MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Note liminaire

Programme selon les sections :
- fonctions de références, représentations graphiques, dérivées, tableau de variations : toutes sections
- opérations sur les limites, asymptotes : STI2D, STL, S

Prérequis

Notion de fonction – Signe et variations d'une fonction

Plan du cours

1. Fonctions de référence
2. Fonctions dérivées
3. Tableau de variation
4. Limites et asymptotes

1. Fonctions de référence

Les fonctions de référence sont les fonctions qui permettent de construire par combinaison toutes les autres fonctions.

Fonctions affines :

$\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)

Une fonction linéaire est une fonction affine avec $b = 0$.

f est **croissante** si $a > 0$, **décroissante** si $a < 0$.

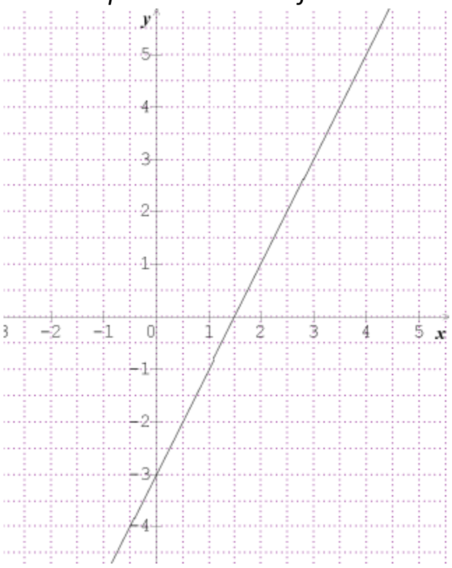
Si $a > 0$ *f* est **négative sur** $\left]-\infty; \frac{-b}{a}\right]$ et **positive sur** $\left[\frac{-b}{a}; +\infty\right[$.
Si $a < 0$ *f* est **positive sur** $\left]-\infty; \frac{-b}{a}\right]$ et **négative sur** $\left[\frac{-b}{a}; +\infty\right[$.

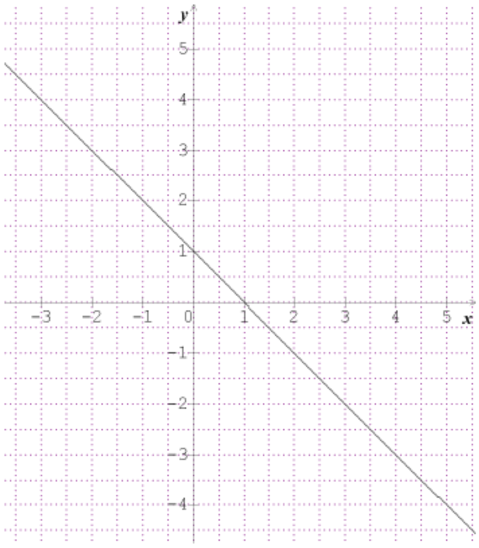
MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

La **représentation graphique** d'une fonction affine est une **droite**.

Exemples : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -x + 1$

Droite représentative de f





Droite représentative de g

<u>Fonction carrée :</u>

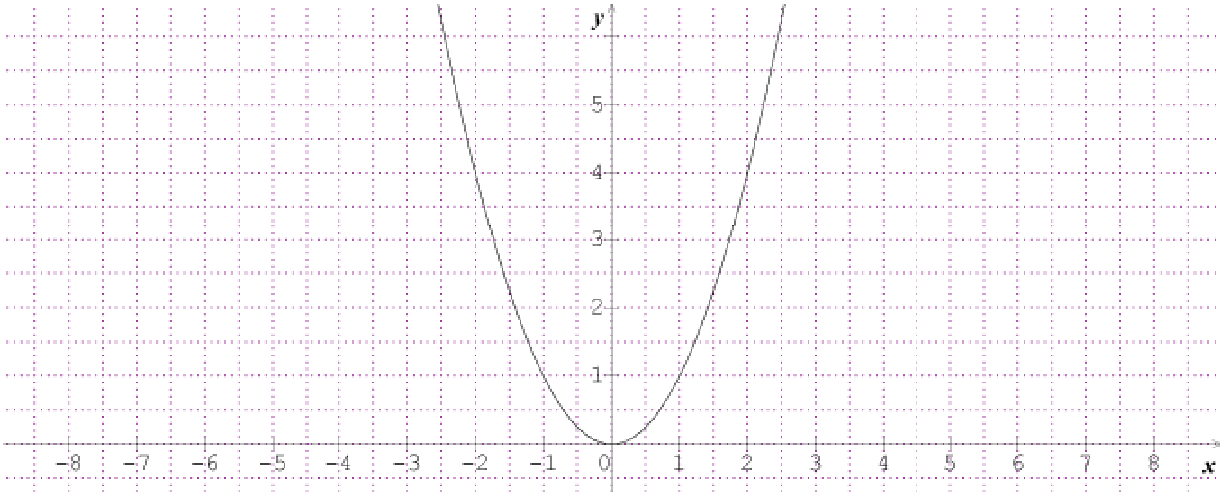
$\boldsymbol{f(x) = x^2}$ **définie sur** $\mathbb{R}$

