OBLIGATORISK OPPGAVE 3

STA-2003-Tidsrekker

17. april 2019

Martin Soria Røvang
Universitetet i Tromsø

Inneholder 11 sider, inkludert forside.

Innhold

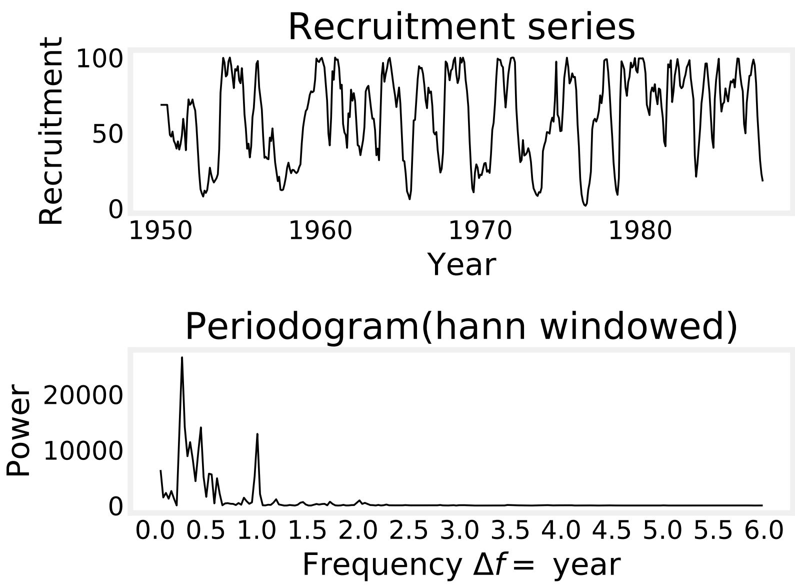
1 Oppgave

1.1 a)

Ved bruk av en vektet periodogram vist i ligning(1) kan vi se på energien til tidsrekken. Denne viser at vi har kraftig periode rundt $f = 0.5$ år og på $f = 1$ år, derfor kan man se at det er sesongvariasjoner i tidsrekken.

$$S_{xx}(f) = \frac{dt}{NU}\left|\mathscr{F}\left\{w[n]\cdot x[n]\right\}\right|^2 \tag{1}$$

Her er S_{xx} kraften på frekvenskomponentene, dt er tidssteget (i dette tilfelle dt = 1), $\mathscr{F}$ er Fouriertransformasjonen, $w[n]$ er vinduet (brukt hann vindu) og $x[n]$ er tidsrekken. Resultatet er i figur(1).



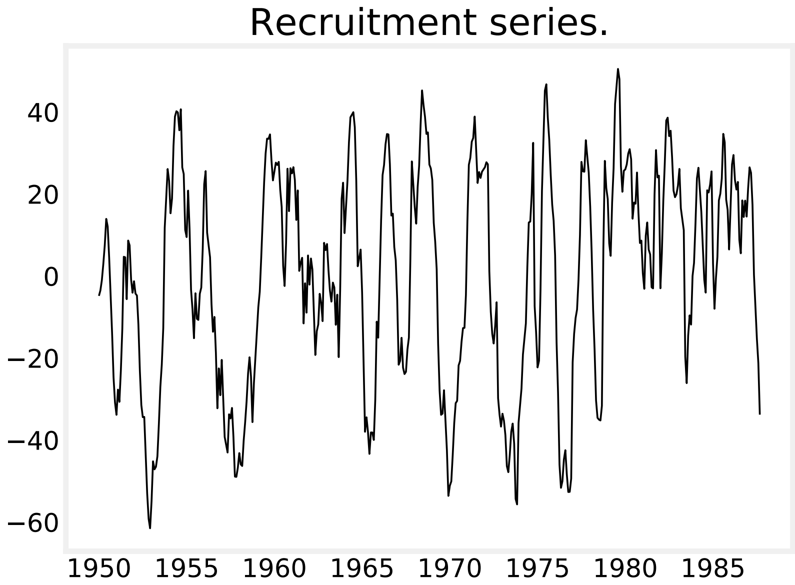
Figur 1: Tidsrekken plottet med vektet periodogram. Her kan man se forskjellige periodisiteter rundt f = 0.5 år og en på f = 1 år. Frekvensaksen har blitt ganget med [12 måneder/år] for å få enhet 1/år.

