Obligatorisk oppgave 3

FYS-1002- Elektromagnetisme

Martin Soria Røvang

4. mai 2018

Inneholder 12 sider, inkludert forside.

Institutt for fysikk og teknologi

Oppgave 1

1a)

Faradays lov på integralform er gitt ved,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{1}$$

Dette betyr at det induseres en ikke konservativ spenning(elektromotorisk spenning) ved forandring av magnetisk fluks. Her er E det elektriske feltet, dl er en liten lengde rundt sløyfen, $-\frac{d}{dt}$ betyr at en liten forandring i motsatt retning, og tilslutt $\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ er det totale magnetfeltet som går igjennom flaten til kurven med $d\mathbf{A}$ som flatenormalen.

1b)

Faradays lov på differensialform er gitt ved,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

Først ta flate integralet på begge sider der man antar at de har samme flate.

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \iint_A -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

ved stokes theorem(antar at E er et glatt vektorfelt) så får man,

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Da har man,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

Her må vi anta at grenseverdien ikke er avhengig av tid, slik at vi kan flytte tidsderivatet ut av integralet.(Ved *Leibniz integrasjonsregel*)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

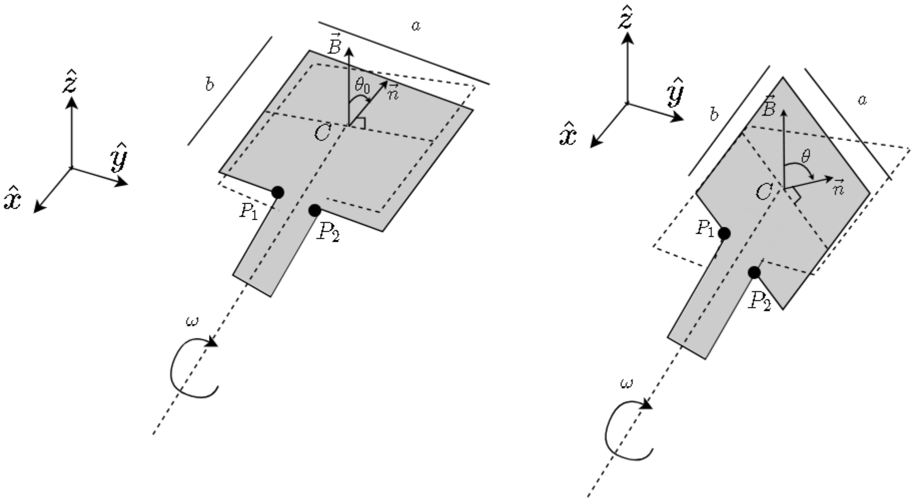
Flate integralet av magnetfeltet er gitt som magnetisk fluks og linjeintegralet av E-feltet rund sløyfa som ikke er konservativt gir elektromotorisk spenning slik at,

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \Phi_B \tag{3}$$

■

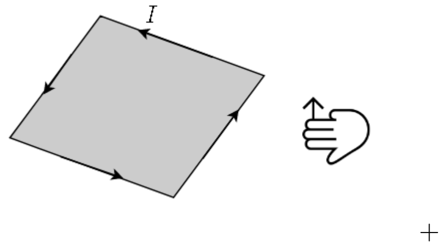
1c)

Her antas B-feltet å gå i z-retning. *Lenz lov* sier at hvis det blir en endring av magnetisk fluks så vil det induseres en spenning slik at strøm vil gå i en slik retning at det lager et magnetfelt som vil motvirke endringen.



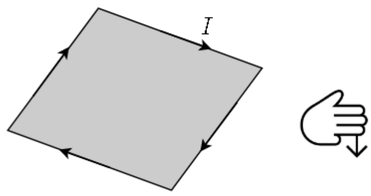
Figur 1: Vekselstrømgenerator

Her minker fluksen over flaten i oppover retning altså $\frac{d}{dt}\Phi_B < 0$(ved halve rotasjon), da vil det ved *Lenz lov* induseres en strøm slik at det induseres fluks opp i samme retning, da vil ved høyrehåndsregelen strømmen gå med klokka.



Figur 2: Strømmen følger Lenz lov og høyrehåndsregelen

For hver 180° vil det snu og gå andre vei slik som vist i **figur(3)** under. Dette vil foregå hele tiden, slik at vi nå har en AC spenning som følger frekvensen til ω.