f est **décroissante sur** $]-\infty; \mathbf{0}]$ et **croissante sur** $[\mathbf{0}; +\infty[$.

f est **positive sur** $\mathbb{R}$.

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

La **représentation graphique** de la fonction carrée est une **parabole**.



<u>Fonction cube :</u>

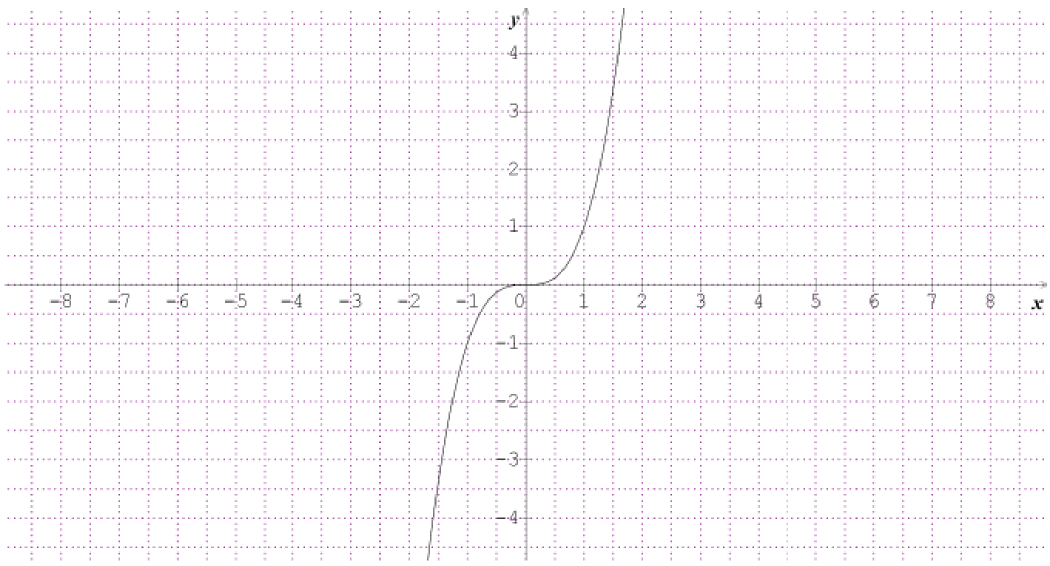
$f(x) = x^3$ **définie sur** R

f est **croissante sur** R.

f est **négative sur** $]-\infty; 0]$ et **positive sur** $[0; +\infty[$.

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Représentation graphique :



<u>Fonctions trinômes (ou polynômes du second degré) :</u>

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ **définie sur R** (a, b et c réels)

discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
racines (solutions de l'équation $f(x) = 0$) : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La fonction carrée est une fonction trinôme avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.

Si $\boldsymbol{a} > 0$ f est **décroissante sur** $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$et **croissante sur** $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.
Si $\boldsymbol{a} < 0$ f est **croissante sur** $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$et **décroissante sur** $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.

Si $\Delta > 0$ (deux racines) :
- Si $\boldsymbol{a} > 0$ f est **positive à l'extérieur des racines** et **négative à l'intérieur des racines**.
- Si $\boldsymbol{a} < 0$ f est **négative à l'extérieur des racines** et **positive à l'intérieur des racines**.

