ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

*Կիրառական մաթեմատիկայի և
ֆիզիկայի ֆակուլտետ
Ընդհանուր մաթեմատիկական
կրթության ամբիոն*

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ
2013

ՀՏԴ 519.2
ԳՄԴ

Հրատարակվում է Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանի 27.12.2012թ. գիտական խորհրդի նիստում հաստատված 2013թ. հրատարակչական պլանի համաձայն

Գրախոսներ՝ ֆ.մ.գ.թ.դոց. Ֆ.Ն. Գալստյան
ֆ.մ.գ.թ.դոց. Ի.Վ. Հովհաննիսյան

Խմբագիր՝ բ.գ.թ. դոց. Հ.Ց. Պետրոսյան

Առաքելյան Ա.Հ.

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ: Ուսումնական ձեռնարկ/ Ա.Հ. Առաքելյան, Գ.Ս. Գրիգորյան, Ս.Կ. Արզումանյան; ՀՊՃՀ. -Եր.: Ճարտարագետ, 2013. - էջ:

Ձեռնարկը ընդգրկում է «Հավանականությունների տեսություն» դասընթացի ուսումնական նյութը: Բերված են տեսության որոշ արդյունքներ, մեծ քանակությամբ լուծված օրինակներ, որոնք լուսաբանում են տեսական նյութը:

Ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի տեխնիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար: Կարող է օգտակար լինել նաև հավանականության տեսությամբ հետաքրքրվող ընթերցող լայն շրջաններին:

ՀՏԴ
ԳՄԴ

ISBN

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ

Ուսումնական ձեռնարկի հիմքում ընկած են հեղինակների՝ «Հավանականությունների տեսություն» դասընթացի վերաբերյալ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում կարդացած դասախոսությունները: Ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի տեխնիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար, ովքեր ունեն պատրաստվածություն «Բարձրագույն մաթեմատիկա» առարկայի հիմնական դասընթացներից:

Հեղինակները փորձել են տեսական նյութը շարադրել հնարավորինս ամբողջական և մատչելի լեզվով՝ ձգտելով լիակատար մաթեմատիկական խստության: Տեսության որոշ արդյունքներ ձեռնարկում բերված են առանց ապացուցման: Լուծված են մեծ քանակությամբ օրինակներ, որոնք լուսաբանում են բերված տեսական նյութը և պարզաբանում որոշ տեխնիկական կիրառություններ:

Ձեռնարկը գրելիս նկատի է առնվել ընթերցողների լայն շրջանի համար հայերեն լեզվով «Հավանականությունների տեսության» համառոտ դասընթաց ունենալու անհրաժեշտությունը և բարձրագույն կրթական համակարգի ժամանակակից պահանջները:

ԳԼՈՒԽ 1
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§1.1. Կոմբինատորիկայի տարրերը

Կոմբինատորիկան մաթեմատիկայի բաժին է, որն ուսումնասիրում է տրված բազմությունից տարրերի ընտրության և դրանք ըստ խմբերի դասավորելու հետ կախված խնդիրները: Մասնավորապես, դիտարկվում են խնդիրներ՝ կապված բազմության վերջավոր թվով տարրերի հնարավոր կոմբինացիաների քանակի հաշվարկի հետ: Դրանցից յուրաքանչյուրում անհրաժեշտ է հաշվել որոշակի գործողության (կապուկից խաղաքարտի ընտրություն, խաղոսկրի կամ մետաղադրամի նետում և այլն) արդյունքների հնարավոր եղանակների թիվը: Կոմբինատոր բանաձևերը հնարավորություն են տալիս հաշվելու գործողության կատարման հնարավոր եղանակների կամ դրա հնարավոր ելքերի թիվը:

Բազմապատկման սկզբունք: Կոմբինատորիկայի հիմնական սկզբունքը հետևյալն է. Եթե A օբյեկտը կարելի է ընտրել k եղանակներով, իսկ B օբյեկտը՝ m եղանակներով, ապա A և B օբյեկտների (A,B) կարգավորված զույգը կարելի է կազմել $k\cdot m$ եղանակներով:

Թեորեմ 1.1: *Դիցուք $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$ բազմությունը բաղկացած է k տարրերից, իսկ $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ բազմությունը՝ m տարրերից: Այդ դեպքում հնարավոր է կազմել ճիշտ $k\cdot m$ հատ (a_i,b_j) զույգեր՝ վերցնելով առաջին տարրը A բազմությունից, իսկ երկրորդը՝ B-ից:*

Ապացույց: Կարող ենք կազմել a_1 տարրը պարունակող m հատ զույգ՝ $(a_1,b_1),(a_1,b_2),\ldots,(a_1,b_m)$: Հեշտ է նկատել, որ նույնքան զույգ կարելի է կազմել a_2 տարրով և A բազմության k տարրերից յուրաքանչյուրով: Այսպիսով, հնարավոր է կազմել ընդհանուր $k\cdot m$ զույգ, որտեղ առաջին տարրը ընտրված է A բազմությունից, իսկ երկրորդը՝ B-ից: □

Վարժություն: Թեորեմ 1-ի միջոցով ապացուցել, որ.

ա) երեք մետաղադրամի նետման դեպքում հնարավոր են $2\cdot 2\cdot 2=8$ ելքեր

բ) երկու խաղոսկրի նետման դեպքում հնարավոր են $6\cdot 6=36$ տարբեր ելքեր

գ) եռանիշ թվերի քանակը՝ $9\cdot 10\cdot 10=900$:

Արկղային սխեմաներ: Դիցուք արկղը պարունակում է n հատ համարակալված գնդակներ: Հաջորդաբար ընտրում ենք արկղից k գնդակ: Ընտրության արդյունքում կստանանք հավաք k գնդակներից: Պարզենք, թե հնարավոր քանի եղանակով կարելի է n գնդակներից ընտրել k հատը: Այլ կերպ ասած, k երկարությամբ քանի միմյանցից *տարբեր* հավաքներ են հնարավոր:

Հարցին միարժեքորեն հնարավոր չէ պատասխանել, քանի որ հայտնի չէ՝

ա) ինչպես է իրականացվել ընտրությունը;

բ) ինչ ենք հասկանում *տարբեր* հավաքներ ասելով:

Դիտարկենք ընտրություն կատարելու հետևյալ հնարավոր եղանակները:

1. Ընտրություն *վերադարձով*. արկղից վերցված յուրաքանչյուր գնդակ վերադարձվում է արկղ, և յուրաքանչյուր հաջորդն ընտրվում է լրիվ արկղից: Այսպիսով, ստացված k երկարությամբ հավաքում համարները *կարող են* կրկնվել:

2. Ընտրություն *առանց վերադարձի.* Վերցված գնդակները արկղ չեն վերադարձվում, ուստի ստացված հավաքում համարները կրկնվել *չեն կարող:*

Այժմ պայմանավորվենք, թե միևնույն երկարությամբ որ հավաքները կհամարենք միմյանցից *տարբեր*:

1. *Կարգավորված* հավաքներ. միևնույն երկարությամբ գնդակների համարների երկու հավաքներ համարվում են տարբեր, եթե դրանք տարբերվում են կամ իրենց կազմով, կամ համարների դասավորության կարգով: Այսպիսով, օրինակ՝ $(1,5,2)$, $(2,5,1)$ և $(4,4,5)$ հավաքները տարբեր են:

2. *Ոչ կարգավորված* հավաքներ. այս դեպքում գնդակների համարների երկու հավաքներ համարվում են տարբեր, եթե դրանք տարբերվում են միայն իրենց կազմով: Տվյալ դեպքում արդեն $(1,5,2)$ և $(2,5,1)$ հավաքները տարբեր չեն, իսկ, օրինակ, $(1,5,2)$ և $(4,4,5)$ հավաքները տարբեր են:

Ընտրության չորս սխեմաներից յուրաքանչյուրի համար հաշվենք բոլոր հնարավոր, միմյանցից տարբեր արդյունքները (հավաքները):

Թեորեմ 1.2 : *n տարրերի բազմությունից առանց վերադարձի ընտրված k երկարությամբ կարգավորված հավաքների ընդհանուր թիվը հավասար է՝*

$$A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}:$$

A_n^k թիվը կոչվում է n տարրերից k-ական *կարգավորությունների* թիվ:

Ապացույց: Առաջին գնդակը կարելի է ընտրել n եղանակներով: Առաջին գնդակի ցանկացած ընտրության դեպքում երկրորդը կարող ենք ընտրել $n-1$ եղանակներով: Այդ երկու գնդակների ցանկացած ընտրության դեպքում էլ երրորդը կարելի է ընտրել $n-2$ եղանակով և այլն: Հաջորդաբար կիրառելով թեորեմ 1-ը, ստանում ենք, որ k գնդակների ընդհանուր հավաքների թիվը հավասար է k հատ բազմապատկիչների արտադրյալին՝ $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$: □

Հետևանք 1.1 : n տարրերից բաղկացած բազմության տարրերի բոլոր *տեղափոխությունների* քանակը հավասար է $P_n = n!$:

Օրինակ 1 : Պատվո հարթակի (առաջին, երկրորդ և երրորդ տեղեր) քանի՞ տարբերակ է հնարավոր, եթե մրցմանը մասնակցում են 10 մարզիկներ:

Լուծում: Պարզ է, որ պատվո հարթակները կարող են տարբերվել թե մարզիկների կազմով, թե նրանց զբաղեցրած դիրքերով, ուստի բոլոր հնարավոր տարբերակների թիվն է՝

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720:$$

Օրինակ 2 : 7 տարբեր ազգանուններից քանի՞ տարբեր ցուցակներ կարելի է կազմել, որոնք կտարբերվեն ազգանունների հերթականությամբ:

Լուծում: Ունենք $P_7 = 7! = 5040$:

Վարժություն: Գտնել հետևյալ փորձերում բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը.

