Obligatorisk oppgave 1

FYS-1002 - Elektromagnetisme

Martin Soria Røvang

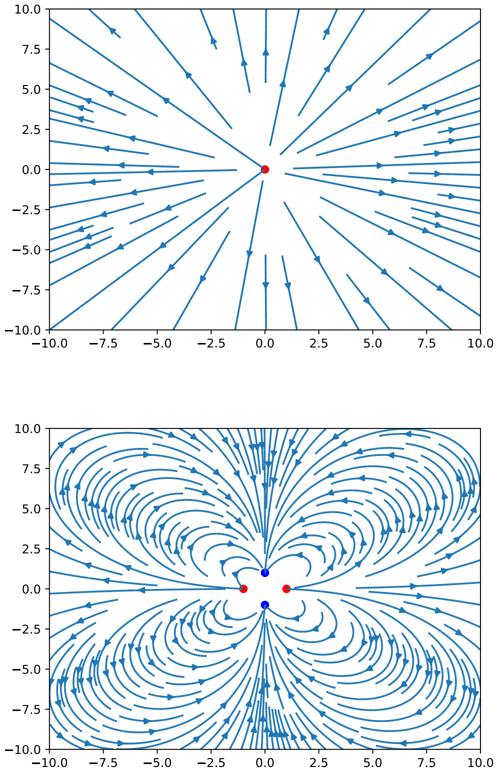
21. mars 2018

Inneholder 14 sider, inkludert forside

Institutt for Fysikk og Teknologi

Oppgave 1

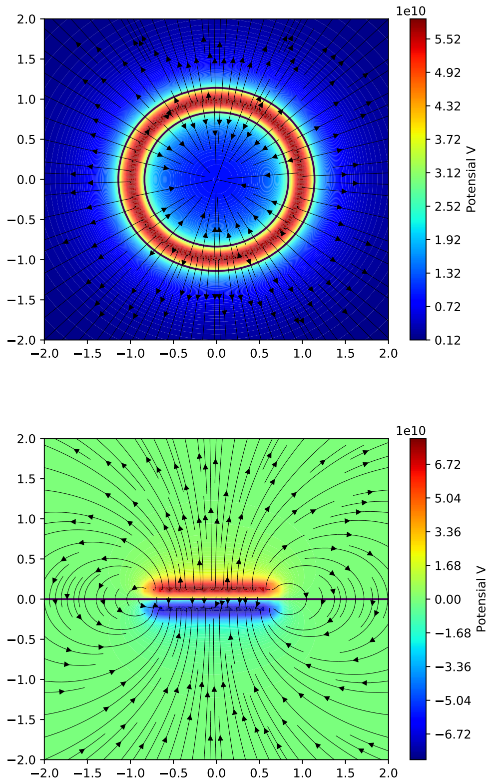
1a)



Figur 1: Enkel ladning og quadladning

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.constants import epsilon_0

# qs = [(1,2,3),(1,4,3)]
# for x,y,z in qs:


class charge:
    def __init__(self, q,x,y):
        self.q = q
        self.x = x
        self.y = y


def E_Felt(X,Y,q,x,y):
    scales = 4*np.pi*epsilon_0
    return q * (X - x) / (scales*((X - x) ** 2 + (Y - y) ** 2)) ** (3/2), \
           q * (Y - y) / (scales*((X - x) ** 2 + (Y - y) ** 2)) ** (3/2)
```

```python
def E_total(X, Y, charges):
    Ex, Ey = 0, 0
    for C in charges:
        E = E_Felt(X,Y,C.q,C.x,C.y)
        Ex = Ex + E[0]
        Ey = Ey + E[1]
    return Ex, Ey

charges = [charge(1, 1, 0), charge(1, −1, 0), charge(−1, 0, 1), charge(−1, 0, −1)]
charge = [charge(1, 0, 0)]


X, Y = np.meshgrid(np.linspace(−10,10,200), np.linspace(−10,10,200))
Ex, Ey = E_total(X,Y,charge)[0],E_total(X,Y,charge)[1]

plt.scatter(0,0 , color= 'red')
plt.streamplot(X,Y,Ex,Ey, density=[0.5, 1])
plt.show()


