

Rapport Øvelse 5

Kundts rør

MARTIN SORIA RØVANG

SAMMEN MED: MAGNUS OTTERDAL STØRDAL

Universitetet i Tromsø *

5. mars 2018

Sammendrag

I dette eksperimentet fant vi adiabatkonstanten for luft og argon ved hjelp av vekta midling. Resultatene vi fikk for adiabatkonstantene var $\gamma_{Luft} = 1.397 \pm 0.002$ og $\gamma_{Argon} = 1.670 \pm 0.001$. Med dette fant vi at frihetsgradene ble $f_{Luft} = 5$ og $f_{Argon} = 3$. Dette stemmer fordi luft er diatomisk og argon er monoatomisk. Resultatene vi fikk her er de som er funnet ved vekta midling og er dermed de beste resultatene vi fikk ved å vekte alle resultatene, alle usikkerhetene og ta middelveiden. I noen av resultatene (Se resultatdel) fikk vi litt for høye eller lave verdier for hastighet ifh til det hastigheten som er funnet ved bruk av temperatur. Dette kommer nok av at vi ikke tok hyppige nok temperaturmålinger slik at temperaturen vi brukte til å finne hastigheten på bølgene, ikke var det som var i rommet når vi tok målinger fra oscilloskopet. Dette viste seg å ikke være et problem fordi vi fant riktig løsning med vekta midling. Konkluderer med at fremgangsmåten fungerer godt til å finne adiabatkonstanten til de forskjellige gassene og at vekta midling er et kraftig verktøy spesielt hvis man har mange datapunkter og forskjellige usikkerheter.

Kommentarer:

*

1 Formål

Vi skal finne adiabatkonstanten for luft og argon ved å måle lydhastigheten med Kundts rør.

2 Teori og definisjoner

Når longitudinale trykkbølger propagerer i et fluid i en pipe så vil bølgene reflektere på lik linje med transverse bølger på en streng er reflektert på sin ende. Superposisjonen til bølgene som reiser fremover og de som blir reflektert gir en stående bølge med minimum i avstand $\lambda/2$, vi kan derfor bruke dette til å finne bølgelengden Se lign (1).

Ved å sende en lydbølge med riktig frekvens vil man kunne få resonans i røret slik at man får en sum av bølger som da står stille og har en større amplitude enn kun den enkelte som blir sendt. På den stående bølgen vil det dannes noder, der høyden på bølgen alltid er null, forskjellige frekvenser vil få flere eller færre noder. Ved å bruke en probe som måler frekvens så kan vi finne hvor nodene er inni i røret vi skal bruke til eksperimentet.

Ved hjelp av Kundts rør kan vi finne bølgelengden λ ved å måle avstanden mellom første og siste node og hvor mange noder som er imellom disse.

$$\lambda = 2 \frac{(a_1 - a_2)}{n + 1} \quad (1)$$

Her er n antall noder imellom a_1 og a_2 Ved hjelp av ligning (1) kan vi finne bølgelengden. Vi kan da finne hastigheten på bølgen ved

$$v = \lambda \nu \quad (2)$$

der v er hastigheten og ν er frekvensen på bølgen gitt fra bølgegeneratoren, og siden hastighet i luft er gitt ved:

$$v_{luft} = 331.45 + 0.59T(^{\circ}C)$$

og hastighet for argon

$$v_{argon} = 308 + 0.56T(^{\circ}C)$$

Kan da sammenligne hastigheten hvis man også måler temperaturen.

Usikkerheter vil oppstå og vi må dermed ta med dette i beregningen. Hvis vi antar at usikkerhetene er lineært uavhengige (tilfeldige feil) så kan vi finne usikkerheten ved

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \delta y\right)^2 + \dots} \quad (3)$$

Etter å ha funnet alle usikkerhetene så kan man bruke vektet midling får å finne det beste resultatet gitt dataene man har.

