Tema 4: Cálculo de Redes

November 11, 2024

Contenido I

Introducción

Introducción

El cálculo de redes modela flujos

- electricidad
- fluidos
- **tráfico en internet**

Nos sirve para modelar:

- conformado de tráfico
- políticas de tráfico
- averiguar métricas de lantencia y tamaño en cola

Álgebra min-plus

Álgebra min-plus

Definición (Álgebra min-plus)

Es un diodo[a] *definido en* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \wedge, +)$, *donde:*

- $\wedge$ *es el operador* $\min$
- $+$ *es la suma*

[a] Un tipo de estructura algebraica.

Ejemplo:
la operación

$$(1 + 2) \cdot 3 = 9$$

se "traduce" en:

$$(1 \wedge 2) + 3 = 4$$

Álgebra min-plus

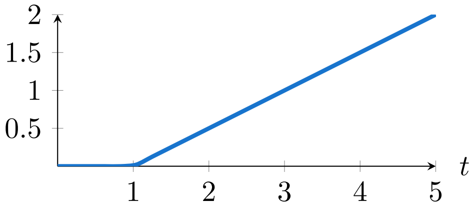
Definición (Familia de funciónes crecientes)

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones crecientes, decimos que $f \in \mathcal{F}$ es una función creciente definida en $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ si y sólo si cumple:

$$f(s) \geq f(t), \forall s \geq t \tag{1}$$

y además $f(t) = 0, \forall t < 0$.

Ejemplo: la función "rate-latency" $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$



Álgebra min-plus: Convolución

Definición (Convolución min-plus)

La convolución min-plus $\otimes$ *de dos funciones crecientes* $f, g \in \mathcal{F}$ *se define como*

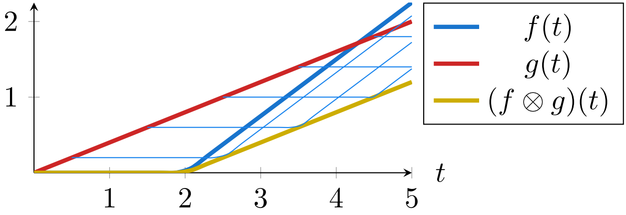
$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} \tag{2}$$

Nota: equivalente a la convolución “clásica”:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\ ds$$

Álgebra min-plus: Convolución

Si $f(0) = g(0) = 0$ se puede calcular comenzando a dibujar cada función sobre todo punto de la otra y tomando el mínimo.



En este ejemplo: $f(t) = rt, g(t) = \beta_{R,T}(t)$ con $R > r > 0$.

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

<u>Con $T < t$</u> dividimos en dos casos y tomamos el menor

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

<u>Con $T < t$</u> dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

Con $T \geq t$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

Con $T < t$ dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

2. $T < s$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{T < s \leq t} \{r(t-s) + R(s-T)\} = r(t-T)$$

Álgebra min-plus: Convolución

Calculemos la convolución min-plus de manera analítica:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + R[s-T]^+\}$$

<u>Con $T \geq t$</u>:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{r(t-s) + 0\} = 0$$

<u>Con $T < t$</u> dividimos en dos casos y tomamos el menor

1. $0 \leq s \leq T$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq T < t} \{r(t-s) + 0\} = r(t-T)$$

2. $T < s$:

$$(f \otimes g)(t) = \inf_{T < s \leq t} \{r(t-s) + R(s-T)\} = r(t-T)$$

El resultado es:

$$\boxed{(f \otimes g)(t) = r[t-T]^+.}$$

Álgebra min-plus: EJercicio

Calcule la convolución min-plus de las función rate-burst $\gamma_{r,b}(t) = rt + b$ y la función rate-latency $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$. Obtenga la solución de manera analítica.

Tenemos:

$$(\gamma_{r,b} \otimes \beta_{R,T})(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t - s) + b + R[s - T]^+\}$$

Con $t \le T$ tenemos

$$(\gamma_{r,b} \otimes \beta_{R,T})(t) = \inf_{0 \le s \le t} \{r(t - s) + b + 0\} = b$$

y con $t > T$ tenemos dos casos. El primero es $s < T < t$:

$$(\gamma_{r,b} \otimes \beta_{R,T})(t) = \inf_{0 \le s \le T} \{r(t - s) + b + 0\} = r(t - T) + b$$

y el segundo es $T < s \le t$

$$(\gamma_{r,b} \otimes \beta_{R,T})(t) = \inf_{T < s \le t} \{r(t - s) + b + R(s - T)\} = r(t - T) + b$$

