Obligatorisk oppgave 2

FYS-1002- Elektromagnetisme

Martin Soria Røvang

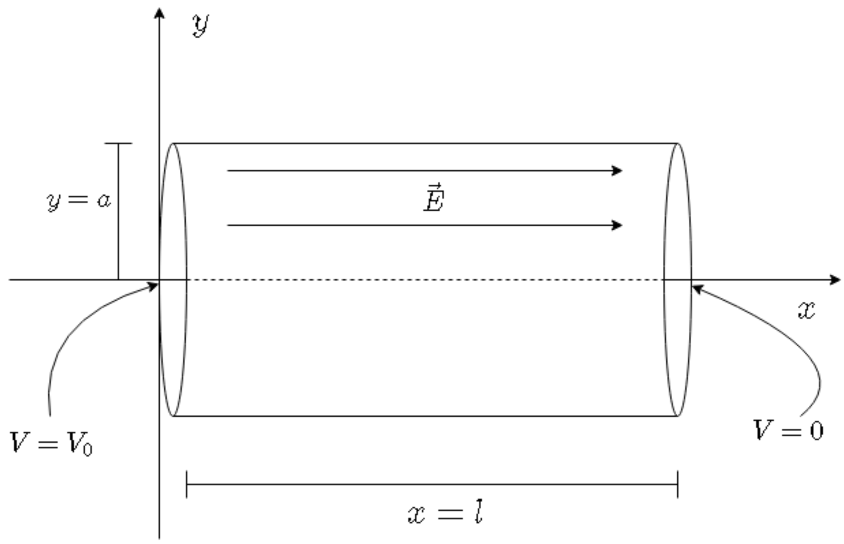
12. april 2018

Inneholder 13 sider, inkludert forside.

INSTITUTT FOR FYSIKK OG TEKNOLOGI

Oppgave 1

1a)



Figur 1: Sylinder

Ohms lov på den mest generelle er

$$\bar{J} = \bar{\bar{\sigma}}\bar{E} \tag{1}$$

Der $\bar{J}$ er strømtettheten, $\bar{\bar{\sigma}}$ er resistivetettensoren og tilslutt er $\bar{J}$ det elektriske feltet.

1b)

Gjør om lig(1) først bruker vi at strømtettheten er $J = I/A$, der I er strømmen og A er arealet til flaten $A = \pi r^2$. Vi bruker også at $E = \frac{V}{l}$, det kan vi gjøre fordi ved bruk av laplacelignignen (som vi kan bruke fordi vi ikke har noen ladning i ledningen). Laplaceligningen gir oss at $\nabla^2 V = 0$. Vi kan anta at $\bar{J} \cdot \hat{\bar{r}} = 0$ fordi ellers ville det ha lekket strøm ut i rommet.Har heller ingen vinkel avhengighet. Vi har da kun strøm som virker i x retning og har kun den deriverte i x retning alt dette da i sylinderkoordinater.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V = 0$$

Ved å integrere to ganger får vi den generelle løsningen,

$$V(x) = Ax + B$$

Vi setter grensebetingelsene $x = 0 \rightarrow V = V_0$ og $x = l \rightarrow V = 0$
Setter vi disse betingelsene får vi at,

$$V_0 = B,\; A = -\frac{V_0}{l}$$

slik at,

$$V(x) = -\frac{V_0}{l}x + V_0$$

Vi har da ved unikhetsteoremet at dette er den sanne løsningen og denne gir,

$$\bar{E} = -\nabla V = \frac{V_0}{l}$$

Bruker vi dette kan vi sette inn i den kjente delen av ohms lov som er,

$$R = \frac{V}{I} \tag{2}$$

Bruker vi,

$$J = \frac{I}{A}$$

og

$$E = V/l$$

Putter vi inn i 1

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l}$$

løser dette for I får vi,

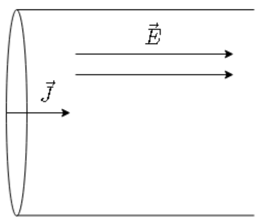
$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{l}{\sigma \pi a^2}$$

1c)

