

Fjerde ordens Runge-Kutta metode for drevet harmonisk pendel

Numerisk Prosjekt – TFY4163 Bølgefysikk og Fluidmekanikk 2025
Institutt for Fysikk, NTNU

Innledning og Teori

Bevegelsesligningen for en pendel med friksjon og drivkraft er

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = \frac{F_D}{ml}\sin(\omega_D t), \quad (1)$$

hvor θ er pendelens utslagsvinkel, g er tyngdeakselerasjonen, l er lengden av snora pendelen er festet i, q er en friksjonsparameter, F_D/ml er drivkraften som pendelen utsettes for, og ω_D er drivkraftens vinkelfrekvens. Vi definerer $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, som er pendelens vinkelfrekvens.

Du kan anta at $\sin(\theta) \approx \theta$ i alle oppgavene om ikke annet blir oppgitt, slik at bevegelsesligningen du skal løse er gitt ved

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = \frac{F_D}{ml}\sin(\omega_D t), \quad (2)$$

Benytt parametrene under når du løser ligningen:

- Lengden av snora, $l = 1$ m
- Tyngdeakselerasjonen, $g = 9.8$ m/s²
- Initiell vinkel med hensyn til vertikalen, $\theta_0 = 0.2$ rad
- Initiell vinkelhastighet $\dot{\theta}_0 = 0.0$ rad/s
- Friksjonsparameter, $q = 1.0$ s⁻¹
- Drivkraftens vinkelfrekvens, $\omega_D = 3.13$ rad/s
- Drivkraft $\frac{F_D}{ml} = 0.2$ s⁻²

Når drivfrekvensen, ω_D er nær pendelens vinkelfrekvens, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, får vi resonans, som vi skal undersøke i oppgavene under.

Oppgaver

1. Bruk fjerdeordens Runge-Kutta (RK4) metoden for å løse bevegelsesligningen. Plot vinkelutslaget som funksjon av tid, opp til $t = 20$ s. Bruk tidssteg $\Delta t = 0.01$ s.
2. Finn en passende steglengde, Δt , ved å utføre en konvergenstest av løsningen fra RK4-metoden. Utfør den samme konvergenstesten for Euler-Cromer metoden, som du også må implementere. Plot de to konvergenstestene i hver sin figur. Vurder ut fra konvergenstesten om tidssteget brukt i oppgave 1 var tilstrekkelig. Merk at energien *ikke* vil være bevart i dette systemet.
3. Undersøk hvordan utslaget avhenger av drivfrekvensen ω_D . Plot vinkelutslaget for minst fem ulike verdier av ω_D , som du mener viser denne sammenhengen.
4. Undersøk hvordan resonansamplituden avhenger av friksjonsparameteren, q . Plot vinkelutslaget for minst fem ulike verdier av q , som du mener viser denne sammenhengen.
5. For en dempet pendel uten drivkraft, $F_D = 0$, skiller vi mellom overkritisk, underkritisk og kritisk dempning. Plot vinkelutslaget opp til $t = 4$ s, og bestem for hvilke q vi finner disse regimene.
6. Frivillig oppgave:
 - (a) Gå nå bort fra småvinkeltilnærmelsen $\sin(\theta) \approx \theta$. Plot vinkelutslaget som funksjon av tid med og uten småvinkeltilnærmelsen i samme plot for $\theta_0 = 60^\circ$ og $\dot{\theta}_0 = 0.0$. Bruk tidssteg $\Delta t = 0.01$ s, og samme parametre som i oppgave 1. *Tips:* Konverter fra grader til radianer med `np.radians`.
 - (b) Prøv deg frem med initialverdiene og parametrene, og finn når kaotisk oppførsel begynner å oppstå. Plot vinkelutslaget som funksjon av tid for slik kaotisk oppførsel.

Krav til godkjenning

Kravene under må være oppfylt for å få godkjent prosjektet.

1. Besvarelsen skal leveres i Jupyter Notebook.
2. Figurene fra alle oppgavene skal være i notebooken du leverer.
3. Alle oppgavene skal også ha en (kort) tekst som besvarer oppgaven/forklarer hva figuren viser
4. Alle figurer skal ha tittel på aksene, tittel på figuren, og legend (legend kreves kun dersom det er mer enn ett plot).

Det er ikke krav om å gjøre oppgave 6 for å få prosjektet godkjent.