ա) 36 խաղաթուղթ պարունակող կապուկից մեկական խաղաթուղթ են տալիս երեք խաղացողների;

բ) ոչ զրոյական տարբեր թվանշաններով կազմված է եռանիշ թիվ:

գ) երեք տարբեր գույներից պատրաստում են եռագույն դրոշակ:

Թեորեմ 1.3: *n տարրերի բազմությունից առանց վերադարձի ընտրված k երկարությամբ ոչ կարգավորված հավաքների ընդհանուր թիվը հավասար է՝*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}:$$

C_n^k թիվը կոչվում է n տարրերից k-ական *զուգորդությունների* թիվ:

Ապացույց: Համաձայն հետևանք 1-ի՝ k երկարությամբ ցանկացած ոչ կարգավորված հավաքից կարելի է ստանալ $k!$ կարգավորված հավաքներ: Այսպիսով, յուրաքանչյուր զուգորդությունից, տեղափոխությունների միջոցով, կարելի է ստանալ $k!$ հատ կարգավորություն, իսկ C_n^k հատ զուգորդությունից՝ $C_n^k \cdot k!$ կարգավորություն, հետևաբար՝ $A_n^k = C_n^k \cdot k!$: □

Օրինակ 3: Մրցման նախնական փուլին մասնակցում են 10 թիմեր, որոնցից եզրափակիչ են դուրս գալիս 3-ը: Եզրափակիչ դուրս եկած թիմերի քանի՞ եռյակ է հնարավոր:

Լուծում: Ի տարբերություն օրինակ 1-ի, այստեղ կարևոր չէ եզրափակչին մասնակցող թիմի զբաղեցրած տեղը (կարգը), ուստի բոլոր հնարավոր եռյակների թիվը կլինի՝

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120:$$

Վարժություն: Գտնել հետևյալ փորձերում բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը.

ա) 36 խաղաթուղթ պարունակող կապուկից 3 խաղաթուղթ տալիս են մեկ խաղացողների;

բ) խմբի 20 ուսանողներից 2-ն ընտրվում են ուսանողական խորհրդի անդամ:

Թեորեմ 1.4 : *n տարրերի բազմությունից վերադարձով ընտրված k երկարությամբ կարգավորված հավաքների ընդհանուր թիվը հավասար է n^k :*

Ապացույց: Առաջին գնդակը կարելի է ընտրել n եղանակներով: Այդ եղանակներից յուրաքանչյուրի դեպքում երկրորդը կարելի է ընտրել նույնպես n եղանակներով, և այդպես k անգամ: Հետևաբար՝ հավաքների ընդհանուր թիվը հավասար է $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$: □

Վարժություն: Գտնել հետևյալ փորձերում բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը.

ա) մետաղադրամը նետում են հինգ անգամ;

բ) հնգանիշ թիվը կազմում են միայն կենտ թվանշաններով:

Թեորեմ 1.5: *n տարրերի բազմությունից վերադարձով ընտրված k երկարությամբ ոչ կարգավորված հավաքների ընդհանուր թիվը հավասար է՝*

$$C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1} :$$

Ապացույց: Կիրառենք ինդուկցիայի մեթոդը: Հետաքրքրող հավաքների ընդհանուր թիվը նշանակենք $N(n,k)$-ով: Պարզ է, որ՝

$$N(m,1) = m = C_{m+1-1}^{1}, \;\; m \le n :$$

Այժմ ենթադրենք՝ $N(m,k) = C_{m+k-1}^{k}, m \le n$ և ցույց տանք, որ բանաձևը ճիշտ է, եթե k-ն փոխարինենք $(k+1)$-ով: $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]$ ոչ կարգավորված հավաքները դիտարկելիս կարելի է ենթադրել, որ դրանք դասավորված են աճման կարգով՝ $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{n+1}$: Ակնհայտ է, որ այն ոչ կարգավորված հավաքների թիվը, որտեղ $a_1 = 1$ հավասար է $N(n,k)$-ի, երբ $a_1 = 2$, այդ թիվը $N(n-1,k)$ է և այլն: Հետևաբար՝

$$N(n,k+1) = N(n,k) + N(n-1,k) + \ldots + N(1,k) =$$

$$= C_{n+k-1}^{k} + C_{n-1+k-1}^{k} + \ldots + C_{n}^{n} =$$

$$= (C_{n+k}^{k+1} - C_{n+k-1}^{k+1}) + (C_{n-1+k}^{k+1} - C_{n-1+k-1}^{k+1}) + \ldots + (C_{n+1}^{k+1} - C_{n}^{n}) + C_{n}^{n} = C_{n+k}^{k+1},$$

որտեղ օգտվեցինք բինոմական գործակիցների հետևյալ հեշտ ստուգվող հատկությունից՝

$$C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k} = C_{n+1}^{k} :$$ □

Վարժություն: Գտնել .

ա) $k \in \mathbb{N}$ թվի հնարավոր վերլուծությունների քանակը n հատ ոչ բացասական ամբողջ թվերի գումարի տեսքով, եթե կարևոր է գումարելիների հաջորդականության կարգը:

բ) n փոփոխականի ֆունկցիայի k-րդ կարգի ածանցյալների քանակը:

§1.2. Պատահույթներ և գործողություններ դրանց հետ

Տարրական պատահույթների տարածություն: Հավանականությունների տեսության հիմնական հասկացություններից է տվյալ փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքների տարածությունը:

Սահմանում 1.1: Տարրական *պատահույթների տարածություն* կոչվում է տվյալ փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը. այն ընդունված է նշանակել Ω-ով, իսկ նրա տարրերը՝ *տարրական պատահույթները* կամ *տարրական ելքերը*՝ ω-ով:

Նշենք, որ ցանկացած ոչ դատարկ Ω բազմություն կարելի է դիտարկել, որպես որևէ փորձի տարրական պատահույթների տարածություն:

Սահմանում 1.2: Ω բազմության ենթաբազմությունները կոչվում են *պատահույթներ:* Ընդունված է ասել, որ A պատահույթը *տեղի է ունեցել*, եթե փորձի ելքը՝ ω տարրական պատահույթը, պատկանում է A բազմությանը:

Դիտողություն: Ընդհանրապես Ω բազմության ոչ բոլոր ենթաբազմություններն են անվանվում պատահույթներ, այլ առանձնացվում է ենթաբազմությունների մի որոշակի դաս: Այս սահմանափակման իմաստին կանդրադառնանք ստորև:

Այսպիսով, տարրական պատահույթը փորձի այնպիսի հնարավոր արդյունք է, որը, կախված փորձի նպատակներից, այլևս չի տրոհվում նոր բաղադրիչների, իսկ պատահույթը կարող է բաղկացած լինել մեկ կամ մի քանի տարրական պատահույթներից:

Օրինակ 1: 36 խաղաթղթերի կապուկից պատահականորեն ընտրվում է մեկ խաղաթուղթ: Այս փորձում «Խաչի թագավորի», կամ «Սրտի տասանոցի» բացվելը տարրական պատահույթ է, իսկ որևէ «թագավորի» բացվելը արդեն ոչ տարրական պատահույթ է: Բոլոր հնարավոր տարրական պատահույթների թիվը 36 է:

Օրինակ 2. Նետվում է խաղոսկրը: Նրա վերին նիստի վրա երկու միավորի ("2") բացվելը տարրական պատահույթ է: Այս փորձում տարրական պատահույթների տարածությունը բաղկացած է 6 տարրերից՝

$$\Omega = \{"1", "2", \ldots, "6"\}:$$

$A = \{"2","4","6"\}$ պատահույթը նշանակում է, որ փորձի արդյունքում խաղոսկրի նիստին բացվել են զույգ թվով միավորներ:

Օրինակ 3. Դրամը նետվում է՝ մինչև առաջին զինանշանի բացվելը: Նշանակենք «զինանշան»-Զ, «գիր»-Գ: Փորձի տարրական պատահույթները կլինեն՝

$$Զ, ԳԶ, ԳԳԶ, \ldots, \underbrace{ԳԳ\ldots Գ}_{n-1}Զ, \ldots$$

Օրինակ 4. Կետը պատահականորեն նետում ենք $[0,1]$ հատվածի վրա: Հատվածի ցանկացած կետի հետ նրա համընկնելը տարրական պատահույթ է:

Օրինակ 3-ում $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, որտեղ $\omega_n = \underbrace{ԳԳ\ldots Գ}_{n-1}Զ$: Այս դեպքում Ω-ն հաշվելի բազմություն է:

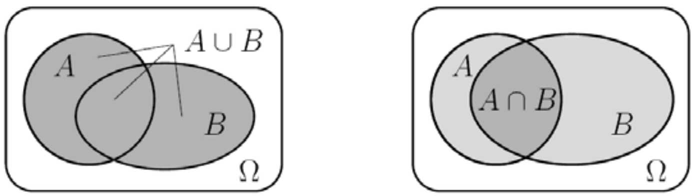
Օրինակ 5-ում $\Omega = \{x : 0 \le x < 1\}$-ն ավելի քան հաշվելի բազմություն է: Այս դեպքում ասում են, որ բազմությունը *կոնտինուում* տիպի է (ցանկացած վերջավոր կամ անվերջ ինտերվալ թվային առանցքի վրա կոնտինուում տիպի բազմություն է):

Այսպիսով, կատարված է տարրական պատահույթների բազմության դասակարգում՝ վերջավոր, հաշվելի և կոնտինուում տիպի: Ω-անվանում են տարրական պատահույթների *դիսկրետ տարածություն*, եթե այն վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն է, և *անընդհատ տարածություն*, եթե այն կոնտինուում տիպի է:

Գործողություններ պատահույթների հետ: Քանի որ պատահույթը, ըստ սահմանման, նույնացվել է բազմության հետ, ապա պատահույթների հետ կարելի է կատարել նույն գործողությունները, ինչ որ բազմությունների հետ: Մասնավորապես, ստացվում են հետևյալ գործողությունները և հարաբերությունները:

$A \cup B$ կամ $A+B$ - *պատահույթների գումար:* Այս պատահույթի էությունը փորձի արդյունքում A կամ B պատահույթներից գոնե մեկի տեղի ունենալն է:

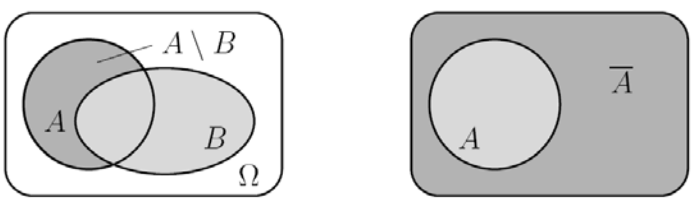
$A \cap B$ կամ AB - *պատահույթների արտադրյալ:* Այս պատահույթը նշանակում է, որ երկու պատահույթներն էլ համատեղ տեղի են ունեցել (նկ.1.1):



Նկ. **1.1.** Պատահույթների գումար և արտադրյալ

$A \setminus B$ կամ $A-B$ - *պատահույթների տարբերություն:* Այս պատահույթը նշանակում է, որ A - ն տեղի է ունեցել, իսկ B - ն՝ ոչ:

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ - A-ի *հակադիր պատահույթ.* այն է, որ փորձի արդյունքում A պատահույթը հանդես չի գալիս (նկ. 1.2):



Նկ. **1.2.** Պատահույթների տարբերություն և հակադիր պատահույթ

Ω-ի ենթաբազմություններից առանձնացնենք հետևյալ երկուսը.

հավաստի պատահույթ՝ Ω. պատահույթ, որը հանդես է գալիս փորձի ցանկացած ելքի դեպքում;

անհնարին պատահույթ՝ $\varnothing$. պատահույթ, որը փորձի արդյունքում չի կարող հանդես գալ:

Ակնհայտ է, որ $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = \Omega$: Պատահույթների գումարի և արտադրյալի գործողությունները միմյանց հետ կապված են հետևյալ. շատ կարևոր առնչությամբ՝

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} :$$

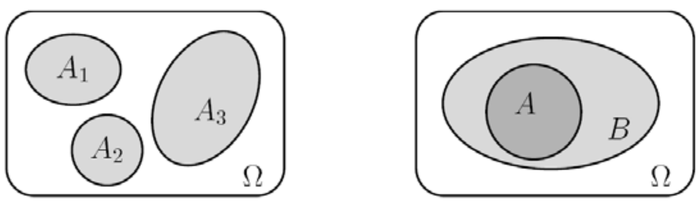
Բազմությունները կարող են հատվել կամ չհատվել, ընկած լինել մեկը մյուսի մեջ կամ ընկած չլինել: Հավանականությունների տեսությունում այս բոլոր հարաբերությունները կարելի է արտահայտել պատահույթների տերմիններով:

A և B պատահույթները կոչվում են *անհամատեղելի*, եթե $A \cap B$-ն անհնարին պատահույթ է՝ $A \cap B = \varnothing$:

Ասում են, որ A պատահույթից *բխում է* B-ն և գրում են $A \subseteq B$, եթե B պատահույթը հանդես է գալիս ամեն անգամ, երբ հանդես է գալիս A - ն (նկ. 1.3):

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահույթները կազմում են *պատահույթների լրիվ խումբ*, եթե նրանք զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, և դրանց գումարը հավասար է հավաստի պատահույթի, այսինքն՝ $A_i A_j = \varnothing$, ցանկացած $1 \le i \ne j \le n$ և $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$:

Օրինակ 5. Վերջավոր թվով ելքերով փորձի տարրական պատահույթների համակարգը պատահույթների լրիվ խումբ է:



Նկ. 1.3. Անհամատեղելի և ներդրված պատահույթներ

§1.3. Պատահույթների դիսկրետ տարածությունը

Հիշեցնենք, որ տարրական պատահույթների տարածությունը կոչվում է դիսկրետ, եթե Ω բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$:

Պարզ է, որ յուրաքանչյուր պատահույթ կարող է տեղի ունենալ փորձի որոշ ելքերի դեպքում և տեղի չունենալ այլ ելքերի դեպքում: Այսինքն՝ ամեն մի պատահույթի համապատասխանում է տարրական ելքերի այնպիսի բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում պատահույթը հանդես է գալիս : Նշված տարրական ելքերն անվանում են *պատահույթին նպաստավոր ելքեր:*

Այժմ պատահոույթների դիսկրետ տարածության յուրաքանչյուր պատահույթի համար սահմանենք հավանականության գաղափարը:

Սահմանում 1.3 : Յուրաքանչյուր ω_i, $i = 1,2,\ldots$ տարրական ելքի համապատասխանության մեջ դնենք $\mathrm{P}(\omega_i) = p_i \in [0,1]$ թիվ այնպես, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1: \tag{1.1}$$

A պատահույթի *հավանականություն* կանվանենք

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i:\ \omega_i \in A} p_i \tag{1.2}$$

թիվը, որը հավասար է A-ին նպաստավոր տարրական ելքերի հավանակությունների գումարին: Երբ $A = \varnothing$, ապա վերցնում ենք $\mathrm{P}(A) = 0$: (Պարզ է, որ (1.2) զուգամետ է, քանի որ զուգամետ է (1.1) շարքը):

Դիտողություն: Հավանականությունների տեսության աքսիոմատիկան ներմուծելուց հետո պատահույթների հավանականությունները կսահմանենք անմիջականորեն, այլ ոչ պատահական ելքերի հավանականությունների միջոցով: Չէ՞ որ (1.2) բանաձևով կարելի է որոշել միայն այն պատահույթների հավանականությունները, որոնք բաղկացած են վերջավոր կամ հաշվելի թվով տարրական պատահույթներից: Սակայն տարրական պատահույթների դիսկրետ տարածությունում միշտ հնարավոր է հավանականության ներմուծումը՝ համաձայն սահմանում 1.3-ի:

Օրինակ 1: Պարագրաֆ 1.2-ի օրինակ 3-ի փորձում դրամը նետվում էր մինչև առաջին անգամ զինանշանի բացվելը: Վերագրենք պատահական ելքերին հետևյալ հավանականությունները.

$$\begin{array}{llllll} \omega_i: & Գ & ԳԶ & ԳԳԶ & ԳԳԳԶ & \ldots \\ p_i: & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{16} & \ldots \end{array}$$

Ստուգենք (1.1) պայմանը: Համաձայն անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևի՝

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1:$$

$A = \{\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2n}, \ldots\}$ պատահույթի (զինանշանը բացվել է մետաղադրամի զույգ քանակությամբ նետումների արդյունքում) հավանականությունը հավասար է՝

$$\mathrm{P}(A) = p_2 + p_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}:$$

Հավանակության դասական սահմանումը: Դիտարկենք կանոնավոր մետաղադրամի նետման պարզագույն փորձը: Փորձի արդյունքը ստույգ որոշել հնարավոր չէ, քանի որ անհնար է հաշվի առնել դրա վրա ազդող բոլոր գործոնները: Մյուս կողմից, եթե մետաղադրամը նետվում է n անգամ, ապա «գիր» և «զինանշան» բացվելու թվերի՝ $n(\text{Գ})$ և $n(\text{Զ})$, հարաբերությունները n-ի, որոնք կոչվում են *հարաբերական հաճախականություններ*, փորձնականորեն n-ի մեծացմանը զուգընթաց ավելի ու ավելի են մոտենում $1/2$-ին:

Այս փորձում տարրական պատահույթները *հավասարահնարավոր են* (հիմք չկա պնդելու, որ դրանցից մեկի հանդես գալը գերադասելի է մյուսներից), և որպես նրանց հանդես գալու օբյեկտիվ հնարավորության քանակական բնութագիրչ կարելի է վերցնել $1/2$ թիվը:

Կանոնավոր խաղոսկրի նետման դեպքում ունենք 6 հավասարահնարավոր ելքեր՝ "1","2",...,"6", և դրանցից յուրաքանչյուրի հանդես գալու հնարավորությունը կարելի է գնահատել $1/6$ թվով:

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր դեպք: Դիցուք Ω-ն վերջավոր բազմություն է՝ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, որտեղ բոլոր ω_i, $i = \overline{1,n}$ ելքերը հավասարահնարավոր են: Այս դեպքում նրանցից յուրաքանչյուրին կարող ենք համապատասխանեցնել $1/n$ թիվը, որը և կանվանենք տարրական պատահույթի *հավանականություն*:

Յուրաքանչյուր փորձ, որին համապատասխանող տարրական պատահույթների Ω բազմությունը վերջավոր հավասարահնարավոր ելքերի բազմություն է, կոչվում է *դասական սխեմա:*

Դասական սխեմայում հավանականության գաղափարը տարրական պատահույթներից տարածվում է կամայական պատահույթների վրա՝ հետևյալ ձևով:

Եթե $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ պատահույթը կազմված է k $(1 \le k \le n)$ տարրական ելքերից, ապա բնական է A պատահույթի հավանականությունը սահմանել հետևյալ ձևով՝

$$\mathrm{P}(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

կամ

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}:$$

Այսպիսով, դասական սխեմայում ցանկացած A պատահույթի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթին նպաստավոր տարրական ելքերի և թվի փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի թվի հարաբերությանը:

