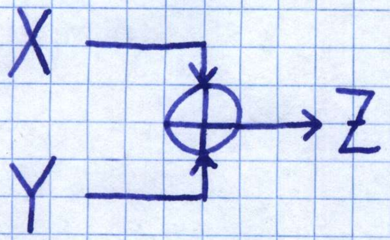
TK 2.1)

Die WDF einer Summe von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen entspricht der Faltung der einzelnen WDF's.



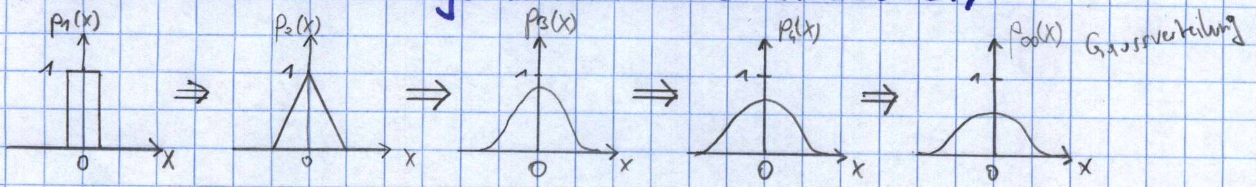
$$Z = X + Y$$

$$p(z) = p(x) * p(y)$$

Def.: „Zentraler Grenzwertsatz"

Die WDF einer Summe von N statistisch unabhängigen Zufallsvariablen nähert sich der Gauß'schen WDF unabhängig welche WDF die einzelnen Summanden haben. Kommutativität der Faltung

(Für $N \to \infty$ ist das Ergebnis exakt eine Gaußdichte.)



→ Entspricht der Natur von Gaußschem Rauschen.

I-te Konsequenz:

Die WDF eines Produkts von N statistisch unabhängigen Zufallsvariablen nähert sich der Lognormal WDF unabhängig welche WDF die einzelnen Summanden haben.

Begründung: Die Multiplikation von Funktionen entspricht der Addition der logarithmierten Funktionen.

TK 2.1)$_2$

II-te Konsequenz:

Die WDF der Summe zweier Gauß'schen Zufallsvariablen ist wieder eine Gauß'sche WDF. In diesem Fall ist das Ergebnis exakt und gilt auch für korrelierte Gauß'sche Variablen.

$$\Rightarrow E[Z] = E[X] + E[Y]$$

$$Var[Z] = Var[X] + 2\rho\,\sigma_x\sigma_y + Var[Y]$$

Gilt außerdem noch die Unkorreliertheit (damit auch die statistische Unabhängigkeit) der zu addierenden Gaußvariablen, dann gilt:

$$E[Z] = E[X] + E[Y]$$

$$Var[Z] = Var[X] + Var[Y]$$

Begründung:

$$p_z(z) = \underbrace{FT^{-1}\Big(\underbrace{\underbrace{FT\big(\overbrace{p_x(x)}^{\text{Gauß}}\big)}_{\text{Gauß}} \cdot \underbrace{FT\big(\overbrace{p_x(x)}^{\text{Gauß}}\big)}_{\text{Gauß}}}_{\text{Gauß}}\Big)}_{\text{Gauß}} \quad \Big\}\; e^{-x^2}\cdot e^{-x^2} = e^{-2x^2}$$

$\Rightarrow$ Gauß bleibt Gauß!

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Korrespondenz}\\ \text{Gauß} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \text{Gauß}\end{array}}$$

TK 2.1)

Für N unkorrelierte Gaußvariablen folgt:

$$\Rightarrow \quad E[Z] = \sum_{n=1}^{N} E[X_n] \qquad Var[Z] = \sum_{n=1}^{N} Var[X_n]$$

Spezialfall: Mehrfaches Abtasten und Addieren der Werte in stationären AWGN

$\Rightarrow$ Alle Parameter gleich (Erwartungswerte, Varianzen)

D.h. $X_1 = X_2 = \ldots = X_N = X$

$$E[Z] = N \cdot E[X] \qquad Var[Z] = N \cdot Var[X] = N \cdot \sigma_x^2$$

Standardabweichung: $\sigma_z = \sqrt{N} \cdot \sigma_x$

Amplitudenverhältnis für einen Abtastwert: $\dfrac{E[X]}{\sigma_x}$

——— " ——— für N Abtastwerte: $\dfrac{E[Z]}{\sigma_z} = \dfrac{N \cdot E[X]}{\sqrt{N} \cdot \sigma_x} = \sqrt{N} \cdot \dfrac{E[X]}{\sigma_x}$

Leistungsverhältnis für einen Abtastwert: $SNR_x = \left(\dfrac{E[X]}{\sigma_x}\right)^2 = \dfrac{(E[X])^2}{Var[X]}$

——— " ——— für N Abtastwerte: $SNR_z = N \cdot SNR_x$

F151

TK 2.2)

Zufallsprozesse

Def.: Ein Zufallsprozess entspricht einer zeitabhängigen Zufallsvariablen. Streng definiert entspricht er einer Schar von Musterfunktionen.

