

Tema 5: Servicios y Calidad de Servicio

Cálculo de Redes

November 5, 2025



This work is licensed under a “CC BY-NC-SA 4.0” license.



- 1 Introducción
- 2 Álgebra min-plus
 - Convolución
 - Deconvolución
 - Desviación horizontal y vertical
- 3 Modelado con álgebra min-plus
 - Curvas de llegadas
 - Leaky/Token bucket
 - Curvas de servicio
 - Concatenación
- 4 Resultados fundamentales
 - Retardo y backlog
 - Cotas retardo/backlog
 - Prioridades
 - Weighted Fair Queuing

Introducción

El cálculo de redes [LBT01] modela flujos

- electricidad
- fluidos
- **tráfico en internet**

Nos sirve para modelar:

- conformado de tráfico
- políticas de tráfico
- averiguar métricas de latencia y tamaño en cola

Álgebra min-plus

Definición (Convolución min-plus)

La convolución min-plus \otimes de dos funciones crecientes $f, g \in \mathcal{F}$ se define como

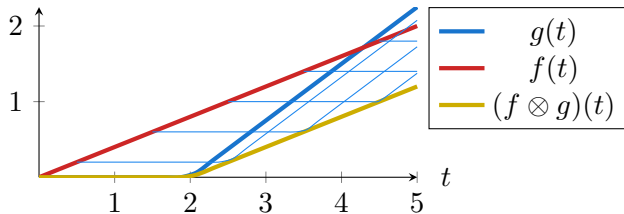
$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} \quad (1)$$

Nota: equivalente a la convolución “clásica”:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) \, ds$$

Álgebra min-plus: Convolución

Si $f(0) = g(0) = 0$ se puede calcular comenzando a dibujar cada función sobre todo punto de la otra y tomando el mínimo.



En este ejemplo: $f(t) = rt, g(t) = \beta_{R,T}(t)$ con $R > r > 0$.

Definición (Deconvolución min-plus)

La deconvolución^a min-plus \oslash de dos funciones crecientes $f, g \in \mathcal{F}$ se define como

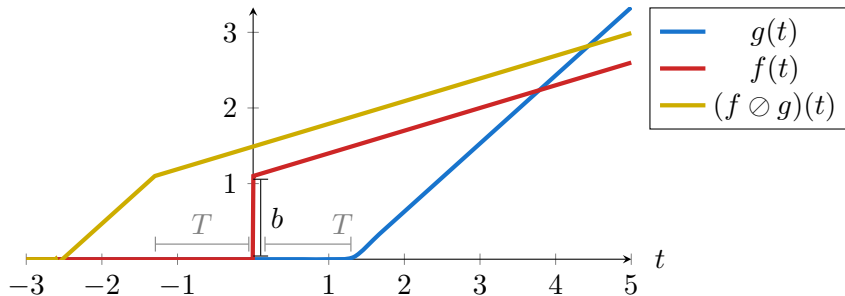
$$(f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0} \{f(t+u) - g(u)\} \quad (2)$$

^aNo esta definida si $\exists t : f(t) = +\infty$ o $g(t) = +\infty$.

Truco: es como la convolución min-plus pero sustituyendo los $+$ por $-$.

Álgebra min-plus: Deconvolución

La deconvolución de $f(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$ y $g(t) = \beta_{R,T}(t)$ es¹



Nota: nótese que $(f \oslash g)(t) \notin \mathcal{F}$ porque no es cero para $t < 0$.

