OBLIGATORISK OPPGAVE 3

STA-2003-Tidsrekker

19. april 2019

Martin Soria Røvang
Universitetet i Tromsø

Inneholder 11 sider, inkludert forside.

Innhold

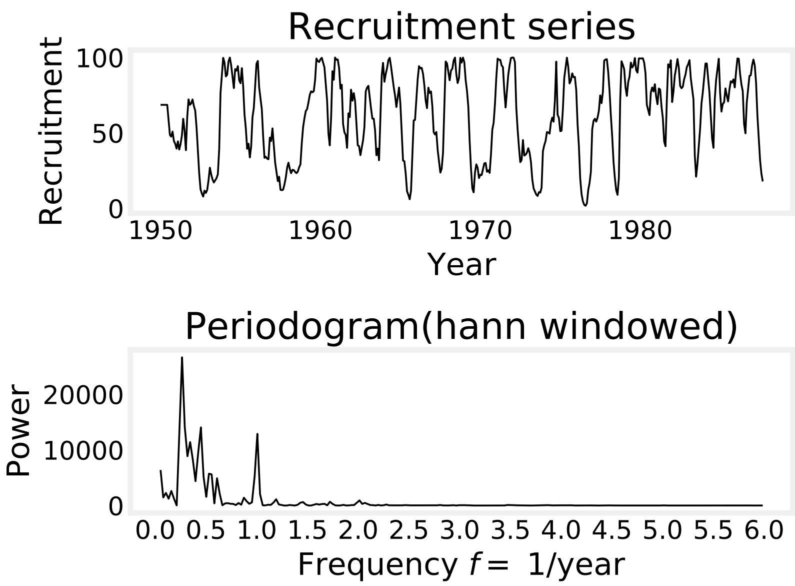
1 Oppgave

1.1 a)

Ved bruk av en vektet periodogram vist i ligning(1.1) kan vi se på energien til tidsrekken. Denne viser at vi har kraftig periode rundt $f = 0.5$ år og på $f = 1$ år, derfor kan man se at det er sesongvariasjoner i tidsrekken.

$$S_{xx}(f) = \frac{dt}{NU}\left|\mathfrak{F}\left\{w[n]\cdot x[n]\right\}\right|^2 \tag{1.1}$$

Her er S_{xx} kraften på frekvenskomponentene, dt er tidssteget (i dette tilfelle dt = 1), $\mathfrak{F}$ er Fouriertransformasjonen, $w[n]$ er vinduet (brukt hann vindu) og $x[n]$ er tidsrekken. Resultatet er i figur(1).



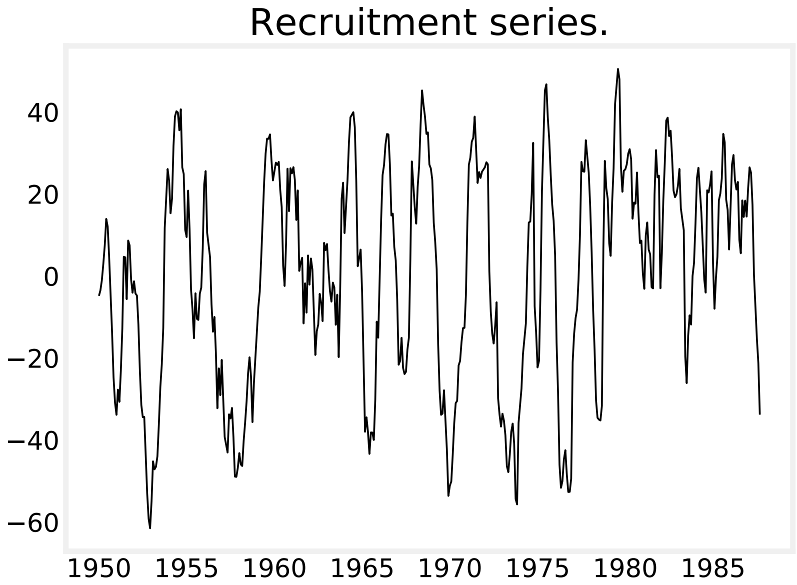
Figur 1: Tidsrekken plottet med vektet periodogram. Her kan man se forskjellige periodisiteter rundt f = 0.5 år og en på f = 1 år. Frekvensaksen har blitt ganget med [12 måneder/år] for å få enhet 1/år.