Vi skal gå igjennom det nå

Først finner vi vektene som man skal bruke til å finne beste estimat for usikkerheten og middsverdien

$$w_i = 1/\sigma_i^2 \quad (4)$$

som da er for alle $i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$, der σ er usikkerheten
Finner beste estimat for middsverdien med lign (5)

$$x_{best} = \frac{\sum_i^N w_i x_i}{\sum_i^N w_i} \quad (5)$$

For beste estimat for usikkerheten tar vi den inverse roten av summen av vektene

$$\sigma_{best} = \left(\sum_i^N w_i \right)^{-1/2} \quad (6)$$

Vektet midling kommer fra prinsippet for maksimal sannsynlighet. Man kan se at det er likt uttrykk med gravitasjonssenteret mellom legemer. Her har vi også at hvis $w_A = w_B$ så får vi kun $(v_A + v_B)/2$ som er den enkle middsverdien. Tilslutt vil vi løse for adiabatkonstanten. Den kan utlignes fra newtons lover til:

$$\gamma = v^2 \frac{\rho_0 T_0}{P_0 T} \quad (7)$$

ρ_0 er gassens tetthet ved normal tilstand P_0 er normaltrykket T_0 er normaltemperaturen og T er gassen absolutte temperatur. Disse verdiene er oppgitt i appendix. Hvis man har eller fant adiabatkonstanten kan man også finne antall frihetsgrader på gassen fordi

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

der C_p og C_v er varmekapasitet for konstant trykk og for konstant volum.

$$C_v = \frac{3}{2}R$$

her har vi 3 frihetsgrader og

$$C_v = \frac{5}{2}R$$

her har vi 5 frihetsgrader, R er gasskonstanten.
ved at

$$C_p - C_v = R$$

kan vi utlede

$$\gamma = \frac{2+f}{f}$$

gjør vi om kan vi finne antall frihetsgrader

$$f = \frac{2}{\gamma - 1} \quad (8)$$

Som da må være i heltall

Frihetsgradene kommer av hvor mange retninger et molekyl kan bevege seg og eventuelt om det kan rotere. Ved for eksempel et monatomisk molekyl så vil kun molekylet ha tre frihetsgrader, argon er et eksempel på monoatomisk molekyl. Frihetsgradene til diatomisk molekyl så kan vi ha 5 frihetsgrader fordi vi har 3 dimensjoner og 2 mulige rotasjonelle bevegelser som vinkelrett på hverandre eller og rundt sin egen akse.

Hvis molekylene vibrerer så er dette også en frihetsgrad.

For å finne usikkerheter som gir feilforplantning bruker vi lign(3) på lign(1) med δ gitt som usikkerhet og da får vi.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_1} \delta a_1 = -\frac{2}{n+1} \delta a_1$$

og

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_2} \delta a_2 = \frac{2}{n+1} \delta a_2$$

deretter inn i lign (3)

$$\delta \lambda = \frac{2}{n+1} \sqrt{(\delta a_1)^2 + ((-1)\delta a_2)^2}$$

finner for hastigheten lign(2)

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} \delta \lambda = f \delta \lambda$$

og

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \delta \nu = \lambda \delta \nu$$

som gir usikkerheten

$$\delta v = \sqrt{(\nu \delta \lambda)^2 + (\lambda \delta \nu)^2}$$

for adiabatkonstanten lign (7) blir det

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} \delta v = 2v \frac{\rho_0 T_0}{P_0 T} \delta v$$

og

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} \delta T = -v^2 \frac{\rho_0 T_0}{P_0 T^2} \delta T$$

vi får usikkerheten til adiabatkonstanten

$$\delta \gamma = \sqrt{(2v \frac{\rho_0 T_0}{P_0 T} \delta v)^2 + (v^2 \frac{\rho_0 T_0}{P_0 T^2} \delta T)^2} \quad (9)$$