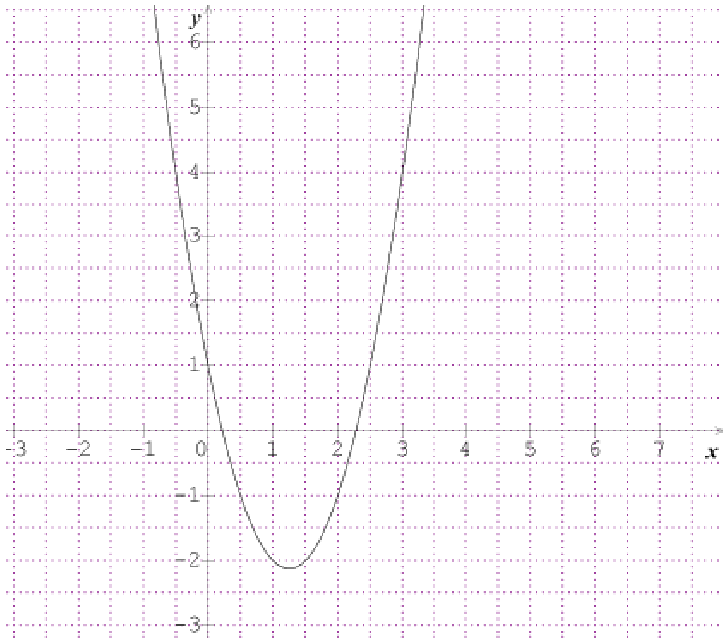
MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Si $\Delta = 0$ (racine double) :
- Si $\boldsymbol{a} > 0$ f est **positive sur** R et $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0$.
- Si $\boldsymbol{a} < 0$ f est **négative sur** R et $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0$.

Si $\Delta < 0$ (pas de racine) :
- Si $\boldsymbol{a} > 0$ f est **strictement positive sur** R.
- Si $\boldsymbol{a} < 0$ f est **strictement négative sur** R.

La **représentation graphique** d'une fonction trinôme est une **parabole**.

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$



MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

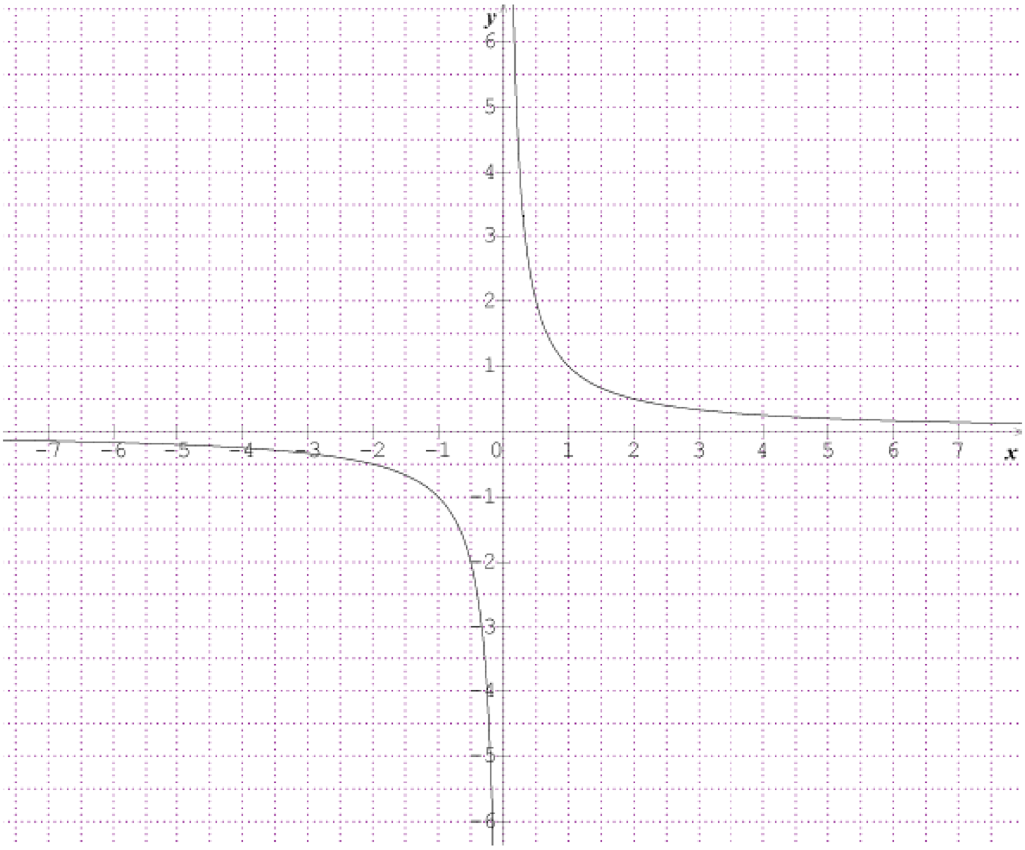
Fonction inverse :