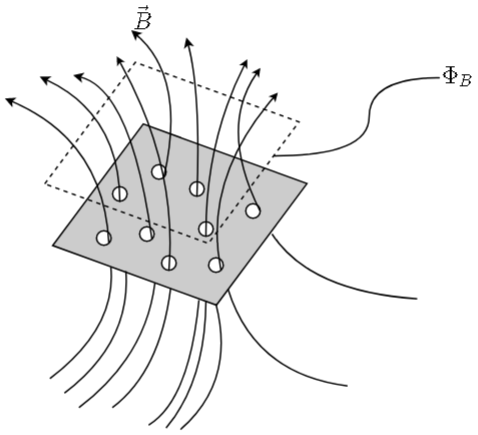
Figur 3: Strømmen følger Lenz lov og høyrehåndsregelen

1d)

Den angulære frekvensen er svinger per tid og har en faseforskyvning θ_0 slik at,

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

Ved bruk av flateintegralet til flaten som har et magnetisk felt over seg får man fluksen,



Figur 4: Fluks igjennom flaten

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Phi_B$$

Her har vi prikkproduktet mellom normalen og B feltet, dette gir

$$|\mathbf{B}||\mathbf{n}|\cos(\theta(t))$$

og siden B feltet er konstant får vi,

$$B_0 \cdot \cos(\omega t + \theta_0) \iint_A dA = \Phi_B$$

Flaten har arealet ab så da har vi endelig,

$$\Phi_B = B_0 \cos(\omega t + \theta_0) ab$$

1e)

Den induserte spenningen er gitt ved den negativ deriverte av fluksen.

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

Dermed har man,

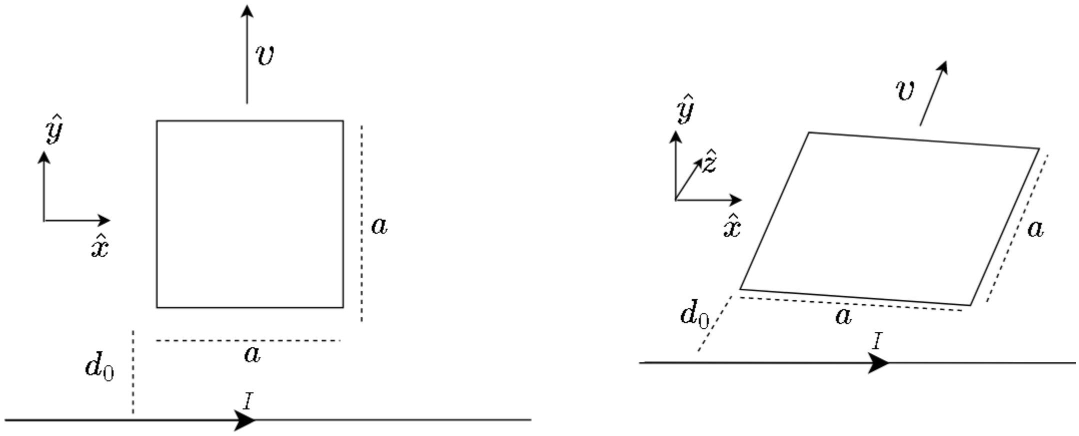
$$\epsilon = -\frac{d}{dt}(B_0 \cos(\omega t + \theta_0) ab)$$

Dette gir,

$$\epsilon = B_0 \omega \sin(\omega t + \theta_0) ab$$

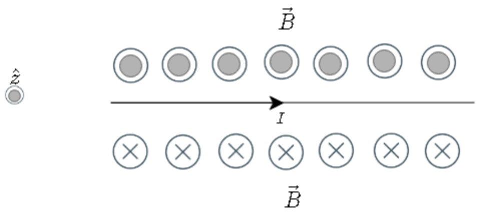
Oppgave 2

2a)



Figur 5: Ledersløyfe og bevegende leder med konstant hastighet

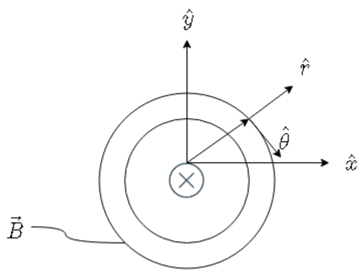
Rundt leder blir det dannet et magnetfelt av ladningene som beveger seg i ledningen.