Strømmen er gitt ved,

$$\int\int \bar{J} \cdot d\bar{S} \tag{3}$$

Vi har strømretning i x retning og har da flatenormalen gitt ved, $d\bar{S} = rdrd\theta\hat{\vec{x}}$



Figur 2: Retning på strøm og elektrisk felt

Setter inn og får,

$$\int\int \sigma(r) \cdot \bar{E} d\bar{S}$$

Løser vi dette får vi,

$$I = \frac{V_0}{l}\sigma_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r(\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{x}})drd\theta + \frac{(\beta - \sigma)}{a}\frac{V}{l}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2(\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{x}})drd\theta$$

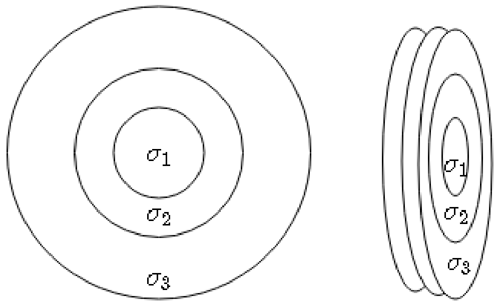
Dette gir da,

$$I = \frac{V_0}{l}\pi\sigma_0 a^2 + \frac{2V_0}{3l}(\beta - \sigma_0)\pi a^2$$

Som da gir oss,

$$I = \frac{V_0 \pi a^2}{l}(\sigma_0 + \frac{2}{3}(3 - \frac{2}{3}\sigma_0) = \frac{V_0 \pi a^2}{3l}(\sigma_0 + 2\beta)$$

Her er da den totale strømmen den samme over hele sylinderen, fordi strømtettheten er den samme som vist i figuren under.

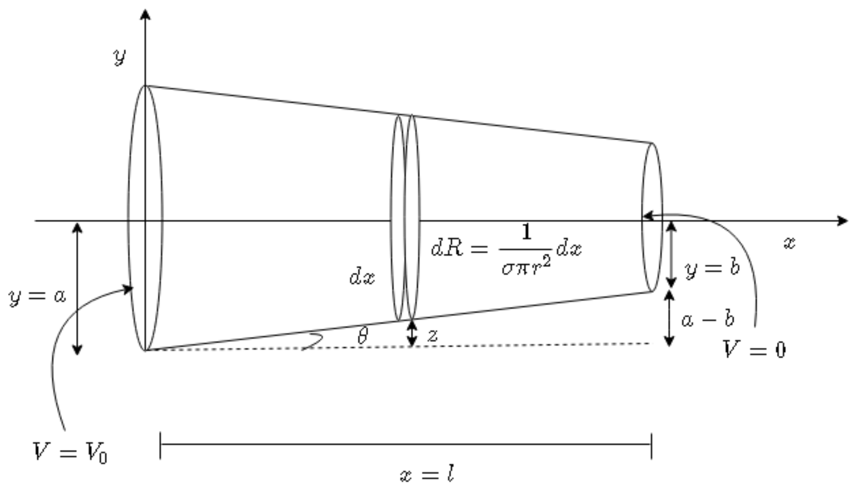


Figur 3: Sylinderen skjært opp

1d)

1e)

Med a-b $\gg l$, kan man anta uniform og konstant strømtetthet.



Figur 4: Motstand som avkuttet kjegle

Løser først for radiusen, har $tan\theta = \frac{a-b}{l} = \frac{z}{x}$, har $r = a - z$ som da er $z = \frac{a-b}{l}x$. Dette gir,

$$r = a + \frac{(b-a)}{l}x$$

Løser for et lite stykke motstand som da blir

$$dR = \frac{1}{\pi r^2 \sigma} dx \Rightarrow = \frac{1}{\sigma\pi(a + (\frac{(b-a)}{l}x)^2)} dx$$

Tar integralet for å finne den totale motstanden,

$$R = \int_0^l \frac{1}{\sigma\pi(a + (\frac{(b-a)}{l}x)^2)} dx$$

løser opp,

$$R = -\frac{l}{\sigma\pi(b-a)b} + \frac{l}{\sigma\pi(b-a)a} = \frac{l}{\sigma\pi(b-a)}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

som da gir oss den totale motstanden,

$$R = \frac{l}{\sigma \pi ab}$$

Oppgave 2

2a)

Definert som $C = \frac{Q}{V}$ og siden $I = \frac{dQ}{dt}$, gir dette,

$$\int_0^Q dq = \int_0^t I dt' \Rightarrow Q = \int_0^t I(\tau) d\tau$$

Som er det man skulle finne.