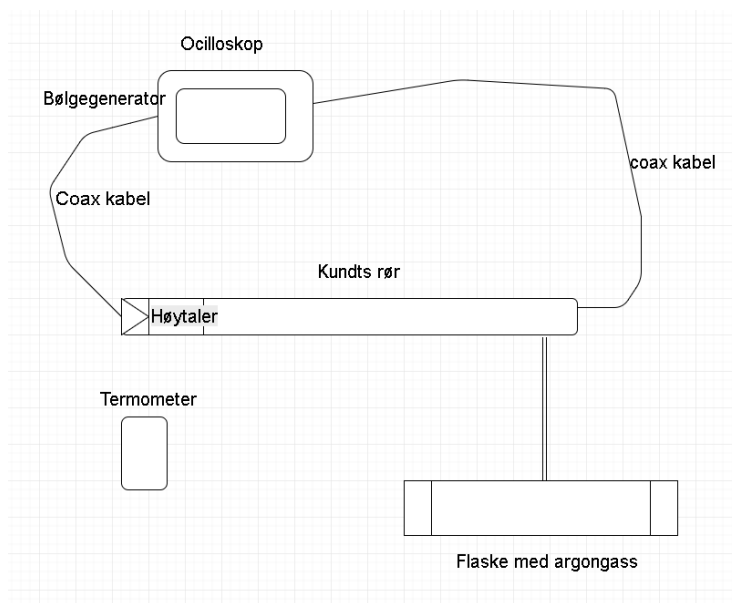
3 Eksperimentelt oppsett og framgangsmåte

Utstyr som ble brukt under eksperimentet:

- Kundts rør
- Argon gass
- Oscilloskop
- Signalgenerator
- Termometer

I figur 1 har vi oppsettet av eksperimentet. Koblet en coaxkabel til bølgegeneratoren til oscilloskopet og til en høyttaler inne i røret. Koblet en coaxkabel til input på oscilloskopet. Røret var fylt med luft de første 3 forsøkene og så fylt med argon i de 3 siste forsøkene. Vi lot argon fylle opp røret i rundt 4 minutter før vi startet. Termometeret ble brukt til å finne romtemperaturen slik at vi kunne regne ut hastigheten til bølgene med temperatur.

Figur 1: Oppsett av eksperimentet



Målte først romtemperaturen til 23.7 ± 0.2 °C til bruk for å finne hastigheten på bølgene ved temperatur (se teoridel). Kobler opp oscillatoren til røret med luft (se figur 1) og starter bølgegeneratoren og finjusterer frekvensen til jeg får en stående bølge. I det første forsøket fikk vi stående bølge ved 970 [Hz]. Vi dyttet proben sakte inn i røret for å finne den første noden. Den var plassert i 30.00 ± 0.1 [cm] og siste node var plassert i 83.80 ± 0.1 [cm], her var det 3 noder mellom. Vi gjentok forsøket 4 ganger (se resultatdel). Vi gjorde nytt forsøk med frekvens på 1100 [Hz], her var første node plassert i 25.10 ± 0.1 [cm] og siste node var 87.50 ± 0.1 [cm], og her var det 3 noder mellom, gjentok 4 ganger. Siste forsøk hadde vi frekvens på 850 [Hz] første node i 0.90 ± 0.1 [cm] og siste node var på 76.00 ± 0.1 [cm], her hadde vi 2 noder mellom.

Vi gjorde deretter samme forsøk med argon gass. Før vi starta målte vi romtemperatur på nytt som var på 23.9 °C. På første forsøk med argon som var på 970 [Hz] fant vi første node ved 27.00 ± 0.1 [cm] og siste ved 93.80 ± 0.1 [cm] med 3 noder imellom. Andre forsøk som var ved 1100 [Hz] fikk vi første node på 8.80 ± 0.1 [cm] og siste ved 67.80 ± 0.1 [cm] med 3 noder imellom. Siste forsøk som var på 850 [Hz] fikk vi første node ved 0.90 ± 0.1 [cm] og siste node ved 76.00 ± 0.1 [cm] med 3 noder imellom.

Vi fant usikkerhetene og brukte vekta midling på hastigheten for å finne beste resultat i hvert forsøk. Brukte deretter dette i lign (7) får å finne beste resultat for adiabatkonstanten og tilslutt usikkerheten med lign(9).deretter brukte vi vekta midling igjen på adiabatkonstantene som ble funnet. Resultatene er oppgitt i resultatdel.