Օրինակ 2: 36 խաղաթղթերի կապուկից պատահականորեն հանում ենք մեկը: Ինչպիսին է հավանականությունը, որ հանված խաղաթուղթը «կարմիր» է:

Մեզ հետաքրքրող $A=$ {հանված է «կարմիր» խաղաթուղթ} պատահույթին նպաստավոր կլինեն փորձի 36 ելքերից 18-ը («կարմիր» խաղաթղթերի թիվը կապուկում): Հետևաբար՝ $P(A)=18/36=1/2$:

Օրինակ 3: Երկու խաղոսկր նետելիս որոշել բացվող նիշերի գումարի՝ չորսին չգերազանցելու հավանականությունը:

Քանի որ երկու խաղոսկր գցելիս փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի թիվը 36 է, իսկ մեզ հետաքրքրող A պատահույթին նպաստավոր են հետևյալ վեց ելքերը՝ $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, հետևաբար՝ $P(A)=6/36=1/6$:

§1.4. Երկրաչափական հավանականություն

Վերադառնանք §1.2-ի օրինակ 4-ին: Կետը պատահականորեն նետում ենք $[0,1]$ հատվածի վրա: Հատվածի յուրաքանչյուր կետ պատահական ելք է: Այս դեպքում որոշել հավասարահնարավոր տարրական $\omega\in[0,1]$ պատահույթների հավանականությունն այնպես, ինչպես վերջավոր տարածության դեպքում անհնար է: Իսկապես, եթե վերցնենք $P(\omega)=a>0$, ապա $P(\Omega)=\infty$, այսինքն՝ խախտվում է $P(\Omega)=1$ պայմանը, իսկ եթե վերցնենք $p(\omega)=0$, ապա $P(\Omega)=0$, և դարձյալ խախտվում է $P(\Omega)=1$ պայմանը: Այս վիճակից ելքն այն է, որ հավանականությունը սահմանվի տարրական ելքերի բազմությունների համար: Բնական է ընդունել, որ կետի $[0,1]\subseteq[a,b]$ հատվածին ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա երկարությանը՝ $(b-a)$-ին: Մյուս կողմից՝ հայտնի է, որ $[0,1]$ հատվածի ոչ բոլոր բազմությունների համար է հնարավոր որոշել դրանց երկարությունը:

Այսպիսով, հավանականությունը հնարավոր է որոշել միայն պատահույթների որոշ բազմությունների վրա: Հավանականային տարածության այդպիսի օրինակ է *հավանականության երկրաչափական սահմանումը*:

Դիցուք Ω-ն n - չափանի էվկլիդյան $\mathbb{R}^n$ տարածության սահմանափակ բազմություն է, որն ունի «n-չափանի ծավալ»:

$\mathbb{R}^3$-ում Ω-ն մարմին է, որի «ծավալը» համընկնում է սովորական երկրաչափական ծավալ գաղափարի հետ:

$\mathbb{R}^2$-ում Ω-ն հարթ պատկեր է, իսկ «երկրաչափական ծավալը» նրա մակերեսն է:

$\mathbb{R}^1$-ում Ω-ն հատված է, իսկ նրա «ծավալը» հատվածի երկարությունն է:

Նշանակենք $\mathcal{F}$-ով Ω-ի «n-չափանի ծավալ» ունեցող ենթաբազմությունների բազմությունը:

Սահմանում 1.4 : $\mathcal{F}$ բազմության ցանկացած A ենթաբազմության (պատահույթի) հավանականություն կանվանենք A-ի «ծավալի» հարաբերությունը Ω-ի «ծավալին»

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega}: \tag{1.3}$$

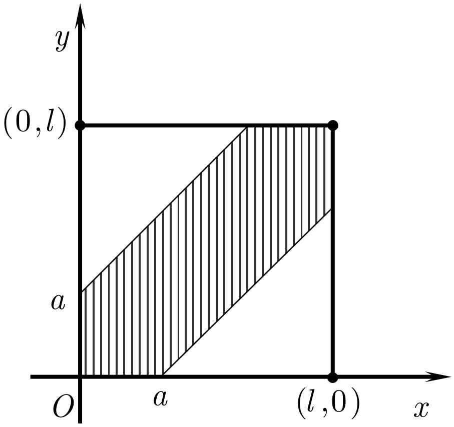
Մեկնաբանություն: (1.3) բանաձևը $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ սահմանափակ բազմության վրա պատահականորեն նետված կետի՝ $A \subset \Omega$ ենթաբազմության վրա ընկնելու հավանականությունն է :

Օրինակ 1 : Կետը պատահականորեն նետում ենք $[0,1]$ հատվածի վրա: Հավանականությունը, որ այն կընկնի $0,5$ կետի վրա, հավասար է զրոյի, քանի որ կետի «ծավալը» (կետի երկարությունը) հավասար է զրոյի: Սակայն $0,5$ կետն ընկնելը անհնար պատահույթ չէ. Դա փորձի տարրական ելքերից մեկն է:

Օրինակ 2 : Երկու մարդ պայմանավորվում են l ժամանակահատվածում հանդիպել որոշակի վայրում: Հանդիպման վայր առաջինը եկածը սպասում է մյուսին $a(a < l)$ ժամ: Գտնել հանդիպման հավանականությունը:

Լուծում: Դիցուք A պատահույթն այն է, որ հանդիպումը կայացել է: Նշանակենք x-ով և y-ով հանդիպողների գալու պահերը:

Պարզ է, որ x, $y \in [0, l]$, և Ω-ն l կողմով քառակուսի է: Որպեսզի հանդիպումը կայանա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $|x-y| \le a$ անհավասարությունը, այսինքն՝ A պատահույթն այն է, որ քառակուսու վրա նետված կետն ընկնի նկ. 1.4-ում ստվերագծված տիրույթ: Ուստի



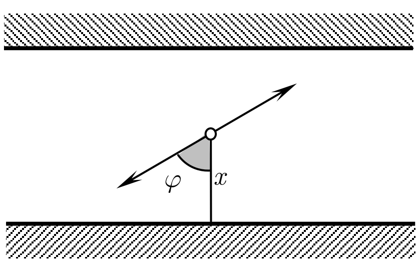
Նկ. 1.4.

$$mesA = l^2 - (l-a)^2 = a(2l-a)$$

և հետևաբար՝ ըստ (1.3) բանաձևի՝

$$P = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{a(2l-a)}{l^2}:$$

Բյուֆոնի խնդիր: Հարթության վրա միմյանցից a հեռավորությամբ տարված են զուգահեռ ուղիղներ: Հարթության վրա պատահականորեն նետում ենք l $(l < a)$ երկարության ասեղ: Գտնել ասեղի՝ ուղիղներից որևէ մեկը հատելու հավանականությունը:



Նկ. 1.5.

Լուծում: x-ով նշանակենք ասեղի միջնակետի հեռավորությունը մոտակա ուղղից և φ-ով՝ ասեղի և նրա միջնակետից ուղղին իջեցրած ուղղահայացի կազմած սուր անկյունը (նկ. 1.5):

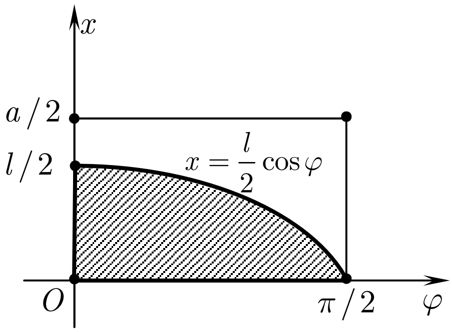
(x, φ) զույգը որոշում է ասեղի դիրքը ուղիղների նկատմամբ և բավարարում է

$$\begin{cases} 0 \le x \le a/2, \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$$

անհավասարություններին:

Ω-ն $a/2$ և $\pi/2$ կողմերով ուղղանկյուն է (նկ. 1.6):

Ասեղի՝ ուղղի հետ հատմանը (A պատահույթ) նպաստավոր են այն



Նկ. 1.6.

(x,φ) ելքերը, որոնք բավարարում են $x \le l/2 \cdot \cos\varphi$ անհավասարությանը: Այլ կերպ ասած՝ A պատահույթին նպաստավոր է (x,φ) կետի՝ նկ. 1.6-ի ստվերագծված տիրույթ ընկնելը: Հետևաբար՝

$$mes\,A = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{l}{2}\sin\varphi \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}:$$

Համաձայն (1.3) բանաձևի՝ կստանանք .

$$P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi a}:$$

ԳԼՈՒԽ 2
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄԱՏԻԿԱՆ

§2.1. Պատահույթների հանրահաշիվ և սիգմա-հանրահաշիվ

Պատահույթների դիսկրետ տարածությունում P հավանականությունը որոշվում է Ω-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմության վրա: Երկրաչափական հավանականությունը սահմանվում է Ω-ի՝ բոլոր *"ծավալ"* ունեցող ենթաբազմությունների $\mathcal{F}$ բազմության համար:

Կամայական Ω բազմության դեպքում նախ առանձնացվում են Ω-ի որոշակի $\mathcal{F}$ դասի ենթաբազմություններ, որոնք կանվանենք պատահույթներ, այնուհետև հավանականությունը սահմանվում է որպես ֆունկցիա՝ որոշված *միայն* պատահույթների բազմության վրա:

Այսպիսով, պատահույթներ կանվանենք Ω-ի ոչ թե բոլոր ենթաբազմությունները, այլ որոշակիորեն առանձնացված խմբի տարրերը: Ընդ որում, անհրաժեշտ է հետևել, որ այդ խումբը լինի *փակ* պատահույթների հետ կատարվող սովորական գործողությունների նկատմամբ: Այսինքն, պատահույթների միավորումը, հատումը և հակադրումը կրկին պետք է հանգեցնի պատահույթի:

Ասվածից բխում է, որ Ω-ից առանձնացված դասը հանրահաշվական կառուցվածք է: Սովորաբար, որպես $\mathcal{F}$ դաս օգտագործվում է պատահույթների σ-*հանրահաշիվը*, որի սահմանման համար նախապես ներմուծենք պատահույթների *հանրահաշվի* գաղափարը:

Սահմանում 2.1: Ω-ի ենթաբազմությունների $\mathcal{A}$ դասը կոչվում է *հանրահաշիվ,* եթե այն բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին.