2b)

Ved kirchoffs 2. lov får vi,

$$V - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

Deriverer vi begge sider med tanke på tid og rydder får vi,

$$\frac{1}{RC}\frac{dQ}{dt} + \frac{dI}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt}$$

og siden $\frac{dq}{dt} = I(t)$ blir det,

$$\frac{1}{RC} I(t) + \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} \tag{4}$$

2c)

Har at,

$$\tilde{I} = ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0 C\omega}{(RC\omega - i)} e^{i\omega t}; \ \tilde{V} = V_0 e^{i\omega t}$$

Vi løser for de deriverte,

$$\frac{d}{dt}\tilde{I}(t) = -\frac{1}{RC} ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0 C\omega^2 i}{RC\omega - i} e^{i\omega t}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{V} = V_0 \omega i e^{i\omega t}$$

For venstresiden av uttrykket får vi,

$$\frac{1}{RC}(ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0 C\omega}{(RC\omega - i)} e^{i\omega t}) - \frac{1}{RC} ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0 C\omega^2 i}{RC\omega - i} e^{i\omega t}$$

forenkler,

$$\frac{V_0 \omega}{R(RC\omega - i)} e^{i\omega t} + \frac{V_0 C\omega^2 i}{(RC\omega - i)} e^{i\omega t}$$

høyre siden,

$$\frac{1}{R} V_0 i\omega e^{i\omega t}$$

da får man ,

$$\frac{V_0 \omega}{R(RC\omega - i)} e^{i\omega t} + \frac{V_0 C\omega^2 i}{(RC\omega - i)} e^{i\omega t} = \frac{1}{R} V_0 i\omega e^{i\omega t}$$

vi kan dele vekk $e^{i\omega t}$ slik at,

$$\frac{V_0C\omega}{R(RC\omega - i)} + \frac{V_0C\omega^2 i}{(RC\omega - i)} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

$$\frac{iV_0C\omega^2R + V_0\omega}{R(RC\omega - i)} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

$$\frac{V_0\omega(iC\omega R + 1)}{R(RC\omega - i)} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

$$\frac{V_0\omega i(C\omega R + \frac{1}{i})}{R(RC\omega - i)} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

Har at $\frac{1}{i} = -i$ slik at,

$$\frac{V_0\omega i(C\omega R - i)}{R(RC\omega - i)} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

får da,

$$\frac{V_0\omega i}{R} = \frac{1}{R}V_0 i\omega$$

Ser da at dette er løsning. ■

2d)

Initialbetingelse $I = (t = 0) = I_0$.

$$\tilde{I}_H = \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I}_P = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Vi har,

$$\tilde{I} = \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t} + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Setter vi inn grensa $I(t = 0) = I_0$ får vi,

$$I_0 = \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)} + k$$

Løser for k og får,

$$k = I_0 - \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}$$

2e)

Spenningen må være en sinusoidial funksjon, og ha ikke transiente løsninger(det kan vi anta hvis systemet har stått en stund og er i likevekt).

2f)

$$V_c = Z_c\tilde{I}$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = Z_c(ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t})$$

Ved å la systemet gå en stund kan vi fjerne den transiente løsninger slik at,

$$\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = Z_c(\frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t})$$

som gir,

$$\frac{1}{C}\frac{V_0C\omega}{i\omega(RC\omega - i)}e^{i\omega t} = Z_c\frac{V_0C\omega}{RC\omega - i}e^{i\omega t}$$

kan dele vekk $e^{i\omega t}$, $V_0C\omega$ og $(RC\omega - i)$

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C}$$

2g)

Ved å ikke ha med den transiente løsningen har vi,

$$\tilde{I}(t) = \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t} + RCD_c$$

og spenningen er,

$$\tilde{V} = V_0e^{i\omega t} + D_c$$

Ved bruk av ohms lov får vi,

$$\sum Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$

Løser for $\tilde{I}$ og putter inn

$$R + Z_c = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$

Slik at,

$$\tilde{I} = \frac{V_0e^{i\omega t} + D_c}{R + Z_c}$$

Har to uttrykk for strømmen og setter dette mot hverandre,

$$\frac{V_0e^{i\omega t} + D_c}{R + Z_c} = \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t} + RCD_c$$

