ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարան
(Պոլիտեխնիկ)

Հաշվողական համակարգերի
մաթեմատիկական ապահովման
ամբիոն

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՎ
ԲԻՆԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ 2009

Կազմող՝ Ե.Ծ.Ալավերդյան

Բազմությունների տեսություն և բինար հարաբերություններ: Ուսումնական ձեռնարկ
Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարան (Պոլիտեխնիկ): Երևան, 2009թ: 40 էջ:

Բազմությունների տեսության և բինար հարաբերությունների վերաբերյալ ուսումնասիրությունը օգտակար է տեխնիկական մասնագիտացմամբ ուսանողների համար և նպատակ ունի նրանց ծանոթացնել բազմազան դիսկրետ կառուցվածքների, նրանց մոդելավորմանն ու կառավարմանը: Բազմության տարրերի միջև առնչությունները ձևակերպվում և արտահայտվում են հարաբերություն ներկայացնող կառուցվածքների միջոցով, որոնք հանդես են գալիս բազմազան ենթատեքստերում:

Բազմությունները կիրառվում են իրարից տարբեր օբյեկտներ խմբավորելու համար, որոնք բազմության ներսում հաճախ նույն հատկություններն ունեն: Բազմությունների և բինար հարաբերությունների լեզուն միջոց է՝ օբյեկտների հավաքածուները ուսումնասիրելու, կազմակերպելու և անհրաժեշտ ձևով դրանք կառավարելու համար:

Գրախոսներ՝
տ.գ.դ., պրոֆ. Մ.Խաչատրյան
ֆիզ.մաթ.գ.դ., պրոֆ. Յու.Մովսիսյան

Խմբագիր՝

Ընդհանուր տեղեկություններ

«Բազմությունների տեսություն և բինար հարաբերություններ» թեմայի շրջանակներում ուսումնասիրվում են առանձին կառուցվածքային միավորների խմբավորման առանձնահատկությունները, այդ խմբավորումների ներկայացման և մշակման եղանակները:

Օբյեկտների միջև բինար հարաբերություններն օգտագործվում են համակարգչային և հեռահաղորդակցական ցանցերի նախագծման, ինչպես նաև տվյալների հենքերում տեղեկատվության գրանցման և որոնման արդյունավետ մեթոդների մշակման համար:

1. Բազմության հասկացություն

Բազմություն ասելով հասկանում ենք օբյեկտների կամ տարրերի որոշակի հավաքածու և համարում ենք բազմությունը տրված, եթե նրա տարրերը միարժեքորեն որոշված են, և դա չի բերում որևէ հակասության: Հետևյալ օրինակները պարզաբանում են դրանց իմաստը:

1. Բնական թվերի բազմությունը: 3-ը պատկանում է այդ բազմությանը, իսկ 0.5-ը չի պատկանում այդ բազմությանը:
2. Եթե P-ն {x:x–ը Հայաստանի Հանրապետության գետ է} բազմությունն է, ապա Ախուրյանը պատկանում է P-ին, իսկ Սենան չի պատկանում P-ին:
3. Ռացիոնալ թվերի բազմությունը: 0.5-ը պատկանում է այդ բազմությանը(այդ բազմության տարր է), իսկ $\sqrt{2}$ -ը չի պատկանում այդ բազմությանը(այդ բազմության տարր չէ):
4. $x^2 - 6x + 9 = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը: 3-ը պատկանում է այդ բազմությանը(այդ բազմության տարր է), իսկ 4-ը չի պատկանում այդ բազմությանը(այդ բազմության տարր չէ):

Բազմությունն անվանենք վերջավոր, եթե գոյություն ունի այնպիսի $n \geq 0$ ամբողջ թիվ այնպես, որ այդ բազմությանը պատկանում են ճիշտ *n* հատ տարրեր:

A վերջավոր բազմության տարրերի քանակն ընդունված է նշանակել |*A*|: Վերջավոր բազմությունները կարելի է ներկայացնել՝ թվարկելով դրանց տարրերը: Որպես կանոն, վերջավոր բազմությանը պատկանող տարրերն ընդունված է գրանցել երկու ձևավոր փակագծերի միջև և առանձնացնել դրանք ստորակետերով: Օրինակ, {1,2,3,4} –ը բազմություն է, որը պարունակում է 1,2,3 և 4 բնական թվերը: Հայերենի այբուբենի ձայնավորների բազմությունը կարելի է ներկայացնել որպես {ա,ե,է,ը,ի,ո,ու,օ} և այլն:

Բազմությունը նշանակելու համար սովորաբար օգտագործում ենք որևէ լեզվի այբուբենի մեծատառերը: A={մատիտ, գրիչ, տետր, աղյուսակ} -ը բազմություն է, որի տարրերը մատիտը, գրիչը, տետրը և աղյուսակն են: Առաջին *n* դրական ամբողջ թվերի բազմությունը կարելի է նշանակել որպես {1,2,3,4,…,*n*}: Նման ձևով կարելի է նշանակել նաև անվերջ դրական ամբողջ թվերի բազմությունը՝ {1,2,3,4,…}:

Բազմությունը ներկայացվում է նաև բազմության տարրերի բնորոշիչ հատկության միջոցով: Օր.՝ $C=\{1,8,27,\ldots,k^3,\ldots\}$-ն ներկայացնում է բոլոր դրական ամբողջ թվերի խորանարդների բազմությունը, իսկ $S=\{1,4,9,\ldots,n^2\}$-ը՝ *n* -ից փոքր կամ հավասար բոլոր դրական ամբողջ թվերի քառակուսիների բազմությունը: Ակնհայտ է, որ բազմության բոլոր տարրերի թվարկումը նպատակահարմար է այն դեպքում, երբ այդ տարրերի քանակը փոքր է կամ էլ վերջիններս կարելի է ներկայացնել մաթեմատիկական մոդելի միջոցով: Օրինակ, օգտվելով նկարագրման նման եղանակից, այնքան էլ հեշտ չէ բնութագրել Յայաստանի Յանրապետության քաղաքացիների բազմությունը, ինչպես նաև բոլորովին անիմաստ է նկարագրել իրական թվերի բազմությունը:

Այսպիսով, ընդհանուր դեպքում բազմությունննն առաջադրվում է բնութագրական հատկության ներկայացմամբ, այսինքն՝ հատկություն, որին բավարարում են տրված բազմության և միայն այդ բազմության տարրերը: Ներկայացման համար սովորաբար օգտագործվում են ձևավոր փակագծեր, որոնց ներսում բերվում է բազմությունը նկարագրող բնութագրական հատկությունը: Այսպիսով, {x:x –ը բավարարում է P հատկությանը} բազմությունը ենթադրում է միայն այն տարրերի առկայությունը, որոնք օժտված են P հատկությամբ: Օրինակ՝ {x:x –ը «Արարատ» ֆուտբոլային ակումբի ֆուտբոլիստ է} բազմությունը բաղկացած է ամբողջ աշխարհի այն և միայն այն ֆուտբոլիստներից, որոնք ընդգրկված են “Արարատ” ֆուտբոլային ակումբում:

Ստորև ներկայացնում ենք բազմությունների տեսության հիմնական գաղափարները և սահմանումները:

Եթե *a* –ն *A* բազմության տարրերից մեկն է, ապա ասում ենք, որ *a* –ն *A*-ի տարր է, կամ՝ *a* –ն **պատկանում է**

A-ին: a տարրի պատկանելությունը A բազմությանը գրվում է՝ $a \in A$: Եթե a տարրը չի պատկանում A բազմությանը, ապա այն գրվում է՝ $a \notin A$.

Սահմանում 1.1. A բազմությունը B բազմության ենթաբազմություն է և նշանակվում է՝ $A \subseteq B$, եթե A-ի յուրաքանչյուր տարր B բազմության տարր է: Այսինքն՝ A բազմությանը պատկանող ցանկացած a տարրի համար տեղի ունի նաև $a \in B$: Եթե A բազմությունը B բազմության ենթաբազմություն չէ, ապա այդ գրվում է՝ $A \not\subseteq B$, որը նշանակում է, որ A բազմությանը պատկանում է այնպիսի տարր, որը չի պատկանում B-ին:

Մասնավորապես՝ ամեն մի բազմություն իր ենթաբազմությունն է: Այսպիսով, ունենք. $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,7,90\}$, $\{1,2,3\} \not\subseteq \{1,3,5,6\}$: Եթե A={x:x-ը համալսարանի ֆուտբոլիստ է}, B={x:x-ը համալսարանի մարզիկ է}, C={x:x-ը համալսարանի ծրագրավորման մրցույթի մասնակից է}, ապա $A \subseteq B$, իսկ $C \not\subseteq B$.

Բազմությունները հավասար են, եթե նրանց պատկանում են միևնույն տարրերը: Եթե A={2,4,6}, իսկ B={x:x-ը 7-ից փոքր դրական զույգ թիվ է}, ապա A=B:

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը.

Սահմանում 1.2. Ենթադրենք, որ A-ն և B-ն բազմություններ են: Ասում են, որ A-ն **հավասար է** B-ին և գրում են՝ A=B, եթե կամայական x-ի համար ունենք $x \in A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \in B$: Այլ կերպ ասած՝ A=B այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \subseteq B$ և $B \subseteq A$. Եթե $A \subseteq B$ և $A \neq B$, ապա ասում են, որ A-ն B-ի **սեփական ենթաբազմությունն է՝** նշելով $A \subset B$:

Այսպիսով, A և B բազմությունների հավասարությունն ապացուցվում է երկու փուլով.

1) ապացուցվում է, որ A-ն B-ի ենթաբազմությունն է,
2) ապացուցվում է, որ B-ն A -ի ենթաբազմությունն է:

Քանի որ բազմությունը միարժեքորեն բնութագրվում է միայն այն տարրերով, որոնք պատկանում են այդ բազմությանը, ապա տարրերի թվարկման հաջորդականությունն էական չէ: Օրինակ՝ {1,2,3,4} = {4,2,3,1}:

Ցանկացած տարր կամ պատկանում է տրված բազմությանը, կամ՝ չի պատկանում:

Բազմության տարրերը չեն կրկնվում:

Առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում *դատարկ* բազմությունը և *համընդհանուր* կամ որ նույնն է՝ *ունիվերսալ* բազմությունը, որոնց սահմանումները կարելի տալ հետևյալ կերպ.