¹con $R > r$

Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Definición (Desviación horizontal/Vertical)

Sean $f, g \in \mathcal{F}$, su desviación horizontal es

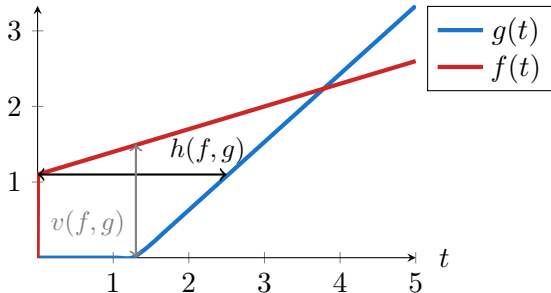
$$h(f, g) = \sup_{t \geq 0} \left\{ \inf_{d \geq 0} \{d : f(t) \leq g(t + d)\} \right\}$$

y su desviación vertical es

$$v(f, g) = \sup_{t \geq 0} \{f(t) - g(t)\}$$

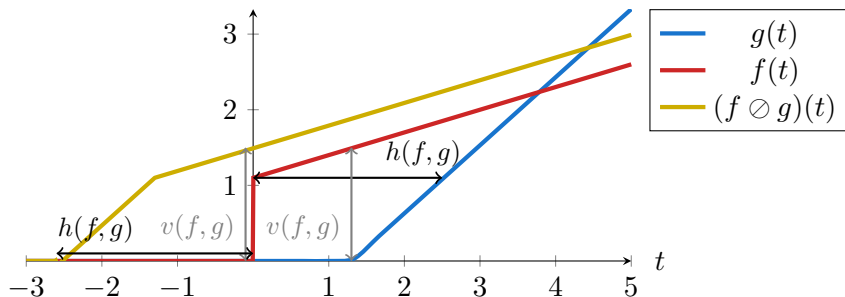
Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Gráficamente las desviaciones verticales y horizontales se ven así:



Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

Otra manera de obtener las desviaciones horizontales y verticales es mediante la deconvolución:



Es decir:

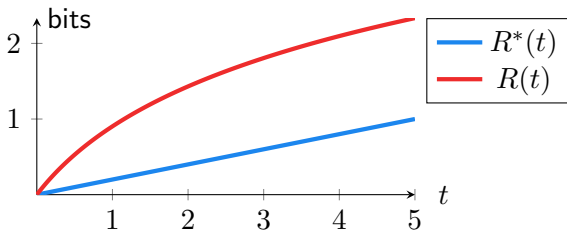
- $v(f, g) = (f \otimes g)(0)$
- $h(f, g) = \inf_{d \geq 0} \{d : (f \otimes g)(-d) \leq 0\}$

Modelado con álgebra min-plus

Modelado con álgebra min-plus



- S : el sistema atravesado (shaper, router, colas, etc.)
- $R \in \mathcal{F}$: flujo entrante
- $R^* \in \mathcal{F}$: flujo saliente



Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

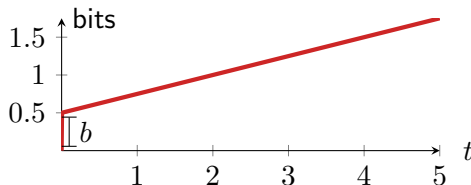
Definición (Curva de llegadas)

La función $\alpha \in \mathcal{F}$ es una curva de llegadas para el flujo $R \in \mathcal{F}$ si y solo si

$$\forall s \leq t, \quad R(t) - R(s) \leq \alpha(t - s)$$

También diremos que el flujo R es α -suave.

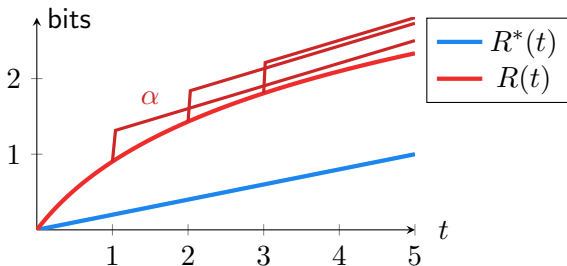
Ejemplo: una curva de llegadas famosa es la función afín $\alpha(t) = rt + b$, también conocida como la curva “rate-burst” $\gamma_{r,b}(t)$.



Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

También, el flujo R es α -suave si $R \leq R \otimes \alpha$.

Interpretación: R queda por debajo de $\alpha = \gamma_{r,b}$ puesta encima.

