Tema 5: Servicios y Calidad de Servicio
Cálculo de Redes

November 13, 2024

Contenido I

Introducción

Introducción

El cálculo de redes modela flujos

- electricidad
- fluidos
- **tráfico en internet**

Nos sirve para modelar:

- conformado de tráfico
- políticas de tráfico
- averiguar métricas de lantencia y tamaño en cola

Álgebra min-plus

Álgebra min-plus

Definición (Álgebra min-plus)

Es un diodo[a] *definido en* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \wedge, +)$, *donde:*

- $\wedge$ *es el operador* $\min$
- $+$ *es la suma*

[a]Un tipo de estructura algebraica.

Ejemplo:
la operación

$$(1 + 2) \cdot 3 = 9$$

se “traduce” en:

$$(1 \wedge 2) + 3 = 4$$

Álgebra min-plus

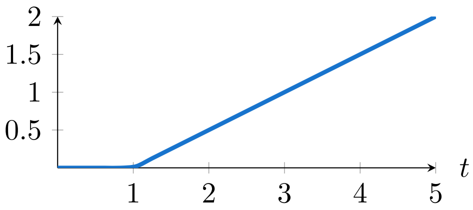
Definición (Familia de funciónes crecientes)

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones crecientes, decimos que $f \in \mathcal{F}$ es una función creciente definida en $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ si y sólo si cumple:

$$f(s) \geq f(t), \forall s \geq t \tag{1}$$

y además $f(t) = 0, \forall t < 0$.

Ejemplo: la función "rate-latency" $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$



Álgebra min-plus: Convolución

Definición (Convolución min-plus)

La convolución min-plus $\otimes$ *de dos funciones crecientes* $f, g \in \mathcal{F}$ *se define como*

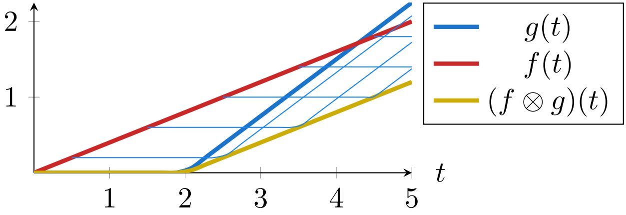
$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} \tag{2}$$

Nota: equivalente a la convolución "clásica":

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\ ds$$

Álgebra min-plus: Convolución

Si $f(0) = g(0) = 0$ se puede calcular comenzando a dibujar cada función sobre todo punto de la otra y tomando el mínimo.



En este ejemplo: $f(t) = rt, g(t) = \beta_{R,T}(t)$ con $R > r > 0$.

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t-s) + R[s-T]^{+}\}$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

<u>Con $T < t$</u> dividimos en dos casos y tomamos el menor

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

Con $T \geq t$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

Con $T < t$ dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \le s \le T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

Con $T \geq t$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

Con $T < t$ dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

2. $T < s$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{T < s \leq t} \{r(t-s) + R(s-T)\} = r(t-T)$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

<u>Con $T < t$</u> dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

2. $T < s$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{T < s \leq t} \{r(t-s) + R(s-T)\} = r(t-T)$$

El resultado es:

$$\boxed{(f \otimes g)(t) = r[t-T]^+.}$$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$
- **Suma constante**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, K \in \mathbb{R}^+, \quad (f + K) \otimes g = (f \otimes g) + K$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$
- **Suma constante**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, K \in \mathbb{R}^+, \quad (f + K) \otimes g = (f \otimes g) + K$
- **Isotonicidad**: $\forall f, g, f', g' \in \mathcal{F}, \quad f \leq g, f' \leq g' \implies f \otimes f' \leq g \otimes g'$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Definición (Deconvolución min-plus)

La deconvolución[a] *min-plus* $\oslash$ *de dos funciones crecientes* $f, g \in \mathcal{F}$ *se define como*

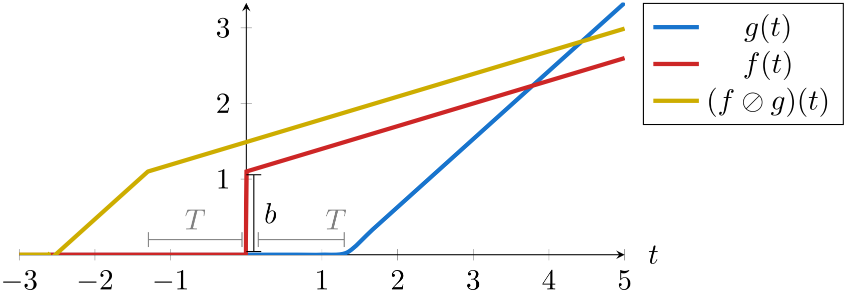
$$(f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0}\{f(t+u) - g(u)\} \tag{3}$$

[a]No esta definida si $\exists t : f(t) = +\infty$ o $g(t) = +\infty$.