1.2 b)

Her trekker vi fra midlere sesongvariasjoner for å gjøre tidsrekken stasjonær. Resultatet er plottet i figur(2).

1.3 c-d)

Vi har plott av ACF og PACF i figur(3). Her kan man observere at ACF plottet har den karakteristiske AR() modellen der det konvergerer mot null når $h \to 0$, men denne gir ingen indikasjon på orden av AR. I PACF ser man at det er en korrelasjon ved $h = 1$ og $h = 2$, resten ser ut til å



Figur 2: Trukket fra midlere sesongvariasjoner for å gjøre tidsrekken stasjonær.

være hvit støy da dette ligger under 95% konfidensinterval gitt i ligning(1.2). Pågrunn av den klare indikatoren på korrelasjon ved $h = 1$ og $h = 2$ kan vi si at vi har en AR(2) eller ARMA(2, 0) prosess.

$$\sigma_w = \frac{2}{\sqrt{N}} \tag{1.2}$$

N er lengden på tidsserien.[p. 31 Shumway [2017]]

1.4 e)

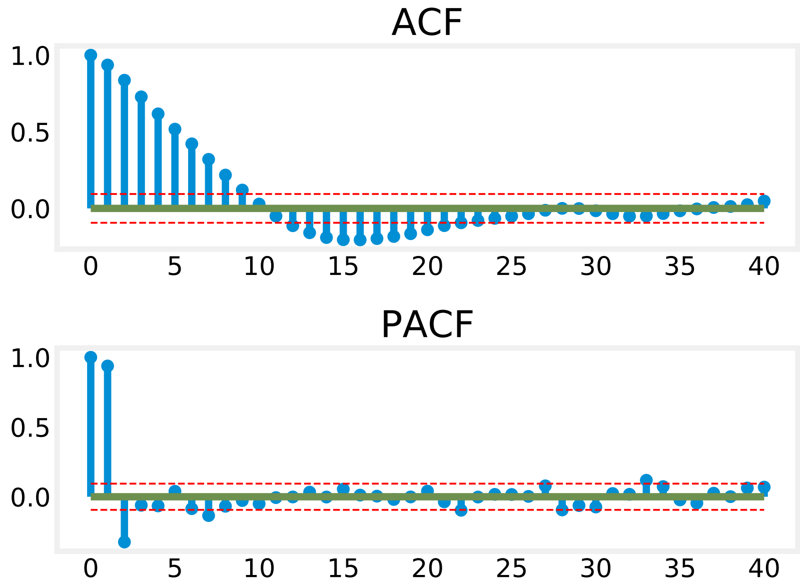
Ved bruk av statsmodels-pakken i python kan vi simulere en ARMA-modell med gitte parametere, i figur(4) ser vi en resultatet fra en ARMA(2,0) modell. Fra utskriften fikk vi modellen gitt i ligning()

$$\hat{x}_n = \alpha + \phi_1 \hat{x}_{n-1} + \phi_2 \hat{x}_{n-2} + \hat{w}_t \tag{1.3}$$

der $\alpha = -0.7019$, $\phi_1 = 1.2483$ og $\phi_2 = -0.3313$ Her har det blitt brukt en *hatt* på tidsrekken for å vise at det er et estimat. Fra utskriften i figur(4) har vi at $\sigma_w = 9.452$, dette er den estimerte variansen på den hvite støyen slik man har fordelingen $N \sim (0, \sigma_w^2)$. Dette kan brukes til å finne *Mean-square prediction error* som er gitt ved ligning(1.4),

$$P_{n+m}^n = E\Big[\sigma_w^2 \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2\Big] \tag{1.4}$$

der ψ er vektene gitt fra modellen slik at $\phi(z)\psi(z) = \theta(z)$. Her er $\psi(z)$ og $\theta(z)$ de karakteristiske ligningene til AR og MA modellen og $\psi(z)$ er vektene gitt ved $\psi(z) = (1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots + \psi_j z^j + \cdots)$



