# Tema 5: Servicios y Calidad de Servicio
# Cálculo de Redes

November 6, 2025

# Contenido I

# Introducción

# Introducción

El cálculo de redes [LBT01] modela flujos

- electricidad
- fluidos
- **tráfico en internet**

Nos sirve para modelar:

- conformado de tráfico
- políticas de tráfico
- averiguar métricas de lantencia y tamaño en cola

# Álgebra min-plus

# Álgebra min-plus: Convolución

**Definición (Convolución min-plus)**

*La convolución min-plus $\otimes$ de dos funciones crecientes $f, g \in \mathcal{F}$ se define como*

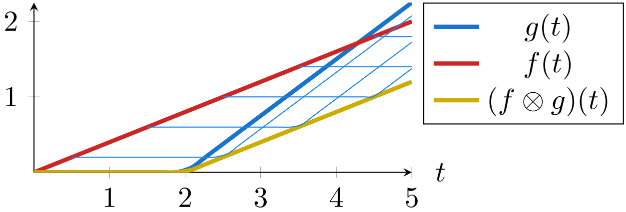
$$(f \otimes g)(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f(t-s) + g(s)\} \tag{1}$$

Nota: equivalente a la convolución "clásica":

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\, ds$$

# Álgebra min-plus: Convolución

Si $f(0) = g(0) = 0$ se puede calcular comenzando a dibujar cada función sobre todo punto de la otra y tomando el mínimo.




En este ejemplo: $f(t) = rt, g(t) = \beta_{R,T}(t)$ con $R > r > 0$.

# Álgebra min-plus: Deconvolución

**Definición (Deconvolución min-plus)**

*La deconvolución*[a] *min-plus* $\oslash$ *de dos funciones crecientes* $f, g \in \mathcal{F}$ *se define como*

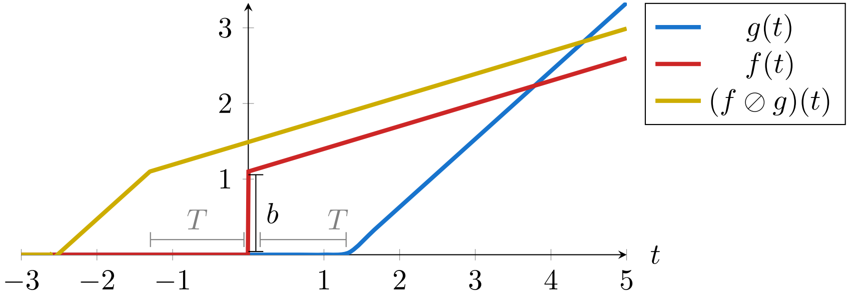
$$(f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0}\{f(t+u) - g(u)\} \tag{2}$$

[a] No esta definida si $\exists t : f(t) = +\infty$ o $g(t) = +\infty$.

Truco: es como la convolución min-plus pero sustituyendo los $+$ por $-$.

# Álgebra min-plus: Deconvolución

La deconvolución de $f(t) = \gamma_{r,b}(t) = rt + b$ y $g(t) = \beta_{R,T}(t)$ es[1]




Nota: nótese que $(f \oslash g)(t) \notin \mathcal{F}$ porque no es cero para $t < 0$.

[1] con $R > r$

# Álgebra min-plus: Desviación horizontal y vertical

## Definición (Desviación horizontal/Vertical)

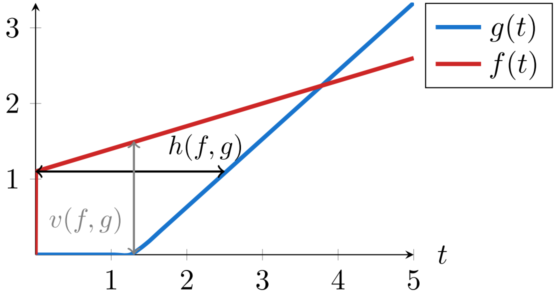
*Sean $f, g \in \mathcal{F}$, su desviación horizontal es*

$$h(f,g) = \sup_{t \geq 0} \left\{ \inf_{d \geq 0} \{ d : f(t) \leq g(t+d) \} \right\}$$

*y su desviación vertical es*

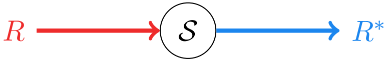
$$v(f,g) = \sup_{t \geq 0} \{ f(t) - g(t) \}$$