Truco: es como la convolución min-plus pero sustituyendo los $+$ por $-$.

Álgebra min-plus: Deconvolución

La deconvolución de $f(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$ y $g(t) = \beta_{R,T}(t)$ es[2]



Nota: nótese que $(f \oslash g)(t) \notin \mathcal{F}$ porque no es cero para $t < 0$.

[2] con $R > r$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{T > u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u > T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{T>u\geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

en el primer caso u llega a T y $\gamma_{r,b}(t+u) = 0, t \leq -T$. Por tanto tenemos dos casos

1. $t \leq -T$:

$$\begin{aligned} 0 \vee \sup_{-t\geq u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \vee \sup_{u>-t}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \\ = 0 \vee \sup_{-t\geq u>T}\{0 - Ru + RT\} \vee \sup_{u>-t}\{r(t+u) + b - R(u-T)\} \\ = 0 \vee 0 \vee \{b + R(t+T)\} = [b + R(t+T)]^+ \end{aligned}$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

2. $t > -T$:

$$
\begin{aligned}
(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) &= \sup_{T>u\geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{r(t+u)+b-R(u-T)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{(r-R)u+b+rt+RT\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \{r(t+T)+b\} = r(t+T)+b
\end{aligned}
$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

2. $t > -T$:

$$
\begin{aligned}
(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) &= \sup_{T>u\geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{r(t+u)+b-R(u-T)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{(r-R)u+b+rt+RT\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \{r(t+T)+b\} = r(t+T)+b
\end{aligned}
$$

Como resultado se obtiene

$$
(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \begin{cases} [b+R(t+T)]^+, & t \leq -T \\ r(t+T)+b, & t > -T \end{cases}
$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

La deconvolución tiene las siguientes propiedades:

1. **Isonoticidad**:
   $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad f \leq g \implies f \oslash h \leq g \oslash h, h \oslash f \geq h \oslash g$
2. **Composición**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \oslash g) \oslash h = f \oslash (g \oslash h)$
3. **Composicion con** $\otimes$: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \oslash g \leq f \otimes (g \oslash g)$
4. **Suma de cte.**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, K \in \mathbb{R}, \quad (f + K) \oslash g = (f \oslash g) + K$
5. **Dualidad con** $\otimes$: $f \oslash g \leq h \iff f \leq h \otimes g$

Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Definición (Desviación horizontal/Vertical)

Sean $f, g \in \mathcal{F}$, su desviación horizontal es

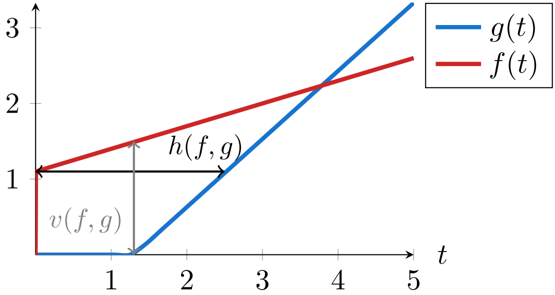
$$h(f,g) = \sup_{t \geq 0} \left\{ \inf_{d \geq 0} \{ d : f(t) \leq g(t+d) \} \right\}$$

y su desviación vertical es

$$v(f,g) = \sup_{t \geq 0} \{ f(t) - g(t) \}$$

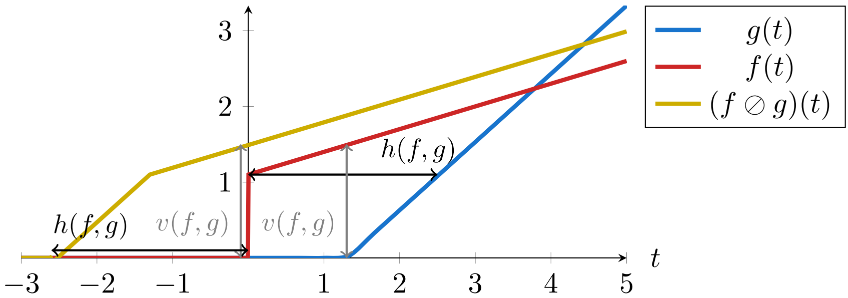
Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Gráficamente las desviaciones verticales y horizontales se ven así:



Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Otra manera de obtener las desviaciones horizontales y verticales es mediante la deconvolución:

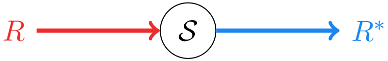


Es decir:

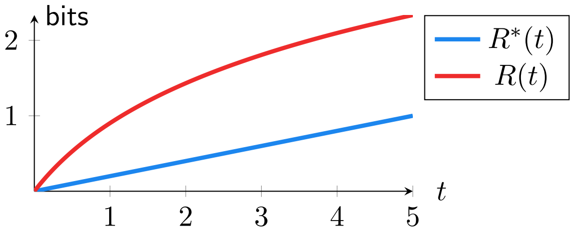
- $v(f,g) = (f \oslash g)(0)$
- $h(f,g) = \inf_{d \geq 0}\{d : (f \oslash g)(-d) \leq 0\}$

Modelado con álgebra min-plus

Modelado con álgebra min-plus



- $\mathcal{S}$: el sistema atravesado (shaper,router,colas,etc.)
- $R \in \mathcal{F}$: flujo entrante
- $R^* \in \mathcal{F}$: flujo saliente



Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

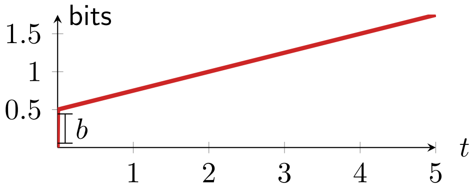
Definición (Curva de llegadas)

La función $\alpha \in \mathcal{F}$ es una curva de llegadas para el flujo $R \in \mathcal{F}$ si y solo si

$$\forall s \leq t, \quad R(t) - R(s) \leq \alpha(t - s)$$

También diremos que le flujo R es α-suave.

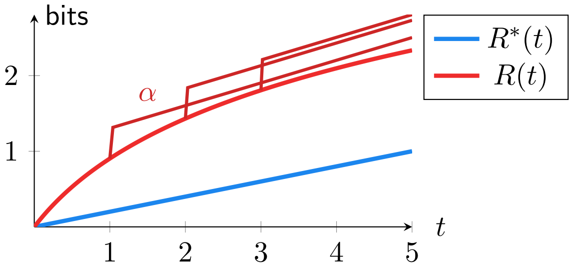
Ejemplo: una curva de llegadas famosa es la función afín $\alpha(t) = rt + b$, también conocida como la curva "rate-burst" $\gamma_{r,b}(t)$.



Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

También, el flujo R es α-suave si $R \leq R \otimes \alpha$.

Interpretación: R queda por debajo de $\alpha = \gamma_{r,b}$ puesta encima.

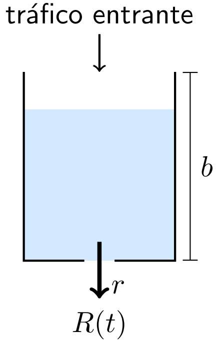


Modelado con álgebra min-plus: Leaky/Token bucket

El tráfico conformado por un leaky bucket es α-suave con

$$\alpha(t) = rt$$

con r la tasa de pérdidas de la cubeta.

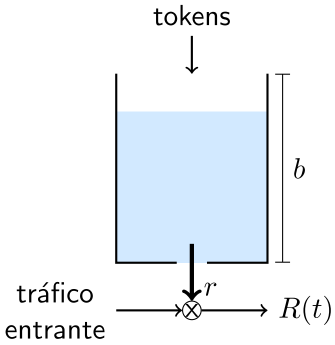


Modelado con álgebra min-plus: Leaky/Token bucket

El tráfico conformado por un token bucket es α-suave con

$$\alpha(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$$

siendo r la tasa de reposición de tokens y b el tamaño de cubeta.