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(A2) *եթե* $A \in \mathcal{A}$, *ապա* $\overline{A} \in \mathcal{A}$,

(A3) *եթե* $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, *ապա* $A \cup B \in \mathcal{A}$:

(A1) և (A2) աքսիոմներից բխում է, որ $\varnothing = \overline{\Omega}$-ն նույնպես պատկանում է $\mathcal{A}$ հանրահաշվին:

Հատկություն 1: Հանրահաշվի սահմանման մեջ (A3) աքսիոմը կարելի է փոխարինել (A4)-ով.

(A4) *եթե* $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, *ապա* $A \cap B \in \mathcal{A}$:

Ապացույց: Ցույց տանք, որ եթե բավարարված են (A1) և (A2) աքսիոմները, ապա (A3)-ից հետևում է (A4)-ը: Եթե $A, B \in \mathcal{A}$, ապա ըստ (A2)-ի $\overline{A} \in \mathcal{A}$ և $\overline{B} \in \mathcal{A}$: Կիրառելով (A3) աքսիոմը $\overline{A}$-ի և $\overline{B}$-ի նկատմամբ՝ կստանանք, որ $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{A}$: Դարձյալ օգտվելով (A2)-ից՝ կունենանք, որ $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$: Համաձայն երկակիության առնչության՝

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}:$$

Հանգունորեն ցույց է տրվում, որ եթե բավարարված են (A1) և (A2) աքսիոմները, ապա (A4)-ից հետևում է (A3)-ը: □

Հատկություն 2: Եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, ապա $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$:

Հատկություն 2-ն ապացուցվում է ինդուկցիայով (ըստ n-ի)՝ կիրառած (A3) աքսիոմի նկատմամբ:

Օրինակ 1. Դիցուք $\Omega = \{♣, ♦, ♥, ♠\}$: Ω-ի ենթաբազմությունների հետևյալ խմբերը հանրահաշիվներ են.

1. $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\} = \{\{♣, ♦, ♥, ♠\}, \varnothing\}$ (*տրիվիալ հանրահաշիվ*);
2. $\mathcal{A} = \{\{♣, ♦, ♥, ♠\}, \varnothing, \{♦\}, \{♣, ♥, ♠\}\}$;
3. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ (Ω-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմություն):

Վարժություն: Ապացուցել, որ եթե Ω-ն բաղկացած է վերջավոր թվով n հատ տարրերից, ապա դրա ենթաբազմությունների բազմությունը բաղկացած է ճիշտ 2^n տարրերից:

Պատահույթների սիգմա - հանրահաշիվ: Հավանականությունների տեսությունում հաճախ հարկ է լինում միավորել (հատել) հաշվելի թվով պատահույթներ և այդպիսի միավորման (հատման) արդյունքը նույնպես համարել պատահույթ: Ընդ որում, հանրահաշվի (A3) աքսիոմը բավական չէ. դրանից դեռ չի բխում, որ հանրահաշվին պատկանող հաշվելի թվով ենթաբազմությունների հատումը նույնպես պատկանում է այդ հանրահաշվին: Այդ պատճառով բնական է ավելի խիստ սահմանափակում դնել պատահույթների դասի վրա:

Սահմանում 2.2: Ω-ի ենթաբազմությունների $\mathcal{F}$ դասը կոչվում է σ-*հանրահաշիվ,* եթե այն բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին.

(S1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(S2) *եթե* $A \in \mathcal{A}$, *ապա* $\overline{A} \in \mathcal{A}$,

(S3) *եթե* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *ապա* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$:

Աքսիոմների այս խումբը բավարար է, որպեսզի $\mathcal{F}$ դասը փակ լինի բազմությունների հետ կատարվող բոլոր այլ հաշվելի թվով գործողությունների նկատմամբ: Մասնավորապես, հատկություն 1-ին համանմանորեն ապացուցվում է հետևյալ պնդումը:

Հատկություն 3: σ-հանրահաշվի սահմանման մեջ (S3) աքսիոմը կարելի է փոխարինել (S4)-ով.

(S4) *եթե* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *ապա* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$:

Հատկություն 4: Ցանկացած σ-հանրահաշիվ հանրահաշիվ է:

Ապացույց: Դիցուք $\mathcal{F}$-ը σ-հանրահաշիվ է: Ցույց տանք, որ այն բավարարում է (A3) աքսիոմին, այսինքն, եթե $A \in \mathcal{F}$ և $B \in \mathcal{F}$, ապա $A \cup B \in \mathcal{F}$: Վերածենք A, B զույգը պատահույթների հաշվելի հաջորդականության հետևյալ կերպ. $A_1 = A$, $A_2 = B$, երբ $i \geq 2$: Ակնհայտ է, որ $A \cup B$ պատահույթը համընկնում է $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ պատահույթին, և քանի որ $\mathcal{F}$-ը σ-հանրահաշիվ է, ապա՝

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}: \qquad \square$$

Այսպիսով, ցանկակացած σ-հանրահաշիվ հանրահաշիվ է, սակայն հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Օրինակ 1-ում բերված բոլոր հանրահաշիվները σ-հանրահաշիվներ են, քանի որ պարունակում են վերջավոր թվով տարրեր; Ընդհանրապես, վերջավոր բազմության վրա հանրահաշվի և σ-հանրահաշվի գաղափարները համընկնում են:

$(\Omega, \mathcal{F})$ զույգը, որտեղ $\mathcal{F}$-ը Ω-ի ենթաբազմությունների որևէ σ-հանրահաշիվ է, կոչվում է *չափելի տարածություն:*

Բորելյան բազմություններ: Կառուցենք σ-հանրահաշվի մի օրինակ, որն անհրաժեշտ է մեզ հետագայում: Դա իրական առանցքի բորելյան բազմությունների σ-հանրահաշվին է:

Դիցուք $\Omega = \mathbb{R}$, իսկ $\mathcal{U}$ բազմությունը բաղկացած է (a,b) տիպի բոլոր բաց միջակայքերից. $\mathcal{U} = \{(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\}$:

Սահմանում 2.3: Իրական առանցքի բոլոր միջակայքերի $\mathcal{U}$ բազմությունը պարունակող մինիմալ σ-հանրահաշիվը կոչվում է *բորելյան σ-հանրահաշիվ* և նշանակվում է $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ով:

Պարզ է, որ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ը բոլոր (a,b) տիպի միջակայքերը պարունակող σ-հանրահաշիվների հատումն է: Այն դատարկ չէ, քանի որ այդպիսի σ-հանրահաշիվ կա՝ $\mathbb{R}$-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը:

Թվարկենք թվային առանցքի որոշ բազմություններ, որոնք պատկանում են $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ին: Համաձայն (S1) աքսիոմի՝ $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: Այժմ ցույց տանք, որ բոլոր մեկկետանի $\{x\}$ բազմությունները նույնպես պատկանում են $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ին: Իրոք, ըստ սահմանման $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ միջակայքերը պատկանում են $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ին ցանկացած n-ի դեպքում: Քանի որ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ը σ-հանրահաշիվ է, ապա, համաձայն (S4) աքսիոմի, իր տարրերի հաշվելի հատումը պատկանում է իրեն, այսինքն՝

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}):$$

Նկատենք, որ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ին են պատկանում նաև բոլոր $(a,b]$ ($[a,b)$ և $[a,b]$) տիպի միջակայքերը, որպես բաց միջակայքի և կետի (երկու կետերի) միավորում. $(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$:

Բորելյան σ-հանրահաշիվը $\mathbb{R}^n$-ում կառուցվում է ճիշտ նույն ձևով, ինչպես $\mathbb{R}$-ում: Այն մինիմալ σ-հանրահաշիվն է, որը պարունակում է բոլոր $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \ldots \times (a_n,b_n)$ տեսքի բազմությունները, որոնք արդեն միջակայքեր չեն ինչպես $\mathbb{R}$-ում, այլ ուղղանկյուններ են $\mathbb{R}^2$-ում, զուգահեռանիստեր $\mathbb{R}^3$-ում և այլն: Ընդ որում, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ պարունակում է բոլոր «սահմանային» բազմությունները: Օրինակ, շրջանը $\mathbb{R}^2$-ում բորելյան բազմություն է. Այն ներսից կամ դրսից կարելի է մոտարկել ուղղանկյունների միավորումով:

Այսպիսով, սահմանեցինք Ω-ի ենթաբազմությունների հատուկ $\mathcal{F}$ դասը ($\boldsymbol{\sigma}$-հանրահաշիվ): Հաշվելի թվով գործողությունների կիրառումը $\mathcal{F}$ դասի բազմությունների նկատմամբ կրկին տալիս է բազմություն $\mathcal{F}$ դասից, այսինքն՝ դուրս չի բերում այդ դասի սահմաններից: Այսուհետ *պատահույթներ* կանվանենք միայն $A \in \mathcal{F}$ բազմությունները:

§2.2. Հավանականության սահմանումը

Տարրական պատահույթների դիսկրետ տարածության դեպքում հավանականությունը սահմանվում էր Ω-ի բոլոր ենթաբազմությունների համար: Երկրաչափական հավանականությունը սահմանվում էր Ω-ի բոլոր «ծավալ» ունեցող ենթաբազմությունների համար: Այժմ սահմանենք *հավանականության* գաղափարը՝ որպես ֆունկցիա որոշված պատահույթների բազմության վրա (ֆունկցիա, որն ամեն մի պատահույթի համապատասխանեցնում է որոշակի թիվ՝ այդ պատահույթի հավանականությունը): Նշենք նաև, որ հավանականությունը կսահմանենք որպես *ոչ բացասական նորմավորված չափ* տրված Ω-ի ենթաբազմությունների $\mathcal{F}$ $\boldsymbol{\sigma}$-հանրահաշվի վրա:

Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F})$-ը չափելի տարածություն է, այսինքն՝ Ω-ն տարրական ելքերի տարածություն է, իսկ $\mathcal{F}$-ը՝ Ω-ի ենթաբազմությունների (պատահույթների) $\boldsymbol{\sigma}$-հանրահաշիվ:

Սահմանում 2.4: $\boldsymbol{m} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ թվային ֆունկցիան կոչվում է *չափ* $(\Omega, \mathcal{F})$ տարածության վրա, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմանները.