4 Resultater

Tabellene under viser resultatene fra de forskjellige forsøkene. Usikkerhetene og resultatene som ble funnet gitt formel i teoridel etter vekta midling er

Tabell 1: Beste hastigheter og adiabatkonstanter ved forsøk

Forsøk#	Frekvens[Hz]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Adiabat konstant γ
1	970 ± 1	345.8 ± 0.4	1.403 ± 0.003
2	1100 ± 1	344.3 ± 0.3	1.391 ± 0.003
3	850 ± 1	344.5 ± 0.2	1.390 ± 0.003
1 _{Argon}	970 ± 1	320.8 ± 0.3	1.669 ± 0.001
2 _{Argon}	1100 ± 1	322.7 ± 0.4	1.686 ± 0.001
3 _{Argon}	850 ± 1	320.1 ± 0.3	1.659 ± 0.001

De beste resultatene for adiabatkonstantene er :
 $\gamma_{Luft} = 1.397 \pm 0.002$
 $\gamma_{Argon} = 1.670 \pm 0.001$

Antall frihetsgrader funnet ved bruk av ligning(8) i teoridel:
 $f_{Luft} = 5$
 $f_{Argon} = 3$

Tabell 2: Forsøk 1 for luft

Frekvens: 970 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 345.4 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.7 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
29.6±0.1	83.5±0.1	348.55±0.92	0.359 ±0.001
30.5±0.1	83.6±0.1	343.38±0.92	0.354 ±0.001
30.0±0.1	83.5±0.1	345.96±0.92	0.357 ±0.001
30.0±0.1	83.9±0.1	348.55±0.92	0.359 ±0.001
30.6±0.1	83.6±0.1	342.73±0.92	0.353 ±0.001

Tabell 3: Forsøk 2 for luft

Frekvens: 1100 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 345.5 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.7 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
25.1±0.1	87.5±0.1	343.20±0.78	0.312 ±0.001
25.5±0.1	87.6±0.1	341.55±0.78	0.310 ±0.001
25.0±0.1	87.5±0.1	343.75±0.78	0.312 ±0.001
24.4±0.1	87.6±0.1	347.60±0.78	0.316 ±0.001
25.2±0.1	88.0±0.1	345.40±0.78	0.314 ±0.001

Tabell 4: Forsøk 3 for luft

Frekvens: 850 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 345.8 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.9 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
16.5±0.1	77.3±0.1	344.53±0.80	0.405 ±0.001
16.5±0.1	77.2±0.1	343.97±0.80	0.405 ±0.001
16.3±0.1	77.5±0.1	346.80±0.80	0.408 ±0.001
16.5±0.1	77.5±0.1	345.67±0.80	0.407 ±0.001
16.8±0.1	77.1±0.1	341.70±0.80	0.402 ±0.001

Tabell 5: Forsøk 1 for argon

Frekvens: 970 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 321.3 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.9 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
27.0 ± 0.1	93.8 ± 0.1	323.98 ± 0.69	0.334 ± 0.001
14.0 ± 0.1	79.8 ± 0.1	319.13 ± 0.69	0.329 ± 0.001
13.9 ± 0.1	79.8 ± 0.1	319.62 ± 0.69	0.330 ± 0.001
13.8 ± 0.1	80.0 ± 0.1	321.07 ± 0.69	0.331 ± 0.001
14.0 ± 0.1	80.0 ± 0.1	320.10 ± 0.69	0.330 ± 0.001

Tabell 6: Forsøk 2 for argon

Frekvens: 1100 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 321.3 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.9 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
8.8 ± 0.1	67.8 ± 0.1	324.50 ± 0.83	0.295 ± 0.001
8.8 ± 0.1	67.5 ± 0.1	322.85 ± 0.83	0.294 ± 0.001
9.2 ± 0.1	67.6 ± 0.1	321.20 ± 0.83	0.292 ± 0.001
9.0 ± 0.1	67.6 ± 0.1	322.30 ± 0.83	0.293 ± 0.001
9.1 ± 0.1	67.8 ± 0.1	322.85 ± 0.83	0.293 ± 0.001