Figur 6: Magnetisk felt rundt leder gitt ved høyrehåndsregel

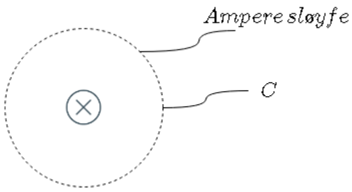
Først finner man magnetfeltet ved å først anta at lederen er lang nok til at det vil noen randeffekter. Deretter kan vi bruke *Amperes lov* gitt ved,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_{enc}$$



Figur 7: Retningen på magnetfeltet gitt ved høyrehåndsregelen

Her ser man feltet følger vinkelretningen i polarkoordinater slik at, $d\mathbf{l} = rd\theta\hat{\theta}$, og siden B feltet er kun avhengig av r og går i θ retning får vi,
Setter en Amperesløyfe rundt lederen.



Figur 8: Amperesløyfe rundt lederen

løser vi denne får man,

$$Br \oint_C (\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}) \cdot d\theta = \mu I_{enc}$$

Som da gir oss magnetfeltet,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Siden ledersløyfen kun beveger seg i y retning så finner man B-feltet som kun virker i y, og siden $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ setter $x = 0$ og man får:

$$\mathbf{B}_y = \frac{\mu I}{2\pi y}\hat{z}$$

Videre har man at fluks er gitt ved flateintegral over flaten som har magnetfelt igjennom seg,

$$\iint_A \mathbf{B}_y \cdot d\mathbf{A} = \Phi_B$$

Men strømsløyfen har en hastighet så man trenger en funksjon for posisjonen.

$$\int v(t)\, dt = y(t) + C$$

C er start posisjonen $(t = 0) = d_0$, og siden man har konstant hastighet får man

$$y(t) = v_0 t + d_0$$

flateintegralet gir oss da,

$$\iint \frac{\mu I}{2\pi y}(\hat{z} \cdot \hat{z}) dy dx = \Phi_B$$

$$\frac{\mu I}{2\pi}\int_0^a dx = \int_{y(t)}^{y(t)+a} \frac{1}{y} dy$$

Dette gir oss fluksen ut av flaten som funksjon av tid

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu I a}{2\pi} \ln\left(\frac{y(t) + a}{y(t)}\right)$$

2b)

Har at

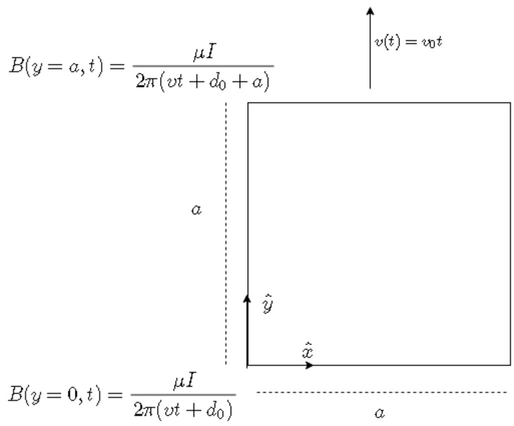
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

For å ta ut tidsderivatet ut av integralet så må vi ha en ikke tidsavhengig grense. Hvis vi legger koordinatsystemet på sløyfen så kan vi uttrykke B feltet som funksjon av tid.

$$B(y,t) = \frac{\mu I}{2\pi(v_0 t + d_0 + y)}$$

Nå som B feltet er uttrykt med hensyn på tid, trenger vi kun å derivere over geometrien til sløyfen. Vi har da,

$$\epsilon(t) = -\frac{d}{dt}\frac{\mu I}{2\pi}\int_0^a\int_0^a \frac{1}{(v_0 t + d_0 + y)}dydx$$



Figur 9: Koordinatsystem satt på sløyfen slik at man får magnetfeltet som funksjon av tid. Her er det ledern som går unna strømsløyfa med fart v(t)

$$= -\frac{a\mu I}{2\pi}\frac{d}{dt}(\ln(v_0 t + d_0 + a) - \ln(v_0 t + d_0)$$

Dette gir oss den elektromotoriske spenningen,

$$\epsilon(t) = \frac{\mu I v_0 a^2}{2\pi y(t)(y(t)+a)}\,, t > 0, y(t) = v_0 t + d_0$$

2c) I **figur(10)** under ser man tidsutviklingen til fluks og spenning, her blir fluksen mindre og mindre, slik at etter Lenz lov vil det induseres en strøm som gjør slik at fluksen skal holde seg der det var. Derfor må strømretningen gå ifølge høyrehåndsregelen mot klokka slik som vist i **figur(2)**.