(m1) $\boldsymbol{m}(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}$:

(m2) Եթե հաշվելի թվով զույգ առ զույգ անհամատեղելի $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ պատահույթները պատկանում են $\mathcal{F}$-ին, ապա՝

$$\boldsymbol{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{m}(A_k):$$

Օրինակ 1. Դիցուք $\Omega = \mathbb{N}, \quad \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$: $\mathcal{F}$ հանրահաշվի վրա $\boldsymbol{m}$ չափը սահմանենք հետևյալ առնչությամբ. $\boldsymbol{m}(A) = |A|$, որտեղ $|A|$-ն A բազմության տարրերի քանակն է:

Օրինակ 2 (Լեբեգի չափ): Երկրաչափական հավանականությունը, սահմանելիս օգտագործեցինք $\mathbb{R}^n$-ում A բազմության «n-չափանի ծավալ» տերմինը՝ նկատի ունենալով «երկարություն» ուղղի դեպքում, «մակերես» հարթության դեպքում և «ծավալ» տարածության դեպքում: Հարց է առաջանում, այս հասկացություններն արդյոք հանդիսանում են չափեր՝ սահմանում 2.4-ի իմաստով: Տանք այս հարցի պատասխանը ուղղի դեպքում:

Դիտարկենք իրական ուղղի բորելյան բազմությունների σ-հանրահաշիվը: Սահմանման համաձայն՝ այս σ-հանրահաշիվը բոլոր միջակայքերը պարունակող մինիմալ σ-հանրահաշիվն է: Յանկացած (a,b) միջակայքի համար $b-a$ թիվը կանվանենք (a,b) միջակայքի *երկարություն*: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը, որի ապացույցն այստեղ չենք բերի:

Թեորեմ 2.1: *$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ չափելի տարածությունում գոյություն ունի միակ λ չափ, որի արժեքը ցանկացած միջակայքի համար հավասար է այդ միջակայքի երկարությանը՝ $\lambda(a,b)=b-a$: Այդ չափը կոչվում է Լեբեգի չափ:*

Այժմ կարող ենք հավանականության գաղափարը սահմանել որպես նորմավորված չափ:

Սահմանում 2.5: $(\Omega,\mathcal{F})$ չափելի տարածության վրա *հավանականություն* կամ *հավանականային չափ* է կոչվում $\mathrm{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ թվային ֆունկցիան, որը բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին.

(P1) $\mathrm{P}(\Omega)=1$,

(P2) $\mathrm{P}(A)\ge 0, \quad \forall A\in\mathcal{F}$,

(P3) Եթե $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$ պատահույթները պատկանում են $\mathcal{F}$-ին և զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա՝

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_k):$$

$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ եռյակը, որտեղ $(\Omega,\mathcal{F})$-ը չափելի տարածություն է, իսկ P-ն՝ $\mathcal{F}$-ի տարրերի վրա որոշված հավանականություն, կոչվում է *հավանականային տարածություն:*

Անմիջապես հավանականության սահմանումից հետևում են հավանականության հետևյալ հատկությունները.

Թեորեմ 2.2: *Հավանականությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով.*

1. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$,

2. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$,

3. *Եթե* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *պատահույթները պատկանում են* $\mathcal{F}$*-ին և զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k),$$

4. *Եթե* $A\subset B$, *ապա* $\mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(B)$,

5. $\mathrm{P}(A\bigcup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$*:*

Ապացույց: 1. $A_1=\Omega$ և $A_i=\varnothing$, $i\ge 2$ պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, և դրանց միավորումը Ω-ն է: Համաձայն (P1) և (P3) աքսիոմների՝

$$1=\mathrm{P}(\Omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i)=1+\sum_{i=2}^{\infty}\mathrm{P}(\varnothing):$$

Վերջինս հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $\mathrm{P}(\varnothing)=0$:

2. Վերցնենք $A_i=\varnothing$, երբ $i>n$: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \varnothing, \varnothing, \ldots\in\mathcal{F}$ պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, և ըստ (P3) աքսիոմի՝

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k):$$

3. Ω հավաստի պատահույթը կարելի է ներկայացնել որպես A և $\overline{A}$ անհամատեղելի պատահույթների միավորում՝ $\Omega=A\cup\overline{A}$: Համաձայն հատկություն 2-ի՝ $1=\mathrm{P}(\Omega)=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$:

4. Եթե $A\subset B$, ապա պարզ է, որ B-ն կարելի է ներկայացնել $B=A\cup B\overline{A}$ տեսքով, հետևաբար՝

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\overline{A})\ge \mathrm{P}(A):$$

5. $A\cup B$ և B պատահույթները ներկայացնենք $A\cup B=A\cup B\overline{A}$ և $B=BA\cup B\overline{A}$ տեսքերով: Նկատենք, որ այս հավասարումների աջ մասերում գրված են անհամատեղելի պատահույթներ, հետևաբար՝

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\overline{A}),\quad \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(BA)+\mathrm{P}(B\overline{A}):$$

Հատկություն 5-ը անմիջապես բխում է վերջին հավասարություններից: $\square$

Թեորեմ 2.3 (անընդհատության աքսիոմ)**:** *$\mathcal{F}$ **σ**-հանրահաշվի պատահույթների ցանկացած նվազող $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots$ հաջորդականության համար այնպես, որ $\mathrm{P}(C_1) < \infty$ և*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C \in \mathcal{F},$$

տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n) = C:$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Նշանակենք $B_n = C_n \setminus C_{n+1}$: $C, B_1, B_2, \ldots$ բազմություն-ները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ուստի

$$C_1 = C \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right), \quad C_n = C \cup \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} B_i\right)$$

ներկայացումներից, համաձայն (P3) աքսիոմի, կստանանք նմանատիպ հավասարություններ հավանականությունների համար՝

$$\mathrm{P}(C_1) = \mathrm{P}(C) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_i), \quad \mathrm{P}(C_n) = \mathrm{P}(C) + \sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(B_i):$$

Համաձայն $\mathrm{P}(C_1) < \infty$ պայմանի՝ $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_i)$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, հետևաբար՝ շարքի պոչը՝ $\sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(B_i)$ ձգտում է զրոյի, երբ $n \to \infty$: Այդ պատճառով

$$\mathrm{P}(C_n) = \mathrm{P}(C) + \sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(B_i) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{P}(C) + 0 = \mathrm{P}(C): \qquad \square$$

Հետևանք: *$\mathcal{F}$ **σ**-հանրահաշվի պատահույթների ցանկացած աճող $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots$ հաջորդականության համար*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C \in \mathcal{F},$$

հետևապես՝ տեղի ունի $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n) = C$ հավասարությունը:

Նշենք, որ անընդհատության հատկությունը բնորոշ է ոչ միայն հավանականությանը, այլ և կամայական չափի: Դրա օգտակարությունը միանգամից պարզ է դառնում՝ դիտարկելով հետևյալ վարժությունը:

Վարժություն: Կիրառելով անընդհատության աքսիոմը $C_n = (x_n - 1/n, x_n + 1/n)$ բազմությունների նվազող հաջորդականության նկատմամբ, ցույց տալ, որ թվային ուղղի մեկկետանի $\{x\}$ ենթաբազմության Լեբեգի չափը հավասար է զրոյի՝ $\lambda\{x\} = 0$: Օգտագործելով այս փաստը՝ ապացուցել, որ $\lambda(\mathbb{N}) = 0$, $\lambda(\mathbb{Z}) = 0$, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$:

ԳԼՈՒԽ 3
ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆ

§3.1. Պայմանական հավանականություն

Խնդիր 1: Դիտարկենք n հատ հավասարահնարավոր տարրական ելքեր պարունակող Ω բազմությունը: Դիցուք A պատահույթի իրականացմանը նպաստավոր են k $(1 \le k \le n)$ հատ տարրական ելքեր, իսկ B և AB պատահույթներին՝ համապատասխանաբար $m(1 \le m \le n)$ և $s(1 \le s \le \min(k,m))$: Պահանջվում է գտնել A պատահույթի հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ իրականացել է B պատահույթը: Նշանակենք այդ հավանականությունը $\mathrm{P}(A \mid B)$-ով:

Ակնհայտ է, որ

$$\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n},\ \mathrm{P}(B) = \frac{m}{n},\ \mathrm{P}(AB) = \frac{s}{n}:$$