$f(x) = \frac{1}{x}$ **définie sur R***

f est **décroissante sur** $]-\infty; 0[$ et **sur** $]0; +\infty[$.

f est **négative sur** $]-\infty; 0[$ et **positive sur** $]0; +\infty[$.

La **représentation graphique** de la fonction inverse est une **hyperbole**.



MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Fonctions homographiques :

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ (*a, b, c* et *d* réels)

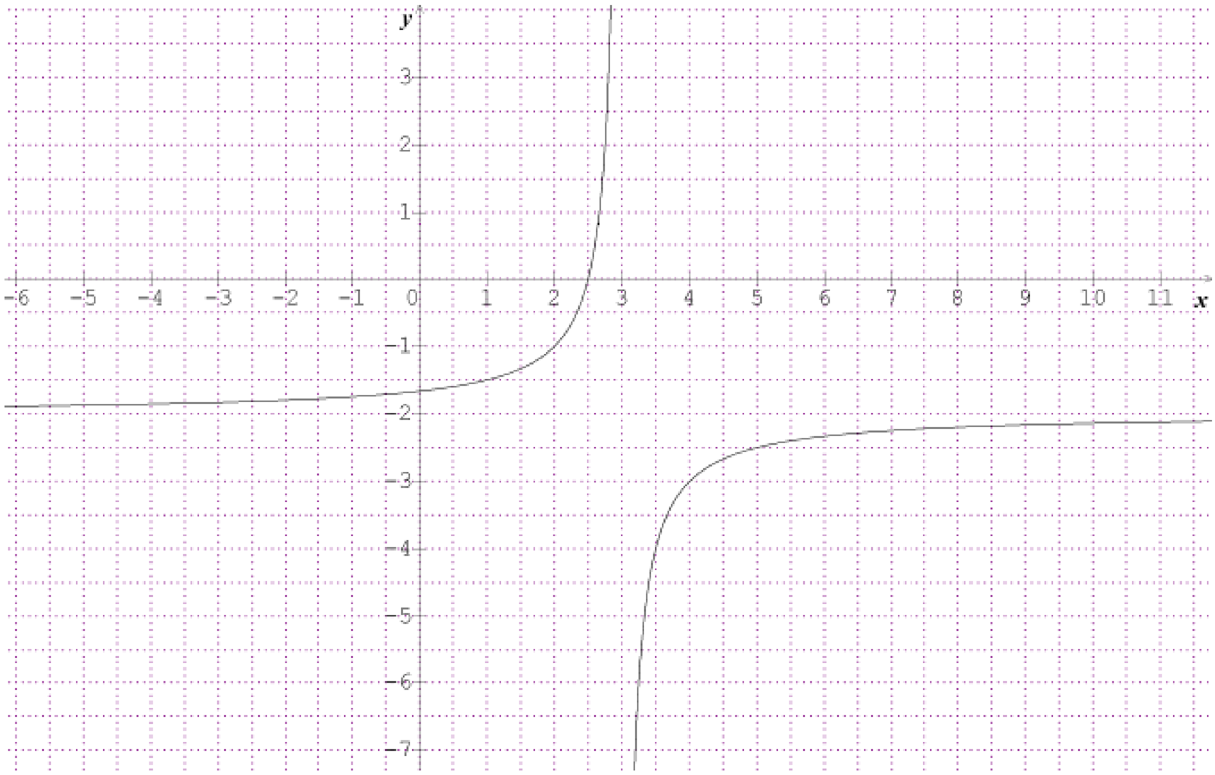
La fonction inverse est une fonction homographique avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$.

