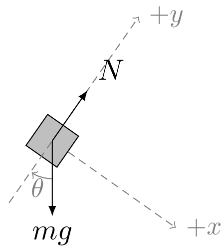
Obligatorisk Oppg 2. Mekanikk

Martin Soria Røvang
UiT, Tromsø ,Norge

October 5, 2017

1 Oppgave

a) Setter opp frilegemediagram



1.1

b) Vi har et konservativt kraftfelt og dermed er den mekaniske energien bevart jeg kan så bruke lagrange for å løse oppgaven.
Den kinetiske energien blir

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2\right)$$

Den potensielle energien er

$$V(r) = \mathrm{mgr}\cos\theta$$

der høyden over nullpunkt er $rcos\theta$

Jeg ser at oppgave c krever å vite når contraint ryker (r != R), der r er en vilkårlig posisjon som ikke er lik R (radien) gir denne potensialet $V'(r)$
Da får jeg lagrangeligningen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2\right) - V(r) - V'(r)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2\right) - mgrcos\theta - V'(r)$$

Jeg får da løsningen gitt ved E-L

$$r : \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}) = (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r})$$

$$\theta : \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) = (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta})$$

Dette gir

$$r : m\ddot{r} - rm\dot{\theta}^2 + mgcos\theta = -(\frac{\partial V'(r)}{\partial r})$$

Løser for theta

$$\theta : mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mgrsin\theta$$

siden r = R er konstant får vi

$$\theta : \ddot{\theta} = \frac{gsin\theta}{R} \tag{1}$$

Som da er det samme som

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{gsin\theta}{R}$$

Siden en liten forandring i vinkelhastigheten er gitt ved en liten foranding i vinkelen som igjen er gitt ved tid kan vi også skrive

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{gsin\theta}{R}$$

Dette kan så løses opp slik

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{gsin\theta}{R}$$

Jeg separerer og integrerer for å løse opp og finne vinkelhastigheten

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{gsin\theta}{R}d\theta$$

$$\int_{d\dot{\theta}\approx 0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_{d\theta\approx 0}^{\theta} \frac{gsin\theta}{R}d\theta$$

Dette gir da

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - cos\theta) \tag{2}$$

Denne vil jeg bruke senere.
Jeg kan dermed finne farten, jeg vet at $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$, dermed får jeg

$$\frac{v^2}{R^2} = \frac{2g}{R}(1 - cos\theta)$$

løser for farten og får

$$v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - cos\theta)}$$

1.2

c) Tar frem ligning 1 og 3 Siden $R = konstant$ så er $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ og vi kan dermed redusere ligning 1

$$r : -Rm\dot{\theta}^2 + mgcos\theta = -(\frac{\partial V'(R)}{\partial r})$$

Her ser vi at $-(\frac{\partial V'(r)}{\partial r})$ er føringskraften $(F = -\nabla V'(r))$ som da må være null (fordi da detter klossen av sirkelen og $r = R$

$$mgcos\theta = Rm\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - cos\theta)$$

Jeg legger inn $\dot{\theta}^2$ i ligning 1 for å fjerne vinkelhastigheten fra ligningen

$$mgcos\theta = Rm\frac{2g}{R}(1 - cos\theta)$$

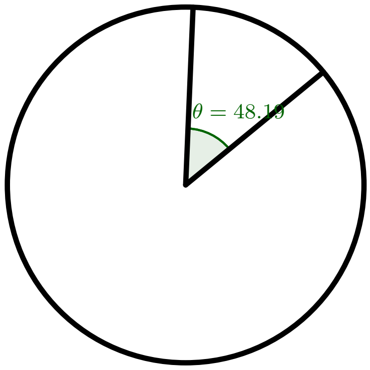
Rydder opp og får

$$3cos\theta = 2$$

Løser for vinkelen der kassen minster kontakt med sirkelen

$$\theta = Arccos(\frac{2}{3})$$

Som da er 48.19°



2 Oppgave

2.1

a) Ser på systemet i CM-Frame.

$$V = \frac{\sum_{i=1} m_i v_i}{\sum_{i=1} m_i}$$

Løser for hastighetene.

$$V = \frac{u v_0 + 2u0}{2u + u}$$

$$V = \frac{v_0}{3}$$

For nøytronet og deuteronet får vi:

$$v_{cn} = v_0 - \frac{v_0}{3} = \frac{2v_0}{3}$$

$$v_{cd} = 0 - \frac{v_0}{3} = -\frac{v_0}{3}$$

Siden det ikke er noen ytre krefter og summen av bevegelsesmengden i CM-frame er lik 0.Den kinetiske energien er også bevart og den gir en triviell løsning der partiklene bare fortsetter i samme retning og en der de skifter jeg kan da, skifte fortegn etter kollisjonen.