Modelado con álgebra min-plus: Mínima curva de llegadas

Teorema (Mínima curva de llegadas)

Sea un flujo real $R \in \mathcal{F}$*:*

1. $R \oslash R$ *es una curva de llegada de* R
2. *cualquier curva de llegada* α *para el flujo* R *satisface* $R \oslash R \leq \alpha$
3. $R \oslash R$ *es una curva de llegadas "buena" [LBT01, Definition.1.2.4]*

$R \oslash R$ *se conoce como la mínima curva de llegadas.*

Modelado con álgebra min-plus: Mínima curva de llegadas

[LBT01]

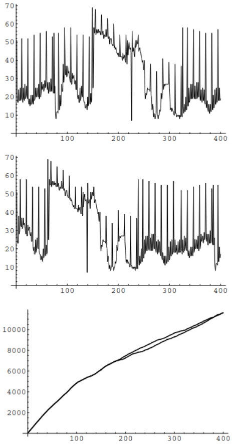


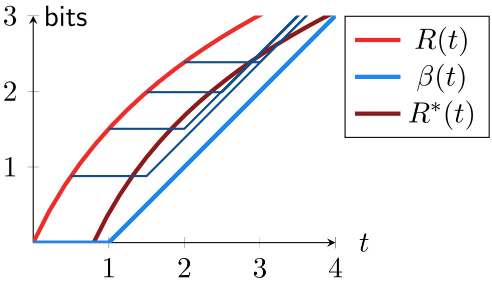
Figure 1.7: Example of minimum arrival curve. Time is discrete, one time unit is 40 ms. The top figures shows, for two similar traces, the number of packet arrivals at every time slot. Every packet is of constant size (416 bytes). The bottom figure shows the minimum arrival curve for the first trace (top curve) and the second trace (bottom curve). The large burst in the first trace comes earlier, therefore its minimum arrival curve is slightly larger.

Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

Definition (Curva de servicio)

Sea un flujo R atravesando un sistema $\mathcal{S}$, decimos que $\beta \in \mathcal{F}$ es una curva de servicio de $R \in \mathcal{F}$ si y solo si

$$R^* \geq R \otimes \beta$$

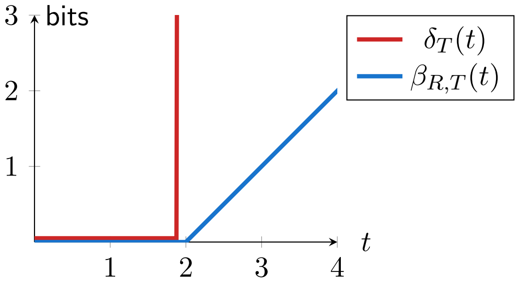


Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

La curva de servicio "rate-latency" es $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$.

La curva de servicio "burst-delay" es

$$\delta_T(t) = \begin{cases} +\infty, & t > T \\ 0, & t \leq T \end{cases}$$



Modelado con álgebra min-plus: Concatenación

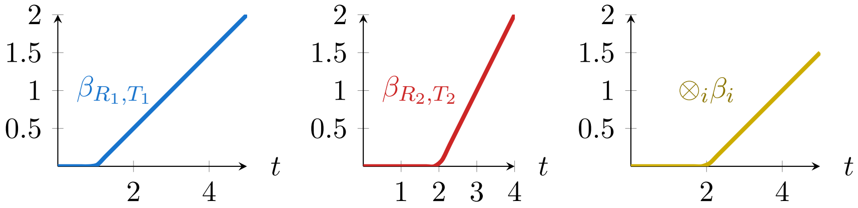
Si atravesamos N sistemas, cada uno con una curva de servicio $\beta_i, i = 1, \ldots, N$; la curva de servicio del sistema total es

$$\beta = \beta_1 \otimes \beta_2 \ldots \otimes \beta_N = \otimes_{i=1}^{N} \beta_i$$

$$R \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}_1} \; \boxed{\mathcal{S}_2} \; \cdots \; \boxed{\mathcal{S}_N} \longrightarrow R^*$$

Ejemplo: concatenación de curvas rate-latency.

$$(\beta_{R_1,T_1} \otimes \beta_{R_2,T_2}) = \beta_{\min\{R_1,R_2\},T_1+T_2}$$



Resultados fundamentales

Resultados fundamentales: Retardo y backlog

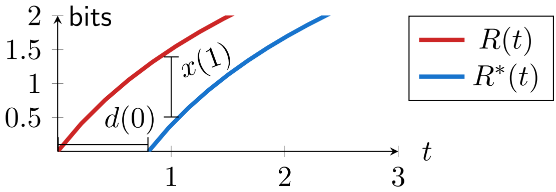
Definición (Retardo y backlog)