Si $\boldsymbol{ad - bc} > 0$ alors f est **croissante sur** $\left]-\infty; \frac{-d}{c}\right[$ et **sur** $\left]\frac{-d}{c}; +\infty\right[$.
Si $\boldsymbol{ad - bc} < 0$ alors f est **décroissante sur** $\left]-\infty; \frac{-d}{c}\right[$ et **sur** $\left]\frac{-d}{c}; +\infty\right[$.

L'étude du signe d'une fonction homographique se fait au cas par cas, en faisant un tableau de signe.

La **représentation graphique** d'une fonction homographique est une **hyperbole**.

Exemple : $f(x) = \frac{2x-5}{-x+3}$



MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

<u>Fonction racine carrée :</u>

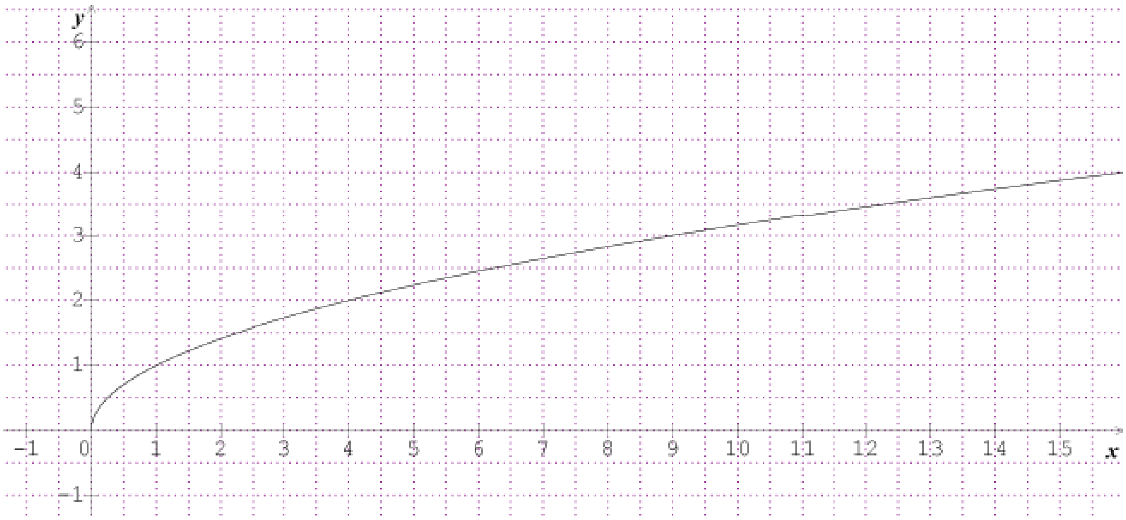
$f(x) = \sqrt{x}$ **définie sur** $[0; +\infty[$

f est **croissante sur** $[0; +\infty[$.

f est **positive sur** $[0; +\infty[$.

Remarque : $(\sqrt{x})^2 = x$ *et* $\sqrt{x^2} = x$
On dit que la fonction racine est la fonction ***réciproque*** *de la fonction carrée.*

Représentation graphique :



MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

2. Fonctions dérivées

Récapitulatif des dérivées des fonctions de référence :

f	**domaine de définition**	***f'***	**domaine de dérivabilité**
k (k réel constant)	R	0	R
x	R	1	R
$ax+b$	R	a	R
x^2	R	$2x$	R
x^3	R	$3x^2$	R
$\frac{1}{x}$	R*	$\frac{-1}{x^2}$	R*
x^k ($k \in Z$)	R ou R*	kx^{k-1}	R ou R*
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$R\backslash\left\{\frac{-d}{c}\right\}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$R\backslash\left\{\frac{-d}{c}\right\}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Dérivées de fonctions composées :

Soient *u* et *v* deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

f	***f'***
$k\times u$ (k réel)	$k\times u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
u^k ($k \in Z$)	$ku'u^{k-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Tangentes :

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur *I*, et $a \in I$.
Le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de la fonction *f* au point d'abscisse *a* est le **nombre dérivé** de la fonction en a. D'où l'équation de cette tangente :

$$\boldsymbol{T_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

3. Tableau de variation

Signe de la dérivée et sens de variation :

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si $\boldsymbol{f'} > 0$ sur I alors *f* est **croissante** sur I.
Si $\boldsymbol{f'} < 0$ sur I alors *f* est **décroissante** sur I.