1.2 b)

Her trekker vi fra midlere sesongvariasjoner for å gjøre tidsrekken stasjonær. Resultatet er plottet i figur(2).

1.3 c-d)

Vi har plott av ACF og PACF i figur(3). Her kan man observere at ACF plottet har den karakteristiske AR() modellen der det konvergerer mot null når $h \to 0$, men denne gir ingen indikasjon på orden av AR. I PACF ser man at det er en korrelasjon ved $h = 1$ og $h = 2$, resten ser ut til å



Figur 2: Trukket fra midlere sesongvariasjoner for å gjøre tidsrekken stasjonær.

være hvit støy da dette ligger under 95% konfidensinterval gitt i ligning(2). Pågrunn av den klare indikatoren på korrelasjon ved $h = 1$ og $h = 2$ kan vi si at vi har en AR(2) eller ARMA(2, 0) prosess.

$$\sigma_w = \frac{2}{\sqrt{N}} \tag{2}$$

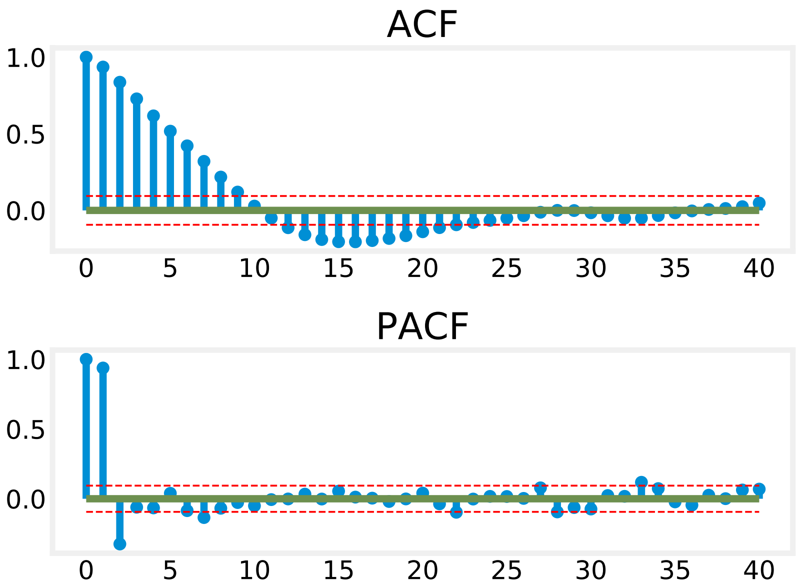
N er lengden på tidsserien.[p. 31 Shumway [2017]]

1.4 e)

Ved bruk av statsmodels-pakken i python kan vi simulere en ARMA-modell med gitte parametere, i figur(4) ser vi en resultatet fra en ARMA(2,0) modell. Fra utskriften fikk vi modellen gitt i ligning()

$$\hat{x}_n = \alpha + \phi_1 \hat{x}_{n-1} + \phi_2 \hat{x}_{n-2} + \hat{w}_n \tag{3}$$

der $\alpha = -0.7019$, $\phi_1 = 1.2483$ og $\phi_2 = -0.3313$ Her har det blitt brukt en *hatt* på tidsrekken for å vise at det er et estimat. Fra utskriften har vi att $\sigma_w = 8.564$, dette er den estimerte variansen på den hvite støyen slik at den hvite støyen har fordelingen $N \sim (0, 8.564)$.