Figur 3: Plot av ACF og PACF for den stasjonære tidsrekken i figur(2)

```
                              ARMA Model Results
         ==============================================================================
         Dep. Variable:                      y   No. Observations:                  453
         Model:                     ARMA(2, 0)   Log Likelihood               -1616.790
         Method:                       css-mle   S.D. of innovations              8.564
         Date:                Tue, 16 Apr 2019   AIC                           3241.579
         Time:                        12:27:46   BIC                           3258.043
         Sample:                             0   HQIC                          3248.066

         ==============================================================================
                          coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
         ------------------------------------------------------------------------------
         const         -0.7019      4.773     -0.147      0.883     -10.057       8.653
         ar.L1.y        1.2483      0.044     28.159      0.000       1.161       1.335
         ar.L2.y       -0.3313      0.044     -7.471      0.000      -0.418      -0.244
                                             Roots
         =============================================================================
                           Real          Imaginary           Modulus         Frequency
         -----------------------------------------------------------------------------
         AR.1            1.1555           +0.0000j            1.1555            0.0000
         AR.2            2.6120           +0.0000j            2.6120            0.0000
         -----------------------------------------------------------------------------
```

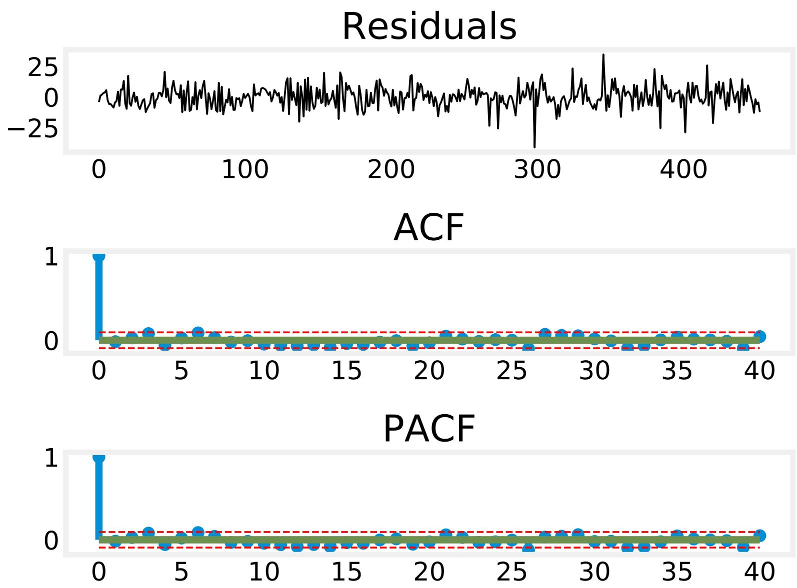
Figur 4: Utskrift av ARMA-model resultat gitt fra statsmodels-pakken. `https://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARMA.html`

2 Oppgave 2

2.1 a-b)

Ved å trekke ifra modellen(uten det hvite støyleddet) på den orginale tidsserien får vi residualene/feilene, resultatet er vist i figur(5). Fra plottet av ACF og PACF ser man at alt ligger under

95% konfidensintervallet for hvit støy, dette kan være en indikator på at modellen er god fordi vi kun står igjen med hvit støy. MERK: *Her har vi kun brukt ACF og PACF opp til lag* $h = 40$ *det kan være at det ligger noe utafor dette(for eksempel at vi har korrelasjon mellom lag* x_t, x_{t+100}*), dette gjelder også for det ACF og PACF i de tidligere oppgavene.*