2d)

Avstanden varier med tid så først finner man posisjonen som funksjon av tid,

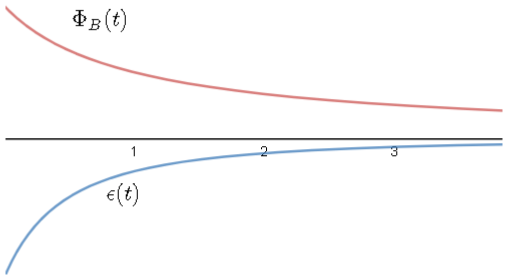
$$\int v(t)\,dt = y(t) + C$$

C er start posisjonen $(t = 0) = -a/2$, og siden man har konstant hastighet får man

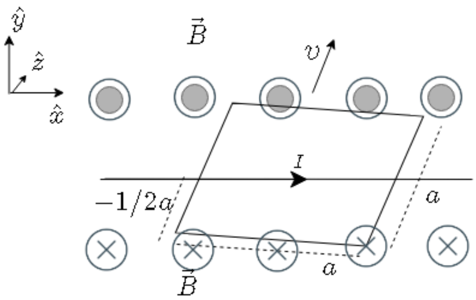
$$y(t) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2}$$

Her har vi magnetfeltet på samme måte som tidligere,

$$B_y = \frac{\mu I}{2\pi y}$$



Figur 10: Her ser man tidsutviklingen til fluksen og spenningen. Her ser man at $\frac{d}{dt}\Phi_B < 0$



Figur 11:

Får å finne fluksen får vi igjen flateintegralet over flaten med magnetfeltet

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Phi_B$$

Her blir grensa tatt fra $-y(t)$ til $-y(t) + a$ fordi delen av b-feltet som går inn i planet vil krysse ut de som går ut av planet.

$$\Phi_B = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^a dx \int_{-y(t)}^{y(t)+a} \frac{1}{y} dy$$

Som blir,

$$\Phi_B = \frac{\mu I a}{2\pi} \ln\left(\frac{y(t)+a}{-y(a)}\right)$$

med, $y(t) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2}$.

2e)

Her blir det samme som tidligere. Lar koordinatsystemet være på sløyfa, og lar B-feltet variere med tid. har da at,

$$y(t)_B = -\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2} + y$$

Har da,

$$B(y,t) = \frac{\mu I}{2\pi(-\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2} + y)}$$

har da ved *Leibniz integrasjonlov*

$$\epsilon = -\frac{\mu I}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\int_0^a \int_0^a \left(\frac{1}{-\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2} + y}\right) dy dx\right)$$

dette gir,

$$\epsilon = -\frac{\mu I a}{2\pi}\frac{d}{dt}(\ln\Big(-\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2} + a\Big) - \ln\Big(-\frac{a}{2}\sin(\omega t) - \frac{a}{2}\Big))$$

Som gir,

$$\epsilon = \frac{\mu I a \omega}{\pi \cos(\omega t)}$$

Her observerer man at spenningen her går mot uendelig når $\cos(\theta) \to 0$. Grunnen til dette er fordi her antar man null utstrekning i lederen slik at fluksen går mot uendelig på randen til lederen. Når flaten kommer i en posisjon der hele flaten er på en side vil fluksen bli uendelig stor og da uendelig spenning.

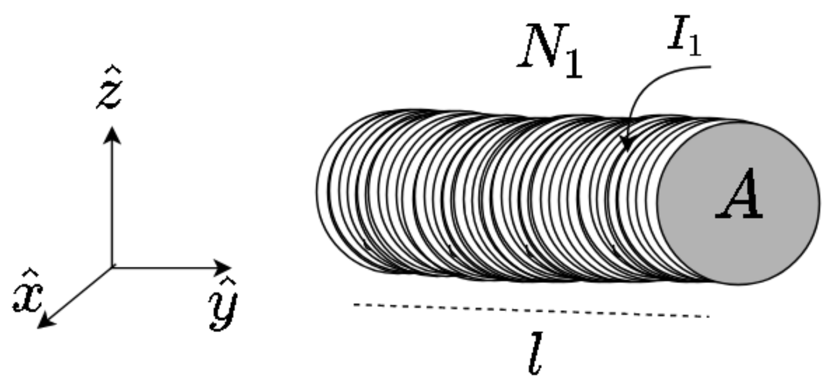
Oppgave 3

3a)

Som tidligere vist har vi *Amperes lov* er på integral form ved,

$$\int_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc}\mu$$

B er magnetfeltet og I er strømmen. Her sies det at magnetfeltet inni en lukket kurve er det samme som strømmen som er innelukket i kurven.