Sea un flujo $R \in \mathcal{F}$ que al atravesar el sistema $\mathcal{S}$ sale como $R^* \in \mathcal{F}$, el retardo de un bit que llega en t se define como

$$d(t) = \inf_{\tau > 0} \{\tau : R(t) \leq R^*(t + \tau)\}$$

y el backlog en el instante t como

$$x(t) = R(t) - R^*(t)$$



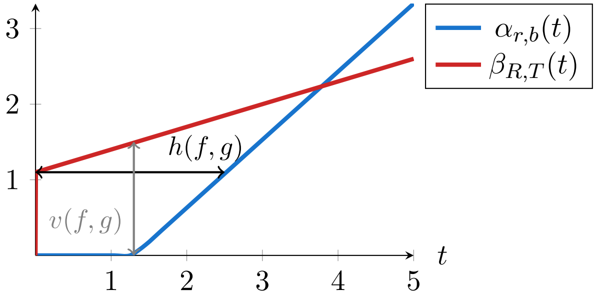
Lema (Cota retardo/backlog)

Sea un flujo $R \in \mathcal{F}$ *con curva de llegada* α *que atraviesa un sistema* $\mathcal{S}$ *con curva de servicio* β*, el retardo y backlog cumplen*

$$d(t) \leq h(\alpha, \beta)$$
$$x(t) \leq v(\alpha, \beta)$$

Ejemplo: si tenemos las curvas $\alpha = \gamma_{r,b}$ y $\beta_{R,T}$, las cotas de retardo y backlog son

$$d(t) \leq \frac{b}{R} + T$$
$$x(t) \leq rT + b$$



Resultados fundamentales: Cotas retardo/backlog

Ejemplo (cont.): recordemos la deconvolución

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \begin{cases} [b + R(t+T)]^+, & t \le -T \\ r(t+T) + b, & t > -T \end{cases}$$

Recordemos también que la desviación horizontal se puede calcular como $h(\gamma_{r,b}, \beta_{R,T}) = \inf_{u \ge 0}\{d : (\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(-d) \le 0\}$. Buscamos dónde se hace cero la deconvolución:

$$t = -(\frac{b}{r} + T), \quad t \le -T$$
$$t = -(\frac{b}{R} + T), \quad t > -T$$

Por tanto la desviación horizontal es $h(\gamma_{r,b}, \beta_{R,T}) = \frac{b}{R} + T$.

Resultados fundamentales: Prioridades

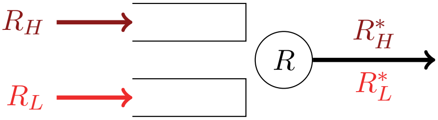
Lema (Curvas de servicio sistema con prioridades)

Sean dos flujos $R_L, R_H \in \mathcal{F}$ *con curvas de llegadas* α_L, α_H *que atraviesan un sistema* $\mathcal{S}$ *con curva de servicio* β *que da prioridad a* R_H*, las curvas de servicio que experimentan los flujos de alta/baja prioridad son*

$$\beta_H = [\beta - l_{\max}^L]^+$$
$$\beta_L = [\beta - \alpha_H]^+$$

con $l_{\max}^L$ *el tamaño máximo de paquete del flujo de baja prioridad.*

Ejemplo: la cola de prioridad luego atraviesa un sistema con curva de servicio rate latency $\beta_{R,T}$. Además el flujo de prioridad R_H es $\gamma_{r,b}$-suave.



En este caso se tiene

$$\beta_H = \beta_{R, \frac{l_{\max}^L}{R}}$$
$$\beta_L = \beta_{R-r, \frac{b}{R-r}}$$

Resultados fundamentales: Weighted Fair Queuing

En el caso del WQF cada flujo i recibe un peso $w_i / \sum_{j \neq i} w_j$. Por tanto el flujo R_i experimenta una curva de servicio

$$\beta_{\frac{w_i}{\sum_{j \neq i} w_j},0}$$

Referencias I

Jean-Yves Le Boudec and Patrick Thiran, Network calculus: a theory of deterministic queuing systems for the internet, Springer, 2001.