Por tanto la solución es

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$
- **Suma constante**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, K \in \mathbb{R}^+, \quad (f + K) \otimes g = (f \otimes g) + K$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Convolución

La convolución min-plus está dotada de las siguientes propiedades en $\mathcal{F}$:

- **Cierre**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g \in \mathcal{F}$
- **Asociativa**: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- **Conmutativa**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \otimes g = g \otimes f$
- **Elemento neutro**[1]: $\exists \delta_0 \in \mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}, f \otimes \delta_0 = f$
- **Distrib. con** $\wedge$: $f, g, h \in \mathcal{F}, \quad (f \wedge g) \otimes h = (f \otimes h) \wedge (g \otimes h)$
- **Suma constante**: $\forall f, g \in \mathcal{F}, K \in \mathbb{R}^+, \quad (f + K) \otimes g = (f \otimes g) + K$
- **Isotonicidad**: $\forall f, g, f', g' \in \mathcal{F}, \quad f \leq f', g \leq g' \implies f \otimes f' \leq g \otimes g'$

[1] $\delta_0(t) = +\infty$ con $t > 0$ y 0 con $t \leq 0$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Definición (Deconvolución min-plus)

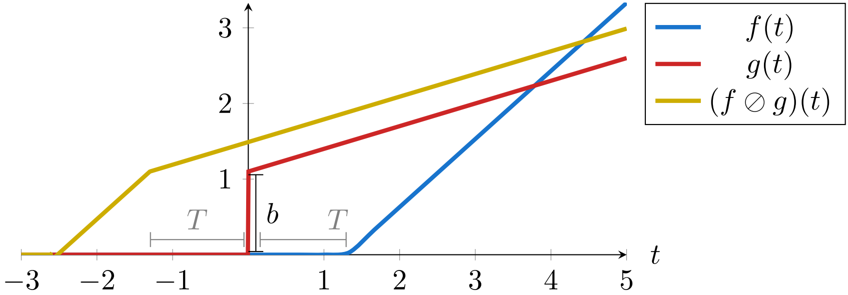
La deconvolución min-plus $\oslash$ *de dos funciones crecientes* $f, g \in \mathcal{F}$ *se define como*

$$(f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0}\{f(t+u) - g(u)\} \tag{3}$$

Truco: es como la convolución min-plus pero sustituyendo los $+$ por $-$.

Álgebra min-plus: Deconvolución

La deconvolución de $f(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$ y $g(t) = \beta_{R,T}(t)$ es[2]



Nota: nótese que $(f \oslash g)(t) \notin \mathcal{F}$ porque no es cero para $t < 0$.

[2] con $R > r$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

Álgebra min-plus: Deconvolución

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{T > u \geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u > T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

Calculemos analíticamente la deconvolución:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{u \geq 0} \{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

recordando que $\beta_{R,T}(u) = 0, t \leq T$ dividimos en dos casos

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{T > u \geq 0} \{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u > T} \{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

en el primer caso u llega a T y $\gamma_{r,b}(t+u) = 0, t \leq -T$. Por tanto tenemos dos casos

1. $t \leq -T$:

$$\begin{aligned} 0 \vee \sup_{-t \geq u > T} &\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \vee \sup_{u > -t} \{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \\ = 0 \vee \sup_{-t \geq u > T} &\{0 - Ru + RT\} \vee \sup_{u > -t} \{r(t+u) + b - R(u-T)\} \\ &= 0 \vee 0 \vee \{b + R(t+T)\} = [b + R(t+T)]^+ \end{aligned}$$

Álgebra min-plus: Deconvolución

2. $t > -T$:

$$(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \sup_{T>u\geq 0}\{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\}$$

$$= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{r(t+u)+b-R(u-T)\}$$

$$= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{(r-R)u+b+rt+RT\}$$

$$= \{r(t+T)+b\} \vee \{r(t+T)+b\} = r(t+T)+b$$

2. $t > -T$:

$$
\begin{aligned}
(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) &= \sup_{T>u\geq 0} \{\gamma_{r,b}(t+u)\} \vee \sup_{u>T}\{\gamma_{r,b}(t+u) - \beta_{R,T}(u)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{r(t+u)+b-R(u-T)\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \sup_{u>T}\{(r-R)u+b+rt+RT\} \\
&= \{r(t+T)+b\} \vee \{r(t+T)+b\} = r(t+T)+b
\end{aligned}
$$

Como resultado se obtiene

$$
(\gamma_{r,b} \oslash \beta_{R,T})(t) = \begin{cases} [b+R(t+T)]^{+}, & t \leq -T \\ r(t+T)+b, & t > -T \end{cases}
$$