Tabell 7: Forsøk 3 for argon

Frekvens: 850 ± 1 [Hz]			
Hastighet(Beregnet ved temp) $v_T = 321.3 \pm 0.1$ [m/s]			
Temperatur 23.9 °C			
a1[cm]	a2[cm]	Hastighet(beregnet) v [m/s]	Bølgelengde λ [m]
0.90 ± 0.1	76.00 ± 0.1	319.18 ± 0.60	0.376 ± 0.001
1.10 ± 0.1	75.70 ± 0.1	317.05 ± 0.60	0.373 ± 0.001
1.20 ± 0.1	77.20 ± 0.1	323.00 ± 0.60	0.380 ± 0.001
1.20 ± 0.1	76.50 ± 0.1	320.02 ± 0.60	0.377 ± 0.001
1.10 ± 0.1	76.70 ± 0.1	321.30 ± 0.60	0.378 ± 0.001

5 Diskusjon

Fant at bølgehastigheten har ca samme hastighet for alle frekvensene. Forventningen var samme hastighet, men det var noen avvik. Dette skyldes nok at vi brukte kun 0.1 [cm] usikkerhet på alle målingene noe som kanskje ikke var god nok usikkerhet. Det var også vanskelig å få plassert proben nøyaktig på noden noe som også underbygger påstanden om at vi skulle ha brukt en litt større usikkerhet for avstand. Ved bruk av vektet midling av alle dataene fikk vi et bra estimat for adiabatkonstanten, dette er grunnen til at det viktig å ta mange datapunkter slik at diverse småfeil blir luket ut. Vi fant at luft har 5 frihetsgrader, dette stemmer med at diatomiske gasser har 5 frihetsgrader. For argon gass fikk vi 3 frihetsgrader, dette stemmer også fordi argon er en monoatomisk gass.

Noen av hastighetene som er beregnet ser ikke ut til å stemme med hastigheten som er beregnet med temperatur, grunnen til dette er fordi vi ikke foretok hyppige nok temperaturmålinger og at vi brukte romtemperatur, temperaturen inni røret kunne ha vært en annen temperatur. Usikkerheten vi brukte for temperaturen (0.2 °C) som var oppgitt fra leverandør. Denne skulle nok ha vært noe høyere fordi vi ikke målte inne i røret. Resultatene vi fikk for adiabatkonstantene var:

$$\gamma_{Luft} = 1.397 \pm 0.002$$

$$\gamma_{Argon} = 1.670 \pm 0.001$$

Ved å bruke lign (8) får vi frihetsgradene:

$$f_{Luft} = 5$$

$$f_{Argon} = 3$$

Disse er i tråd med de reele verdiene oppgitt.¹

6 Konklusjon

Noen av beregningene ser ikke ut til å stemme med hastighetene funnet ved temperatur, grunnen til dette er at vi ikke tok temperaturen av rommet hyppig nok og at vi skulle ha brukt en litt mer konservativ usikkerhet for avstand da mest sannsynlig alle ikke var med usikkerhet på 0.1 [cm].

Ved bruk av vektet midling fikk vi bedre resultat fordi store feil som opptrer sjeldent i dataene har liten effekt. Resultatene vi fikk for adiabatkonstantene var:

$$\gamma_{Luft} = 1.397 \pm 0.002$$

$$\gamma_{Argon} = 1.670 \pm 0.001$$

Ved å bruke lign (8) får vi frihetsgradene:

$$f_{Luft} = 5$$

$$f_{Argon} = 3$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity_ratio

Her kan jeg da konkludere med at verdiene vi fikk stemmer og at vekta midling er et veldig kraftig verktøy ved mange målinger.

A Appendix

Usikkerhet temperatur 0.2 °C

Usikkerhet frekvens 1

$\rho_0(\text{Luft}) = 1.293[kg/m^3]$

$\rho_0(\text{Argon}) = 1.784[kg/m^3]$

$P_0 = 101300[Pa]$

$T_0 = 273.15[K]$

B Referanser