Gráficamente las desviaciones verticales y horizontales se ven así:

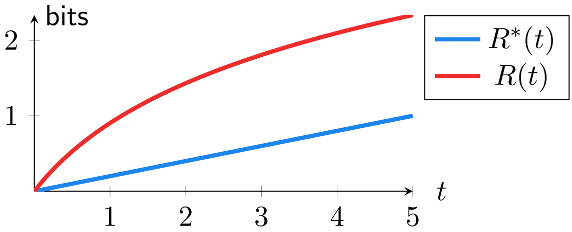


# Modelado con álgebra min-plus

# Modelado con álgebra min-plus




- $\mathcal{S}$: el sistema atravesado (shaper,router,colas,etc.)
- $R \in \mathcal{F}$: flujo entrante
- $R^* \in \mathcal{F}$: flujo saliente



# Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

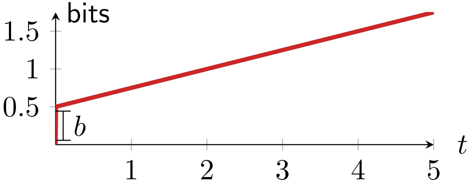
## Definición (Curva de llegadas)

*La función $\alpha \in \mathcal{F}$ es una curva de llegadas para el flujo $R \in \mathcal{F}$ si y solo si*

$$\forall s \leq t, \quad R(t) - R(s) \leq \alpha(t-s)$$

*También diremos que le flujo $R$ es $\alpha$-suave.*

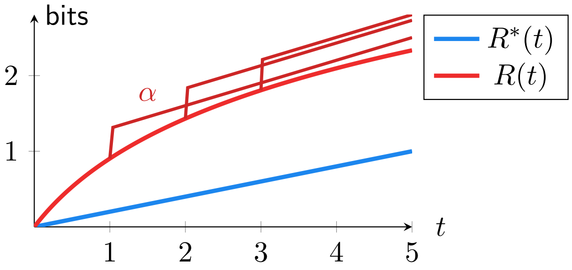
<u>Ejemplo</u>: una curva de llegadas famosa es la función afín $\alpha(t) = rt + b$, también conocida como la curva "rate-burst" $\gamma_{r,b}(t)$.



# Modelado con álgebra min-plus: Curvas de llegadas

También, el flujo $R$ es $\alpha$-suave si $R \leq R \otimes \alpha$.

Interpretación: $R$ queda por debajo de $\alpha = \gamma_{r,b}$ puesta encima.

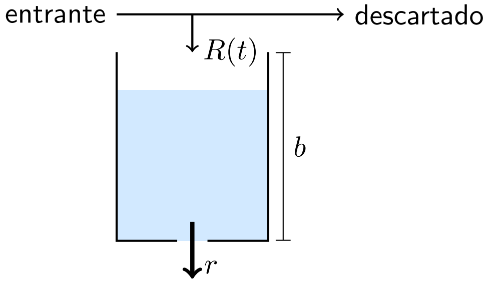


# Modelado con álgebra min-plus

El tráfico conformado y no descartado por un leaky bucket $R(t)$ es $\alpha$-suave con

$$\alpha(t) = rt + b$$

con $r$ la tasa de pérdidas de la cubeta y $b$ el tamaño de cubeta.

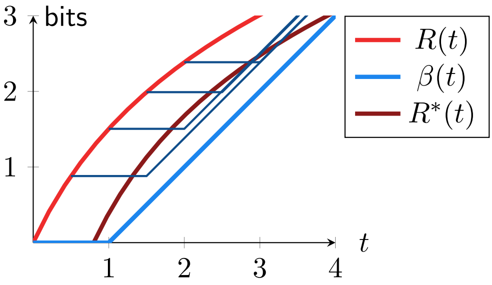


# Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

## Definition (Curva de servicio)

Sea un flujo $R$ atravesando un sistema $\mathcal{S}$, decimos que $\beta \in \mathcal{F}$ es una curva de servicio de $R \in \mathcal{F}$ si y solo si

$$R^* \geq R \otimes \beta$$

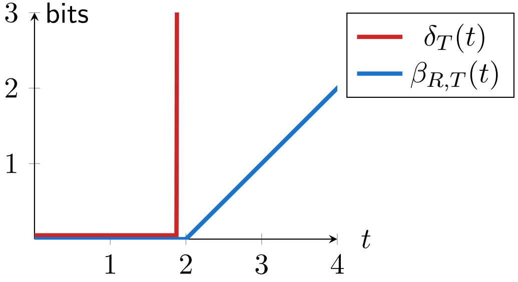


# Modelado con álgebra min-plus: Curvas de servicio

La curva de servicio "rate-latency" es $\beta_{R,T}(t) = R[t - T]^+$.