Սահմանում 1.3. **Դատարկ** է կոչվում այն բազմությունը, որին ոչ մի տարր չի պատկանում: Դատարկ բազմությունը նշանակվում է՝ ∅ կամ {}: **Համընդհանուր** կամ **ունիվերսալ** է կոչվում այն բազմությունը, որի համար բոլոր դիտարկվող բազմությունները ենթաբազմություններ են:

Թվերի տեսության մեջ համընդհանուր բազմությունը սովորաբար համընկնում է բոլոր ամբողջ կամ բնական թվերի բազմության հետ: Մաթեմատիկական վերլուծության դեպքում համընդհանուր բազմությունը կարող է լինել բոլոր իրական թվերի կամ *n*-չափանի տարածության բոլոր կետերի բազմությունը: Համընդհանուր **U** բազմությունը դիտարկվում է այն դեպքում, երբ դիտարկվող բոլոր բազմությունները **U**-ի ենթաբազմություններն են:

Ըստ սահմանման, յուրաքանչյուր բազմություն համընդհանուր բազմության ենթաբազմություն է: Դատարկ բազմությունը ցանկացած տրված բազմության ենթաբազմություն է, քանի որ դատարկ բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է տրված բազմությանը: Կարելի է ասել, որ դատարկ բազմությունը չունի այնպիսի տարր, որը չի պատկանում տրված բազմությանը:

Սահմանում 2.7. A բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմություն է կոչվում այն բազմությունը, որը բաղկացած է A բազմության բոլոր ենթաբազմություններից: Նշանակվում է՝ P(A): Երբեմն այդ բազմությանն անվանում են նաև A-ի **Բուլյան:**

Օրինակ, A={1,2,3 } բազմության Բուլյանը հետևյալն է.

P(A)={∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}, {1,2,3}}:

Եթե A-ն պարունակում է 3 տարր, ապա նրա Բուլյանը բաղկացած է $2^3 = 8$ տարրերից, կամ, որ նույնն է՝ 8 ենթաբազմություններից:

Ընդհանուր դեպքում, եթե բազմությունը բաղկացած է *n* տարրերից, ապա նրա Բուլյանը պարունակում է 2^n ենթաբազմություններ:

Առաջադրանքներ:

1. Թվարկեք $\{x : x\text{-ն ամբողջ թիվ է և } x^2<100\}$ բազմության տարրերը:
2. Թվարկեք {x:x-ը ՀՀ տարածքում փոխանակվող տարադրամ է} բազմության տարրերը:
3. Ներկայացրեք {ա,բ,գ,դ,ե,զ,է,ը,թ} բազմությունը բնութագրական հատկությամբ:
4. Թվարկեք հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրի ենթաբազմությունները.
   $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c,\varnothing\}$, $\varnothing$
5. Որոշեք n տարերից բաղկացած բազմության ենթաբազմությունների քանակը:
6. Պարզեք հետևյալ պնդումներից յուրաքանչյուրի իսկությունը.
   $\varnothing\notin\varnothing$, $\varnothing\subseteq\varnothing$, $\varnothing\subset\varnothing$, $\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\supseteq\varnothing$
7. Պարզեք հետևյալ պնդումներից յուրաքանչյուրի իսկությունը.
   $\{2\}\notin\{2,3,4,5\}$, $\{2\}\supseteq\{2,4,6,7,8\}$, $\varnothing=\{\varnothing\}$
8. Որոշեք հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրի տարրերի քանակը.
   $\{2,\{3\},4,5,\varnothing\}$, $\{\{2,\{3\},4,5,\varnothing\}\}$, $\{2,\{3,4,5\},\varnothing\}$:

2. Գործողություններ բազմությունների հետ

Սահմանում 2.1. A և B բազմությունների **հատում** է կոչվում այն բազմությունը, որը բաղկացած է այն և միայն այն տարրերից, որոնք պատկանում են և՛ A-ին, և՛ B-ին:

A և B բազմությունների հատումը նշանակվում է $A\cap B$: Այս սահմանումը համարժեք է հետևյալ գրառմանը. $A\cap B=\{ x: x\in A$ և $x\in B \}$:

Օրինակ,եթե $A=\{1,2,3,4,5\}$ և $B=\{1,3,7,9\}$, ապա $A\cap B=\{1,3\}$: Եթե C={x:x-ի հասակը 180սմ է} և D={x:x-ը սիրում է ֆուտբոլ խաղալ}, ապա C∩D={x:x-ի հասակը 180սմ է և սիրում է ֆուտբոլ խաղալ}:

Սահմանենք երեք և ավելի բազմությունների հատումը: Եթե ունենք A_1, A_2, A_3 բազմությունները, ապա դրանց հատումը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ. $B = A_1\cap (A_2 \cap A_3)$: Ակնհայտ է, որ $x\in B$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $x\in A_1$, $x\in A_2$ և $x\in A_3$:

Ընդհանուր դեպքում, երբ $I=\{1,2,3,\ldots,k\}$, ապա

$\cap_{i\in I}A_i = A_1\cap A_2 \cap A_3\cap A_k =\{x:x\in A_i$ բոլոր $i\in I$ համար$\}$

Սահմանում 2.2.Բազմությունների **միավորում** կոչվում է այն բազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք պատկանում են տրված բազմություններից գոնե մեկին:

Բազմությունների միավորումը նշանակվում է՝ $A\cup B$: Այս սահմանումը համարժեք է հետևյալ գրառմանը. $A\cup B=\{ x: x\in A$ կամ $x\in B \}$

Օրինակ՝ եթե $A=\{1,2,6,7\}$, $B=\{2,3,5,6\}$, ապա $A\cup B=\{1,2,3,,5,6,7\}$: $A\cup B$ միավորումը կազմվում է A-ի և B-ի տարրերի համատեղմամբ, կրկնվող տարրերից վերցնելով մեկական նմուշ: Հիշենք, որ, ըստ սահմանման, բազմության տարրերը չեն կրկնվում: Եթե C={ x: x-ը բուհի ուսանող է} և D={ x: x-ը զորակոչիկ է}, ապա C∪D={ x: x-ը ուսանող է կամ զորակոչիկ է}:

Սահմանում 2.3. Երկու բազմություններ կոչվում են **տարանջատ**, եթե նրանց հատումը դատարկ բազմություն է:

Օրինակ. Ենթադրենք A={1,3,5,7,9}, B={2,4,6,8,10}: Քանի որ $A \cap B = \varnothing$, ուրեմն՝ A-ն և B-ն տարանջատ են:

Հաճախ անհրաժեշտ է գտնել միավորումից առաջացած բազմությունների տարրերի քանակը: Նկատենք, որ $|A|+|B|$-ի արդյունքում հաշվում է A-ի և B-ի իրարից տարբեր տարրերը մեկ, իսկ կրկնվող տարրերը՝ երկու անգամ: Ուստի, եթե արդյունարար բազմության տարրերի ընդհանուր քանակից հանենք կրկնվող տարրերի քանակը, ապա A∪B տարրերը կհաշվվեն մեկ անգամ: Այսպիսով՝

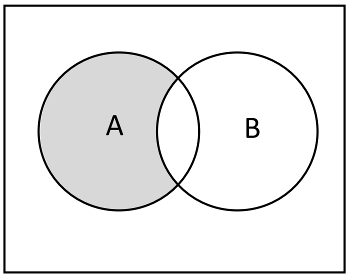
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$:

Այս սկզբունքի ընդհանրացումը կամայական թվով բազմությունների համար կոչվում է **ներառման - բացառման սկզբունք,** որը կարևոր հիմնություն է համարակալման բնագավառում:

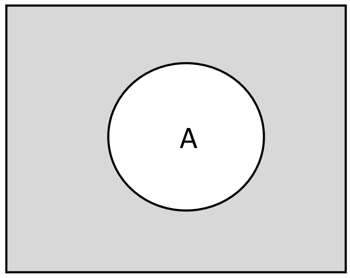
Սահմանում 2.4. A և B բազմությունների **տարբերություն** է կոչվում այն A-B բազմությունը, որի տարրերը պատկանում են A-ին և չեն պատկանում B-ին: A-B= {x|x∈A և x∉B}:

Սահմանում 2.5. A և B բազմությունների **համաչափ տարբերություն** է կոչվում այն A-B բազմությունը, որի տարրերը պատկանում են կամ A-ին, կամ B-ին, բայց ոչ՝ A-ին և B-ին միաժամանակ: AΔB = (A-B)∪(B-A):

Նկար 3-ում բերված Վեննի գծապատկերի ստվերագծված մասը ներկայացնում է A և B բազմությունների տարբերությունը, իսկ U-ն ներկայացնում է համընդհանուր բազմությունը:



Նկ. 3. A և B բազմությունների տարբերության Վեննի գծապատկեր



Նկ. 4. A բազմության լրացման Վեննի գծապատկեր

Օրինակներ.

1. {1,3,5} և {1,2,3} բազմությունների տարբերությունը {5} բազմությունն է: Այսինքն՝ {1,3,5}-{1,2,3}={5}. Իսկ {2} բազմությունը {1,2,3} և {1,3,5} բազմությունների տարբերությունն է:

2. Ճարտարագիտական համալսարանի Հաշվողական տեխնիկայի ֆակուլտետի ուսանողների բազմության և մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մասնակից ուսանողների բազմության տարբերությունը այն ուսանողների բազմությունն է, որոնք համալսարանի Հաշվողական տեխնիկայի ֆակուլտետի ուսանողներ են, սակայն չեն մասնակցել մաթեմատիկայի օլիմպիադային:

Եթե համընդհանուր բազմությունը որոշված է, ապա կարելի է սահմանել բազմության լրացումը:

Սահմանում 2.6. Եթե U-ն համընդհանուր բազմությունն է, ապա ~A –ն A-ի **լրացումն** է U բազմության նկատմամբ:
Այլ կերպ ասած՝ A բազմության լրացումը U-A բազմությունն է:

Որևէ տարր պատկանում է ~A-ին այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \notin A$. Սա նշանակում է՝ ~A=$\{x|x \notin A\}$.

Նկար 4-ում ստվերագծված տիրույթը ներկայացնում է ~A բազմությունը:
Օրինակներ.