Rydder litt,

$$\frac{V_0e^{i\omega t} + D_c}{R + Z_c} - \frac{V_0C\omega}{(RC\omega - i)}e^{i\omega t} = RCD_c$$

$$V_0e^{i\omega t}\left(\frac{1}{R + Z_c} - \frac{C\omega}{(RC\omega - i)}\right) = D_c(RC - \frac{1}{R + Z_c})$$

På venstre siden kan alt bortsett fra den tidsavhengige funksjonen settes som en konstant, samme for høyre siden slik at,

$$e^{i\omega t}C \neq D$$

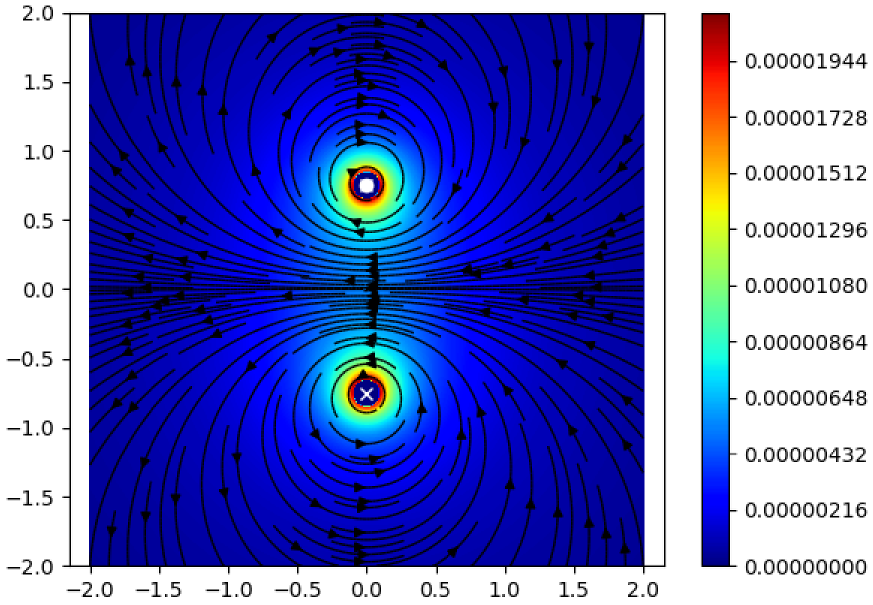
Her ser man at dette må være ugyldig fordi vi har en tidsavhengig funksjon lik en konstant kan ikke Z_{DC} defineres på samme måte. ■

Oppgave 3

3a)

```python
#Solving for magnetic field for wire
def B_felt(X,Y,I,x,y):
    r = np.sqrt((X-x)**2+(Y-y)**2)
    #Create magnetic magnitude array
    Bmagn = (mu_0/(2*np.pi))*(I/r)
    #Create magnetic field components
    Bx = Bmagn * -np.sin(np.arctan2(Y-y,X-x))
    By = Bmagn * np.cos(np.arctan2(Y-y,X-x))
    return Bx,By
```

3b)