Ex,Ey = np.zeros(len(Ex)),np.zeros(len(Ey))
Ex,Ey = E_total(X,Y,charges)[0],E_total(X,Y,charges)[1]

plt.scatter([0,0],[1,−1] , color= 'blue')
plt.scatter([1,−1],[0,0] , color= 'red')
plt.streamplot(X,Y,Ex,Ey,density=[5, 1])
plt.show()
```



Figur 2: Sirkelladning og ladninger i parallelle linjer, med ekvipotensiale i midten. (her er potensialet null)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.constants import epsilon_0
import sympy
from matplotlib.patches import Circle
from matplotlib.mlab import griddata


charge_colors = {True: '#aa0000', False: '#0000aa'}

#Necessarys
X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-2,2,200), np.linspace(-2,2,200))



class charge:
    def __init__(self, q,x,y):
        self.q = q
        self.x = x
        self.y = y

def E_Felt(X,Y,q,x,y):
    hypotinus = (np.hypot(X-x,Y-y))**3
    hypotinus[hypotinus<0.0001]=0.0001
```

```
        r = hypotinus
        scales = 4*np.pi*epsilon_0
        return q * (X - x) / (scales*r), \
               q * (Y - y) / (scales*r)

    def V_Felt(X,Y,q,x,y):
        scales = 4*np.pi*epsilon_0
        hypotinus = (np.hypot(X-x,Y-y))**2
        hypotinus[hypotinus<0.01]=0.01
        r = hypotinus
        return q / ((X - x) ** 2 + (Y - y) ** 2) ** (0.5)

    def V_total(X, Y, charges):
        Vit = 0
        for C in charges:
            V = V_Felt(X,Y,C.q,C.x,C.y)
            Vit = Vit + V
        return Vit




    def E_total(X, Y, charges):
        Ex, Ey = 0, 0
        for C in charges:
            E = E_Felt(X,Y,C.q,C.x,C.y)
            Ex = Ex + E[0]
            Ey = Ey + E[1]
        return Ex, Ey


    def pol2cart(r, phi):
        x = r * np.cos(phi)
        y = r * np.sin(phi)
        return(x, y)

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111)

    def circleq(r,N,Q):
        count = 0
        phi = 0
        i = 0
        x = np.array([])
        y = np.array([])
        chargess = np.array([])
        while (count < N):
            split = 2*np.pi/N
            x = np.append(x,pol2cart(r,phi)[0])
            y = np.append(y,pol2cart(r,phi)[1])
            count += 1
            phi += split
        while (i < N):
            chargess = np.append(chargess,charge(Q/N,x[i],y[i]))
            i += 1
        return chargess
```

```
def lines(N,Q,h):
    count = 0
    i2 = 0
    N1 = 0
    i = 0
    sign = 1
    x = np.array([])
    y = np.array([])
    chargess = np.array([])
    while (count < N):
        x = np.append(x,-N/4*0.1 +count*0.1)
        y = np.append(y,-h)
        N1 += 1
        while (i2 < N1):
            x = np.append(x,-N/4*0.1 +count*0.1)
            y = np.append(y,h)
            i2 += 1
        count += 1
    while (i < N):
        chargess = np.append(chargess,charge((-sign)*Q/N,x[i],y[i]))
        sign = sign*(-1)
        i += 1
    return chargess

linecharges = lines(30,1,0.1)
chargez = circleq(1,100,1)

xcharge = np.array([])
ycharge = np.array([])
for C in chargez:
    xcharge  = np.append(xcharge,C.x)
    ycharge = np.append(ycharge,C.y)

xline = np.array([])
yline = np.array([])
for C in linecharges:
    xline  = np.append(xline,C.x)
    yline = np.append(yline,C.y)


#Circle field
Ex,Ey = E_total(X,Y,chargez)[0],E_total(X,Y,chargez)[1]
Vtot = V_total(X,Y,chargez)
plt.contour(X,Y,Vtot,1)
plt.contourf(X,Y,Vtot,100, cmap = 'seismic')
plt.colorbar(label = 'Potensial V')  # draw colorbar
plt.streamplot(X,Y,Ex,Ey, density=[2, 1],color='black')
for i in range(len(xcharge)):
    ax.add_artist(Circle((xcharge[i],ycharge[i]),0.005,color=charge_colors[True]))
plt.show()


#Line field
```

```
for i in range(len(xline)):
    ax.add_artist(Circle((xline[i],yline[i]),0.05,color=charge_colors[yline[i]>0]))
Xl, Yl = np.meshgrid(np.linspace(-2,2,70), np.linspace(-2,2,70))
Exl,Eyl = E_total(Xl,Yl,linecharges)[0],E_total(Xl,Yl,linecharges)[1]
Vtotal = V_total(Xl,Yl,linecharges)
plt.contour(Xl,Yl,Vtotal,1)
plt.contourf(Xl,Yl,Vtotal,500, cmap = 'seismic')
plt.colorbar(label = 'Potensial V')  # draw colorbar
plt.streamplot(Xl,Yl,Exl,Eyl,density=[2, 1],linewidth=1,color='black')
plt.show()
```