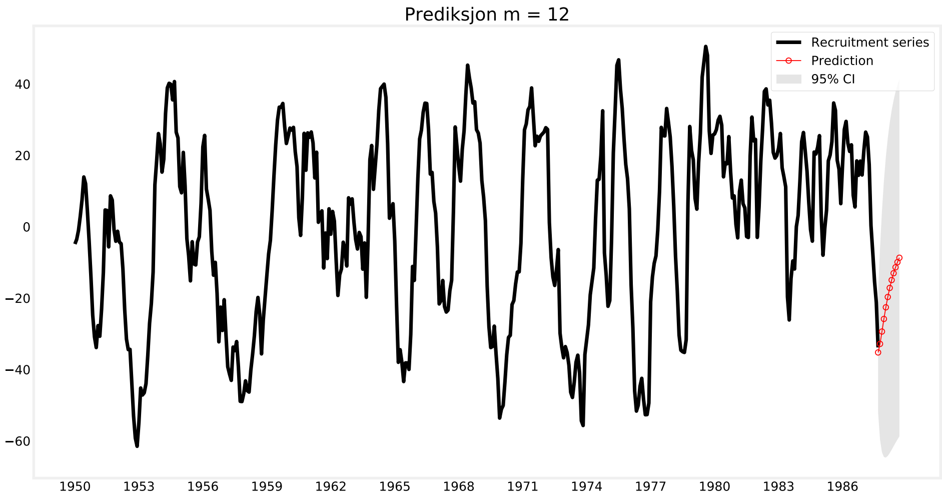


Figur 5: Plot av ACF og PACF av residualene.

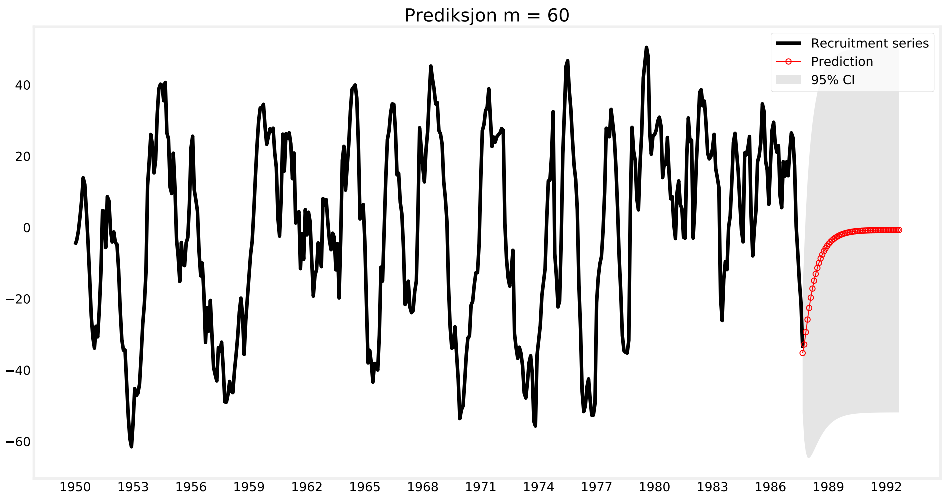
3 Oppgave 3

3.1 a-b)

Prediksjon har blitt gjort med statsmodels sin ARMA-predict funksjon i python. Resultatet med 12 steg prediksjon er vist i figure(6). Feilen konvergerer veldig fort til variansen av tidsrekken σ_x som vist i figur(7). Man kan også observere at prediksjonen konvergerer mot gjennomsnittet av tidsrekken.



Figur 6: Prediksjon med M = 12 måneder.



Figur 7: Prediksjon med M = 60 måneder. Her kan man se at feilen konvergerer mot variansen til tidsserien når man bruker høy m.

4 Appendix

```python

        from statsmodels.tsa.stattools import acf, pacf, ccf
        from statsmodels.tsa.arima_process import arma2ma, arma2ar
        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        import pandas as pd
        import os
        import statsmodels as sm
        plt.style.use('fivethirtyeight')
        plt.rcParams['axes.facecolor']='white'
        plt.rcParams['savefig.facecolor']='white'
        plt.rcParams['axes.grid']='off'

        # Load data
        rec = pd.read_csv('data/rec.txt', delimiter='\t')
        rec_df = pd.DataFrame(rec)
        time = np.copy(rec_df['year'])
        X = np.copy(rec_df['recruitment'])