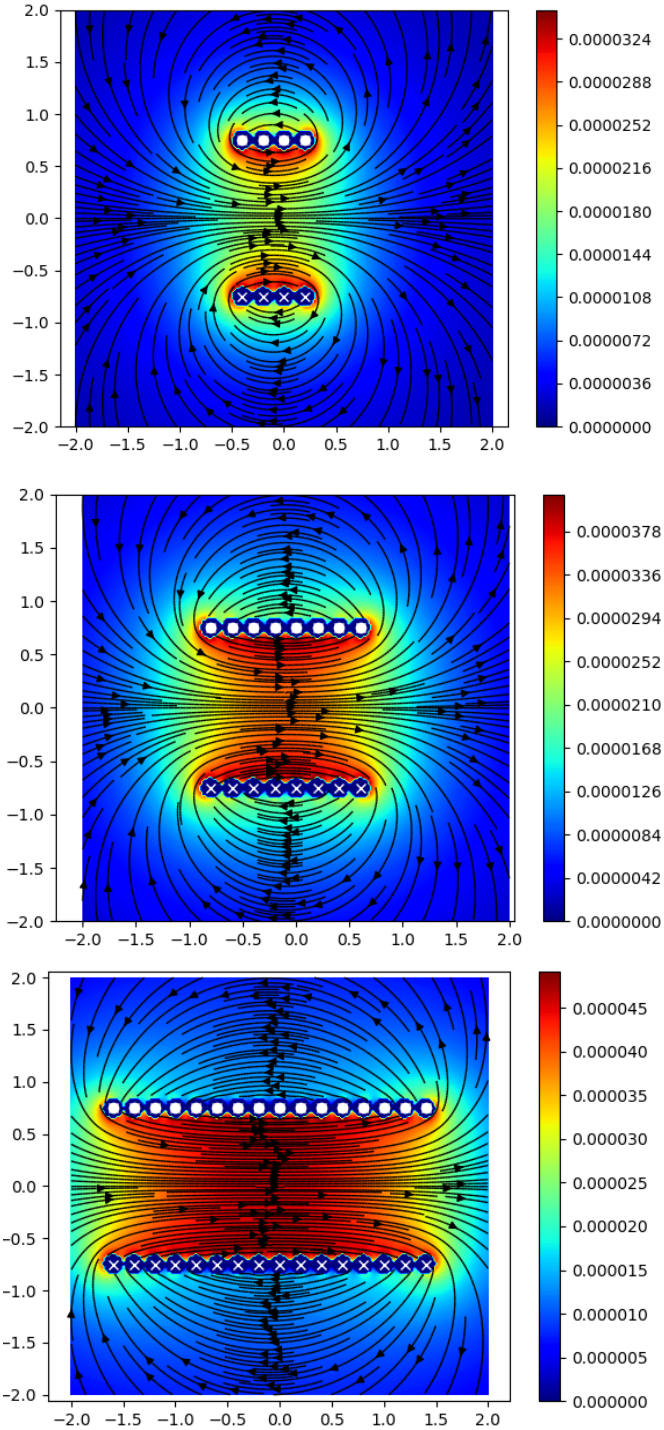
Figur 5: Plot av to ledninger

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.constants import mu_0

#Meshgrid
X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-1.5,1.5,500), np.linspace(-1.5,1.5,500))

#Current class
class current:
    def __init__(self, i,x,y,r):
        self.i = i
        self.x = x
        self.y = y
        self.r = r

#object for two wires
```

```python
currentz = [current(-10, 0, 0.75,0.1), current(10, 0, -0.75,0.1)]


fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)

#Solving for magnetic field for wire
def B_felt(X,Y,I,x,y):
    r = np.sqrt((X-x)**2+(Y-y)**2)
    #Create magnetic magnitude array
    Bmagn = (mu_0/(2*np.pi))*(I/r)
    #Create magnetic field components
    Bx = Bmagn * -np.sin(np.arctan2(Y-y,X-x))
    By = Bmagn * np.cos(np.arctan2(Y-y,X-x))
    return Bx,By

#Superposition of all magnetic fields
def B_total(X, Y, current):
    Bx, By = 0, 0
    for C in current:
        B = B_felt(X,Y,C.i,C.x,C.y)
        Bx = Bx + B[0]
        By = By + B[1]
    #Delete magnetic field inside wire
    for C in current:
        r = np.sqrt((X-C.x)**2+(Y-C.y)**2)
        for i in range(len(r)):
            for j in range(len(r[i])):
                if r[i][j]<C.r:
                    Bx[i][j]=0
                    By[i][j]=0
    return Bx, By




#Distributing coordinates for wire positions
xpar = np.array([])
ypar = np.array([])
for C in currentz:
    xpar  = np.append(xpar,C.x)
    ypar = np.append(ypar,C.y)