Figur 12: Spole

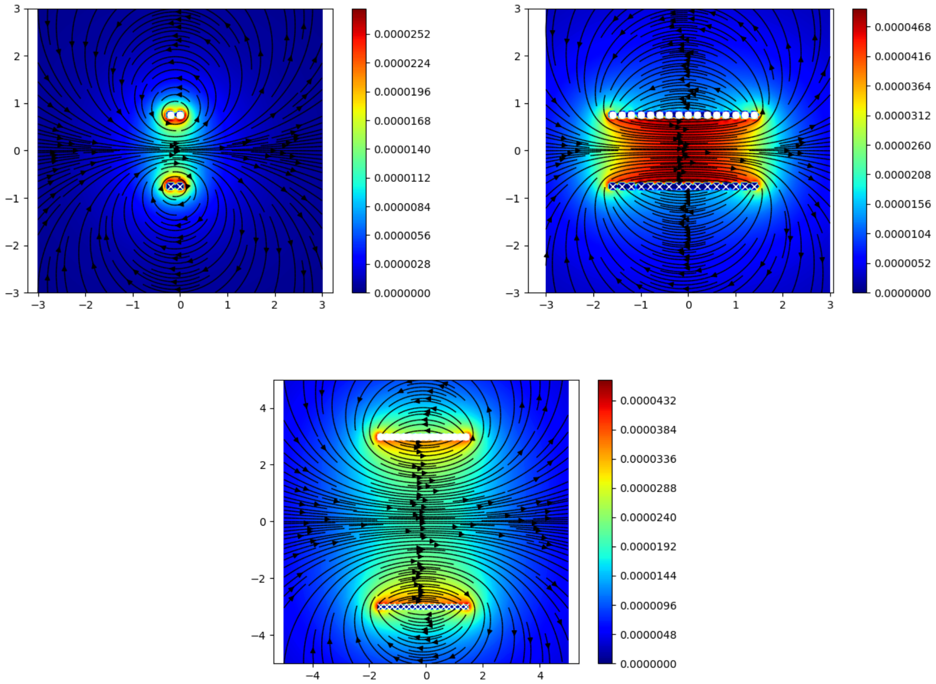
3b)

For at randeffektene kan neglisjeres må det være mange nok viklinger slik at det blir uniform magnetfelt inni og at $l \gg a$ der a er radien til spolen. I **figur(13)** under ser man dette.
For å finne magnetfeltet inni spolen bruker man *Amperes lov* slik,
Tar linje integralet rundt rektangelet og får,

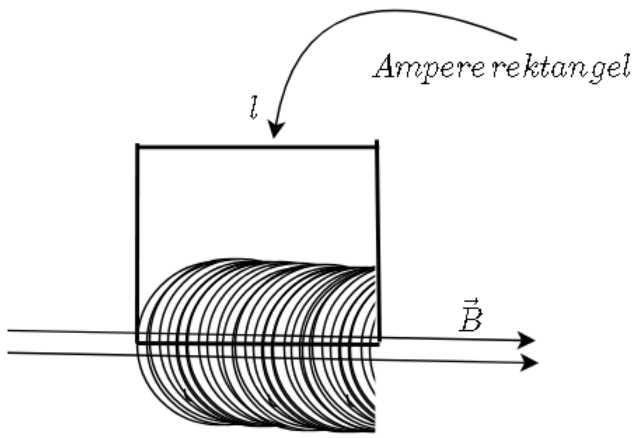
$$\int_0^l B(\hat{x}\cdot\hat{x})dx + \int_0^l B(\hat{x}\cdot\hat{y})dy + \int_l^0 B(\hat{-x}\cdot\hat{x})dx + \int_l^0 B(\hat{x}\cdot(\hat{-y}))dy = I_{enc}\mu_0$$

Siden x og y er orthogonale så blir prikkproduktet null, og B feltet utafor er null slik at man står igjen med,

$$Bl = I_{enc}\mu_0$$



Figur 13: Her ser man at ved få viklinger vil feltet utafor være signifikant. For mange viklinger vil feltet utafor være neglisjerbart og veldig uniform inni. Ved å øke lengden mellom vil vi igjen få signifikant felt utafor og ikke uniformt inni.