```

Figur 8: Load files

```python
    def w_periodogram(x, dt = 1):
    """Windowed periodogram"""
    #x = np.pad(x, (0,300), 'constant')
    N = len(x)
    n = np.arange(0,N,1)
    # Hann window
    window = (1/2)*(1 - np.cos(2*np.pi*n/(N-1)))
    U = (1/N)*np.sum(window**2)
    spectrum = np.abs(np.fft.fftshift(np.fft.fft(window*x)))**2
    spectrum *= (dt/(N*U))
    freq = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N, dt))

    return freq[int(N/2):], spectrum[int(N/2):]

# Task A

# Find periodogram
freq, periodogram_X = w_periodogram(X)


# Plot data
fig, ax = plt.subplots(2,1)
ax[0].plot(time, X, color = 'black')
ax[0].set_title('Recruitment series')
ax[0].set_xlabel('Year')
ax[0].set_ylabel('Recruitment')
ax[1].plot(freq[2:]*12, periodogram_X[2:], color = 'black')
ax[1].set_title('Periodogram(hann windowed)')
ax[1].set_xlabel('Frequency $\Delta f =$ year')
ax[1].set_ylabel('Power')
ax[1].set_xticks([x for x in np.arange(0, 6.5, 1/2)])
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_a.pdf')
plt.show()

# Task B

def remove_season(x):
    C = np.zeros(12)
    for m in range(0,12):
        C[m] = np.mean(x[m::12])

    # repeat C to create a periodic signal of equal length or longer than the dataset
    repC = np.tile(C, int(np.ceil(len(x)/12)))
    # compute residual (by subtracting periodic signal)
    X = x - repC[:len(x)]
    return X

# Make stationary
X_remseason = remove_season(X)

plt.plot(time, X_remseason, color = 'black')
plt.title('Recruitment series.')
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_b.pdf')
plt.show()

# TASK C

# make whitenoise Confidens intervall
wt_line = 2*np.tile(1/np.sqrt(len(X_remseason)), 41)


# Plot
fig, ax = plt.subplots(2,1)
# ax[0].plot(time, X_remseason)
# ax[0].set_title('Stasjonre tidsserien')
ax[0].stem(acf(X_remseason))
ax[0].set_title('ACF')
ax[0].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[0].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
ax[1].stem(pacf(X_remseason))
ax[1].set_title('PACF')
ax[1].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[1].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
plt.tight_layout()
```

```python
# Oppgave 2


# Task A

# Create model.
model = sm.tsa.arima_model.ARIMA(X_remseason, order=(2, 0, 0))
model_fit = model.fit()

# Get residuals
res = model_fit.resid

# Plot
fig, ax = plt.subplots(3,1)
ax[0].plot(res, color = 'black')
ax[0].set_title('Residuals')
ax[1].stem(acf(res))
ax[1].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[1].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
ax[1].set_title('ACF')
ax[2].stem(pacf(res))
ax[2].plot(wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1); ax[2].plot(-wt_line, '--', color = 'red', linewidth = 1)
ax[2].set_title('PACF')
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_2a.pdf')
plt.show()
```

Figur 10: Task 2

```python
# Oppgave 3


# Task A

year = 5
M = 12*year # 12*2 months (2 years)
forecast, stderr, conf_int = model_fit.forecast(steps = M)
# Default: 95% konfidensintervall


sliced_time = time
sliced_X = X_remseason
time_forecast = np.linspace(sliced_time[-1], sliced_time[-1] + M/12, M)

# Plot
plt.figure(figsize = [15,8])
plt.plot(sliced_time, sliced_X, color = 'black', label = 'Recruitment series')
plt.plot(time_forecast, forecast, '-o', mfc='none', color = 'red', linewidth = '1', label = 'Prediction' )
plt.fill_between(time_forecast, conf_int[:,0], conf_int[:,1], facecolor = (0, 0, 1, 0.2), label = '95% CI')
plt.xticks([x for x in np.arange(sliced_time[0], sliced_time[-1]+ M/12, 3)])
plt.legend(loc = 'best')
plt.title('Prediksjon m = %s'%M)
plt.tight_layout()
plt.savefig('rapport/task_33.pdf')
plt.show()
```

Figur 11: Task 3

5 Referanser

Robert H. Shumway. *Time Series Analysis and its Applications*. Springer texts in statistics, fourth edition, 2017.