Oppgave 2

2a)

$$V = 2x^2 + 6y^2$$

$$A = (x, y, z) : x\epsilon[-1, 1], y\epsilon[-1, 1], z\epsilon[-1, 1]$$

E-Felt er gitt ved

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Da får vi:

$$\mathbf{E}(x, y) = -(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y})$$

$$\mathbf{E}(x, y) = (-4x, -12y)$$

Bruker gauss lov.

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Her har vi 6 flater som må integreres.

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S2} + \iint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_4} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_5} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_6} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Siden E-feltet kun har x- og y-retning så vil flateintegralet på øvre og nedre del av kuben bli 0:

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_1} E(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) dA = 0$$

Da har vi:

$$\iint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_4} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_5} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_6} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Som da blir

$$-4A_3 - 4EA_4 - 12EA_5 - 12EA_6$$

$$-4(1) \cdot 4 - 4(-1) \cdot (-4) - 12(1) \cdot 4 - 12(-1) \cdot (-4) = -16 - 16 - 48 - 48 = -128$$

Da får vi:

$$-128 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{\text{enc}} = -128\epsilon_0$$

$$Q_{\text{enc}} = -1.13 \cdot 10^{-9} C$$

Ladningstettheten her er:

$$\rho = Q/A = -\frac{-1.13 * 10^{-9}}{8} = -1.4125 \cdot 10^{-10} C/m^3$$

Der A = 2^3 (Volumet)

2b)

Den elektrostatiske energien er:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \mathrm{d}V$$

Som da blir

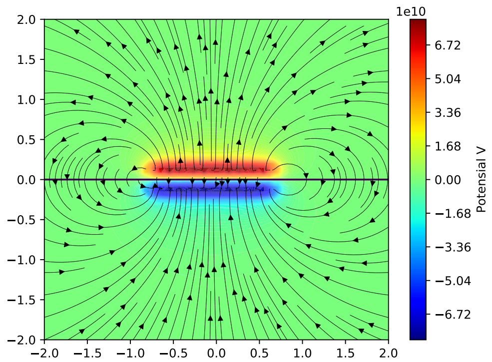
$$W_E = \epsilon_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} ((-4x, -12y) \cdot (-4x, -12y)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$W_E = \epsilon_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [(16/3)x^3 + 144y^2x]_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \frac{640}{3} = 1.88 \cdot 10^{-9} J$$

Oppgave 3

3a)

I oppgaven har vi A >> d^2 dette gjør at feltet mellom platene konstant vist med figur 3. [1]



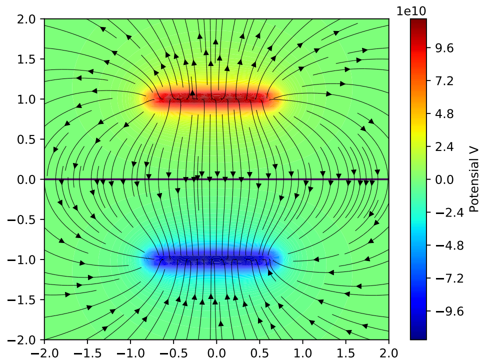
Figur 3: Plot av ladninger med liten d, her ser vi at feltet er konstant mellom flatene.

