Obligatorisk innlevering 1

STA-2003 Våren 2019

Innleveringsfrist: Tirsdag 19.02 kl 23.59

Oppg. 1

Notasjonen $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ betyr ei normalfordeling med forventing μ og varians σ^2. Du kan få bruk for at $P(Z \leq 1.96) = 0.975$, der $Z \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$.

a) Hva er en hvit støy prosess?

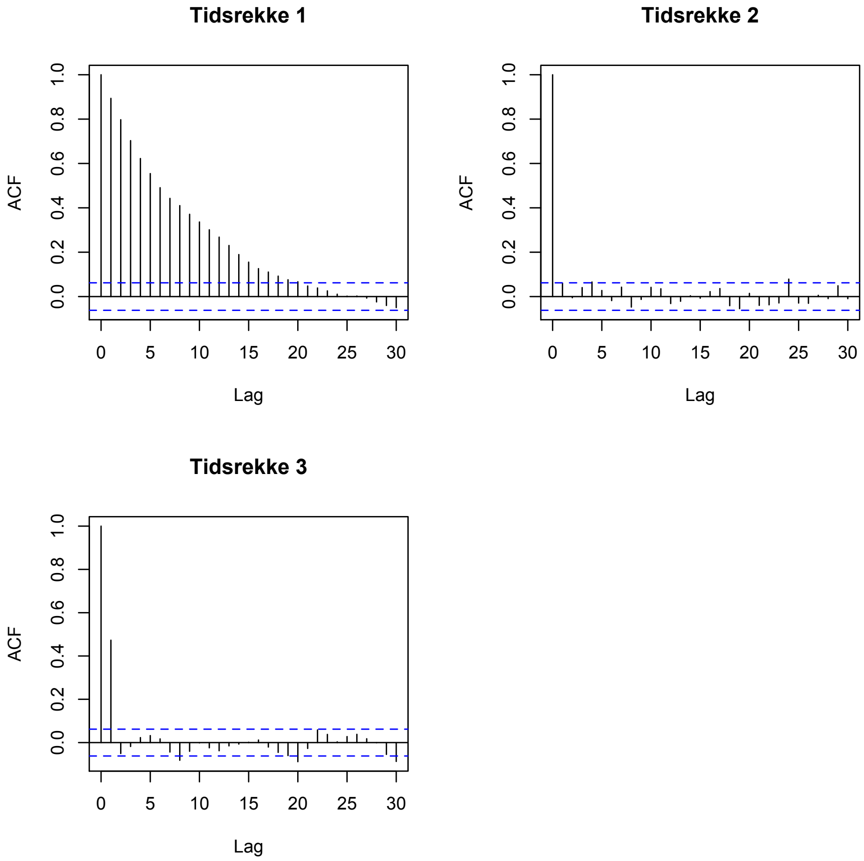
b) For en hvit støy prosess er sample auto-korrelasjonsfunksjon (ACF) $\hat{\rho}(h)$ fordelt som[1] $\hat{\rho}(h) \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1/n)$. Under antagelsen om at $\hat{\rho}(h)$ er beregnet fra en hvit støy prosess, finn a og b som oppfyller

$$\mathbb{P}(a < \hat{\rho}(h) < b) = 0.95.$$

Hvordan kan dette brukes til å bestemme om sample ACF er konsistent med en hvit støy prosess?

c) I figur 1 oppgis sample ACF for tre tidsrekker. I hvert tilfelle avgjør om sample ACF er konsistent med en hvit støy prosess.

[1] Dette er et asymptotisk resultat med tilleggs-antagelser på hvit støy prosessen. Vi antar i denne oppgaven at $\hat{\rho}(h) \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1/n)$ holder eksakt for en hvit støy prosess.



Figur 1: Sample ACF for tre tidsrekker.

Oppg. 2

La $\{X(t), t \geq 0\}$ være en stokastisk prosess med egenskapene: i) Gaussisk ii) $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ iii) $\text{Cov}\{X(t), X(s)\} = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$. Her er $\sigma > 0$ og $0 < H < 1$ konstanter.

a) Si med ord hva det vil si at en stokastisk prosess er Gaussisk.

b) Er $\{X(t)\}$ stasjonær? Begrunn svaret. Hint: Se på variansen til $X(t)$.

c) Beregn forventning, varians og ACF til inkrementene $y_t = X(t) - X(t-1)$. Som en sjekk på dine beregninger, kan du bruke

$$\text{Cov}(y_t, y_s) = \frac{\sigma^2}{2}(|t-s+1|^{2H} + |t-1-s|^{2H} - 2|t-s|^{2H}).$$

d) Hva kalles prosessen $\{y_t\}$ i tilfelle $H = 1/2$?

e) Er $\{y_t\}$ strengt stasjonær? Begrunn svaret. Du kan bruke at $\{y_t\}$ er en Gaussisk prosess.

f) La $\rho(\tau)$ være ACF til $\{y_t\}$. Det kan vises at, for $H \neq 1/2$:

$$\rho(\tau) \overset{\text{asym}}{\sim} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\tau^{2H}. \tag{1}$$

Her betyr notasjonen $\overset{\text{asym}}{\sim}$ asymptotisk lik:

$$f(n) \overset{\text{asym}}{\sim} g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1.$$

Basert på ligning (1):

- Hvordan avtar ACF for $H \neq 1/2$?
- Kommenter hvordan ACF ser ut for $H > 1/2$ og $H < 1/2$ (negative eller poisitive korrelasjoner?)
- For $H > 1/2$: Konvergerer rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k)$?

g) La $a > 0$. Vis at den stokastiske prosessen $X(at)$ er den samme som $a^H X(t)$, det vil si vis likhet i endelig-dimensjonale fordelinger:

$$[X(at_1), \ldots X(at_n)] \sim [a^H X(t_1), \ldots, a^H X(t_n)]$$

Du kan bruke at $[a^H X(t_1), \ldots, a^H X(t_n)]$ er multivariat normalfordelt.

Oppg. 3

Oppgave 2.6 i læreboka.