La curva de servicio "burst-delay" es

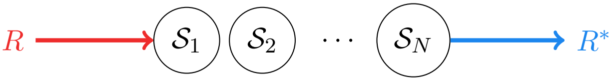
$$\delta_T(t) = \begin{cases} +\infty, & t > T \\ 0, & t \leq T \end{cases}$$



# Modelado con álgebra min-plus: Concatenación

Si atravesamos $N$ sistemas, cada uno con una curva de servicio $\beta_i, i = 1, \ldots, N$; la curva de servicio del sistema total es

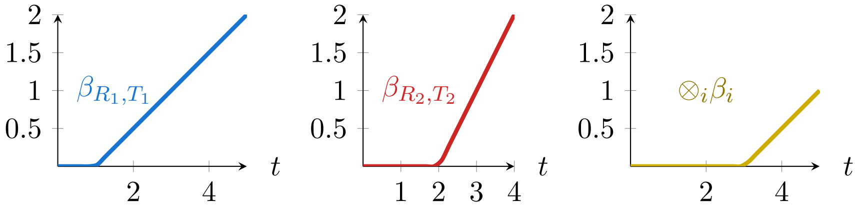
$$\beta = \beta_1 \otimes \beta_2 \ldots \otimes \beta_N = \otimes_{i=1}^{N} \beta_i$$



# Modelado con álgebra min-plus: Concatenación

Ejemplo: concatenación de curvas rate-latency.

$$(\beta_{R_1,T_1} \otimes \beta_{R_2,T_2}) = \beta_{\min\{R_1,R_2\},T_1+T_2}$$



# Resultados fundamentales

# Resultados fundamentales: Retardo y backlog

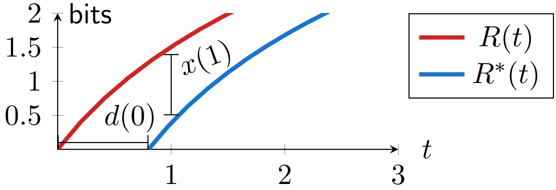
## Definición (Retardo y backlog)

*Sea un flujo $R \in \mathcal{F}$ que al atravesar el sistema $\mathcal{S}$ sale como $R^* \in \mathcal{F}$, el retardo de un bit que llega en $t$ se define como*

$$d(t) = \inf_{\tau > 0} \{\tau : R(t) \leq R^*(t + \tau)\}$$

*y el backlog en el instante $t$ como*

$$x(t) = R(t) - R^*(t)$$



# Resultados fundamentales: Cotas retardo/backlog

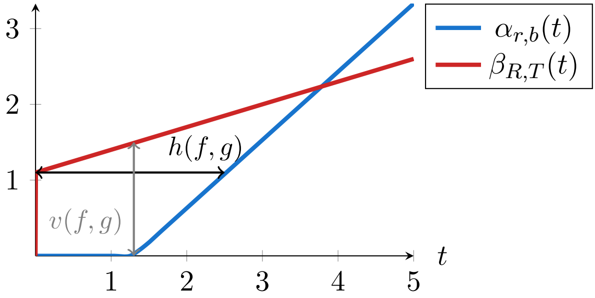
## Lema (Cota retardo/backlog)

*Sea un flujo* $R \in \mathcal{F}$ *con curva de llegada* $\alpha$ *que atraviesa un sistema* $\mathcal{S}$ *con curva de servicio* $\beta$*, el retardo y backlog cumplen*

$$d(t) \leq h(\alpha, \beta)$$
$$x(t) \leq v(\alpha, \beta)$$

Ejemplo: si tenemos las curvas $\alpha = \gamma_{r,b}$ y $\beta_{R,T}$, las cotas de retardo y backlog son

$$d(t) \leq \frac{b}{R} + T$$
$$x(t) \leq rT + b$$



# Resultados fundamentales: Prioridades

## Lema (Curvas de servicio sistema con prioridades)

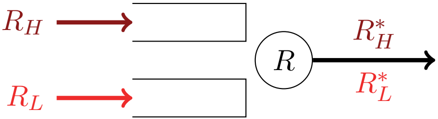
*Sean dos flujos* $R_L, R_H \in \mathcal{F}$ *con curvas de llegadas* $\alpha_L, \alpha_H$ *que atraviesan un sistema* $\mathcal{S}$ *con curva de servicio* $\beta$ *que da prioridad a* $R_H$*, las curvas de servicio que experimentan los flujos de alta/baja prioridad son*