Vi får ladningen ved flatetettheten:

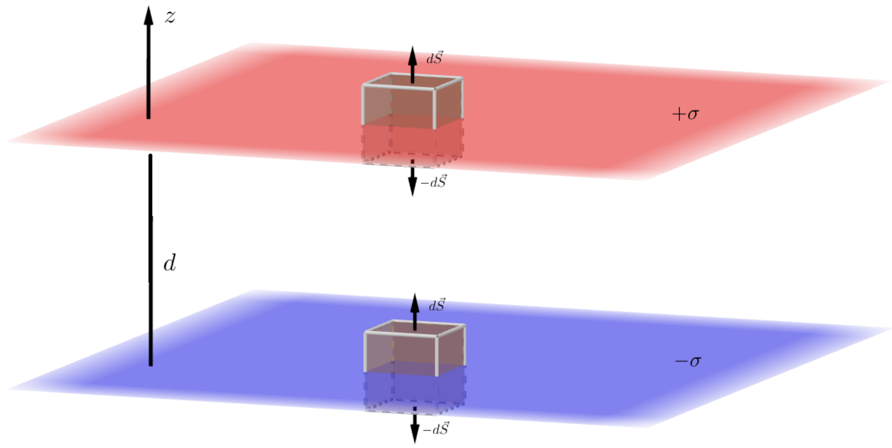
$$Q = \sigma A$$

Bruker gauss lov og lager en kubegaussflate, får seks flateintegraler på gaussflaten, vi får det samme som i oppgave 2:

[1] Plot generert med kode fra oppgave 1



Figur 4: Plot av ladninger med stor d, her kan man se at større d gjør at flatene oppfører seg mer og mer som en punktladning og da ikke konstant mellom flatene.



Figur 5: Gaussflate på den positivt og negativt ladede planene.

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S2} + \iint_{S_3} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_4} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_5} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_6} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Vi har kun E felt i z retning og vi står igjen med kun to flateintegraler. Vi har også konstant felt fordi $A >> d^2$ og kan legge E utafor integralet.

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

E-feltet på oversiden går i positiv z-retning og dS har positiv normalvektor på oversiden. Undersiden av gaussflaten har vi negativ E-felt og negativ dS normalvektor. Vi får da:

$$E\iint_{S_1} dA(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) + \iint_{S_1} dA(\text{-}\hat{\mathbf{z}}\cdot\text{-}\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Som da blir:

$$E2A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Størrelsen blir det samme for den andre flaten, så da kan jeg bruke superposjon til å finne E-feltet inni som da blir:

$$E_{inni} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_{inni} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

På vektorform:

$$\mathbf{E}_{inni} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Utenfor får vi at E-feltet er null ved vektoraddisjon.

$$\mathbf{E}_{utafor} = E_1 + E_2$$

og siden vektor feltet er like stort, men motsatt rettet blir E-feltet:

$$\mathbf{E}_{utafor} = E_1 = -E_2$$

som gjør at:

$$\mathbf{E}_{utafor} = 0$$

3b)

[1] Vi har at E-feltet mellom flaten er:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Feltet har ingen avhengighet av arealet og dermed ingen påvirkning. Her må da selfølgelig ladningen øke proposjonalt med arealet

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

[2] Hvis vi øker A og holdt Q konstant ville ladningtettheten σ blitt mindre

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Som da igjen minker E-feltet:
[3] Hvis vi øker d for mye slik at $A >> d^2$ holder så kan vi ikke se bort ifra randeffekter. E-feltet vil ikke lenger være uniform og konstant. (Se figur 4).

3c)

Potensialforskjellen blir

$$V = -\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Fra nedre flate til øvre får vi:

$$V = E\int_0^d (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}})dz$$

$$V = Ed$$

eller

$$V = \frac{d\sigma}{\epsilon_0}$$

Feltet er konservativt og dermed sti uavhengig.

3d)

I oppgave 3 fant vi at E-feltet for et plan var

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Dette er da følgelig positivt (ved positiv retning oppover) når vi har et plan under oss. dermed har vi negativt E-felt når vi har et plan over oss.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & \textbf{Plan over} \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & \textbf{Plan under} \end{cases}$$

Får uttrykket for styrken for plan over:

$$E_{\#over} = -(N - z)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Får uttrykket for styrken for plan under:

$$E_{\#under} = z\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Her går man utifra at z vil være heltall $z = 1, 2, 3, 4...$, og at man ikke kan stå akkurat på planet fordi det er uendelig flatt. Dermed stå alltid litt over og få positivt bidrag. Superposisjonerer E-feltene:

$$E_{\#total} = (2z - N)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Oppgave 4

4a)

[1] Kulen er en perfekt leder, dermed har vi σ (konduktiviteten) $= \infty$.
Ohms lov er