$$v'_{cn} = -\frac{2v_0}{3}$$

$$v'_{cd} = \frac{v_0}{3}$$

Transformerer tilbake til Lab-frame

$$v'_n = -\frac{2v_0}{3} + \frac{v_0}{3} = -\frac{v_0}{3}$$

$$v'_d = \frac{v_0}{3} + \frac{v_0}{3} = \frac{2v_0}{3}$$

Så hastigheten til nøytronet etter kollisjonen er

$$v'_n = -\frac{2v_0}{3} + \frac{v_0}{3} = -\frac{v_0}{3}$$

2.2

b)

Forholdet mellom kinetiske energien før og etter er

$$\frac{E_k'}{E_k} = \frac{1/2u((1/3)v_0)^2}{1/2u(v_0)^2} = \frac{1}{9}$$

3 Oppgave

3.1

a)
Vet at $\mathbf{F} = -\nabla V$ i et konservativt kraftfelt. Da får vi $-\frac{d}{dr}V_0(\frac{b}{r} + \frac{r}{b})$ Som da blir

$$F(r) = V_0(\frac{b}{r^2} - \frac{1}{b})$$

3.2

b)
Når r = 2 så er plottet i et bunnpunkt. Dette bunnpunktet er der kreftene forsvinner.
Er farten null her så har den ikke noe kinetisk energi og kan hverken "klatre" bakover eller oppover og vil dermed stå fast her.

Den retninga vi får en positiv dobbel derivert (av potensialet) vil dytte partikkelen tilbake til likevektspunktet (bunnpunktet) hvis bevegelsen er vekk fra likevektspunktet
Den retninga vi får en negativ dobbel derivert (av potensialet) vil dytte partikkelen vekk fra likevektspunktet (bunnpunktet) hvis bevegelsen er vekk fra likevektspunktet

Hvis den totale mekaniske energien er i E_0 (bunnpunktet) så vil den har samme posisjon hele tiden, om den totale mekaniske energien er høyere opp enn bunnpunktet så vil den få en ellipse bevegelse med en r_{min} og en r_{maks} eller hvis den flater ut så kan den kunne forlate potensialbrønnen (Escape velocity)
På plottet ser vi at Emek lager to posisjoner som partikkelen må holde seg innefor, den er altså fanget i en potensialbrønn. bevegelsen ser ut til å gå i en ellipse hvis massen er lik 1 (E)

NB! Plott ligger bakerst

3.3

c)
Den mekaniske energien er gitt ved (komponentvis)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + v_\theta^2) + V(r)$$

v_θ er hastigheten i den angulære bevegelsesmengden gitt ved $L = mrv_\theta$ Løser vi for v_θ får vi

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}) + V(r)$$

der $\frac{L^2}{mr^2}$ er den angulære bevegelsesmengden
Siden den mekaniske energien er bevart så kan jeg legge løsningene lik hverandre.
når $\dot{r} = 0$ og $r = b/2$ så er partikkelen i r_{min} eller r_{maks}, får også oppgitt at $L = \frac{b}{2}\sqrt{V_0 m}$, dette gjelder begge ligningene fordi den angulære bevegelsesmengden er bevart (sentralkraft er en konservativ kraft og vi har da ingen curl, $\nabla \times F = 0$ som da gir $\frac{dL}{dt} = 0 => L = konst$,vi får da ligningen

$$E_0 = \frac{1}{2}m(\frac{\frac{b^2}{2^2}V_0}{m\frac{b^2}{2^2}}) + V_0(\frac{b}{\frac{b}{2}} + \frac{\frac{b}{2}}{b})$$

løser opp E_0

$$E_0 = 3V_0$$

den andre mekaniske energien der $r = b$

$$E_1 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{\frac{b^2}{2^2}V_0}{m\frac{b^2}{2^2}}) + V_0(\frac{b}{b} + \frac{b}{b})$$