Figur 3: Plot av ACF og PACF for den stasjonære tidsrekken i figur(2)

```
                              ARMA Model Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   No. Observations:                  453
Model:                     ARMA(2, 0)   Log Likelihood               -1616.790
Method:                       css-mle   S.D. of innovations              8.564
Date:                Tue, 16 Apr 2019   AIC                           3241.579
Time:                        12:27:46   BIC                           3258.043
Sample:                             0   HQIC                          3248.066

==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -0.7019      4.773     -0.147      0.883     -10.057       8.653
ar.L1.y        1.2483      0.044     28.159      0.000       1.161       1.335
ar.L2.y       -0.3313      0.044     -7.471      0.000      -0.418      -0.244
                                    Roots
=============================================================================
                  Real          Imaginary           Modulus         Frequency
-----------------------------------------------------------------------------
AR.1            1.1555           +0.0000j            1.1555            0.0000
AR.2            2.6120           +0.0000j            2.6120            0.0000
-----------------------------------------------------------------------------
```

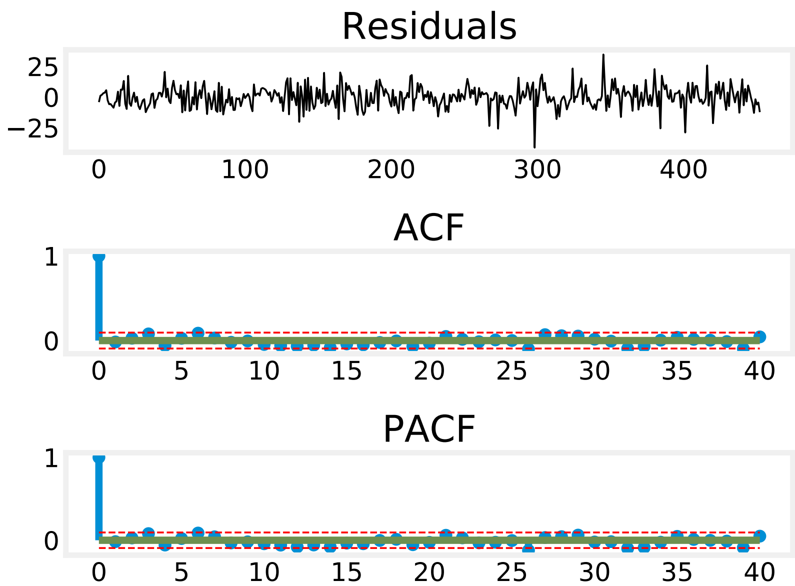
Figur 4: Utskrift av ARMA-model resultat gitt fra statsmodels-pakken. `https://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARMA.html`

2 Oppgave 2

2.1 a-b)

Ved å trekke ifra modellen(uten det hvite støyleddet) på den orginale tidsserien får vi residualene/feilene, resultatet er vist i figur(5). Fra plottet av ACF og PACF ser man at alt ligger under

95% konfidensintervallet for hvit støy, dette kan være en indikator på at modellen er god fordi vi kun står igjen med hvit støy. MERK: *Her har vi kun brukt ACF og PACF opp til lag $h = 40$ det kan være at det ligger noe utafor dette(for eksempel at vi har korrelasjon mellom lag x_t, x_{t+100}), dette gjelder også for det ACF og PACF i de tidligere oppgavene.*