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

Her får vi at

$$\mathbf{E} = \lim_{\sigma -> \infty} \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = 0$$

Derfor må E-feltet inni kula $\mathbf{E} = 0$ for å kunne ha en endelig strøm. **[2]** Bruker gauss lov, med gaussflate $a \leq r \leq b$ E-feltet går radielt ut av sfæren og er konstant over flaten slik at vi kan ta det ut av flateintegralet. Vi har da omsluttet hele ladningen og vi får

$$Q_{enc} = Q$$

vi får ved gausslov

$$E \oiint_S (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Som blir

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \oiint dA}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Det negativt ladede skallet har homogen ladning rundt randen derfor vil E-feltet utligne seg inni. Dermed får vi kun E-felt fra den positive ladningen.

[3] Bruker gauss lov og legger sfærisk gaussflate rundt ladningene. Vi har igjen

$$E \oiint_S (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Her er $Q_{enc} = 0$ fordi vi har to like, men motstatt ladninger omsluttet i gaussflaten. Vi får da

$$E_{utafor} = 0$$

4b)

Potensialet er gitt ved

$$V = -\int E(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dr$$

$$V = -\int E dr$$

Legger inn E-feltet vi fant tidligere.

$$V = -\int \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr$$

som gir

$$V = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} + C$$

Vet at grensene gir $V(a) = V_0$ og $V(b) = 0$ Løser vi for konstanten C får vi

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0} + C = V_0$$

$$C = V_0 - \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0}$$

for $V(b)$ får vi

$$C = -\frac{Q}{4\pi b \epsilon_0}$$

legger vi inn for C og løser for V_0 gir

$$V_0 - \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0} = -\frac{Q}{4\pi b \epsilon_0}$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi b \epsilon_0}$$

som blir

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

potensialet i en vilkårlig lengde $a \leq r$ er

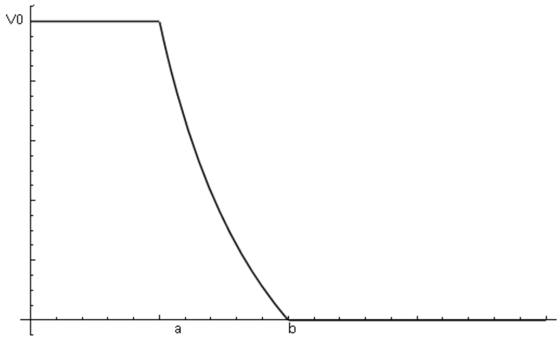
$$V = -\int_r^b E dr$$

som blir

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

Dette gir oss den stykkevise funksjonen.

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq r \leq a \\ V & a \leq r \leq b \\ 0 & b < r \leq c \end{cases}$$



Figur 6: Plot av potensialet

4c)

Nå har vi ikke vakuum og dermed vil vi ikke ha permitivitet i vakuum, men en konstant ϵ som vil være gitt ved hvilke materiale det er imellom.
Ved ohms lov har vi:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Og E-feltet er nå

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

der ϵ_0 er byttet ut med ϵ Vi får strømtettheten

$$\mathbf{J} = \sigma \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Strøm er gitt ved

$$I = \oiint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

ett stykke flate i sfæriske koordinater (ved konstant r) er $d\mathbf{S} = \mathrm{r}^2 Sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi\ \hat{\mathbf{r}}$ (når vektoren man prikker med kun har r dimensjon)
Dette gir:

$$I = \frac{\sigma Q}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r^2} r^2 Sin(\theta)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

endelig får vi

$$I = \frac{\sigma Q}{\epsilon}$$

Strømmen er konstant.

4d)

Motstand er potensialet dividert på strømmen

$$R = \frac{V}{I}$$

Vi løste for V og I i tidligere oppgavene

$$I = \frac{\sigma Q}{\epsilon}$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

Resistiviteten R blir da

$$R = \frac{Q}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})/\frac{\sigma Q}{\epsilon}$$

Ganger opp epsilon og deler vekk Q:

$$R = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})/(4\pi\sigma\epsilon)$$

Resistiviteten til et materiale er gitt ved $\rho = \frac{1}{\sigma}$ Slik at:

$$R = \frac{\rho}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

a og b har enhet [m] og ρ har enhet $[\Omega/m]$ $[\text{m}][\Omega/m] = [\Omega]$ så dette stemmer.