Løser opp

$$E_1 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{V_0}{8} + 2V_0$$

Setter disse lik hverandre

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{V_0}{8} + 2V_0 = 3V_0$$

Løser for den radielle hastigheten

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{7}{4m}V_0}$$

3.4

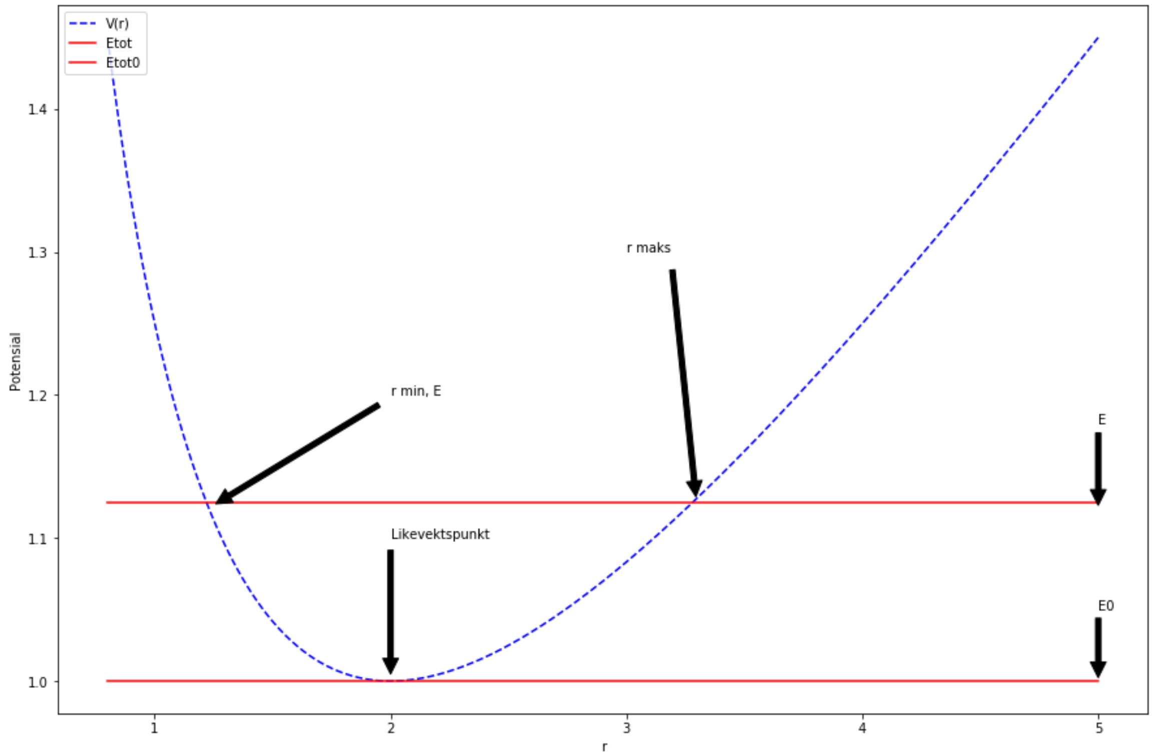
d)

Etot er den totale mekaniske energien i systemet, dette er bevart og da vil partikkelen gå frem og tilbake i potensialbrønnen (plottet) med $rmin$ og en $rmaks$

Plottet stopper når det effektive potensialet når Etot, fysisk betyr dette at den kinetiske energien blir null og posisjonen er på sitt høyeste/laveste her blir partikkelen dratt tlbake og den potensielle går over til kinetisk energi igjen.
Dette fordi kreftene vil virke mot likevektspunktet.

In [36]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Vilkårlig masse
m = 1
#energi array
el = []
el0 = []
#startfart
V0 = 0.5
#Etot
E = (0.5)*m*(V0)**2 + 2*(0.5)
E0 = 1
#Potensiel energi funksjon og tar inn verdier
def V(b,v0):
    R = np.linspace(0.8,5,1000)
    V = v0*((b/R)+(R/b))
    return (R,V)
#gir to variabler en array hver gitt ved initialverdier
A,B = V(2,0.5)

#Loop for å fylle opp Etot array
i = 0
for i in range(0,len(A)):
    el.append(E)
for i in range(0,len(A)):
    el0.append(E0)

#plotter
fig = plt.figure(figsize=(15,10))
plt.plot(A,B, '--',label='V(r)',color='blue')
plt.plot(A,el, label='Etot',color='red')
plt.plot(A,el0, label='Etot0',color='red')
plt.ylabel('Potensial')
plt.xlabel('r')
plt.annotate('r min, E', xy=(1.22, 1.12),xytext=(2, 1.2),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),)
plt.annotate('E', xy=(5, 1.12),xytext=(5, 1.18),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),)
plt.annotate('r maks', xy=(3.3, 1.12),xytext=(3, 1.3),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),)
plt.annotate('Likevektspunkt', xy=(2,1),xytext=(2, 1.1),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),)
plt.annotate('E0', xy=(5, 1),xytext=(5,1.05),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),)

plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```


V(r)
Etot
Etot0
Potensial
r
r maks
r min, E
E
Likevektspunkt
E0
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
1
2
3
4
5