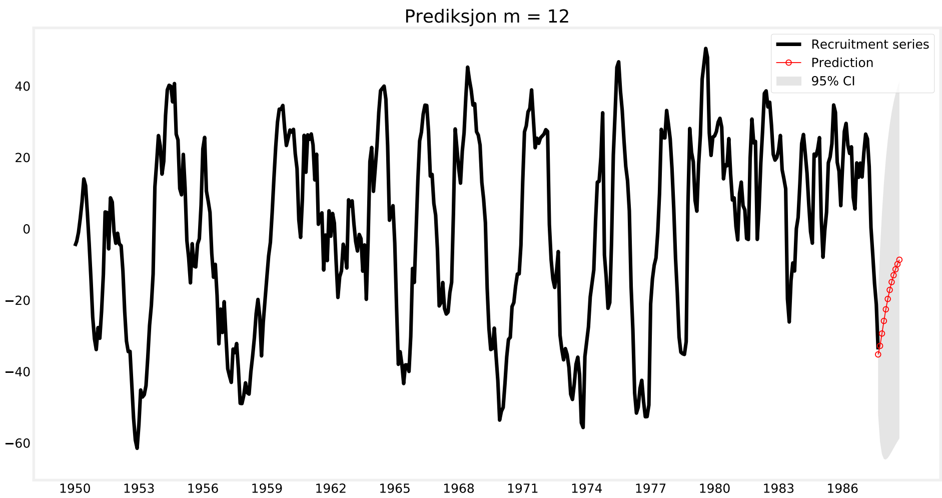


Figur 5: Plot av ACF og PACF av residualene.

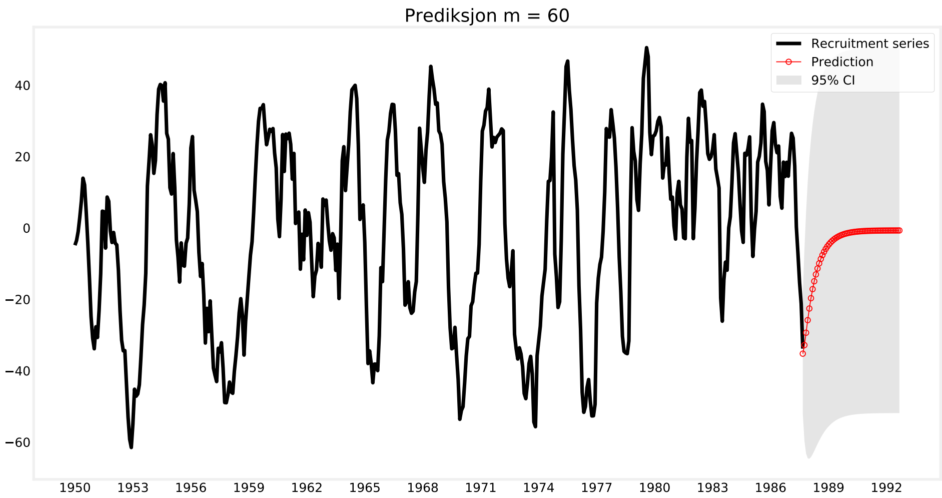
3 Oppgave 3

3.1 a-b)

Prediksjon har blitt gjort med statsmodels sin ARMA-predict funksjon i python. Resultatet med 12 steg prediksjon er vist i figure(6). Feilen konvergerer veldig fort til variansen av tidsrekken σ_x som vist i figur(7), grunnen til dette er fordi feilen er avhengig av forrige feil, dette gjør at prediksjonen blir veldig fort dårlig. Man kan også observere at prediksjonen konvergerer mot gjennomsnittet av tidsrekken.



Figur 6: Prediksjon med M = 12 måneder.



Figur 7: Prediksjon med M = 60 måneder. Her kan man se at feilen konvergerer mot variansen til tidsserien når man bruker høy m.

4 Appendix

```
from statsmodels.tsa.stattools import acf, pacf, ccf
from statsmodels.tsa.arima_process import arma2ma, arma2ar
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import os
import statsmodels as sm
plt.style.use('fivethirtyeight')
plt.rcParams['axes.facecolor']='white'
plt.rcParams['savefig.facecolor']='white'
plt.rcParams['axes.grid']='off'

# Load data
rec = pd.read_csv('data/rec.txt', delimiter='\t')
rec_df = pd.DataFrame(rec)
time = np.copy(rec_df['year'])
X = np.copy(rec_df['recruitment'])
```