Zur vollständigen Beschreibung eines Zufallsprozesses benötigt man eine endliche oder unendliche Anzahl an WDF's.

Ein Zufallsprozess $X(t)$ besteht aus N Zeitfunktionen $x_k(t)$. N kann endlich oder unendlich sein.

Einteilung der Zufallsprozesse:

(1) Kontinuierlich oder diskret [Zeitfunktion oder Zeitreihe]

(2) Analog, digital oder gemischt [WDF]

(3) Deterministisch oder nicht deterministisch
(deterministisch → z.B. Sinusfunktion mit zufälliger Anfangsphase)

(4) Stationär oder nicht stationär

(5) Ergodisch oder nicht ergodisch

TK 2.2)

Def.: „Stationärer Zufallsprozess $X(t)$"

Im engeren Sinne:

Die statistischen Parameter sind unabhängig von der Zeit. Alle WDF's (Gemeinsame, Bedingte, Grenz) sind gleich.

Im weitesten Sinne:

[1] Mittelwert muss zeitunabhängig sein.

[2] Korrelation hängt nur von der Zeitdifferenz $(T = t_2 - t_1)$ ab.

Def.: „Ergodischer Zufallsprozess $X(t)$"

Scharmittelwert = Zeitmittelwert

(d.h. alle statistischen Eigenschaften aus Zeitsignal bestimmbar)

TK 2.2)$_3$

Gauß'sche Zufallsprozesse:

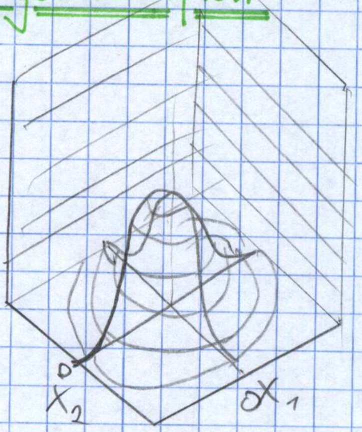
[1] Gauß'scher Prozess im strengeren Sinne.
[2] Ergodischer Gauß'scher Prozess im engeren Sinne.
[3] Gauß'scher Prozess im weitesten Sinne.

Def.: „Gauß'scher Zufallsprozess $X(t)$ im strengen Sinne"

Wenn alle Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ eine N-dimensionale gemeinsame Gauß'sche Dichtefunktion haben.

Bemerkung: Für einen Gauß'schen Prozess im strengen Sinne benötigt man den vollständigen Prozess, also die ganze Kurvenschar.

$\Rightarrow$ Schareigenschaften



TK 2.2)

Def.: „Ergodischer Gauß'scher Prozess im engeren Sinne"

Man benötigt nur eine Musterfunktion. Aus dieser bildet man die zweidimensionale Statistik derart, indem man jeweils 2 Werte, welche konstanten Zeitabstand T zueinander haben zusammenfasst.

⇒ zweidim. Streudiagramm ⇒ Korrelation

Bemerkung: Man benötigt nur eine Zeitfunktion und nicht die ganze Kurvenschar

⇒ Zeiteigenschaften

Def.: „Ergodischer Gauß'scher Prozess im weitesten Sinne"

Wenn Gaußverteilte Zufallszahlen willkürlich zu einem Zeitsignal zusammengesetzt werden. Die Umkehrung ist auch möglich.

⇒ Dadurch ist es möglich Simulationen mit Kurvenformen durch zu führen.

⇒ zweidim. Streudiagramm ⇒ Korrelation

Bemerkung: Man benötigt nur eine Zeitfunktion und nicht die ganze Kurvenschar.

⇒ Zeiteigenschaften

TK 2.2)5

Bemerkungen Gauß'sche Prozesse:

⇒ Alle Gauß'schen Prozesse im strengen Sinne sind auch Gauß'sche Prozesse im weitesten Sinne.