Si $f(x_0)$ est un extremum de la fonction (minimum ou maximum), alors $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

Attention : la réciproque n'est pas vraie.
Contre-exemple : $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 0$ *et pourtant* $f(0)$ *n'est pas un extremum de la fonction f.*

Pour dresser le tableau de variation d'une fonction, il est donc nécessaire, le plus souvent, de passer par l'étude du signe de sa dérivée.

Exemple d'étude de fonction :

$f(x) = x + \frac{4}{x}$ définie sur R*.

1) Calcul de la dérivée

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$ *(on donne l'expression de f' qui facilitera le plus l'étude de son signe)*

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

2) Etude du signe de la dérivée

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-2)(x+2)}{x2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

On a donc : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -2[$ et sur $]2; +\infty[$
$f'(x) < 0$ sur $]-2; 0[$ et sur $]0; 2[$

3) Tableau de variation

$f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -2[$ et sur $]2; +\infty[$ donc f est croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]2; +\infty[$.
$f'(x) < 0$ sur $]-2; 0[$ et sur $]0; 2[$ donc f est décroissante sur $]-2; 0[$ et sur $]0; 2[$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

Calcul des extrema :

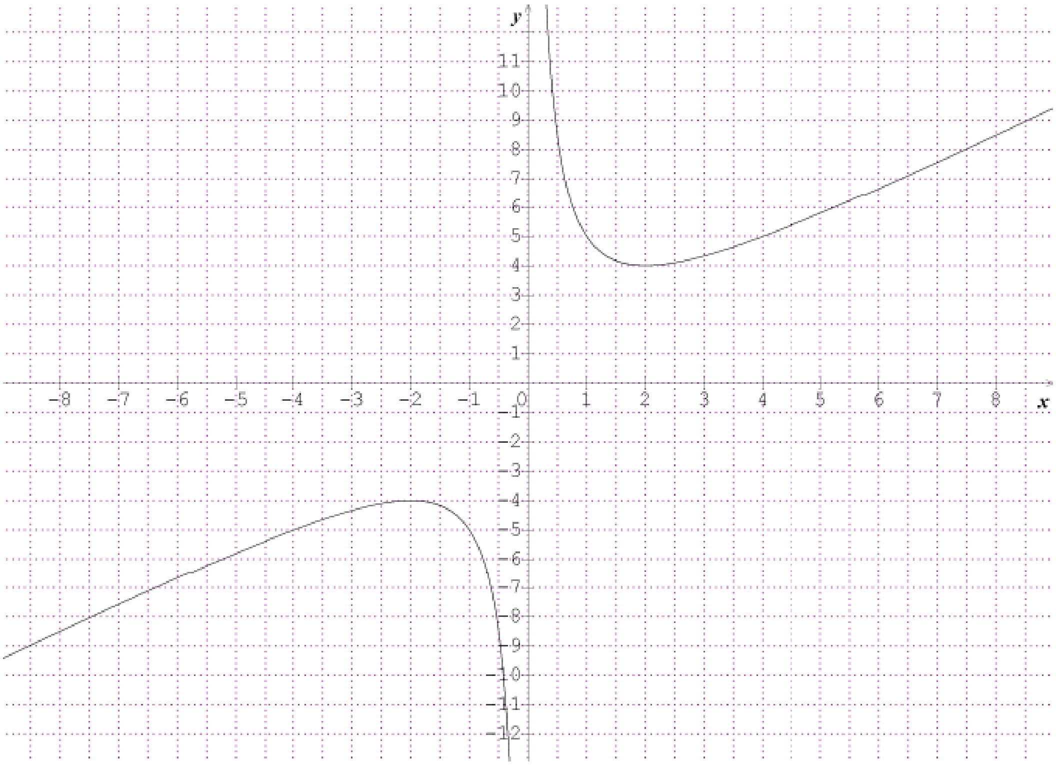
$f(-2) = -2 + \frac{4}{(-2)} = -4$

$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

4) Représentation graphique de f

Tracer la courbe sur la calculatrice ou par le biais d'un logiciel permet de vérifier ses résultats.



MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

4. Limites et asymptotes

Les définitions exactes des limites d'une fonction ne sont pas strictement au programme. Les voici néanmoins :

Définitions :

- Limite finie en x_0
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I*. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers $\boldsymbol{l}$ en $\boldsymbol{x_0}$** quand :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ implique $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note : $\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$

- Limite finie en $+\infty$
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle $]\alpha; +\infty[$. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers $\boldsymbol{l}$ en $+\infty$** quand :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $x > k$ implique $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note :$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$

- Limite finie en $-\infty$
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle $]-\infty; \alpha[$. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers $\boldsymbol{l}$ en $-\infty$** quand :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $k < 0$ tel que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, $x < k$ implique $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note :$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$

- Limite infinie en $+\infty$
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle $]\alpha; +\infty[$. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers $+\infty$** *(ou $-\infty$)* **en** $+\infty$ quand :
Pour tout réel $M > 0$ *(pour tout réel $m < 0$),* il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $x > k$ implique $f(x) > M$ *($f(x) < m$).*
On note :$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ *(ou $lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)*

- Limite infinie en $-\infty$
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle $]-\infty; \alpha[$. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend** $+\infty$ *(ou $-\infty$)* **en** $-\infty$ quand :
Pour tout réel $M > 0$ *(pour tout réel $m < 0$),* il existe un réel $k < 0$ tel que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, $x < k$ implique $f(x) > M$ *($f(x) < m$).*
On note :$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ *(ou $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)*

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

- *Limite à gauche*
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I*. On dit que **$f(x)$ admet une limite à gauche en x_0** quand :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $0 < x_0 - x < \delta$ implique $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

- *Limite à droite*
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I*. On dit que **$f(x)$ admet une limite à droite en x_0** quand :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $0 < x - x_0 < \delta$ implique $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$
Ces définitions de limites à gauche et à droite sont données pour des limites finies. On peut les étendre à partir de ce qui précède à des limites infinies.

<u>Remarques :</u>

- Définition « intuitive » : dire qu'une fonction admet une limite l en x_0, c'est dire que plus les valeurs de x se rapprochent de x_0, plus celles de $f(x)$ vont se rapprocher de l. Dire qu'une fonction tend vers $+\infty$ en x_0, c'est dire que plus les valeurs de x se rapprochent de x_0, plus les valeurs de $f(x)$ seront grandes.

- On peut étendre la notion de limite aux suites, en considérant qu'une suite est une fonction définie sur N.

<u>Limites usuelles :</u>

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ ($k \in$ N*) $\lim_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ si k pair $\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ si k impair

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} a = a$
$\lim_{x \to -\infty} a = a$ (*a* réel)

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Opérations sur les limites :

Soient *u* et *v* deux fonctions définies sur un intervalle, admettant une limite finie ou infinie en α (α peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

- Limite de $u+v$

$\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

- Limite de $u \times v$

$\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	l $l>0$	l $l<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l'>0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l'<0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0		
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

- Limite de $\frac{1}{u}$

$\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{u(x)}$
l $(l \neq 0)$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

- Limite de $\frac{u}{v}$

$\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	l $l>0$	l $l<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l'>0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l'<0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0_+	$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$
0_-	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0		
$-\infty$	0	0	0		

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Limite de fonction composée :

Soit *f* la fonction définie sur un intervalle *I* telle que pour tout $x \in I$ $f(x) = u(v(x))$ (on dit que f est une **fonction composée** de u et v, et on peut l'écrire aussi : $f = u \circ v$).

Si $\lim_{x \to \alpha} v(x) = \beta$ **et que** $\lim_{x \to \beta} u(x) = \gamma$ **alors** $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} u(v(x)) = \gamma$
(α, β et γ peuvent être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

Ex : $f(x) = \sqrt{x^3}$ sur $[0; +\infty[$
$u(x) = \sqrt{x}$ $\quad v(x) = x^3$
$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$

Comparaison de limites :

-Soient deux fonctions *u* et *v* définies sur un intervalle *I* de limites respectives l et l' en α (α peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

Si pour tout $x \in I$ $u(x) \geq v(x)$ alors $l \geq l'$.

