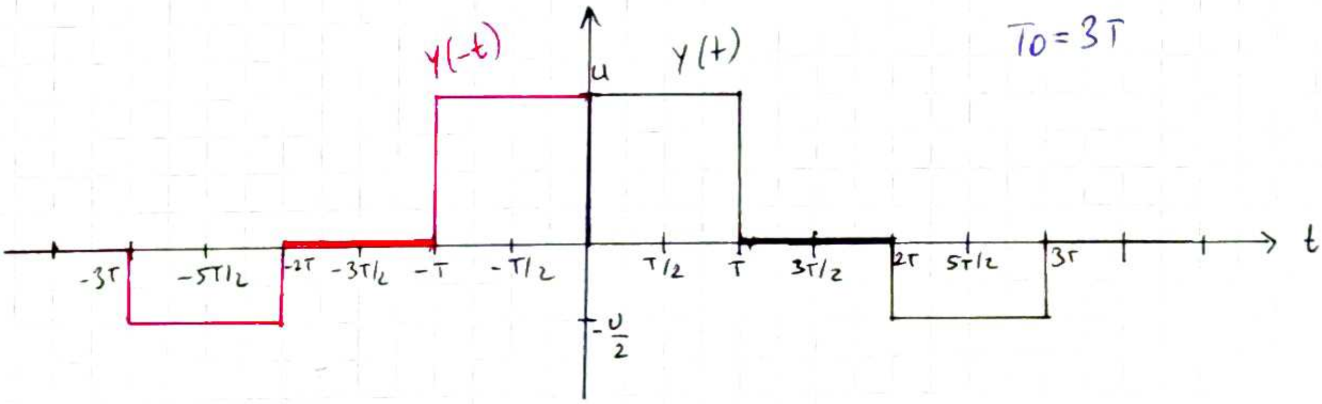
T_0 wird beim MF. so gewählt, dass die entstehende impulsantwort kausal wird, d.h. $h(t) = 0$ für $t < 0$

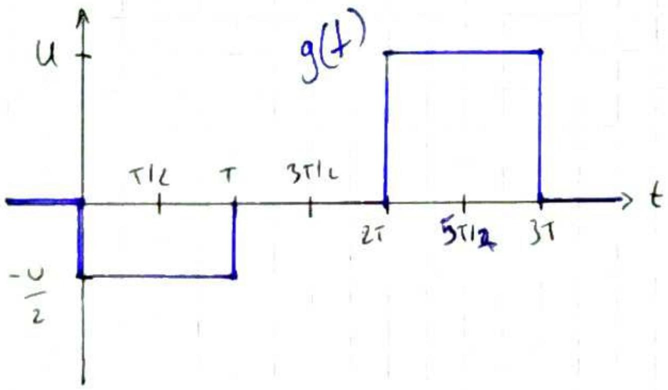
* Impulse response of a matched filter is a time reversed version of the Pulse to which it is matched, delayed by a time equal to the duration of the Pulse.

$$y(t) = U \,\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\,\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(t - \frac{5}{2}T\right)\right)$$

(Time-reverse - Spiegelung) $y(-t) = U\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t - \frac{T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t - \frac{5}{2}T\right)\right)$

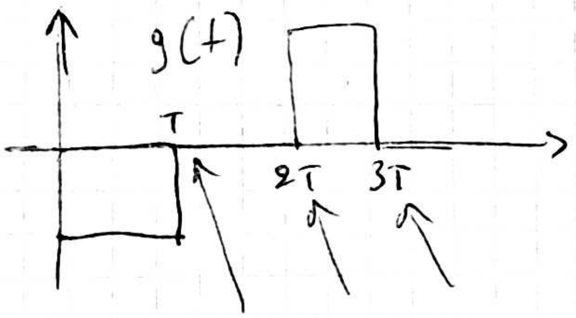
(Delay - Verzögerung) $g(t) = U\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t - \frac{T}{2} + T_0\right)\right) - \frac{U}{2}\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t - \frac{5}{2}T + T_0\right)\right)$





$$g(t) = U\,\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t + \frac{5T}{2}\right)\right) - \frac{U}{2}\,\text{rect}\left(\frac{1}{T}\left(-t + \frac{T}{2}\right)\right)$$

e) Ein ISI freies Signal $s(t)$ muss zu allen Entscheidungszeitpunkten $t = n \cdot T_0 \, (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$ ident Null sein! und zum gewünschten Entscheidungszeitpunkt ($n=0$) den richtigen Wert $s(0)$ liefern.



Entscheidungszeitpunkt $\neq 0$

Nicht ISI-Frei!