$$\beta_H = [\beta - l_{\max}^L]^+$$
$$\beta_L = [\beta - \alpha_H]^+$$

*con* $l_{\max}^L$ *el tamaño máximo de paquete del flujo de baja prioridad.*

# Resultados fundamentales: Prioridades

<u>Ejemplo:</u> la cola de prioridad luego atraviesa un sistema con curva de servicio rate latency $\beta_{R,T}$. Además el flujo de prioridad $R_H$ es $\gamma_{r,b}$-suave.




En este caso se tiene

$$\beta_H = \beta_{R,\frac{l_{\max}^L}{R}}$$

$$\beta_L = \beta_{R-r,\frac{b}{R-r}}$$

# Resultados fundamentales: Weighted Fair Queuing

En el caso del WQF cada flujo $i$ recibe un peso $(w_i / \sum_{j \neq i} w_j)C$. Por tanto el flujo $R_i$ experimenta una curva de servicio

$$\beta_{\frac{w_i}{\sum_{j \neq i} w_j} C, \frac{l_{\max}}{C}}$$

con $l_{\max}$ el máximo tamaño de paquete.

# Resultados fundamentales: Ejemplo I

Considere un tráfico de baja prioridad que

1. se conforma por un leaky bucket $b = 2\,\mathrm{Mb}, r = \frac{1}{4}\,\mathrm{Mbps}$
2. atraviesa un switch con velocidad de rtansmisión de $R = 2\,\mathrm{Mbps}$ con tráfico de alta prioridad a tasa $r = 1\,\mathrm{Mbps}$ con ráfagas de $b = 2\,\mathrm{Mb}$
3. y sale por un switch con WFQ y velocidad de transmisión de $C = 10\,\mathrm{Mbps}$ que otorga un peso de $\frac{1}{20}$ al tráfico de baja prioridad. El switch recibe paquetes de tamaño máximo $l_{\max} = 500\,\mathrm{b}$

Pregunta: ¿cuál es el retardo máximo que sufrirá el tráfico conformado de baja prioridad?

# Resultados fundamentales: Ejemplo II

Solución:

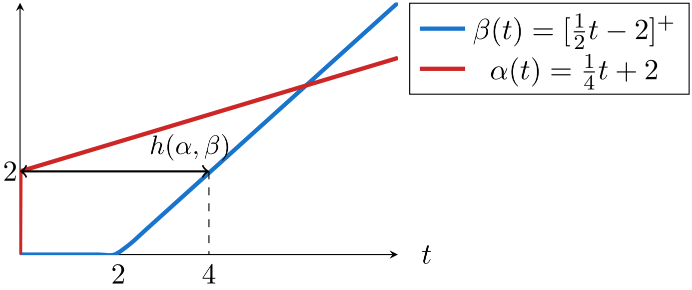
- tráfico conformado $\alpha(t) = \frac{1}{4}t + 2$
- servicio baja prioridad $\beta_1(t) = [(R-r)t - \frac{b}{R-r}]^+ = [t-2]^+ = \beta_{1,2}$
- servicio WFQ $\beta_2(t) = [\frac{C}{20}t - \frac{l_{\max}}{C}]^+ = [\frac{1}{2}t - 5 \cdot 10^{-5}]^+ = \beta_{\frac{1}{2}, 5\cdot 10^{-5}}$

La curva de servicio resultante es

$$\beta = \beta_1 \otimes \beta_2 = \beta_{1,2} \otimes \beta_{\frac{1}{2}, 5\cdot 10^{-5}} = \beta_{\frac{1}{2}, 2}$$

el máximo retardo está acotado por la desviación horizontal de la curva de llegadas del tráfico conformado $\alpha(t)$ con la curva de servicio $\beta(t)$

# Resultados fundamentales: Ejemplo III




Por tanto el retardo siempre está acotado por la desviacón horizontal

$$d(t) \leq h(\alpha, \beta) = 4\,\mathrm{sec}$$

# Referencias I

Jean-Yves Le Boudec and Patrick Thiran, Network calculus: a theory of deterministic queuing systems for the internet, Springer, 2001.