Քանի որ B պատահույթն արդեն տեղի է ունեցել, ապա A-ին կնպաստեն s ելքեր հնարավոր m ելքերից: Հետևաբար՝ $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{s}{m}$:

Մյուս կողմից՝ $\dfrac{s}{m} = \dfrac{s/m}{m/n} = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$, որից բխում է

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)},\quad (\mathrm{P}(B) > 0) \tag{3.1}$$

հավասարությունը:

Խնդիր 2: n-չափանի էվկլիդյան տարածության վերջավոր ծավալի Ω տիրույթի վրա նետվում է կետ: Ω-ի A, B և AB ենթաբազմություններն ունեն $\operatorname{mes} A$, $\operatorname{mes} B$ և $\operatorname{mes} AB$ վերջավոր ծավալներ: Գտնել հավանականությունը, որ Ω նետված կետը կընկնի A տիրույթ, եթե հայտնի է, որ այն ընկել է B տիրույթ: Ըստ էության, կետը նետվում է B տիրույթ, հետևաբար հավանականությունը, որ այն կընկնի B-ի ենթաբազմության՝ AB վրա, համաձայն երկրաչափական հավանականության, կլինի՝

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\operatorname{mes} AB}{\operatorname{mes} B},$$

որտեղ $\mathrm{P}(A \mid B)$-ն որոնելի հավանականությունն է: Մյուս կողմից՝

$$\frac{\operatorname{mes} AB}{\operatorname{mes} B} = \frac{\operatorname{mes} AB}{\operatorname{mes} \Omega} \cdot \frac{\operatorname{mes} \Omega}{\operatorname{mes} B} = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)},$$

այսինքն՝ կրկին ստացվում է (3.1)-ը:

Այսպիսով, ցանկացած $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ հավանականային տարածության համար բնական է հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում 2.1: Դիցուք $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ և $\mathrm{P}(B) > 0$: A պատահույթի *պայմանական հավանականություն*՝ $\mathrm{P}(A \mid B)$, այն պայմանով, որ իրականացվել է B պատահույթը, կոչվում է A և B պատահույթների համատեղ իրականացման հավանականության հարաբերությունը B պատահույթի հավանականությանը՝

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}:$$

Հատկություններ:

1. $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0,$
2. եթե $B \subseteq A$, ապա $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1,$
3. եթե $A_1, A_2, \ldots$ պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n \mid B)$:

Առաջին երկու հատկություններն ակնհայտ են, ապացուցենք երրորդը: Ունենք

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n B)\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)}:$$

Օգտվելով հաշվելի ադիտիվության հատկությունից՝ կստանանք՝

$$\frac{\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n B))}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n B)}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(A_n B)}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n \mid B):$$

Որոշ դեպքերում հնարավոր է լինում գտնել պայմանական հավանականությունը նույնիսկ $\mathrm{P}(B)=0$ պայմանով: Նկարագրենք դրանցից մեկը:

Դիտարկենք $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ հավանականային տարածությունը, $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$ և $\mathrm{P}(B)=0$: Եթե գտնվի $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\ldots$ այնպիսի հաջորդականություն, որ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=B$, $\mathrm{P}(B_n)>0$, $\forall n\geq 1$, և գոյություն ունենա

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{P}(AB_n)}{\mathrm{P}(B_n)}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A\mid B_n), \tag{3.2}$$

սահմանը, ապա բնական է այն անվանել A պատահույթի պայմանական հավանականություն՝ B-ի իրականացման պայմանով: Իսկապես, $\mathrm{P}(B)=0$ պայմանից հետևում է $\mathrm{P}(AB)=0$ պայմանը, ուստի $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$-ն $\dfrac{0}{0}$ տիպի անորոշություն է: Այդ իսկ պատճառով (3.2) սահմանի գոյությունը հնարավոր է:

Նշենք, որ $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$-ում ֆիքսած B պատահույթի նկատմամբ որոշված պայմանական հավանականությունը թույլ է տալիս ներմուծել նոր հավանականային տարածություն՝ $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P}(\circ|B))$: Վերջինիս հիմնավորման համար բավական է ստուգել հավանականության աքսիոմները: Աքսիոմներ 1 և 3-ը համընկնում են պայմանական հավանականության հատկություններին, իսկ աքսիոմ 2-ը բխում է հատկություն 2-ից $A=\Omega$ դեպքում:

§3.2. Պատահույթների անկախություն

Դիտարկենք $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ հավանականային տարածությունը: Դիցուք $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$ և $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$: Համաձայն (3.1) բանաձևի

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A\mid B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A): \tag{3.3}$$

(3.3)-ը կոչվում է *բազմապատկման բանաձև:* Այն թույլ է տալիս կատարել հետևյալ ընդհանրացումը:

Ենթադրենք՝ $A_1,A_2,\ldots,A_n$-ը պատահույթներ են, և $\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)>0$: Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2\mid A_1)\cdot\mathrm{P}(A_3\mid A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n\mid A_1\ldots A_{n-1}):$$

Իսկապես, ցանկացած k-ի համար $(1 \le k \le n)$ $A_1A_2\ldots A_n \subseteq$ $\subseteq A_1A_2\ldots A_k$, հետևաբար՝ $\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_k) > 0$:

Համաձայն (3.1) բանաձևի՝ հետևյալ հավասարությունների շղթան հիմնավորված է՝

$$\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_n\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_n\right)}{\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_{n-1}\right)} \cdot \frac{\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_{n-1}\right)}{\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_{n-2}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathrm{P}\left(A_1A_2\right)}{E\left(A_1\right)} \cdot \mathrm{P}\left(A_1\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A_{n-1} \mid A_1A_2\ldots A_{n-2}\right) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_1\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(A_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}\left(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1}\right):$$

Բնական է A և B պատահույթները անվանել *անկախ*, եթե դրանցից որևէ մեկի իրականացումը չի ազդում մյուսի իրականացման վրա: Եթե ենթադրենք, որ $\mathrm{P}(A) > 0$ և $\mathrm{P}(B) > 0$, ապա այդ փաստը կարելի է ձևակերպել հետևյալ հավասարություններով՝

$$\mathrm{P}(A \mid B) = P(A),\ \ \mathrm{P}(B \mid A) = P(B): \tag{3.4}$$

Համեմատելով (3.3) և (3.4) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B):$$

Ընդհանուր դեպքում այս հավասարությունը կարելի է ընդունել որպես պատահույթների անկախության սահմանում:

Սահմանում 2.2: A և B պատահույթները կոչվում են *անկախ*, եթե

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B): \tag{3.5}$$

Սահմանումից բխում է, որ Ω $(\varnothing)$ պատահույթը և ցանկացած A պատահույթ անկախ են:

Հատկություն 1: Եթե A և B պատահույթները անկախ են, ապա անկախ են նաև $\bar{A}$ և B պատահույթները:

Իրոք, ունենք $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left((AB) \cup \bar{A}B\right) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\bar{A}B)$, որտեղից

$$\mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B)(1 - \mathrm{P}(A)) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(\bar{A}):$$

Հատկություն 2: Եթե A և B_1, A և B_2 պատահույթներն անկախ են, B_1 և B_2 պատահույթները անհամատեղելի են, ապա A և $B_1 \cup B_2$ պատահույթներն անկախ են:

Իրոք՝

$$\mathrm{P}[A(B_1 \cup B_2)] = \mathrm{P}(AB_1 \cup AB_2) = \mathrm{P}(AB_1) + \mathrm{P}(AB_2) =$$
$$= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(A)\cdot[\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(B_2)] = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B_1 \cup B_2):$$

Հատկություն 2-ում B_1 և B_2 պատահույթների անհամատեղելիությունը էական է A և $B_1 \cup B_2$ պատահույթների անկախության համար: Իսկապես, եթե $B_1B_2 \neq \varnothing$, ապա A և $B_1 \cup B_2$ պատահույթները կարող են լինել կախյալ:

Օրինակ 1: Դիտարկենք քառանիստ, որի նիստերը համարակալված են $1, 2, 3, 4$ թվանշաններով և ներկված են հետևյալ ձևով. $1, 2$ և 3 նիստերը ներկված են համապատասխանաբար կարմիր, դեղին և կանաչ գույներով, իսկ նիստ 4-ը բոլոր երեք գույներով: Պատահականորեն ընտրում ենք քառանիստի որևէ նիստը: Դիցուք A, B_1 և B_2 պատահույթները այն են, որ ընտրված նիստի վրա առկա են համապատասխանաբար կարմիր, դեղին և կանաչ գույները: Ունենք

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

որտեղ $\omega_i = \{$ ընտրված նիստը i-ն է$\}$, $i = \overline{1,4}$; $\mathrm{P}(\omega_i) = 1/4$:

Պարզ է, որ $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B_1 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B_2 = \{\omega_3, \omega_4\}$:

Ակնհայտ է նաև, որ $\mathrm{P}(AB_1) = \mathrm{P}(AB_2) = \mathrm{P}(\{\omega_4\}) = 1/4$, իսկ $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B_1) = 1/2\cdot 1/2 = 1/4$, $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B_2) = 1/2\cdot 1/2 = 1/4$, այսինքն՝ A և B_1, A և B_2 զույգերը անկախ են (ընդ որում՝ $B_1B_2 = \{\omega_4\} \neq \varnothing$); միաժամանակ՝

$$\mathrm{P}\{A(B_1 \cup B_2)\} = \mathrm{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B_1 \cup B_2):$$

Երկու պատահույթների անկախության (զույգ առ զույգ անկախության) գաղափարը ընդհանրացվում է ցանկացած վերջավոր թվով պատահույթների դեպքում:

Դիտարկենք A_1, A_2, A_3 պատահույթները: (3.5) բանաձևի նմանությամբ երեք պատահույթների անկախության սահմանումը, համաձայն