-Soient deux fonctions *u* et *v* définies sur un intervalle *I* telles que pour tout $x \in I$ $u(x) \geq v(x)$.
Si $\lim_{x \to \alpha} v(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$ (α peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$)
Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} v(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes :

Soient un réel l et trois fonctions *u*, *v* et *w* définies sur un intervalle *I* telles que pour tout $x \in I$
$u(x) \leq v(x) \leq w(x)$.
Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = l$ et $\lim_{x \to \alpha} w(x) = l$ alors $\lim_{x \to \alpha} v(x) = l$. ($\alpha$ peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

Remarque : l'intervalle I sur lequel ces propriétés s'appliquent n'est pas forcé d'être l'ensemble de définition des fonctions. Il peut être judicieusement choisi en fonction des inégalités nécessaires.

Asymptote horizontale :

Soient un réel l, et une fonction *f* définie sur un intervalle $]\alpha; +\infty[$ (ou $]-\infty; \alpha[$), tels que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$).

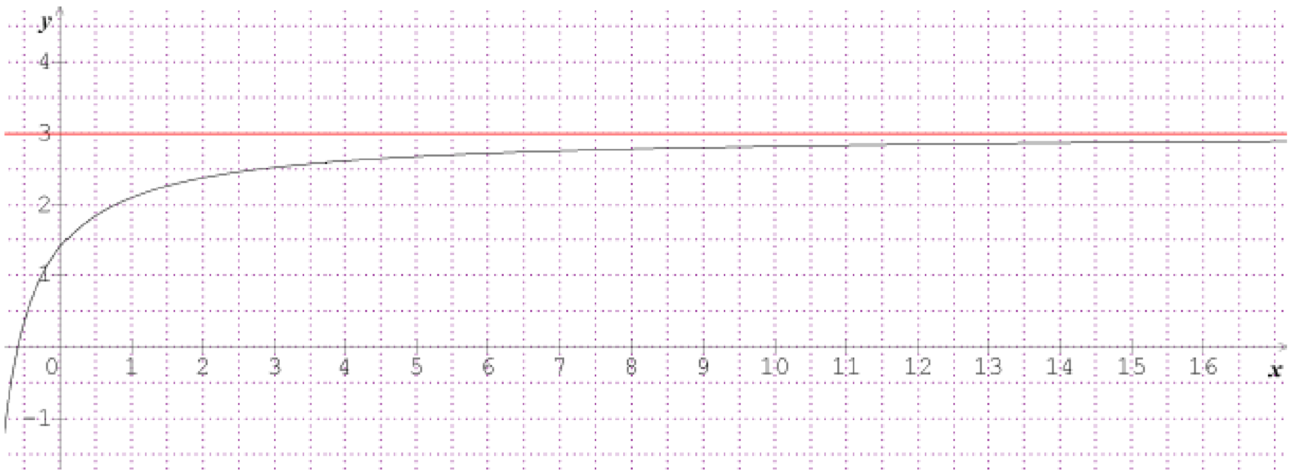
On dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.

Plus les valeurs de x sont grandes (ou plus elles sont petites, dans le cas d'une asymptote en $-\infty$), plus la courbe se rapproche de la droite (sans jamais cependant se confondre avec elle).

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Exemple :

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale de la courbe représentative de
$f(x) = 3 - \frac{8}{4x+5}$ $\quad$ ($\lim_{x\to\infty}(3 - \frac{8}{4x+5}) = 3$)



Asymptote verticale :

Soient une fonction *f* définie sur un intervalle *I*, et a un réel appartenant à *I*, tels que
$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$ (ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).

On dit que la droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

Plus les valeurs de x se rapprochent de a, plus la courbe se rapproche de la droite (sans jamais cependant se confondre avec elle).

S'il s'agit d'une limite à gauche ($\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$), la courbe s'approchera de la droite par la gauche, s'il s'agit d'une limite à droite ($\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$), la courbe s'approchera de la droite par la droite.

MATHÉMATIQUES – TOUTES SÉRIES
ÉTUDES DE FONCTIONS

Exemple :

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale de la courbe représentative de

$f(x) = \sqrt{\frac{4}{x-1}}$ $\left(\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{4}{x-1}} = +\infty\right)$