Figur 14: Amperektangel rundt halve spolen.

Siden det er vakuum inni blir permeabiliteten $\mu = \mu_0(1+0)$. Strømmen som er innelukket er $I_{enc} = nI$ her har vi en strøm igjennom n viklinger. Hvis vi så angir $N_1 = \frac{n_1}{l}$ some er viklinger per lengde får vi, $l = \frac{n_1}{N_1}$. Legger vi det nå inn i ligningen over får man,

$$\mathbf{B} = I\mu_0 N_1 \hat{y}$$

Som har retning i y ved høyrehåndsregelen.

Oppgave 3

3c)

Strøm vil føre til magnetisk fluks og siden induktans er evnen til å indusere magnetisk fluks der fluksen stiger proporsjonalt med både L og I. Induktans kan skrives som flukskoblingen som er $L = \frac{\lambda}{I}$, der flukskobling er antall sløyfer ganget med den magnetiske fluksen.

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{n\Phi_B}{I}$$

løser for fluksen

$$\Phi_B = \frac{LI}{n}$$

Bruker dette inn i flateintegralet,

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{LI}{n}$$

putter man inn det magnetiske feltet man fant i oppgave b får man,

$$I_1 \mu_0 N_1 \iint_A (\hat{x} \cdot \hat{x}) dA = \frac{L_1 I_1}{n_1}$$

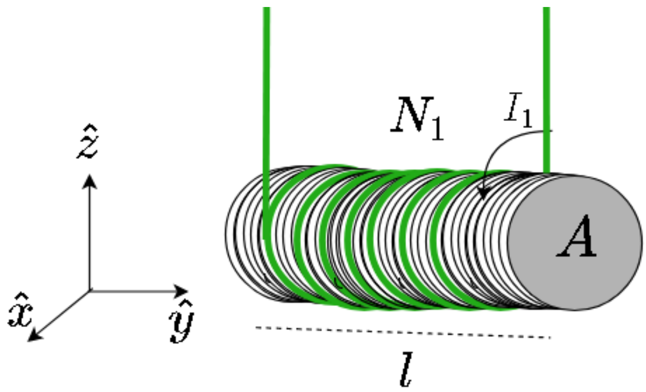
Dette gir,

$$I_1 \mu_0 N_1 A = \frac{L_1 I_1}{n_1}$$

Løser for induktansen og får,

$$L_1 = \frac{\mu_0 n_1^2 A}{l}$$

3d)



Figur 15: Spole

Gjensidig induktans er evnen til å indusere en spenning fra en spole til en annen. Hvis man da har en spole med n_1 viklinger og en annen med n_2 og en strøm I_1 i spole 1 gir en magnetfluks $n_2\Phi_{21} = MI_1$ Her er M den gjensidige induktansen som er en proporsjonalkonstant.

$$M = \frac{n_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

3e)

Fluksen igjennom begge spolen er den samme, men antall viklinger er ulik, den elektromotoriske spenningen som er indusert er gitt ved antall viklinger slik at,

$$\epsilon_1 = -N_1 \frac{d}{dt}\Phi_B$$

og for spole 2,

$$\epsilon_2 = -N_2 \frac{d}{dt}\Phi_B$$

Tar man forholdet mellom disse blir det,

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{N_1 \frac{d}{dt}\Phi_B}{N_2 \frac{d}{dt}\Phi_B}$$

Som da naturligvis blir,

$$\epsilon_1 = \frac{N_1}{N_2}\epsilon_2$$

3f)

Dette brukes i transformatorer for lading av mobiltelefoner eller som setter ned spenningen fra kraftverket til 230V ut til vanlige hjem.

3g)

Materialer som oppfyller lineæritet kan skrives med magnetiseringen,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

og da,

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

Hvis μ ikke var lineær så hadde ikke B-feltet vært proporsjonal med H, og ikke trengt et ytre felt for å beholde magnetiseringen.

FORSEGLET