1. Ենթ. A={ա,գ,ե,է,թ,ի,խ,կ,ձ,ճ,մ,ն,շ,ո,չ,պ,ջ,ռ,ֆ}, իսկ համընդհանուր բազմությունը հայերեն այբուբենի փոքրատառերի բազմությունն է: Այդ դեպքում ~A-ն {բ,դ,զ,ը,ժ,լ,ծ,հ,ղ,յ,ս,վ,տ,ր,ց,ու,փ,ք,և,օ} բազմությունն է:
2. Եթե A–ն 10–ից մեծ բոլոր դրական ամբողջ թվերի բազմությունն է, ապա {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} բազմությունը A բազմության լրացումն է՝ պայմանով, որ համընդհանուր բազմությունը բոլոր բնական թվերի բազմությունն է:

3. Բազմությունների նույնական ձևափոխություններ

Ստորև աղյուսակում բերված են բազմությունների ամենակարևոր նույնական ձևափոխությունները:

Աղյուսակ

Նույնություն	*Անուն*
$A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$	Նույնական օրենքներ
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Գերակայության օրենքներ
$A \cup A = A$ $A \cap U = A$	Անզորության օրենքներ
$\left(\overline{A}\right) = A$	Լրացման օրենքներ
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Տեղափոխելիության օրենքներ
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Զուգորդականության օրենքներ

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	Բաշխական օրենքներ
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	Դե Մորգանի օրենքներ

4.Ընդհանրացված միավորումներ և հատումներ

Քանի որ բազմությունների միավորումը և հատումը բավարարում են զուգորդականության օրենքին, ապա A∪B∪C և A∩B∩C բազմությունները հստակ որոշված են, եթե A-ն, B-ն և C-ն բազմություններ են: Նկատենք, որ A∪B∪C-ին պատկանում են այն տարրերը, որոնք պատկանում են A,B և C բազմություններից գոնե մեկին, իսկ A∩B∩C -ին պատկանում են այն տարրերը, որոնք պատկանում են և' A -ին, և' B-ին, և' C-ին:

Օրինակ. Ենթադրենք, A={0,2,4,6,8}, B={0,1,2,3,4}, իսկ C={0,3,6,9}. Որոշել A∪B∪C և A∩B∩C:

Լուծում. $A\cup B\cup C$-ն պարունակում է այն տարրերը, որոնք պարունակվում են A,B և C բազմություններից գոնե մեկում: Ուստի` $A\cup B\cup C$ ={0,1,2,3,4,6,8,9}:

Նկատենք, որ A∩B∩C -ին պատկանում են այն տարրերը, որոնք պատկանում են տրված բոլոր երեք բազմություններին: Ուստի A∩B∩C={0}:

Դիտարկենք կամայական թվով բազմությունների միավորումն ու հատումն օգտագործելով հետևյալ սահմանումները:

Սահմանում 4.1. Բազմությունների հավաքածուի միավորումը մի այնպիսի բազմություն է, որի տարրերը պատկանում են հավաքածուի գոնե մեկ բազմությանը: $A_1, A_2, \dots, A_n$ բազմությունների միավորումը ներկայացվում է`

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

Սահմանում 4.2. Բազմությունների հավաքածուի հատումը մի այնպիսի բազմություն է, որի տարրերը պատկանում են հավաքածուի բոլոր բազմություններին:
$A_1, A_2, ..., A_n$ բազմությունների հատումը ներկայացվում է՝

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Օրինակ. ենթադրենք, $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$. Այդ դեպքում՝

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{1, 2, 3, ...\}$$

և

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{n, n+1, n+2, ...\} = A_n$$

Առաջադրանքներ

1.Ապացուցել, որ եթե A-ն և B –ն բազմություններ են, ապա

ա) $A - B = A \cap \overline{B}$, բ) $(A \cap B) \subseteq A$, գ) $A \subseteq (A \cup B)$,

դ) $A - B \subseteq A$:

2. Ինչ կարող եք ասել A և B բազմությունների վերաբերյալ, եթե $A \oplus B = A$?

Սահմանում 2.8. A և B բազմությունների **դեկարտյան արտադրյալ** է կոչվում $\{(a,b) | a \in A$ և $b \in B\}$ բազմությունը: Այն նշանակվում է AxB, իսկ (a,b) զույգը կոչվում է **կարգավոր զույգ**, որի առաջին բաղադրիչը a է, իսկ երկրորդ բաղադրիչը՝ b:

(a,b) և (a_1,b_1) կարգավոր զույգերը կհամարենք իրար հավասար և կգրենք՝ $(a,b)=(a_1,b_1)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց համապատասխան բաղադրիչները միմյանց հավասար են: $((a,b)=(a_1,b_1)) \longrightarrow (a=a_1)$ և $(b=b_1)$:

AxB բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն կարգավոր զույգերից, որոնց առաջին բաղադրիչը A բազմության տարր է, իսկ երկրորդ բաղադրիչը՝ B բազմության: Ըստ էության, դա նույն կարգավոր զույգն է, որը մենք սովորաբար օգտագործում ենք հանրահաշվում: Բաղադրիչների կարգը զույգի ներսում կարևոր է: ֆունկցիայի գրաֆիկի պատկերման ժամանակ մենք հստակ գիտենք, որ (1,2) կետը չի համընկնում (2,1) կետի հետ:

Եթե տրված է, որ A={1,2,3}, B={s,r}, ապա AxB={(1,s),(1,r),(2,s),(2,r),(3,s),(3,r)}:

Օրինակներ.

1. A-ն իրական թվերի բազմությունն է, և B=A: Այս դեպքում $A\times B$-ն իրական թվերի բազմության բոլոր հնարավոր (x,y) կարգավոր զույգերի բազմությունն է, այսինքն՝ $A\times B$-ն կարելի է պատկերել որպես կոորդինատային հարթության կետերի բազմություն:

2. Եթե A=[0,1] և B=[1,2], ապա $A\times B$-ն կոորդինատային հարթության $\{(x,y):(0\le x\le 1),(1\le y\le 2)\}$ միավոր կողմով քառակուսու կետերի բազմությունն է:

Ցանկացած A,B և C բազմությունների համար ստույգ է հետևյալ պնդումներից յուրաքանչյուրը.

- $(A\times B=B\times A)$ –ից հետևում է՝ (A=B) կամ ($A=\varnothing$) կամ ($B=\varnothing$)
- $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
- $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
- $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$
- $(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)=(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)$

Եթե A բազմությունը բաղկացած է *n* տարրերից, իսկ B-ն՝ m տարրերից, ապա AxB-ն պարունակում է nxm քանակի տարրեր: Մասնավոր դեպքում, երբ A և B բազմություններից որևէ մեկը դատարկ բազմություն է, ապա դրանց դեկարտյան արտադրյալը նույնպես դատարկ բազմություն է:

Առաջադրանքներ:

1. Որոշել P(A)-ն, եթե $A=\varnothing$.
2. Որոշել P(A)-ն, եթե $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

3. Որոշել P(P(A))-ն, եթե A={∅,{∅}}.
4. Որոշել հետևյալ պնդումների իսկությունը.
ա) $A\cap\varnothing=A$ բ) եթե $A\subseteq B$, ապա $A\cap B=A$.
գ) եթե $A\cap B=A$, ապա $B\subseteq A$.

5. Բինար հարաբերություններ

Սահմանում 5.1. Ենթ. ունենք A և B բազմություններ: AxB դեկարտյան արտադրյալի $R\subseteq A\times B$ ենթաբազմությունն անվանենք **բինար հարաբերություն** A-ից B:
A և B բազմությունները կոչվում են $R\subseteq A\times B$ բինար հարաբերության հենքային բազմություններ:

Այլ կերպ ասած՝ A-ից B բինար հարաբերությունը կարգավոր զույգերի R բազմություն է, որում յուրաքանչյուր կարգավոր զույգի առաջին տարրն ընտրված է A բազմությունից, իսկ երկրորդ տարրը՝ B բազմությունից:

Նշելու համար, որ $(a,b)\in R$, օգտագործում ենք aRb գրառումը: Նշելու համար, որ $(a,b)\notin R$, գրում ենք՝ $\overline{aRb}$: Երբ (a,b) –ն պատկանում է R-ին, ապա ասում ենք, որ a-ն առնչվում է b-ին՝ R եղանակով:

Բինար հարաբերությունները ներկայացնում են առնչություններ երկու բազմությունների տարրերի միջև:

Ենթադրենք՝ տրված են A={1,2,3} և B={c,d} բազմությունները: Դրանց դեկարտյան արտադրյալը՝ AxB={(1,c),(1,d),(2,c),(2,d),(3,c),(3,d)}: Այդ դեպքում՝ R={(1,d),(2,d),(3,c)} –ը բինար հարաբերություն է A-ից B:

Սահմանում 5.2. A-ից B բինար հարաբերության **որոշման տիրույթը՝** D_R, բոլոր այն $a\in A$ տարրերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունեն $b\in B$ տարրեր այնպես, որ $(a,b)\in R$: A-ից B բինար հարաբերության **արժեքների բազմությունը՝** E_R, բոլոր այն $b\in B$ տարրերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունեն $a\in A$ տարրեր այնպես, որ $(a,b)\in R$:

Ներկայացնենք բինար հարաբերությունների որոշ օրինակներ:

1. Ենթադրենք, A-ն երկրորդ կուրսի ուսանողներ են, իսկ B-ն առարկայացանկն է: Ենթադրենք նաև, որ R-ը բաղկացած է այնպիսի (a,b) զույգերից, որոնցում a-ն

ուսանող է՝ առնչված b առարկայի հետ. Օրինակ, եթե առարկայացանկը {CS510,CS518} բազմությունն է՝ համապատասխանաբար “Դիսկրետ մաթեմատիկա” և “Տվյալների կառուցվածքներ” ուսումնական առարկաներով, ապա (Կիրակոսյան Լևոն, CS518) և (Հակոբյան Լուսինե, CS518) զույգերը պատկանում են R-ին: Եթե Կիրակոսյան Լևոնը ներգրավված է նաև CS510 -ում, իսկ Հակոբյան Լուսինեն ներգրավված չէ CS510-ում, ապա (Հակոբյան Լուսինե, CS510) զույգը R-ին չի պատկանում:

2.Ենթադրենք՝ A-ն Հայաստանի բոլոր քաղաքների բազմությունն է, իսկ B-ն՝ Հայաստանի մարզերի բազմությունը: Որոշենք R հարաբերությունը, սահմանելով, որ (a,b)-ն պատկանում է R-ին, եթե a քաղաքը b մարզում է: Ակնհայտ է, որ (Գյումրի, Շիրակ), (Աշտարակ, Արագածոտն), (Աբովյան, Կոտայք), (Ջրվեժ, Կոտայք) և (Կապան, Սյունիք) զույգերը պատկանում են R-ին:

3.Ենթադրենք ունենք՝ A={0,1,2}, իսկ B={a,b}. Այդ դեպքում {(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)}-ն բինար հարաբերություն է A և B միջև: Սա նշանակում է, որ $0Ra$, իսկ $\overline{1Rb}$:

4.*Փոքր* է հարաբերությունը բնական թվերի միջև. A=B=N, aRb⟶a<b:

5.*Փոքր կամ հավասար է հարաբերությունը* ռացիոնալ թվերի միջև.A=B=R, aRb⟶a≤b:

6.*Ծանոթ է* հարաբերությունը մարդկանց P բազմության միջև. A=B=P, aRb⟶a-ն ծանոթ է b-ին:

7.*Որդի է* հարաբերությունը մարդկանց P բազմության միջև. A=B=P, aRb⟶a-ն b-ի որդին է:

8.A-ն Հայաստանի բոլոր քաղաքների բազմությունն է, B-ն Հայաստանի մարզերի բազմությունը, R-ը՝ a∈A-ն ապրում է b∈B մարզում:

9.A-ն Հայաստանի բոլոր քաղաքների բազմությունն է, B-ն՝ Հայաստանի մարզերի բազմությունը, R-ը՝ a∈A-ն և b∈A-ն ունեն նույն b∈B մարզի հողատարածքի սեփականության վկայագրեր:

Բինար հարաբերությունները կարելի է նաև գրաֆիկորեն ներկայացնել սլաքների միջոցով, որոնք միացնում են առաջին բազմության տարրերը երկրորդ բազմության տարրերին, եթե, իհարկե, այդ տարրերի միջև առնչություններ կան:

Գոյություն ունի բինար հարաբերությունների ներկայացման նաև աղյուսակային եղանակ, որտեղ թվարկվում են հարաբերությանը պատկանող բոլոր կարգավոր զույգերը:

Դիցուք $R \subseteq AxB$ և $S \subseteq AxB$: Քանի որ հարաբերությունը բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի ենթաբազմություն է, ուստի բնական են հետևյալ սահմանումները.