#-------------------------//////////-------------------------------

#Plotting two wires
Bx,By = B_total(X,Y,currentz)
B2 = np.sqrt(B_total(X,Y,currentz)[0]**2+B_total(X,Y,currentz)[1]**2)
CS = plt.contourf(X,Y,B2,300, cmap = 'jet')
plt.colorbar(CS)  # draw colorbar
plt.streamplot(X,Y,Bx,By,density=[1, 5],linewidth=1,color='black')
#Plot symbols for in and out
for i in range(len(xpar)):
    plt.plot(xpar[i],ypar[i],"x",color='white')
    if ypar[i]>0:
```

```
            plt.plot(xpar[i],ypar[i],"o",color='white')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

3c)



Figur 6: Plot av spole med N viklinger, 1) 4, 2) 8, 3) 16

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
from scipy.constants import mu_0

#Meshgrid
X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-1.5,1.5,500), np.linspace(-1.5,1.5,500))

#Current class
class current:
    def __init__(self, i,x,y,r):
        self.i = i
        self.x = x
        self.y = y
        self.r = r

#object for two wires
currentz = [current(-10, 0, 0.75,0.1), current(10, 0, -0.75,0.1)]


fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)

#Solving for magnetic field for wire
def B_felt(X,Y,I,x,y):
    r = np.sqrt((X-x)**2+(Y-y)**2)
    #Create magnetic magnitude array
    Bmagn = (mu_0/(2*np.pi))*(I/r)
    #Create magnetic field components
    Bx = Bmagn * -np.sin(np.arctan2(Y-y,X-x))
    By = Bmagn * np.cos(np.arctan2(Y-y,X-x))
    return Bx,By

#Superposition of all magnetic fields
def B_total(X, Y, current):
    Bx, By = 0, 0
    for C in current:
        B = B_felt(X,Y,C.i,C.x,C.y)
        Bx = Bx + B[0]
        By = By + B[1]
    #Delete magnetic field inside wire
    for C in current:
        r = np.sqrt((X-C.x)**2+(Y-C.y)**2)
        for i in range(len(r)):
            for j in range(len(r[i])):
                if r[i][j]<C.r:
                    Bx[i][j]=0
                    By[i][j]=0
    return Bx, By

#Function creating N coils
def lines(N,I,d,r0):
    N = 2*N
    count = 0
    i2 = 0
    N1 = 0
    i = 0
    sign = 1
```

```
    x = np.array([])
    y = np.array([])
    currentss = np.array([])
    while (count < N):
        x = np.append(x,-N/4*r0*2 +count*r0*2)
        y = np.append(y,-d)
        N1 += 1
        while (i2 < N1):
            x = np.append(x,-N/4*r0*2 +count*r0*2)
            y = np.append(y,d)
            i2 += 1
        count += 1
    while (i < N):
        currentss = np.append(currentss,current((-sign)*I,x[i],y[i],r0))
        sign = sign*(-1)
        i += 1
    return currentss

#Creating coil object
linecurrents = lines(9,10,0.75,0.1)
#Distributing coordiantes for coil wire positions
xline = np.array([])
yline = np.array([])
for C in linecurrents:
    xline  = np.append(xline,C.x)
    yline = np.append(yline,C.y)

#Distributing coordinates for wire positions
xpar = np.array([])
ypar = np.array([])
for C in currentz:
    xpar  = np.append(xpar,C.x)
    ypar = np.append(ypar,C.y)


#---------------------////////-------------------------


#Plotting coil
Xl, Yl = np.meshgrid(np.linspace(-2,2,200), np.linspace(-2,2,200))
Bxl,Byl = B_total(Xl,Yl,linecurrents)[0],B_total(Xl,Yl,linecurrents)[1]
B = np.sqrt(B_total(Xl,Yl,linecurrents)[0]**2+B_total(Xl,Yl,linecurrents)[1]**2)
CS = plt.contourf(Xl,Yl,B,300, cmap = plt.cm.jet)
plt.colorbar(CS)  # draw colorbar
plt.streamplot(Xl,Yl,Bxl,Byl,density=[1, 5],linewidth=1,color='black')
#Plot symbols for in and out
for i in range(len(xline)):

    plt.plot(xline[i],yline[i],"x",color='white')
    if yline[i]>0:
        plt.plot(xline[i],yline[i],"o",color='white')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Observerer at feltet utafor blir svakere og svakere for hver vikling. Dette stemmer med antagelse ved Ampere's lov at feltet utafor spolen er null.