⇒ Gaußsche Prozesse im weitesten Sinne kommen selten vor.

⇒ Der Gauß'sche Prozess im strengen Sinne ist jener, der am regellosesten ist. Dieser entspricht thermischen Rauschen.

⇒ Ein N-dimensionaler Gauß'scher Prozess im strengen Sinne wird vollkommen durch seine ersten beiden Momente [Mittelwert, Varianz, Kovarianz] beschrieben. D.h. alle höheren Momente sind Null.

TK 2.3)₁

Autokorrelation eines Zufallsprozesses:

Problem: Die WDF alleine ist nicht ausreichend um ein Zufallssignal (Musterfunktion eines Zufallsprozesses) zu beschreiben, weil WDF keine Information über die zeitliche Änderung enthält.

Die benötigte Information steckt in der gemeinsamen Verteilung $p(X_1, X_2)$ der Zufallsvariablen $X_1 = X(t_1)$ und $X_2 = X(t_2)$

$\Rightarrow$ $T = t_2 - t_1$ ...... Zeitinformation [genauer: Zeitdifferenz]

Anm.: Für eine exakte Beschreibung der Dynamik des Zufallsprozesses würde man eine ∞-dimensionale (entspricht kont. Zeitachse) gemeinsame WDF benötigen. → unpraktikabel

Abhilfe:

Näherung durch zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2, welche einen Zeitunterschied T zueinander aufweisen.

$\Rightarrow$ Korrelation

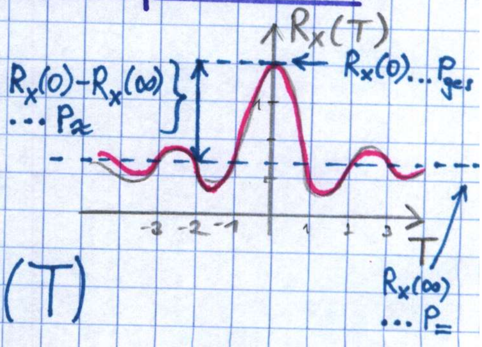
Annahme: Ergodische Signale → Zeit = Schar

$$\Rightarrow \text{AKF}: \; E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = E[X(t_2)\cdot X(t_2 - T)] = E[X(t)\cdot X(t-T)]$$

TK 2.3)$_2$

Eigenschaften der AKF eines ergodischen Zufallsprozesses:

Bedingung: Reelles Signal



[1] AKF ist reell

[2] AKF ist gerade D.h. $R_x(-T) = R_x(T)$

[3] AKF ist maximal für $T = 0$ (Normierte Gesamtleistung von $x(t)$)

$$P_{ges} = E[x^2(t)] = R_x(0) > |R_x(T)| \quad \forall\, T \neq 0$$

[4] Handelt es sich bei $x(t)$ um einen Spannungsverlauf [V] dann hat die normierte Gesamtleistung die Einheit V^2 Normiert auf $R = 1\Omega$

[5] AKF liefert für $T = \infty$ die normierte Gleichspannungsleistung.

$$P_{=} = E[x(t)]^2 = R_x(\infty)$$

[6] Die Varianz von $x(t)$ liefert die normierte Wechselspannungsleistung:

$$P_{\approx} = Var[X] = E[x^2(t)] - E[x(t)]^2 = R_x(0) - R_x(\infty)$$

[7] Die AKF und die zweiseitige spektrale Leistungsdichte bilden ein Fourier-Paar:

$$R_x(T) \circ\!\!-\!\!\bullet\; G_x(f)$$

Diese Beziehung wird als Wiener-Kintchine Theorem bezeichnet.

TK 2.3)

Folgesätze die sich aus dem Wiener-Kintchine-Theorem ergeben:

[a] LDS ist gerade um $f=0$ $\quad G_x(-f) = G_x(f)$

[b] LDS ist reell

[c] Die Fläche unter dem LDS entspricht der normierten Leistung

$$P_{ges} = E\left[x^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) \cdot df$$

[d] Handelt es sich bei $x(t)$ um einen Spannungsverlauf, dann hat das LDS die Einheit V^2/Hz

[e] Die Fläche unter dem Impuls bei $f=0$ des LDS entspricht der normierten Gleichspannungsleistung

$$P_{=} = E\left[x(t)\right]^2 = \int_{0-}^{0+} G_x(f) \cdot df$$

[f] Die Fläche unter dem LDS vermindert um die Fläche unter dem Impuls bei $f=0$ entspricht der Varianz von $x(t)$ und damit der normierten Wechselspannungsleistung

$$P_{\approx} = Var[X] = E\left[x^2(t)\right] - E\left[x(t)\right]^2 = \int_{-\infty}^{0-} G_x(f) \cdot df + \int_{0+}^{+\infty} G_x(f) \cdot df$$

[g] Das LDS ist immer positiv!

$$G_x(f) \geq 0 \quad \forall f$$

TK 2.4) 1

Weißes Rauschen:

Entspricht einem Zufallssignal mit extremer AKF-Eigenschaft.

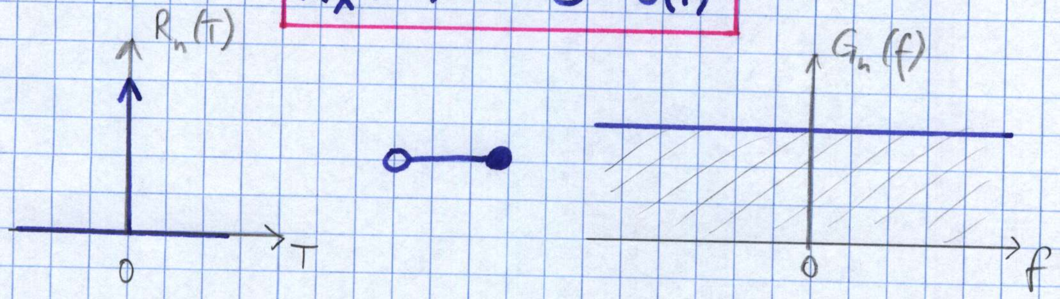
⇒ Für jede noch so kleine Verschiebung kennt sich das Signal nicht mehr.

D.h. Weißes Rauschen hat kein Gedächtnis. Noch so benachbarte Amplituden-Werte des Zufallssignals sind unkorreliert.

Wesen: Weißes Rauschen besitzt ein konstantes Leistungsdichtespektrum mit unendlicher Bandbreite.

⇒ D.h. für $B=\infty$ folgt $T=0$ ..... AKF ist Impulsfunktion

$$\boxed{R_x(T) = C \cdot \delta(t)}$$



Ein weißer Rauschprozess ist physikalisch nicht realisierbar, da dieser unendliche Leistung fordert. Trotz dieses Mangels ist er bestens geeignet für theoretische Untersuchungen.

TK 2.4)$_2$

AWGN - Additive White Gaussian Noise

Ein Rauschprozess kann sein:

[1] Weiss

[2] Gauß'sch

[3] Weiss und Gauß'sch $\Rightarrow$ AWGN

[4] weder weiss noch Gauß'sch

AWGN: „unkorreliert" · „stat. unabh."

Thermisches Rauschen wird als AWGN modelliert.

$\Rightarrow$ Noch so benachbarte Amplitudenwerte sind unkorreliert und statistisch unabhängig.

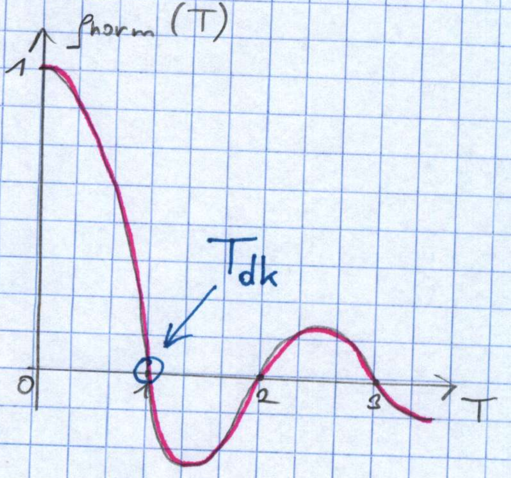
TK 2.4)$_3$

Dekorrelationszeit T_{dk}

Def.: Jene Zeitspanne in der die normierte Korrelation auf einen vorgegebenen Wert (Referenzwert) abgesunken ist. Ein üblicher Referenzwert ist die erste Nullstelle.

Dekorrelationszeit ist Messgröße für Gedächtnis des Signals:

⇒ physikalisch kann Energie nicht springen, werden Amplitudenwerte sehr knapp nebeneinander entnommen bleibt keine Zeit das sie sich wesentlich ändern können → hoher Grad an Korrelation



$$\boxed{B = 1/T_{dk}}$$

Mit dem Wiener-Kintchine Theorem lässt sich eine Beziehung zwischen Frequenzbereich und Zeitbereich herstellen.