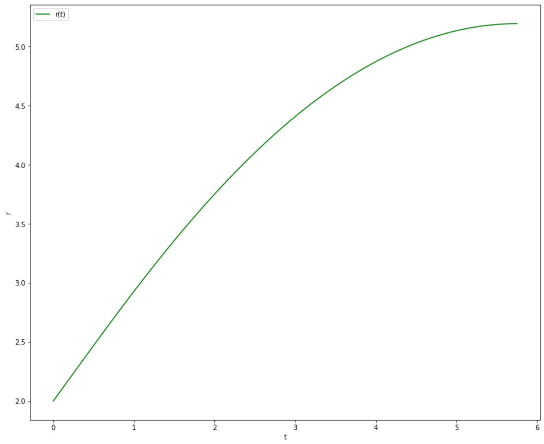
In [ ]:

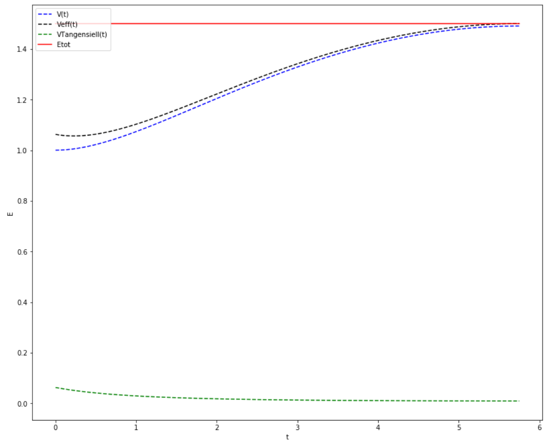
In [2]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Massen vi gir den en vilkårlig verdi
m = 1
#Arrays å fylle for plot
tarray = []
Vtarray = []
Ttarray = []
Veffarray = []
#Startverdi r = b = 2
rarray = [2]
#tidssteg
dt = 0.001
#starttid
t = 0
b = 2
#startposisjon
r0 = 2  #r0 = b
#Startfart
V0 = (1/2)
#Etotal
E = 3 * V0
#Energiarray
el = []
i = 0
#Starthastighet
r01 = np.sqrt((7/4)*V0)
#Plotter r(t)
while (t < 10):
    #Test om rota blir negativ (altså negativ energi, dette er ikke mulig)
    Rtest = (2 / m) * (E - V0 * ((b / rarray[i]) + (rarray[i] / b)) - (V0 * m)/(2 *
m * rarray[i]**2))
    if (Rtest >= 0):
        r01 = np.sqrt((2 / m) * (E - V0 * ((b / rarray[i]) + (rarray[i] / b)) - (V0
* m)/(2 * m * rarray[i]**2)))
    else:
        #bryter loopen hvis rota blir negativ
        break
    #Itererer posisjon
    r = r01 * dt + rarray[i]
    #Itererer V(t)
    Vt = V0 * ((b / rarray[i]) + (rarray[i] / b))
    #Itererer T(t) (tangentiell)
    Tt = (V0 * m)/(2 * m * rarray[i]**2)
    t = t + dt
    #Fyller opp arrays for plotting
    tarray.append(t)
    rarray.append(r)
    Vtarray.append(Vt)
    Ttarray.append(Tt)
    Veff = Vtarray[i] + Ttarray[i]
    Veffarray.append(Veff)
    i += 1
#Plott Etot
for i in range(0,len(tarray)):
    el.append(E)
```

```
print('Maks avstand:', rarray[-1])


plt.show()
#Plott alle
fig = plt.figure(figsize=(30,25))
plt.subplot(2,2,1)
plt.plot(tarray, rarray[:len(rarray)-1],label='r(t)',color='g')
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylabel('r')
plt.xlabel('t')
plt.subplot(2,2,2)
plt.plot(tarray, Vtarray, '--',label='V(t)',color='b')
plt.legend(loc='upper left')
plt.plot(tarray, Veffarray, '--',label='Veff(t)',color='black')
plt.legend(loc='upper left')
plt.plot(tarray,Ttarray, '--',label='VTangensiell(t)',color='green')
plt.legend(loc='upper left')
plt.plot(tarray,el,label='Etot',color='red')
plt.legend(loc='upper left')
plt.ylabel('E')
plt.xlabel('t')
plt.show()
```

```
Maks avstand: 5.19258247997
```





In [ ]: