UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

# Mekanikk Oblig. 1 2017

**Mekanikk, FYS-1001**

**Martin Soria Røvang**

*I alle oppgavene bruker jeg $g = 9.81$ og neglisjerer luftmotstand*

# Oppgave 1

**a)**

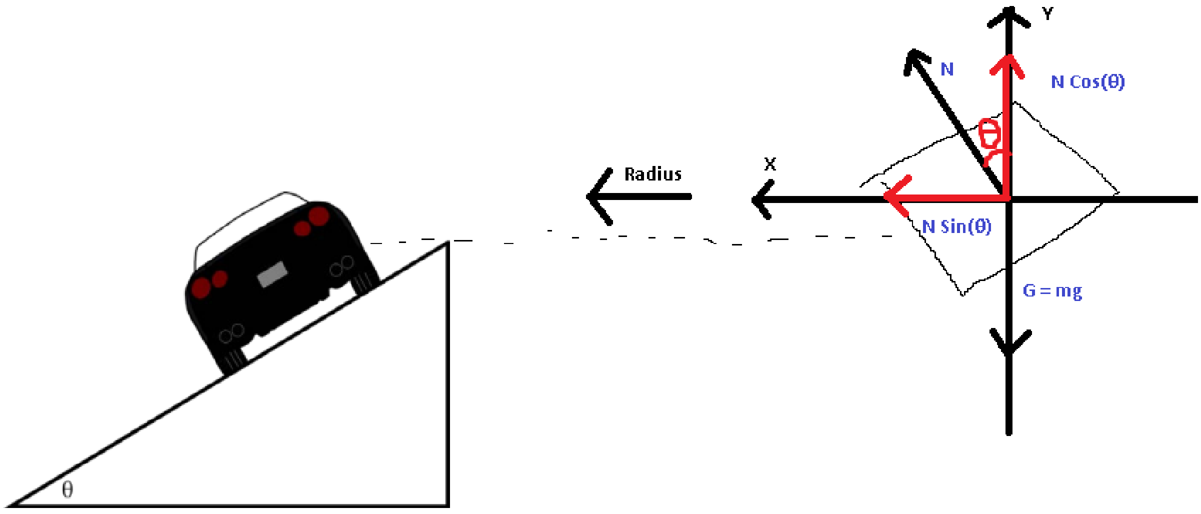



**Fig. 1.1**

Veien er ideell dosert som da betyr at den har en perfekt helling slik at det er kun normalkraften som gir en sentripetalkraft og dermed ingen friksjonskraft.

**b)**

Vi har en sentripetalkraft som virker innover mot sentrum for å rotere bilen rundt sirkelen som er horisontalkomponenten til normalkraften. Dette skal være lik $\frac{mv^2}{R}$

$$\sum F_x = Nsin(\theta) = \frac{mv^2}{R}$$

$$\sum F_y = NCos(\theta) - mg = 0$$

Vi har ingen bevegelse i Y-retning og dermed skal summen av kreftene i Y-retning være null.

Det er kun normalkraften som gir sentripetalkraft og dermed er dette ideell dosert.

Løser så for vinkelen.

Deler X-komponent med Y-komponent

$$\frac{Nsin(\theta)}{Ncos(\theta)} = \frac{mv^2}{mgR}$$

Løser opp.

$$Tan(\theta) = \frac{v^2}{gr}$$

Som da er den ideelle vinkelen for veien.

Legger jeg inn verdier får jeg

$$v_\theta = \frac{72km}{t} = \frac{72m}{3.6s} = \frac{20m}{s}$$

$$Tan(\theta) = \frac{20^2}{9.81 * 400}$$

$$\theta = Arctan\left(\frac{20^2}{9.81 * 400}\right) = 5.82^\circ$$

**c)**

$$v_\theta = ideelle\ hastigheten\ for\ vinkelen$$

Hvis $v < v_\theta$ så vil friksjonen gå i motsatt retning.

Dette er fordi $Nsin(\theta) > \ Sentripetalkraft = \frac{mv^2}{R}$ dermed vil horisontale normalkraften «overta» sentripetalkraften og da vil friksjonen virke i motsatt retning for å gjøre summen av kreftene i horisontal retning lik sentripetalkraften igjen.

fordi $Nsin(\theta) - fcos(\theta) = \ Sentripetalkraft = \frac{mv^2}{R}$

Normalkraften vil også bli litt lavere fordi i Y-retning får vi

$$\sum F_y = Ncos(\theta) + fsin(\theta) = mg$$

mg er nødt til å være det samme for all m (hvis vi antar konstant g)

Så

$$Ncos(\theta) = -fsin(\theta) + mg$$

Så her får vi faktisk en lavere normalkraft i forhold til da vi hadde ideell fart

Dette skjer fordi massen blir hjulpet opp fra planet slik at den ikke får like mye kontakt med underlaget som før som da gir en mindre normalkraft.

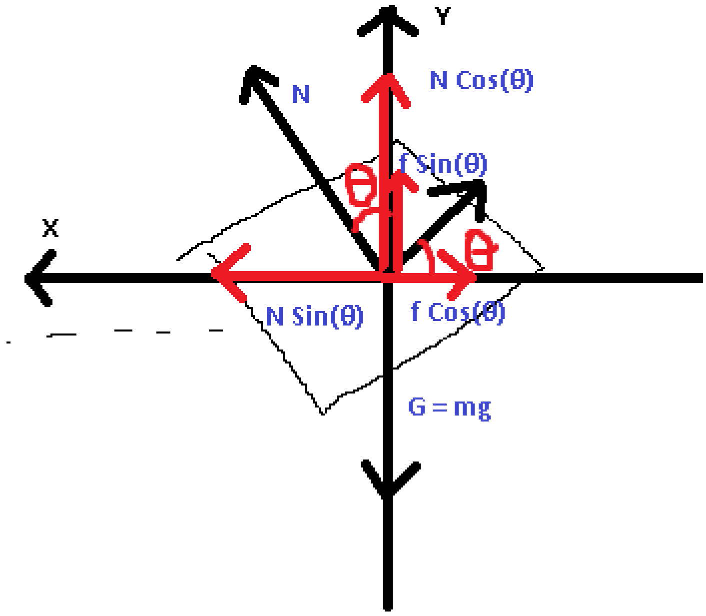



Fig 1.2

**d)**

Hastigheten er lavere enn den ideelle hastigheten og vi får da en friksjonskraft som virker i motsatt retning av den horisontale normalkraften da kan det løses for den minste mulige hastigheten for å bevare den konstante sirkelbevegelsen.

Setter opp kraftligningene:

$$(1) \sum F_x = Nsin(\theta) - fCos(\theta) = \frac{mv^2}{R}$$

$$(2) \sum F_y = NCos(\theta) + fSin(\theta) - mg = 0$$

Deler (1) på (2) og får:

$$\frac{Nsin(\theta) - fCos(\theta)}{NCos(\theta) + fSin(\theta)} = \frac{mv^2}{mgR}$$

Vet at $f = \mu_s N$ (maks før glidning), setter inn

$$\frac{Sin(\theta) - \mu_s \, Cos(\theta)}{Cos(\theta) + \mu_s \, Sin(\theta)} = \frac{v^2}{gR}$$

Rydder og løser for hastigheten

$$\left(\frac{Sin(\theta) - \mu_s\, Cos(\theta)}{Cos(\theta) + \mu_s\, Sin(\theta)}\right) gR = v^2$$

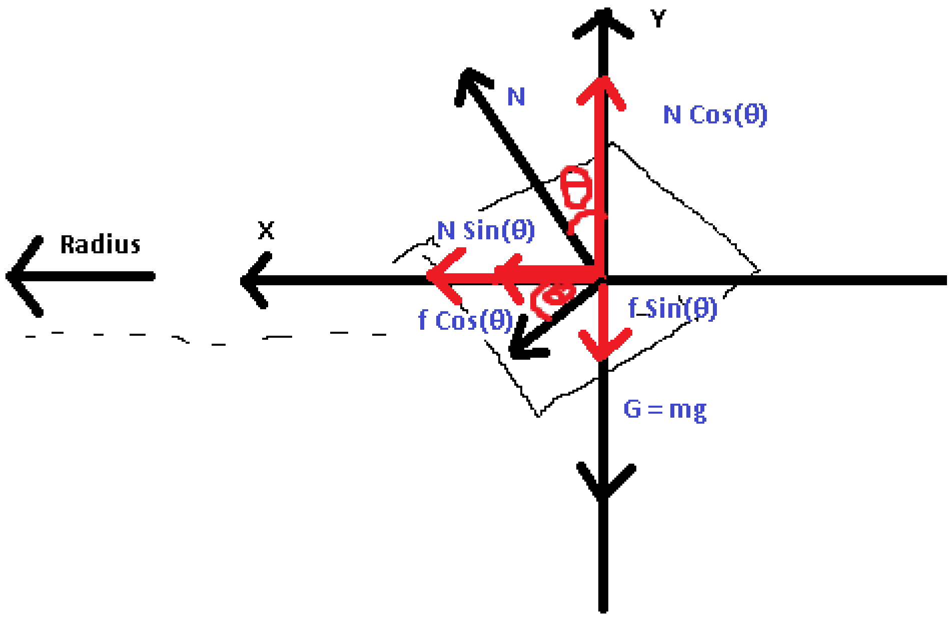
Forenkler

$$v_{min} = \sqrt{\left(\frac{Tan(\theta) - \mu_s)}{1 + \mu_s\, Tan(\theta)}\right) gR}$$

Observerer at $Tan(\theta) \leq \mu_s$ gir enten at minste hastighet kan være 0 eller ingen løsning

Så for $Tan(\theta) \leq \mu_s$ gir så liten hastighet man vil uten glidning.

**e)**




Figur 1.3

Nå er hastigheten $v > v_\theta$ da er $Nsin(\theta) < \; Sentripetalkraftideel = \frac{mv^2}{R}$

Og da kreves det mer krefter for å holde bilen i sirkelen og dermed kommer friksjonen inn og hjelper til å dra bilen inn mot sentrum slik at bilen ikke kjører ut.

$$Hvis \sum F_x < \frac{mv^2}{R}$$

Så vil bilen ikke lenger oppfylle kravet for sentripetalakselerasjon og dermed gå ut av sirkelen for å danne en større radius fordi akselerasjonen som holder radien konstant ikke er stor nok for hastigheten

Siden friksjonen øker når farten øker så vil vi ved stor nok hastigheten overstige kravet for glidning

$$f_s \leq f_s N = f_s maks$$

**f)**

Bilens makshastighet kan uttrykkes ved summer av kreftene der friksjonen virker med normalkraften

$$\sum F_x = NSin(\theta) + fCos(\theta) = \frac{mv^2}{R}$$

$$\sum F_y = NCos(\theta) - fSin(\theta) = mg$$

Deler horisontale med vertikale

$$\frac{Nsin(\theta) + fCos(\theta)}{NCos(\theta) - fSin(\theta)} = \frac{mv^2}{mgR}$$

Vi vet at $f_s = N\mu_s$ $(statisk\ fordi\ kravet\ er\ høyest\ fart\ før\ glidning)$

Vi kan da legge inn og rydde opp

$$\frac{Nsin(\theta) + N\mu_s Cos(\theta)}{NCos(\theta) - N\mu_s Sin(\theta)} = \frac{v^2}{gR}$$

Normalkraften slettes ut på venstre side.

$$\frac{Sin(\theta) + \mu_s Cos(\theta)}{Cos(\theta) - \mu_s Sin(\theta)} = \frac{v^2}{gR}$$

Løser dermed for hastigheten

$$v_{maks} = \sqrt{\left(\frac{Sin(\theta) + \mu_s Cos(\theta)}{Cos(\theta) - \mu_s Sin(\theta)}\right) gR}$$

Legger inn verdiene vi har

$$\theta = 5.82^\circ$$

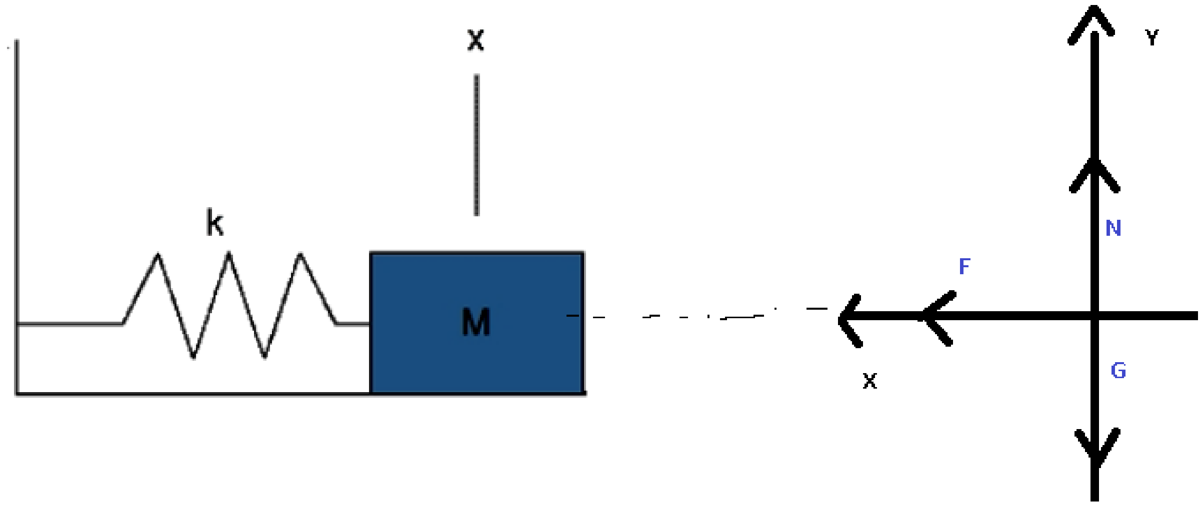
$$\mu_s = 0.15$$

Vi får da

$$v_{maks} = 31.68 m/s$$

# Oppgave 2

**a)**




Kraften til fjæra er en gjenopprettende kraft som er gitt ved distansen fra likevektspunktet fjærkonstanten k som er forskjellig fra fjær til fjær.

Vi får

$$F = -kx$$

I denne situasjonen har vi kun kraft fra fjæra i horisontal retning (Vi ser bort ifra friksjon)

Og da vil kraftbildet se slik ut

$$\sum F_x = -kx = ma$$

$$\sum F_y = N - mg = 0$$

Ser på den horisontale kraften fordi den påvirker posisjon x

$$-kx = ma$$

Akselerasjon er den dobbeltderiverte av posisjon med tanke på tid og vi kan dermed omskrive slik

$$-kx(t) = m\frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + kx(t) = 0$$

Deler på $m$ og får

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Bruker løsning:

$$x(t) = ACos(\omega t + \phi)$$

Da får jeg de deriverte

$$x'(t) = -\omega ASin(\omega t + \phi)$$

$$x''(t) = -\omega^2 ACos(\omega t + \phi)$$

Legger inn i differensialligninga og får

$$-\omega^2 ACos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$\omega^2 x(t) - \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Deler vekk x(t) og får

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Setter jeg dette opp igjen og deler vekk $\omega^2$ får jeg

$$-\omega^2 ACos(\omega t + \phi) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$x(t) = ACos(\omega t + \phi)$$

Vet at når den er i likevektsposisjon så er akselerasjonen null

$$x''(t = 0) = -\omega^2 ACos(\phi) = 0$$

Da må

$$Cos(\phi) = 0$$

Som da er

$$\phi = \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2}$$

Velger $\phi = \frac{3\pi}{2}$ fordi hastigheten går i positiv retning

$$x'(0) = -\omega ASin(\frac{3\pi}{2})$$

$$x'(0) = \omega A$$

Vet at i startposisjonen $x_0$ så er akselerasjonen/kraften på det høyeste og da må

$$x_0''(t) = -\omega^2 ACos(\omega t + \phi)$$

$$Cos(\omega t + \phi) = 1$$

Og da må også startposisjonen også ha $Cos(\omega t + \phi) = 1$

$$x_0 = A$$

$$x'(t = 0) = -\omega ASin(\frac{3\pi}{2})$$

$$v_0 = -\omega ASin(\phi)$$

Med verdier blir da

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

**b)**

Vi har friksjon og fjærkraft som gir oss horisontalkreftene og dette er et akselerert system så vi får ved newtons andre lov:

$$\sum F_x = -\mu N - kx = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = N - mg = 0$$

Dette gir oss

$$N = mg$$

Dermed

$$m\ddot{x} + \mu mg + kx = 0$$

Deler på massen

$$\ddot{x} + \mu g + \frac{k}{m}x = 0$$

Friksjonen skifter fortegn etter hvilken retning hastigheten har.

Legger inn en enhetsvektor som går i samme retning som hastigheten.

$$\ddot{x} + \mu g\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{k}{m}x = 0$$

Hastigheten er den deriverte av posisjonen og dette er funksjon av tid og da får vi

$$\ddot{x}(t) + \mu g\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Der $\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}$ er enhetsvektoren til hastigheten som vil veksle mellom negativ og positiv retning.

Dette er en dempet svingning siden vi har en amplitude som blir mindre og mindre over tid.

## Deloppgave c og d under.

In [14]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Konstante verdier
k = 16
m = 1
dt = 0.1
dt2 = 0.001
w2 = k/m
w = np.sqrt(k/m)
mu = 1/16
g = 9.81
#Startbetingelser
x = 1
q = (3*np.pi/2)
#Starthastighet
x1 = 0
#Starttid
t = 0
#Lager en tidsarray og posisjonsarray for å plotte de
tarray = []
xarray = []
tarray2 = []
xarray2 = []
tarray3 = []
xarray3 = []
#Loop som løser diff. lign. numerisk ved å iterere opp verdiene per tidssteg
while (t < 10):
    #Posisjonen
    #Hastighet
    #Akselerasjonen
    x2 = -x*w2
    x = x + x1*dt
    x1 = x1 + x2*dt
    #Tid
    t = t + dt
    #Legger til i array for hver iterering
    tarray.append(t)
    xarray.append(x)

#Loop for løsning med annet dt
x = 1
t = 0
x1 = 0
while (t < 10):
    #Akselerasjonen
    x2 = -x*w2
    #Hastighet
    x = x + x1*dt2
    x1 = x1 + x2*dt2
    #Posisjonen
    #Tid
    t = t + dt2
    #Legger til i array for hver iterering
    tarray2.append(t)
    xarray2.append(x)

#Loop for løsning med friksjon
```

```python
x = 1
t = 0
x1 = 0.00001 #(hvis jeg har null hastighet så deler jeg på null i enhetsvektoren får
 jeg error)
while (t < 10):
    #Akselerasjonen med friksjon
    x2 = -x*w2 - mu*g*(x1/np.sqrt(x1**2))
    #Hastighet
    x = x + x1*dt2
    x1 = x1 + x2*dt2
    #Posisjonen
    #Tid
    t = t + dt2
    #Legger til i array for hver iterering
    tarray3.append(t)
    xarray3.append(x)




#Eksakt plot
A = 1
te = np.linspace(0,10,1000)
x = A*np.cos(w*te )

#Plott alle
fig = plt.figure(figsize=(25,15))
plt.subplot(2,2,1)
plt.plot(tarray,xarray, label='dt = 0.1',color='g')
plt.legend(loc='upper left')
plt.subplot(2,2,2)
plt.plot(tarray2,xarray2, label='dt = 0.001',color='b')
plt.legend(loc='upper left')
plt.subplot(2,2,3)
plt.plot(tarray3,xarray3, label='Friksjon',color='black')
plt.legend(loc='upper left')
plt.subplot(2,2,4)
plt.plot(te,x, label='Eksakt',color='red')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```