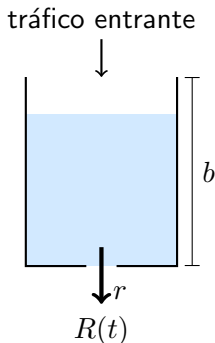


Modelado con álgebra min-plus: Leaky/Token bucket

El tráfico conformado por un leaky bucket es α -suave con

$$\alpha(t) = rt$$

con r la tasa de pérdidas de la cubeta.

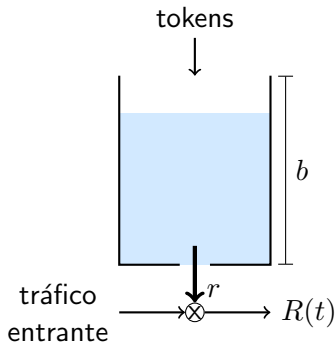


Modelado con álgebra min-plus: Leaky/Token bucket

El tráfico conformado por un token bucket es α -suave con

$$\alpha(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$$

siendo r la tasa de reposición de tokens y b el tamaño de cubeta.

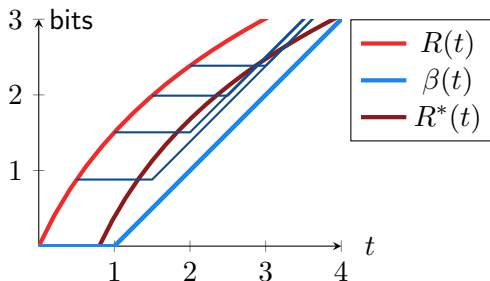


Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

Definition (Curva de servicio)

Sea un flujo R atravesando un sistema \mathcal{S} , decimos que $\beta \in \mathcal{F}$ es una curva de servicio de $R \in \mathcal{F}$ si y solo si

$$R^* \geq R \otimes \beta$$

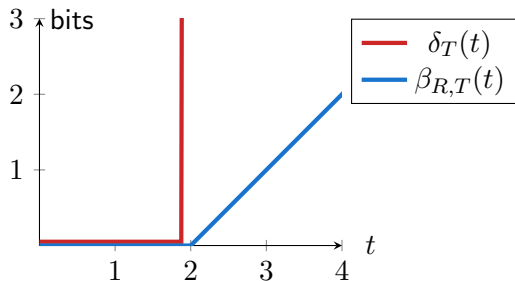


Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

La curva de servicio “rate-latency” es $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$.

La curva de servicio “burst-delay” es

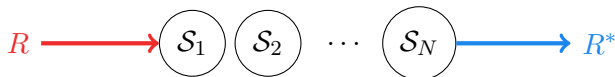
$$\delta_T(t) = \begin{cases} +\infty, & t > T \\ 0, & t \leq T \end{cases}$$



Modelado con álgebra min-plus: Concatenación

Si atravesamos N sistemas, cada uno con una curva de servicio $\beta_i, i = 1, \dots, N$; la curva de servicio del sistema total es

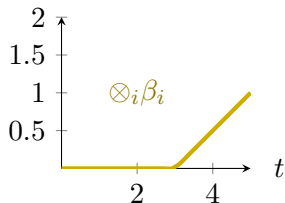
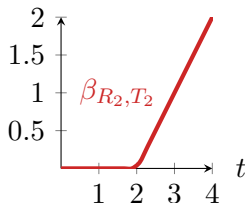
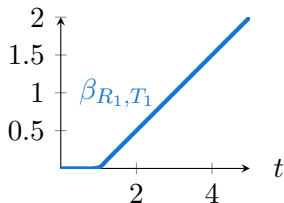
$$\beta = \beta_1 \otimes \beta_2 \dots \otimes \beta_N = \bigotimes_{i=1}^N \beta_i$$



Modelado con álgebra min-plus: Concatenación

Ejemplo: concatenación de curvas rate-latency.

$$(\beta_{R_1, T_1} \otimes \beta_{R_2, T_2}) = \beta_{\min\{R_1, R_2\}, T_1 + T_2}$$



Resultados fundamentales

Resultados fundamentales: Retardo y backlog

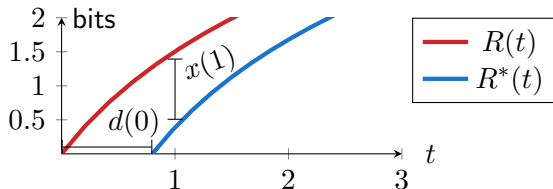
Definición (Retardo y backlog)

Sea un flujo $R \in \mathcal{F}$ que al atravesar el sistema \mathcal{S} sale como $R^* \in \mathcal{F}$, el retardo de un bit que llega en t se define como

$$d(t) = \inf_{\tau > 0} \{ \tau : R(t) \leq R^*(t + \tau) \}$$

y el backlog en el instante t como

$$x(t) = R(t) - R^*(t)$$



Lema (Cota retardo/backlog)

Sea un flujo $R \in \mathcal{F}$ con curva de llegada α que atraviesa un sistema S con curva de servicio β , el retardo y backlog cumplen

$$d(t) \leq h(\alpha, \beta)$$

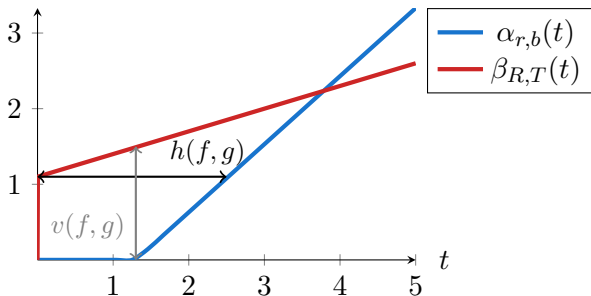
$$x(t) \leq v(\alpha, \beta)$$

Resultados fundamentales: Cotas retardo/backlog

Ejemplo: si tenemos las curvas $\alpha = \gamma_{r,b}$ y $\beta_{R,T}$, las cotas de retardo y backlog son

$$d(t) \leq \frac{b}{R} + T$$

$$x(t) \leq rT + b$$



Lema (Curvas de servicio sistema con prioridades)

Sean dos flujos $R_L, R_H \in \mathcal{F}$ con curvas de llegadas α_L, α_H que atraviesan un sistema \mathcal{S} con curva de servicio β que da prioridad a R_H , las curvas de servicio que experimentan los flujos de alta/baja prioridad son

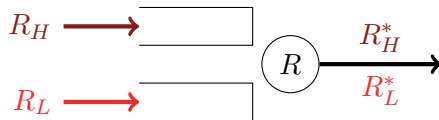
$$\beta_H = [\beta - l_{\max}^L]^+$$

$$\beta_L = [\beta - \alpha_H]^+$$

con l_{\max}^L el tamaño máximo de paquete del flujo de baja prioridad.

Resultados fundamentales: Prioridades

Ejemplo: la cola de prioridad luego atraviesa un sistema con curva de servicio rate latency $\beta_{R,T}$. Además el flujo de prioridad R_H es $\gamma_{r,b}$ -suave.



En este caso se tiene

$$\beta_H = \beta_{R, \frac{l_{\max}^L}{R}}$$

$$\beta_L = \beta_{R-r, \frac{b}{R-r}}$$

Resultados fundamentales: Weighted Fair Queuing

En el caso del WQF cada flujo i recibe un peso $(w_i / \sum_{j \neq i} w_j)C$. Por tanto el flujo R_i experimenta una curva de servicio

$$\beta \frac{w_i}{\sum_{j \neq i} w_j} C, 0$$



Jean-Yves Le Boudec and Patrick Thiran, Network calculus: a theory of deterministic queuing systems for the internet, Springer, 2001.