ա) $\bar{R}$-ն անվանենք R հարաբերության լրացում կամ նրա հակադիր հարաբերություն.

$a\bar{R}b \longrightarrow (a \in A)$և $(b \in B)$և $(a,b) \notin R$,

բ) $R \cup S$-ն անվանենք R և S հարաբերությունների միավորում.

$a(R \cup S)b \longrightarrow aRb$ կամ aSb,

գ)$R \cap S$-ն անվանենք R և S հարաբերությունների հատում.

$a(R \cap S)b \longrightarrow aRb$ և aSb,

դ)$R \backslash S$-ն անվանենք R և S հարաբերությունների տարբերություն

$a(R \backslash S)b \longrightarrow aRb$ և $a\bar{S}b$:

Սահմանում 5.3. Եղ. R–ը հարաբերություն է A-ից B: Այդ դեպքում կարելի է սահմանել B-ից A հարաբերությունը որպես $R^{-1}=\{(b,a): (a,b) \in R\}$

Այլ կերպ ասած, $(b,a) \in R^{-1}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $(a,b) \in R$, որը համասարազոր է հետևյալին. $bR^{-1}a$ տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի aRb: R^{-1} հարաբերությունը կոչվում է տրված R հարաբերության նկատմամբ **հակադարձ հարաբերություն** կամ R **հարաբերության շրջում:**

Օրինակներ.

1. Ենթադրենք տրված է՝ R={ (1,r), (2,s), (3,s) }: Այդ դեպքում R^{-1} ={(r,1),(s,2),(s,3)}:
2. Եթե R={(x,y): x-ը y–ի հայրն է}, ապա R^{-1}-ը կներկայացնի R={(y ,x): y-ը x–ի հայրն է}:
3. *Փոքր է* հարաբերության շրջումը *մեծ է* հարաբերությունն է:
4. *Փոքր է* հարաբերության լրացումը *մեծ է կամ հավասար* հարաբերությունն է:
5. *Նախնիներ* հարաբերության շրջումը *հետնորդներ* հարաբերությունն է:

6. Նկատենք, որ *բարեկամ* կամ *ընկեր* հարաբերությունների շրջումը նույն *բարեկամ* կամ *ընկեր* հարաբերություններն են:
7. R={(x,y): x^2+y^2 = 4} հարաբերության համար $R=R^{-1}$:
8. Ենթադրենք տրված են երկու A={1,2,3} և B={1,2,3,4} բազմությունները և դրանց համար սահմանված հետևյալ հարաբերությունները.

   $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, իսկ $R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$:

   Այդ դեպքում՝

   $R_1 \cup R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$

   $R_1 \cap R_2=\{(1,1)\}$,

   $R_1 - R_2=\{(2,2),(3,3)\}$,

   $R_2 - R_1=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Սահմանում 5.4. Եթե. ունենք $R \subseteq A \times B$ և $S \subseteq B \times C$: R և S **հարաբերությունների արտադրյալ** է կոչվում այն T հարաբերությունը A և C տարրերի միջև, որը որոշվում է հետևյալ եղանակով.
$aTc \longrightarrow \exists b(b \in B)$: (aRb և bSc):

R և S հարաբերությունների արտադրյալը սահմանվում է, երբ R հարաբերության երկրորդ հենքային բազմությունը համընկնում է S հարաբերության առաջին հենքային բազմության հետ: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում հարաբերությունների արտադրյալը տեղափոխելի չէ. RS≠ SR, քանի որ հնարավոր է, որ RS-ը սահմանված լինի, իսկ SR-ը՝ ոչ: Նույնիսկ այն դեպքում, երբ A=B=C, միևնույն է՝ R և S հարաբերությունների արտադրյալը կարող է տեղափոխելի չլինել:

Այսպես , օրինակ՝
A=B=C=[0,1], իսկ R և S որոշված են հետևյալ եղանակով.

$aRb \Leftrightarrow (0 \le a \le 1)$ և $(0 \le b \le \frac{1}{2})$;
$aSb \Leftrightarrow (0 \le a \le \frac{1}{2})$ և $(0 \le b \le 1)$:

Հեշտ է ստուգել, որ

RS = { (x,y): $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$};

SR = { (x,y): $0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}$ }:

Վերջավոր հենքային բազմությունների դեպքում $R \subseteq A \times B$ բինար հարաբերությունը հաճախ կնկարագրենք 0,1 տարրերից M(R) մատրիցի միջոցով: Դիցուք A={$a_1, a_2, \ldots, a_m$}, B={$b_1, b_2, \ldots, b_n$} և $R \subseteq A \times B$:

Սահմանենք $R_{ij} \in \{0,1\}$ թվերը: $(R_{ij}=1) \Leftrightarrow (a_i R b_j)$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$:

$M(R)=M(R_{ij})$ մատրիցը կանվանենք R բինար հարաբերությանը համապատասխանող մատրից:

Առաջարկում ենք ինքնուրույն համոզվել, որ բինար հարաբերությունների հետ սահմանված գործողությունները կարելի է ներկայացնել որպես գործողություններ համապատասխան մատրիցների հետ, որոնց իրացումն ու ընկալումը ավելի դյուրին է և հեշտ ընկալելի:

Այսպես օրինակ, եթե $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ և A={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, B={$b_1, b_2, \ldots, b_n$} , C={$c_1, c_2, \ldots, c_n$} , ապա M(RS)=M(Y) մատրիցի $Y_{ij} \in \{0,1\}$ տարրերը հաշվվում են հետևյալ կանոնով.

$(Y_{ij}=1) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} R_{ij} S_{ij>1}\right)$ i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,q:

6. Հարաբերությունների հատկությունները

Այժմ դիտարկենք այնպիսի հարաբերություններ, որոնք տրված են A բազմության մեջ: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում հարաբերության հենքային բազմությունները նույնն են: R⊆AxA հարաբերությունն անվանենք **համասեռ հարաբերություն**:

AxA բազմության {(x,x): x∈A} ենթաբազմությունն անվանենք *անկյունագիծ* և նշանակենք i_A:

Սահմանենք համասեռ հարաբերությունների մի քանի դասեր.

Սահմանում 6.1. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **անդրադարձ,** եթե $i_A \subseteq R$, կամ որ նույնն է, եթե ստույգ է $\forall a(a \in A)(a,a) \in R$ պնդումը:

Սահմանումից երևում է, որ A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունն անդրադարձ է, եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարր, առանց բացառության, հարաբերության մեջ է ինքն իր հետ: Հետևյալ օրինակները ցուցադրում են այդ հատկությունը:

Օրինակներ

1. {1,2,3,4} բազմության վրա սահմանված են հետևյալ հարաբերությունները: Այդ ցուցակից առանձնացնենք այն հարաբերությունները, որոնք անդրադարձ են:

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3)(4,1),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}:$$

Լուծում:R_3 և R_5 հարաբերություններն անդրադարձ են, քանի որ (a,a) տեսակի բոլոր զույգերը՝(1,1),(2,2),(3,3) և (4,4), նշված երկու հարաբերություններին էլ պատկանում են: Մյուս հարաբերություններն անդրադարձ չեն, քանի որ վերոհիշյալ կարգավոր զույգերը դրանց չեն պատկանում: Մասնավորապես, R_1, R_2, R_4 և R_6 հարաբերություններն անդրադարձ չեն, քանի որ (3,3) զույգը նշված երեք բազմություններում էլ բացակայում է:

2. Արդյոք “բաժանարար է” հարաբերությունն անդրադարձ հարաբերություն է դրական թվերի բազմության վրա:

Լուծում. Քանի որ $a|a$ բոլոր դրական a-երի համար, ապա “բաժանարար է” հարաբերությունը դրական թվերի բազմության վրա անդրադարձ հարաբերություն է:

Հետևանք 6.1.1. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **ոչ անդրադարձ,** եթե $(a,a) \in R$ ոչ բոլոր $a \in A$ համար:
Հետևանք 6.1.2. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **հակաանդրադարձ,** եթե $(a,a) \notin R$ բոլոր $a \in A$ համար:

Որոշ հարաբերությունների դեպքում հարաբերության զույգի առաջին տարրը հարաբերում է երկրորդ տարրին այն և միայն այն դեպքում, երբ երկրորդ տարրը հարաբերում է առաջին տարրին: Օրինակ, ուսանողների համար սահմանված հետևյալ հարաբերության մեջ, երբ (x,y) զույգը ներկայացնում է միևնույն խմբի ուսանողներին, այդ հարաբերությունը բավարարում է վերոհիշյալ հատկությանը:

Սահմանում 6.2. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **համաչափ,** եթե $R^{-1} = R$, կամ որ նույնն է, եթե ստույգ է $(b,a) \in R$ բոլոր $(a,b) \in R$ համար: Այլ կերպ ասած՝ $(a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \in R$, կամ որ նույնն է՝ $aRb \longrightarrow bRa$:

Հետևանք 6.2.1. Եթե վերոհիշյալ պայմանը տեղի ունի ոչ բոլոր $(a,b) \in R$ համար, ապա համասեռ հարաբերությունը **ոչ համաչափ** է:

Որոշ բինար հարաբերություններ օժտված են այնպիսի հատկությամբ, որ եթե որևէ տարր հարաբերության մեջ է երկրորդի հետ, այնուամենայնիվ, երկրորդը հարաբերության մեջ չէ առաջինի հետ: Օրինակ, հարաբերությունը, որը բաղկացած է այնպիսի (x,y) զույգերից, որոնցում x-ը և y-ը ծեր համալսարանի այն ուսանողներն են, որոնց համար ճիշտ է, որ x ուսանողի միջին առաջադիմությունը բարձր է y ուսանողի միջին առաջադիմությունից, ներկայացնում է հենց այդպիսի հարաբերություն:

Հետևանք 6.2.2. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **հակահամաչափ,** եթե $R \cup R^{-1} \subseteq i_A$, այլ կերպ ասած՝ $\{(a,b) \in R$ և $(b,a) \in R\} \longrightarrow a = b$:

Հարաբերությունը հակահամաչափ է այն և միայն այն դեպքում, եթե հարաբերությունը չի պարունակում իրարից տարբեր այնպիսի a և b տարրեր, որ a-ն հարաբերության մեջ լինի b-ի հետ, իսկ b-ն էլ իր հերթին՝ a-ի հետ: Նկատենք, որ “համաչափ” և “հակահամաչափ” բառեզրերը հականիշներ չեն, քանի որ մեկի առկայությունը չի ենթադրում մյուսի բացառումը: Որևէ հարաբերություն կարող է օժտված լինել այս երկու հատկություններով միաժամանակ կամ բոլորովին օժտված չլինել դրանցից որևէ մեկով: Ակնհայտ է մի բան. հարաբերությունը չի կարող լինել միաժամանակ և՛ համաչափ և՛ հակահամաչափ, եթե այն պարունակում է ինչ-որ (a,b) զույգ, որի համար a≠b:

Օրինակ. Տրված է A={1,2,3,4} բազմությունը: Պարզել, թե ստորև բերված համասեռ հարաբերություններից որոնք են համաչափ և որոնք՝ հակահամաչափ:

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$
$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3)(4,1),(4,4)\}$$
$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$
$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)(3,3),(3,4),(4,4)\}$$
$$R_6 = \{(3,4)\}$$
.

Լուծում. R_2 և R_3 հարաբերությունները համաչափ են, քանի որ հարաբերությանը պատկանող բոլոր (a,b)-երի համար (b,a) ն նույնպես պատկանում է հարաբերությանը: R_2 -ի համար հարկավոր է միայն ստուգել՝ արդյոք (2,1) և (1,2) զույգերը ներգրավված են հարաբերության կազմում: R_3 -ի համար անհրաժեշտ է համոզվել, որ (1,2) և (2,1) զույգերը երկուսն էլ պատկանում են հարաբերությանը, այնուհետև նույնը համոզվել (1,4) և (4,1) զույգերի համար:

Ընթերցողը կարող է համոզվել, որ ներկայացված մյուս հարաբերություններից ոչ մեկն այլևս համաչափ չէ: Սրանում համոզվում ենք՝ հայտնաբերելով (a,b) զույգ, որի համար (b,a) համաչափ զույգը բացակայում է:

Ինչ վերաբերում է R_4, R_5 և R_6 հարաբերություններին, ապա նրանք բոլորն էլ հակահամաչափ են: Այդ հարաբերություններից յուրաքանչյուրի համար չկան a և b տարրերի այնպիսի զույգեր, որ a≠b և երկու՝ (a,b) և (b,a) զույգերը պատկանեն հարաբերությանը:

Ընթերցողը կարող է համոզվել, որ ներկայացված մյուս հարաբերություններից ոչ մեկն այլևս հակահամաչափ չէ: Սրանում համոզվում ենք՝ հայտնաբերելով (a,b) զույգ, որի համար a≠b, սակայն (a,b) և (b,a) զույգերը ներգրավված են հարաբերության մեջ:

Օրինակ. Արդյոք “բաժանարար է” հարաբերությունը դրական թվերի բազմության վրա համաչափ հարաբերություն է: Արդյոք այն նաև անհամաչափ է:

Լուծում. Այս հարաբերությունը հակահամաչափ է, քանի որ 1|2, սակայն 2∤1. Այն հակահամաչափ է, քանի որ ցանկացած a և b դրական թվերի համար a|b և b|a երկու պայմանների բավարարման դեպքում a=b:

Ենթադրենք ունենք այնպիսի հարաբերություն ուսանողների (x,y) զույգերի համար, երբ x ուսանողն ավելի բարձր առաջադիմություն ունի, քան y ուսանողը: Ենթադրենք նաև, որ x-ը հարաբերության մեջ է y-ի հետ, իսկ y-ն էլ իր հերթին հարաբերության մեջ է z-ի հետ: Սա, իհարկե, նշանակում է, որ x-ն ավելի բարձր առաջադիմություն ունի, քան y-ը, և y-ն ավելի բարձր առաջադիմություն ունի, քան z-ը. Անվիճելիորեն, x-ն ավելի բարձր առաջադիմություն կունենա, քան z-ը, և սույնով, x-ը հարաբերության մեջ է z-ի հետ:

Սահմանում 6.3. A բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **փոխանցելի,** եթե ցանկացած (a,b,c)∈A համար տեղի ունի հետևյալը.
{(a,b)∈R և (b,c)∈R}⟶ (a,c)∈R:

Օրինակ. Տրված է A={1,2,3,4} բազմությունը: Պարզել, թե ստորև բերված համաստ հարաբերություններից որոնք են փոխանցելի և որոնք՝ ոչ փոխանցելի:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3)(4,1),(4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

.

Լուծում. R_4, R_5 և R_6 հարաբերությունները փոխանցելի են: Այդ հարաբերություններից յուրաքանչյուրի համար կարող ենք պնդել, որ հարաբերությանը պատկանող բոլոր (a,b) և (b,c) զույգերի համար (a,c) զույգը նույնպես ներկա է: Օրինակ, R_4-ը տարանցիկ է, քանի որ (3,2) և (2,1), (4,2) և (2,1) ,(4.3) և (3,1) ,(4.3) և (3,2) զույգերը միակ այդպիսի զույգերն են, և նրանց համար (3,1),(4,1) և (4,2) զույգերը նույնես ներկա են R_4 հարաբերության մեջ: Նմանապես, ըներցողը կարող է համոզվել, որ R_5 և R_6 հարաբերությունները ևս փոխանցելի են:

R_1 -ը փոխանցելի չէ, քանի որ (3,4) և (4,1) զույգերը պատկանում են R_1-ին, սակայն (3,1) –ը չի պատկանում: R_2 հարաբերությունը փոխանցելի չէ, քանի որ (2,1) և (2,1) զույգերը պատկանում են R_2-ին, սակայն (2,2) –ը հարաբերությանը չի պատկանում: R_3-ը նույնպես ոչ փոխանցելի է, քանի որ (4,1) և (1,2) զույգերը պատկանում են R_3-ին, սակայն (4,2) զույգը չի պատկանում:

Օրինակ. Արդյոք “բաժանարար է” հարաբերությունը բնական թվերի բազմության վրա փոխանցելի հարաբերություն է:

Լուծում. Ենթադրենք, որ a-ն b-ի բաժանարար է, իսկ b-ն իր հերթին c-ի բաժանարար է: Այդ դեպքում կարելի է գտնել այնպիսի k և m թվեր, որ b=ak և c=bm. Այստեղից հետևում է, որ, c=akm, այնպես, որ a-ն c-ի բաժանարար է: Այստեղից հետևում է, որ տրված հարաբերությունը փոխանցելի է:

Օգտվելով երկու հարաբերությունների արտադրյալից՝ կարելի է սահմանել համասեռ հարաբերության աստիճան:

Սահմանում 6.4. Ենք. R-ը A բազմության վրա տրված հարաբերություն է: Այդ դեպքում R հարաբերության աստիճանը՝ $R^n, n = 1,2,3, \dots$ կարող է սահմանվել մակածման մեթոդով՝ հետևյալ կերպ. $R^1 = R$ և $R^{n+1} = R^n o R$:

Սահմանումից հետևում է, որ

$R^2 = R \circ R,\ \ R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R,$ և այլն:

Օրինակ. $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Որոշել R^n, n=2,3,4,...

Լուծում. Քանի որ $R^2 = R \circ R$, ուստի $R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$. Եվ քանի որ $R^3 = R^2 \circ R$, ապա . $R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$:

Շարունակելով գործողությունները՝ նկատում ենք, որ R_4 -ը նույնն է, ինչ որ R^3-ը, այնպես որ $R^4 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$ Սրանից հետևում է, որ $R^n = R^3$ n= 5,6,7,...

Հետևյալ թեորեմը ապացուցում է, որ փոխանցելի հարաբերության աստիճանը վերոհիշյալ հարաբերության ենթաբազմություն է:

Թեորեմ 1. R համասեռ հարաբերությունը A բազմության վրա փոխանցելի է այն և միայն այն դեպում, երբ $R^n \subseteq R$, n=1,2,3,...

Ապացույց. Ենթադրենք, որ $R^n \subseteq R$, n=1,2,3,... Մասնավորապես, $R^2 \subseteq R$. Որպեսզի համոզվենք, որ սրանից բխում է R-ի փոխանցելի լինելը, նկատենք, որ եթե (a,b)∈R և (b,c)∈R, ապա, ըստ սահմանման, (a,c)∈ R^2. Քանի որ $R^2 \subseteq R$, սա նշանակում է, որ (a,c)∈R. Ուստի՝ R-ը փոխանցելի է:

Ենթադրենք R–ը փոխանցելի է և մաթեմատիկական ինդուկցիայով ապացուցենք $R^n \subseteq R$: Նկատենք, որ թեորեմի այս մասը պարզունակ ձևով ճշմարիտ է n=1 դեպքի համար:

Համարենք, որ $R^n \subseteq R$, որտեղ n-ը դրական թիվ է: Սա ինդուկցիայի հիպոթեզն է:

Ավարտելու համար ինդուկցիայի քայլը, պետք է ապացուցել, որ R^{n+1}-ը նույնպես R-ի ենթաբազմություն է: Այդ նպատակով ենթադրենք, որ (a,b)∈ R^{n+1}: Այդ դեպքում, քանի որ $R^{n+1} = R^n \circ R$, ապա գոյություն ունի այնպիսի x∈A տարր, որի համար ճշմարիտ են (a,x)∈R^n և (x,b)∈R պնդումները: Ինդուկցիայի հիպոթեզից՝ $R^n \subseteq R$, հետևում է, որ (a,x)∈R: Այնուհետև, քանի որ R-ը փոխանցելի է և հետևյալ երկու պայմանները բավարարված են՝ (a,x)∈R և(x,b)∈ R, հետևում է, որ (a,b)∈R. Սա ցույց է տալիս, որ $R^{n+1} \subseteq R$: Ինդուկցիայի քայլն ապացուցված է: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 6.5. A բազմության վրա տրված R հարաբերության **անդրադարձ փակում** է կոչվում A բազմության վրա սահմանված այն նվազագույն անդրադարձ հարաբերությունը, որը ներառում է տրված R հարաբերությունը որպես ենթաբազմություն:

Համաչափ փակում է կոչվում A բազմության վրա սահմանված այն նվազագույն համաչափ հարաբերությունը, որը ներառում է տրված R հարաբերությունը որպես ենթաբազմություն:

Փոխանցելի փակում է կոչվում A բազմության վրա սահմանված այն նվազագույն փոխանցելի հարաբերությունը, որը ներառում է տրված R հարաբերությունը որպես ենթաբազմություն:

Ենթադրենք՝ R-ը A-ի մեջ տրված հարաբերություն է և I={x:x=(a,a) բոլոր a∈A համար}: Այդ դեպքում՝

ա) R∪I -ն R հարաբերության անդրադարձ փակումն է:
բ) R∪R^{-1} -ն R հարաբերության համաչափ փակումն է:
գ) $\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$ -ն R հարաբերության փոխանցելի փակումն է:

7.Մասնակի կարգ

Սահմանում 7.1. S բազմության վրա սահմանված R հարաբերությունը կոչվում է **մասնակի կարգի հարաբերություն** կամ մասնակի կարգ, եթե այդ հարաբերությունն անդրադարձ է, հակահամաչափ և փոխանցելի:

S բազմությունն իր վրա սահմանված R հարաբերությամբ կոչվում է մասնակի կարգավորված բազմություն և նշանակվում է՝ (S,R).

Օրինակ 1. Ապացուցել, որ “մեծ է կամ հավասար” հարաբերությունը՝ (≥), մասնակի կարգ է ամբողջ թվերի բազմության վրա:

Լուծում: Նկատենք, որ a≥a յուրաքանչյուր a–ի համար, ուստի՝ ≥-ը ռեֆլեքսիվ է: Եթե a≥b և b≥a, ապա դա անպայմանորեն նշանակում է, որ a=b. Ուստի՝ ≥ -ն հակահամաչափ է: Վերջապս, ≥-ն նաև տարանցիկ է, քանի որ a≥b և b≥c պայմանների բավարարումից հետևում է , որ a≥c. Այստեղից հետևում է, որ ≥-ն մասնակի կարգ է ամբողջ թվերի բազմության վրա, իսկ (Z, ≥)-ը մասնակի կարգավորված է:

Օրինակ 2: Բաժանելիության հարաբերությունը՝ |, մասնակի կարգի հարաբերություն է դրական թվերի բազմության համար, քանի որ այն ռեֆլեքսիվ է, հակահամաչափ և փոխանցելի: Այլ կերպ ասած, $(Z^+,|)$–ը մասնակի կարգավորված է:

Օրինակ 3. Ապացուցել, որ կամայական S բազմության ենթաբազմությունների P(S) բազմության վրա տրված պարունակվելու հարաբերությունը մասնակի կարգի հարաբերություն է:

Լուծում: Քանի որ A⊆A բոլոր այն A-երի համար, որոնք S–ի ենթաբազմություն են, ապա ⊆ փոխանցելի է: Այն նաև հակահամաչափ է, քանի որ A⊆ B և B ⊆A պայմանների բավարարումից հետևում է, որ A=B. Վերջապես, ⊆-ը նաև փոխանցելի է, քանի որ A⊆B և B ⊆ C պայմանների բավարարումից հետևում է, որ A⊆C. Ուստի՝ ⊆ -ը մասնակի կարգ է P(S) վրա, իսկ (P(S), ⊆) –ը մասնակի կարգավորված բազմություն է:

Նկատենք, որ մասնակի կարգի հարաբերության մեջ a≤b գրառումը նշանակում է, որ (a,b)∈R, և այդ նույն գրառումն օգտագործվում է՝ նշանակելու համար ցանկացած մասնակի կարգ, այլ ոչ թե միայն “մեծ է կամ հավասար” հարաբերությունը: Օրինակ, ընդունված է մասնակի կարգավորված բազմությունը ներկայացնել որպես (A, $\leq$):

Այն դեպքում, երբ a-ն և b-ն (S, $\leq$) մասնակի կարգի տարրեր են, ամենևին էլ անհրաժեշտ չէ, որ կամ $a \leq b$, կամ էլ՝ $b \leq a$Օրինակ՝ (P(Z), $\subseteq$) մասնակի կարգի մեջ {1,2} –ը չի հարաբերում {1,3} –ին և ընդհակառակը: Նմանապես, (Z,|) – ի մեջ 2-ը չի հարաբերում 3–ին, և 3–ն էլ, իր հերթին, չի հարաբերում 2-ին, քանի որ $2 \nmid 3$ և $3 \nmid 2$. Սրանից հետևում է հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում 7.2. (S, $\leq$) մասնակի կարգի a և b տարրերը կոչվում են **բաղդատելի**, եթե կամ $a \leq b$, կամ $b \leq a$. Եթե a-ն և b-ն S բազմության այնպիսի երկու տարրեր են, որոնց համար ոչ $a \leq b$ –ն տեղի ունի, ոչ էլ՝ $b \leq a$ –ն, ապա a-ն և b-ն կոչվում են **ոչ բաղդատելի:**

Օրինակ 4. Արդյոք 3 և 9 ամբողջ թվերը բաղդատելի են $(Z^+,|)$ մասնակի կարգի հարաբերության մեջ:

Լուծում: 3 և 9 ամբողջ թվերը բաղդատելի են, քանի որ 3|9. Այնինչ՝ 5 և 7 ամբողջ թվերը բաղդատելի չեն, քանի որ, $5 \nmid 7$ և $7 \nmid 5$.

“Մասնակի” ածականն օգտագործվում է նկարագրելու համար տրված բազմության մասնակի կարգավորվածությունը, քանի որ հնարավոր է, որ բազմության ոչ բոլոր տարրերն են կարգավորված ըստ առաջադրված չափանիշի:

Այն դեպքում, երբ բազմության ցանկացած երկու տարր բաղդատելի են, այդպիսի բազմությունը վերանվանվում է հետևյալ կերպ.

Սահմանում 7.3. Եթե (S, $\leq$)-ը մասնակի կարգ է, և նրա ցանկացած երկու տարր բաղդատելի են, ապա S բազմությունը կոչվում է **լրիվ կարգավորված**, կամ՝ **գծային կարգավորված**, իսկ $\leq$ հարաբերությունը կոչվում է լրիվ կարգ կամ գծային կարգ: Լրիվ կարգավորված բազմությունը կոչվում է նաև **շղթա**:

Օրինակ 5. (Z, ≤) մասնակի կարգավորված բազմությունը նաև լրիվ կարգավորված է, քանի որ կամ a≤ b կամ էլ՝b ≤ a, բոլոր այն a-երի և b-երի համար,որոնք ամբողջ թվեր են:

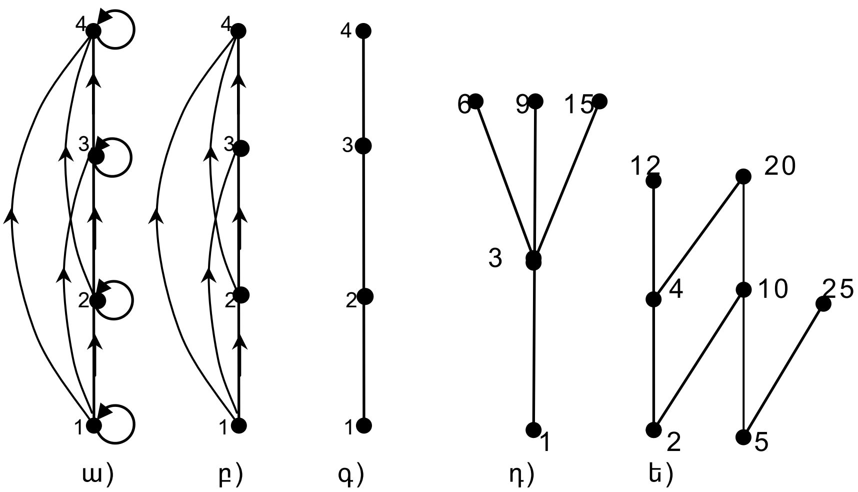
Օրինակ 6. $(Z^+,|)$ մասնակի կարգավորված բազմությունը լրիվ կարգավորված չէ, քանի որ այդ բազմությունը պարունակում է ոչ բաղդատելի տարրեր, օրինակ՝ 5 և 7:

Լրիվ կարգավորված բազմության համար կարելի է ներկայացնել մեկ այլ որակավորում ևս.

Սահմանում 7.4. (S, ≤) մասնակի կարգի հարաբերությունը կոչվում է **լիովին կարգավորված**, եթե նրա կամայական ոչ դատարկ ենթաբազմություն ունի **նվազագույն** տարր:
Մասնակի կարգի a տարրը կոչվում է **նվազագույն,** եթե այն փոքր է մասնակի կարգի մյուս բոլոր տարրերից, այսինքն, a ≤b բոլոր b∈S համար: Ակնհայտ է, որ նվազագույն տարրը միակն է: Նմանապես՝ մասնակի կարգի a տարրը կոչվում է **առավելագույն,** եթե b ≤ a բոլոր b∈S համար:

Օրինակ 7. Դրական թվերի կարգավորված $Z^+ \times Z^+$ զույգերը, որոնց համար $(a_1,a_2) \le (b_1,b_2)$ երբ $a_1 < b_1$, կամ՝ երբ $a_1 = b_1$ և $a_2 \le b_2$ (լեզվաբանական կարգ), ներկայացնում են լավ կարգավորված բազմություն: Մինչդեռ, Z բազմությունը սովորական ≤ կարգավորմամբ լավ կարգավորված չէ, քանի որ բացասական թվերի բազմությունը, որը Z–ի ենթաբազմություն է, չունի նվազագույն տարր:

Հեսսեի գծապատկեր: Մասնակի կարգավորված բազմությունների համար գոյություն ունի գրաֆիկական պատկերման միջոց, որը հայտնի է որպես Հեսսեի ուրվապատկեր: Տրված (S, ≤) մասնակի կարգավորված բազմության համար Հեսսեի ուրվապատկերը բաղկացած է կետերից և գծերից, որտեղ կետերը ներկայացնում են բազմության տարրերը, և եթե կամայական a և c տարրերի համար տեղի ունի a≤c պայմանը, ապա a տարրը տեղադրված է c-ից ներքև, և դրանք իրար հետ միացված են սլաքով, եթե գոյություն չունի այնպիսի b, որի համար b≠a,c և a≤b≤c:



Նկ. 2. Մասնակի կարգավորված երեք բազմությունների՝ ({1,2,3,4},≤), ({1,3,6,9,15},|) և ({2,4,5,10,12,20,25},|) Հեսսեի ուրվապատկերներ

Նկար 2-ում ներկայացված առաջին երեք պատկերները վերաբերում են ({1,2,3,4},≤) մասնակի կարգին: Բազմության տարրերից յուրաքանչյուրի շուրջը պատկերված օղակները ներկայացնում են անդրադարձ հարաբերությունը, իսկ սլաքները՝ համապատասխանաբար, հակահամաչափ և փոխանցելի հարաբերությունները:

Նկար 2-ի բ)-ե) տարբերակներում հեռացված են անդրադարձությունը ներկայացնող օղակները, իսկ գ)-ե) տարբերակներում՝ նաև փոխանցելիությունը ներկայացնող օղակները՝ նպատակ ունենալով չծանրաբեռնել ուրվապատկերը: Օղակների և սլաքների առկայությունը պարզապես ենթադրվում է:

Նկար 2-ի դ) տարբերակից երևում է, որ ({1,3,6,9,15},|) մասնակի կարգն ունի նվազագույն տարր և չունի առավելագույն տարր: Մինչդեռ ե) տարբերակում ներկայացված մասնակի կարգը ոչ առավելագույն, ոչ էլ նվազագույն տարր չունի:

Առաջադրանքներ

1. Տրված է A={a,b,c,d} բազմությունը: Բերված հարաբերություններից որոնք են ներկայացնում մասնակի կարգ:
   ա)R={(a,a),(b,b),(c,d),(d,e),(e,e),(c,d),(a,b),(b,d)}
   բ)R={(a,a),(b,b),(c,d),(d,e),(e,d),(c,d),(a,b),(b,d)}
   գ)R={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(c,d),(a,b),(b,d),(a,d)}
2. Վերը նշված մասնակի կարգի համար, եթե կան այդպիսիք, կառուցել Հեսսեի ուրվապատկեր:
3. Ներկայացրեք կամայական մասնակի կարգի հարաբերություն, որտեղ բազմության տարրերը բաղդատելի են:
4. Ներկայացրեք կամայական մասնակի կարգի հարաբերություն, որտեղ բազմության որոշ տարրեր բաղդատելի չեն:
5. Նկարագրեք համաչափ հարաբերություն, որը միաժամանակ նաև մասնակի կարգ է:

8.Համարժեքության հարաբերություն

Այժմ ենթադրենք, որ համալսարանի ուսանողները մաթեմատիկայի օլիմպիադային նախապատրաստվելու համար գրանցվում են որոշակի մատյաններում: Ենթադրենք նաև, որ ուսանողների գրանցումը կատարվում է խիստ որոշակի ժամերին՝ ըստ նրանց ազգանվան սկզբնատառերի: Օրինակ՝ ազգանունների Ա-ից Թ, Ժ-ից Մ և Վ-ից Ֆ սկզբնատառերի համար գրանցումները իրականացվում են համապատասխանաբար 09:00-ից մինչև 11:00, 11:00 -ից 13:00 և 13:00-ից 15:00 ժամերին:

Ընդունենք, որ R-ն այնպիսի հարաբերություն է, որը պարունակում է (x,y) զույգեր այն և միայն այն դեպքում, երբ x-ը և y-ը ազգանվան միևնույն տարանջատմամբ ուսանողներ են: Այդ դեպքում x-ը և y-ը կարող են գրանցվել միևնույն ժամին այն և միայն այն դեպքում, երբ (x,y) զույգը պատկանում է R-ին: Հեշտ է նկատել, որ R –ը ռեֆլեքսիվ է, համաչափ է և տարանցիկ: Ավելին, R-ը տրոհում է ուսանողների բազմությունը երեք տարանջատ դասերի՝ կախված նրանց ազգանվան սկզբնատառերից: Գիտենալու համար, թե հերթական ուսանողը որ ժամին կարող է գրանցվել, մեզ մնում է ուղղակի պարզել, թե նրա ազգանունը վերոհիշյալ երեք դասակարգումներից որ մեկի է պատկանում՝ առանց պարզաբանելու ուսանողի ինքնությունը:

Ամբողջ թվերի բազմության մեջ երկու a և b թվեր “բաղդատելի ըստ modulo 4” հարաբերության մեջ են, երբ 4-ը բաժանում է (a-b)-ն: Կարելի է համոզել, որ այս հարաբերությունը ռեֆլեքսիվ է, համաչափ է և փոխանցելի: Դժվար չէ նկատել, որ a-ն հարաբերում է b –ին այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանք երկուսն էլ 4-ի բաժանվելիս ունեն միևնույն մնացորդը: Նման հարաբերությունը ամբողջ թվերի բազմությունը տրոհում է չորս տարբեր դասերի: Եվ եթե մեզ ուղղակի հետաքրքրում է որևէ թվի 4–ի բաժանման մնացորդը, այլ ոչ թե կոնկրետ նրա մեծությունը, ապա մենք ընդամենը պարզում ենք, թե տվյալ թիվը մնացորդների որ դասին է պատկանում:

Նշված երկու հարաբերությունները՝ R-ը և “բաղդատելի ըստ modulo 4”-ը, համարժեքության հարաբերությունների օրինակներ են, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրը ռեֆլեքսիվ է, համաչափ և տարանցիկ: Նման կարգի հարաբերությունները բազմությունը տրոհում են համարժեք տարրերով տարանջատ դասերի: Համարժեքության հարաբերություններն ի հայտ են գալիս ամեն անգամ, երբ մեզ հետաքրքրում է բազմության տրված տարրի պատկանելությունը համարժեքության որևէ դասի՝ անտեսելով տարրի մասնավոր արժեքն ու նշանակությունը:

Փաստորեն մենք ուսումնասիրում ենք համասեռ հարաբերության այնպիսի տեսակ, որը իր մեջ ներառում է հատկությունների առանձնահատուկ համադրում և որը թույլ է տալիս հարաբերության մեջ դնել իրարից լիովին տարբեր, սակայն, միևնույն ժամանակ, ինչ-որ չափանիշով նման տարրեր:

Սահմանում 8.1. A բազմության վրա սահմանված հարաբերությունը կոչվում է **համարժեքության**, եթե այն անդրադարձ է, համաչափ է և փոխանցելի: Երկու տարրեր, որոնք միմյանց հետ համարժեքության հարաբերության մեջ են, կոչվում են համարժեք:

Այլ կերպ ասած՝ եթե ցանկացած $a,b,c\in A$ տարրերի համար ստույգ են հետևյալ պնդումներից յուրաքանչյուրը, ապա A բազմության համար սահմանված է համարժեքության հարաբերություն:

1. aRa
2. aRb⟶bRa
3. (aRb և bRc)⟶aRc

Դեշտ է համոզվել, որ նշված պայմանները համարժեք են հետևյալներին.

$i_A \subseteq R$, $R=R^{-1}$ և $R^2=R$:

Դետևյալ օրինակը մեկնաբանում է համարժեքության հարաբերության հասկացությունը:

Օրինակ 1.ենթադրենք, որ R-ը հայերեն լեզվով նախադասությունների բազմության վրա սահմանված հարաբերություն է այնպես, որ aRb այն և միայն այն դեպքում, երբ L(a)=L(b), որտեղ L(x) –ը x նախադասության երկարությունն է: Արդյոք R-ը համարժեքության հարաբերություն է:

Լուծում: Քանի որ L(a)=L(a), ապա aRa-ն տեղի ունի բոլոր նախադասությունների համար, ուստի՝ հարաբերությունն անդրադարձ է: Այժմ ենթադրենք, որ aRb տեղի ունի այնպես, որ L(a)=L(b). Այդ դեպքում bRa -ն ևս տեղի ունի, քանի որ L(a)=L(b): Դետևաբար, R-ը համաչափ է: Վերջապես, ենթադրենք, որ aRb և bRc պայմանները միաժամանակ տեղի ունեն: Այդ դեպքում ունենք, որ L(a)=L(b) և L(a)=L(c). Ուստի, L(a)=L(c), այնպես որ aRc-ն ևս տեղի ունի: Դետևաբար, R-ը փոխանցելի է: R-ի անդրադարձությունից, համաչափությունից և փոխանցելիությունից հետևում է, որ այն համարժեքության հարաբերությու՞ն է:

Օրինակ 2. Ենթադրենք, որ R-ը հարաբերություն է ամբողջ թվերի բազմության վրա այնպես, որ aRb տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ a=b կամ a=-b. Ակնհայտ է, որ այդպիսի հարաբերությունն անդրադարձ է, համաչափ է և փոխանցելի: Դետևաբար, R հարաբերությունըիրենից համարժեքության հարաբերություն է:

Օրինակ 3. Ենթադրենք, որ R-ը հարաբերություն է իրական թվերի բազմության վրա այնպես, որ aRb տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ a-b -ն ամբողջ թիվ է: Արդյոք R-ը համարժեքության հարաբերությու՞ն է:

Լուծում: Քանի որ a - b =0 -ն ամբողջ թիվ է բոլոր իրական a-երի համար, ուստի՝ aRa: Հետևաբար, R-ն անդրադարձ է: Այժմ ենթադրենք, որ aRb. Ուստի՝ a-b -ն ամբողջ թիվ է, որից հետևում է, որ b-a -ն ևս ամբողջ թիվ է, որտեղից հետևում է bRa, որը նշանակում է, որ R-ը համաչափ է: Եթե aRb և bRc, ապա a-b -ն և a-c -ն ամբողջ թվեր են: Հետևաբար, $a-c=(a-b)+(b-c)$ -ն նույնպես ամբողջ թիվ է, որից հետևում է, որ aRc. Սա նշանակում է, որ R-ը փոխանցելի է: Հետևաբար, R-ը փոխանցելի է, ուստի այն համարժեքության հարաբերություն է:

Օրինակ 4:Ենթադրենք, որ A-ն ամբողջ թվերի բազմությունն է, որի վրա սահմանված է R⊆AxA հարաբերությունն այնպես, որ R={(a,b): a-b=5k ինչ-որ k ամբողջ թվի համար}: Օրինակ՝ (7,2)∈R, քանի որ 7-2=5=5x1:

Նմանապես՝ (-11,4) ∈R, քանի որ -11-4=-15=5x(-3): Դժվար չէ նկատել, որ տրված հարաբերությունն անդրադարձ է, քանի որ յուրաքանչյուր a∈A համար a-a=0=5x0=5xk, երբ k=0, այնպես որ (a,a)∈R:

Տրված հարաբերությունը նաև համաչափ է: Ենթադրենք, որ (a,b)∈R. Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ թիվ՝ m, որի համար ճիշտ է հետևյալ պնդումը. a-b=5m, ուստի և՝ b - a=- (a – b)=-(5 x m)=5x(-m) ինչ-որ ամբողջ բացասական (-m) համար: Ուստի՝ (b,a)∈R:
Տրված հարաբերությունը նաև փոխանցելի է:

Ենթադրենք, որ a-ն, b-ն և c-ն թվեր են, որոնք բավարարում են (a,b)∈R և (b,c)∈R պայմաններին: Ըստ սահմանման, եթե (a,b)∈R, ապա a-b=5k ինչ-որ k ամբողջ թվի համար, և եթե (b,c)∈R, ապա b-c=5m ինչ-որ m ամբողջ թվի համար: Գումարելով այս երկու արտահայտությունները, կստանանք՝
(a-b)+(b-c)=5k+5m=5(k+m) կամ՝ a-c=5(k+m) ինչ-որ k+m ամբողջ թվի համար: Հետևաբար՝ R հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է:

Օրինակ 5. Ենթադրենք ունենք a≡b(modn), որտեղ n>0 և n∈N կամայական n համար և Z^2=ZxZ: Այդ դեպքում a≡b(modn)={(a,b) ∈ Z^2| ∃k|a-b=kxn և k∈Z} :

Համարժեքության հարաբերությունը բազմությունը տրոհում է ենթաբազմությունների, որոնց տարրերը համարժեք են միմյանց և համարժեք չեն տրված բազմության այլ ենթաբազմությունների տարրերին: Համարժեքության հարաբերությունների ենթատեքստում այդ ենթաբազմություններն անվանվում են **համարժեքության դասեր`** R համարժեքության նկատմամբ:

Բազմության տրոհումը համարժեքության հարաբերության շնորհիվ կարելի է պատկերացնել հետևյալ կերպ.

Ենթադրենք` A-ն գույնզգույն գնդիկների հավաքածու է, իսկ R հարաբերությունն առաջադրված է հետևյալ կերպ. $(a,b)\in R$ այն և միայն այն դեպքում, երբ a-ն և b-ն միևնույն գույնն ունեն: Քանի որ հարաբերությունը համարժեքության է, ապա համարժեքության յուրաքանչյուր դաս բաղկացած կլինի միևնույն գույնի գնդիկներից:

Եթե R հարաբերությունն առաջադրված է հետևյալ կերպ` $(a,b)\in R$ այն և միայն այն դեպքում, երբ a-ն և b-ն միևնույն տրամագիծն ունեն, ապա համարժեքության յուրաքանչյուր դաս բաղկացած կլինի հավասար չափսերի գնդիկներից:

Եթե A-ն Հայաստանի բոլոր քաղաքացիների բազմությունն է, իսկ B-ն Հայաստանի մարզերի բազմությունը, ապա R-ը կարող էր ներկայացնել այնպիսի $a_1\in A$ և $a_2\in A$ քաղաքացիներ, որոնք ապրում են միևնույն $b\in B$ մարզում:

Սահմանում 8.2. Ենթադրենք, որ $a\in A$, և R-ը համարժեքության հարաբերություն է AxA վրա: Այդ դեպքում [a]-ն հետևյալ բազմությունն է` $\{x : xRa\}=\{x: (x,a)\in R\}$, որը կոչվում է a-ն ներառող **համարժեքության դաս:** $[A]_R$ –ով կնշանակենք A բազմության բոլոր համարժեքության դասերը R հարաբերության նկատմամբ:

Օրինակ 5: Տրված է A={1,2,3,4,5,6} բազմությունը և նրա վրա սահմանված համարժեքության R_1 հարաբերությունը:

R_1={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),(2,1),(2,4), (3,5), (5,3),(4,1),(4,2)}

R հարաբերության նկատմամբ համարժեքության դասերը կառուցվում են A բազմության յուրաքանչյուր տարրի համարժեքության դասի որոշմամբ:

$[1]=\{x:(x,1)\in R_1\}=\{x:xR_1 1\}=\{1,2,4\}$,

որտեղ $1\in[1]$, քանի որ $(1,1)\in R_1$, $2\in[1]$, քանի որ $(2,1)\in R_1$, $4\in[1]$, քանի որ $(4,1)\in R_1$ և գոյություն չունի մեկ այլ x A բազմությունից այնպիսին, որ $(x,1)\in R_1$. Նմանապես ստանում ենք՝

$$[2]=\{x:(x,2)\in R_1\}=\{2,1,4\};$$

$$[3]=\{x:(x,3)\in R_1\}=\{3,5\};$$

$$[4]=\{x:(x,4)\in R_1\}=\{4,1,2\};$$

$$[5]=\{x:(x,5)\in R_1\}=\{5,3\};$$

$$[6]=\{x:(x,6)\in R_1\}=6:$$

Արդյունքում ունենք միայն երեք համարժեքության դասեր՝

$$[1]=[2]=[4]=\{1,2,4\}$$

$$[3]=[5]=\{3,5\}$$

$$[6]=[6]$$

այնպես որ՝

$$[A]_{R_1}=\{[1],[3],[6]\}=\{\{1,2,4\},\{3,5\},\{6\}\}:$$

Օրինակից երևում է, որ համարժեքության դասի յուրաքանչյուր տարր ծնում է համարժեքության դաս: Այլ կերպ ասած, եթե $b\in[a]$, ապա $[a]=[b]$: Սա հիմք է տալիս պնդելու, որ համարժեքության դասի յուրաքանչյուր տարր համարժեքության դաս է:

Համարժեքության յուրաքանչյուր դաս պարունակում է նվազագույնը մեկ տարր, ուստի հարաբերության ռեֆլեքսիվության շնորհիվ a տարրին համարժեք բոլոր տարրերի բազմությունը պետք է պարունակի a-ն: Մյուս կողմից, ոչ մի տարր չի կարող պատկանել միաժամանակ երկու իրարից տարբեր համարժեքության դասերի:

Օրինակ. Դիտարկենք Z ամբողջ թվերի բազմության վրա սահմանված է R⊆AxA հարաբերությունը որպես R={(a,b): a-b=5k ինչ-որ k ամբողջ թվի համար}: Քանի որ ինչ-որ k ամբողջ թվի համար ճիշտ են հետևյալ պնդումները,

$$[a] = \{x : (x,a) \in R_3\} = \{x : xR_3a\} =$$
$$= \{x : x - a = 5 \cdot k\} =$$
$$= \{x : x = a + 5 \cdot k\}$$

,

ապա կառուցում ենք հետևյալ համարժեքության դասերը,

$$[0] = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...\} =$$
$$= \cdots = [-5] = [0] = [5] = [10] = [15] = \cdots = \{x : x = 5k \text{ և } k \in Z\}$$
$$[1] = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, ...\} =$$

$$= \cdots = [-9] = [-4] = [1] = [6] = \cdots = \{x : x = 1 + 5k \text{ և } k \in Z\}$$

$$[2] = \{..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, ...\} =$$

$$= \cdots = [-3] = [-2] = [7] = [12] = \cdots = \{x : x = 2 + 5k \text{ և } k \in Z\}$$
$$[3] = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, ...\} =$$

,

$$= \cdots = [-2] = [3] = [8] = [13] = \cdots = \{x : x = 3 + 5k \text{ և } k \in Z\}$$

,

$$[4] = \{..., -11, -6, -1, 4, 9, 14, ...\} =$$

$$= \cdots = [-6] = [-1] = [4] = [9] = \cdots = \{x : x = 4 + 5k \text{ և } k \in Z\}$$

որոնք ներկայացնում են R հարաբերության նկատմամբ իրարից տարբեր համարժեքության դասեր:

Այսպիսով,

$$[A]_R = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$$

Համարժեքության [0] դասի տարրերը միմյանց "նման են" այն իմաստով, որ դրանցից յուրաքանչյուրը հնգապատիկ է: Համարժեքության մյուս դասերի տարրերը նույնպես "նման են" այն իմաստով, որ դրանցից յուրաքանչյուրը հինգի բաժանելիս ունեն միևնույն մնացորդը:

Այսպիսով, համարժեքության դասերի համախումբը տրոհում է ամբողջ A բազմությունը չհատվող կամ փոխադարձաբար բացառող ոչ դատարկ ենթաբազմությունների, որը կոչվում է A-ի **տրոհում**:

Թեորեմ. A բազմության վրա տրված կամայական R համարժեքության հարաբերություն միարժեքորեն որոշում է A բազմության տրոհում՝ R-ի համարժեքության դասերին համապատասխան տրոհումը: Եվ հակառակը, A-ի կամայական տրոհման միարժեքորեն համապատասխանում է A-ի վրա տրված համարժեքության R հարաբերություն:

Առաջադրանքներ

1. Պարզել՝ արդյոք տրված A բազմության վրա սահմանված հարաբերությունները համարժեքության հարաբերություններ են:

ա) A- ն ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ R –ը հարաբերություն է՝ տրված հետևյալ պայմանով.

(a,b)∈R, եթե a+b=0

բ) A- ն ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ R –ը հարաբերություն է՝ տրված հետևյալ պայմանով.

(a,b)∈R, եթե a+b=5

գ) A- ն հարթության վրա բազմությունն է, իսկ R–ը հարաբերություն է՝ տրված հետևյալ պայմանով.

(a,b)∈R, եթե a և b ուղիղները հատվում են:
դ) A- ն հարթության վրա բազմությունն է, իսկ R–ը հարաբերություն է՝ տրված հետևյալ պայմանով.
(a,b)∈R, եթե a և b ուղիղները զուգահեռ են:

Գրականություն

1. Տոնոյան Ռ.Ն.,Դիսկրետ մաթեմատիկայի դասընթաց (դասախոսություններ և առաջադրանքներ): Եր. ԵՊՀ.,1997
2. Տոնոյան Ռ.Ն., Դիսկրետ մաթեմատիկայի դասընթաց (դասախոսություններ և առաջադրանքներ): Եր. ԵՊՀ.,1982
3. J.A.Anderson, Discrete Mathematics with Combinatorics, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Բովանդակություն

Բազմությունների տեսություն և
բինար հարաբերություններ
Ուսումնական ձեռնարկ

Եղիսաբեթ Ալավերդյան

Теория множеств и
Бинарные отношения

Егисабет Алавердян