Figur 8: Load files

```python
    def w_periodogram(x, dt = 1):
        """Windowed periodogram"""
        #x = np.pad(x, (0,300), 'constant')
        N = len(x)
        n = np.arange(0,N,1)
        # Hann window
        window = (1/2)*(1 - np.cos(2*np.pi*n/(N-1)))
        U = (1/N)*np.sum(window**2)
        spectrum = np.abs(np.fft.fftshift(np.fft.fft(window*x)))**2
        spectrum *= (dt/(N*U))
        freq = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N, dt))

        return freq[int(N/2):], spectrum[int(N/2):]

    # Task A

    # Find periodogram
    freq, periodogram_X = w_periodogram(X)


    # Plot data
    fig, ax = plt.subplots(2,1)
    ax[0].plot(time, X, color = 'black')
    ax[0].set_title('Recruitment series')
    ax[0].set_xlabel('Year')
    ax[0].set_ylabel('Recruitment')
    ax[1].plot(freq[2:]*12, periodogram_X[2:], color = 'black')
    ax[1].set_title('Periodogram(hann windowed)')
    ax[1].set_xlabel('Frequency $\Delta f =$ year')
    ax[1].set_ylabel('Power')
    ax[1].set_xticks([x for x in np.arange(0, 6.5, 1/2)])
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('rapport/task_a.pdf')
    plt.show()

    # Task B

    def remove_season(x):
        C = np.zeros(12)
        for m in range(0,12):
            C[m] = np.mean(x[m::12])

        # repeat C to create a periodic signal of equal length or longer than the
    dataset
        repC = np.tile(C, int(np.ceil(len(x)/12)))
        # compute residual (by subtracting periodic signal)
        X = x - repC[:len(x)]
        return X

    # Make stationary
    X_remseason = remove_season(X)

    plt.plot(time, X_remseason, color = 'black')
    plt.title('Recruitment series.')
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('rapport/task_b.pdf')
    plt.show()

    # TASK C

    # make whitenoise Confidens intervall
    wt_line = 2*np.tile(1/np.sqrt(len(X_remseason)), 41)


    # Plot
    fig, ax = plt.subplots(2,1)
    # ax[0].plot(time, X_remseason)
    # ax[0].set_title('Stasjonre tidsserien')
    ax[0].stem(acf(X_remseason))
    ax[0].set_title('ACF')
    ax[0].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[0].plot(-wt_line, '--',
    color = 'red', linewidth = 1)
    ax[1].stem(pacf(X_remseason))
    ax[1].set_title('PACF')
    ax[1].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[1].plot(-wt_line, '--',
    color = 'red', linewidth = 1)
    plt.tight_layout()
```

```python
# Oppgave 2


# Task A

# Create model.
model = sm.tsa.arima_model.ARIMA(X_remseason, order=(2, 0, 0))
model_fit = model.fit()

# Get residuals
res = model_fit.resid

# Plot
fig, ax = plt.subplots(3,1)
ax[0].plot(res, color = 'black')
ax[0].set_title('Residuals')
ax[1].stem(acf(res))
ax[1].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[1].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
ax[1].set_title('ACF')
ax[2].stem(pacf(res))
ax[2].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[2].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
ax[2].set_title('PACF')
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_2a.pdf')
plt.show()
```

Figur 10: Task 2

```python
# Oppgave 3


# Task A

year = 5
M = 12*year # 12*2 months (2 years)
forecast, stderr, conf_int = model_fit.forecast(steps = M)
# Default: 95% konfidensintervall


sliced_time = time
sliced_X = X_remseason
time_forecast = np.linspace(sliced_time[-1], sliced_time[-1] + M/12, M)

# Plot
plt.figure(figsize = [15,8])
plt.plot(sliced_time, sliced_X, color = 'black', label = 'Recruitment series')
plt.plot(time_forecast, forecast, '-o', mfc='none', color = 'red', linewidth = '1', label = 'Prediction' )
plt.fill_between(time_forecast, conf_int[:,0], conf_int[:,1], facecolor = (0, 0, 1, 0.2), label = '95% CI')
plt.xticks([x for x in np.arange(sliced_time[0], sliced_time[-1]+ M/12, 3)])
plt.legend(loc = 'best')
plt.title('Prediksjon m = %s'%M)
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_33.pdf')
plt.show()
```

Figur 11: Task 3

5 Referanser

Robert H. Shumway. *Time Series Analysis and its Applications*. Springer texts in statistics, fourth edition, 2017.