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(A_3) \tag{3.6}$$

հավասարության, հիմնավորված չէ, քանի որ (3.6)-ը դեռ բավարար չէ A_1 և A_2 պատահույթների անկախության համար: Դրանում կարելի է համոզվել՝ դիտարկելով հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 2: Դիցուք $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$, $P(\omega_k) = 1/8$, $k = \overline{1,8}$: Նշանակենք $A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\}$, $A_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}$, $A_3 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$: Ակնհայտ է, որ (3.6) հավասարությունը տեղի ունի, բայց

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2),$$

այսինքն՝ A_1 և A_2 պատահույթների անկախ չեն:

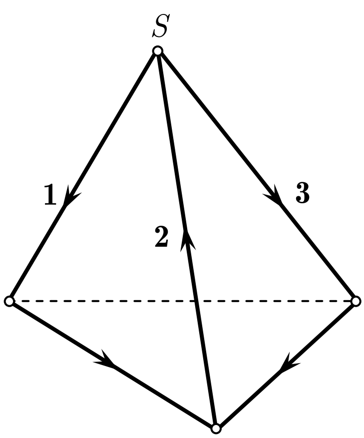
Նկատի ունենալով այս հանգամանքը՝ բնական է ընդունել հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում 2.2: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահույթները կանվանենք *անկախ՝ համախմբության մեջ,* եթե ցանկացած k-ի $(1 \leq k \leq n)$ և $i_1, i_2, \ldots, i_k$-ի $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$ համար տեղի ունի

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) \tag{3.7}$$

հավասարությունը:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահույթների համախմբության մեջ անկախությունից հետևում է նրանց զույգ առ զույգ անկախությունը: Հակառակը, ընդհանուր առմամբ, ասած, ճիշտ չէ, ինչը հաստատում է հետևյալ օրինակը:



Նկ. 3.1.

Օրինակ 3: Դիտարկենք քառանիստ, որի S գագաթից դուրս եկող կողերը համարակալված են 1,2,3 թվանշաններով: S գագաթով յուրաքանչյուր նիստի վրա ընտրենք կոնտուրը շրջանցող ուղղություն (ժամսլաքի կամ հակառակ ուղղությունը.) $1/2$ հավանականությամբ: Նշանակենք A_i-ով քառանիստի երկու նիստերի ընդհանուր i-րդ $(i = \overline{1,3})$ կողը շրջանցող ուղղությունների համընկնելու պատահույթը: Դժվար չէ նկատել, որ

$$P(A_i) = \frac{1}{2} \quad (i = 1,\, 2,\, 3), \;\; P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}, \;\; i \neq j \;\; \text{և} \;\; P(A_1 A_2 A_3) = 0:$$

Դիտողություն 3.1: Չի կարելի նույնացնել պատահույթների *անկախության* և *անհամատեղելիության* գաղափարները: Ավելին, եթե A և B պատահույթները անհամատեղելի են ($AB=\varnothing$) և $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$, ապա A-ն և B-ն անկախ չեն, որը հետևում է (3.5)-ից:

Ասվածը երեք պատահույթների համար ցուցադրված է օրինակ 3-ում: Պատահույթները անհամատեղելի են, բայց անկախ չեն համախմբության մեջ:

§3.3. Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը

Դիցուք A-ն որևէ պատահույթ է, իսկ $B_1,B_2,\dots,B_n$-ը զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների այնպիսի հաջորդականություն, որ $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}B_k$ և $\mathrm{P}(B_k)>0,\ k=\overline{1,n}$:

Թեորեմ 3.1: *Տեղի ունի, այսպես կոչված,* ***լրիվ հավանականության բանաձևը***՝

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A\mid B_k): \tag{3.8}$$

Ապացույց: Նկատենք, որ $A=\bigcup_{k=1}^{n}AB_k$, որտեղ $AB_1,AB_2,\dots,AB_n$ պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Վերջավոր ադիտիվության հատկությունից հետևում է, որ

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}AB_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(AB_k): \tag{3.9}$$

(3.8)-ը ստանալու համար բավական է (3.9)-ի աջ մասի նկատմամբ կիրառել հավանականությունների բազմապատկման բանաձևը: □

Օգտվելով հաշվելի ադիտիվության հատկությունից՝ (3.8) բանաձևը կարելի է տարածել հաշվելի թվով զույգ առ զույգ անհամատեղելի $B_1,B_2,\dots,B_n,\dots$ պատահույթների վրա, որոնց համար $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$ և $\mathrm{P}(B_k)>0,\ k\geq 1$.

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A\mid B_k): \tag{3.10}$$

Թեորեմ 3.2 : *Եթե նախորդ թեորեմի պայմաններում* $\mathrm{P}(A)>0$, *ապա տեղի ունեն, այսպես կոչված,* ***Բայեսի բանաձևերը***՝

$$\mathrm{P}(B_k\mid A)=\frac{\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A\mid B_k)}{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A\mid B_k)},\ 1\leq k\leq n: \tag{3.11}$$

Ապացույց: Համաձայն պայմանական հավանականության սահմանման և լրիվ հավանականության բանաձևի, կստանանք՝

$$\mathrm{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_k \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A \mid B_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A \mid B_k)}: \qquad \square$$

Դիտողություն 3.2 : Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը մասնավորապես տեղի ունեն այն դեպքում, երբ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, և այդ դեպքում ընդունված է $B_1, B_2, \ldots, B_n$ անվանել *հիպոթեզներ:*

Օրինակ 1 : Լամպեր պատրաստող գործարանում առաջին, երկրորդ և երրորդ մեքենաները համապատասխանորեն արտադրում են ամբողջ արտադրանքի 25, 35 և 40%-ը: Արտադրանքում խոտանը կազմում է համապատասխանաբար 5, 4 և 2 : Որոշել՝

ա) հավանականությունը, որ արտադրանքից պատահականորեն վերցված լամպը խոտանված է,

բ) հավանականությունը, որ արտադրանքից պատահականորեն վերցված լամպը պատրաստված է երկրորդ մեքենայով, եթե հայտնի է որ այն խոտանված է:

Լուծում: ա) Ներմուծենք B_1, B_2, B_3 հիպոթեզները, որտեղ՝

$B_i = \{$ արտադրանքից պատահականորեն վերցված լամպը պատրաստված է $i-$րդ մեքենայով $\}$, $i = \overline{1,3}$:

Պարզ է, որ՝

$\mathrm{P}(B_1) = 25/100 = 0{,}25$; $\mathrm{P}(B_2) = 35/100 = 0{,}35$; $\mathrm{P}(B_1) = 40/100 = 0{,}4$;

Դիցուք $A = \{$ արտադրանքից պատահականորեն վերցված լամպը խոտանված է $\}$: Համաձայն խնդրի պայմանների՝

$$\mathrm{P}(A \mid B_1) = 0{,}05;\ \mathrm{P}(A \mid B_2) = 0{,}04;\ \mathrm{P}(A \mid B_3) = 0{,}02 :$$

Կիրառելով լրիվ հավանականության բանաձևը, կստանանք՝

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B_i) \cdot \mathrm{P}(A \mid B_i) = 0{,}0345: \qquad (3.12)$$

բ) Համաձայն Բայեսի բանաձևերի և (3.12)-ի՝ կունենանք՝

$$\mathrm{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}04}{0{,}0345} = \frac{140}{345}:$$

ԳԼՈՒԽ 4
ԲԵՌՆՈՒԼԻԻ ՍԽԵՄԱՆ

§4.1. Բեռնուլիի բանաձևը

Սահմանում 4.1: Համախմբության մեջ անկախ փորձերի հաջորդականությունը, որոնցից յուրաքանչյուրում հնարավոր են երկու ելքեր, կոչվում է *Բեռնուլիի սխեմա* կամ Բեռնուլիի փորձեր:

Բեռնուլլիի սխեմայում յուրաքանչյուր փորձի հնարավոր երկու ելքերը կանվանենք «հաջողություն» և «անհաջողություն», ընդ որում, հաջողությունը յուրաքանչյուր փորձում տեղի է ունենում $p \in (0,1)$ հավանականությամբ, իսկ անհաջողությունը՝ $q = 1 - p$:

Նշանակենք μ_n-ով Բեռնուլիի n փորձերում հաջողությունների հանդես գալու թիվը: Պարզ է, որ այս մեծությունը կարող է ընդունել 0-ից մինչև n բոլոր ամբողջ արժեքները:

Թեորեմ 4.1 (Բեռնուլիի բանաձև): *Յանկացած $k = 0,1,2,\ldots,n$ թվի համար տեղի ունի*

$$\mathrm{P}(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} : \tag{4.1}$$

Ապացույց: $A = \{\mu_n = k\}$ պատահույթը նշանակում է, որ Բեռնուլլիի n փորձերում հաջողությունը տեղի է ունեցել ճիշտ k անգամ: Դիտարկենք այս պատահույթին նպաստավոր տարրական ելքերից մեկը՝

$$A_1 = (\underbrace{h,h,\ldots h}_{k}, \underbrace{ա,ա,\ldots,ա}_{n-k}),$$

երբ առաջին k փորձերը ավարտվել են հաջողությամբ, իսկ մնացածը՝ անհաջողությամբ: Քանի որ փորձերը անկախ են, ապա այս տարրական ելքի հավանականությունը հավասար է $p^k q^{n-k}$: Նկատենք, որ A-ին նպաստավոր այլ տարրական ելքեր տարբերվում են A_1-ից միայն k հաջողությունների դիրքերով n հնարավոր տեղերում: Կոմբինատոր բանաձևերից հայտնի է, որ k հաջողությունները n հնարավոր տեղերում կարելի է դասավորել C_n^k եղանակներով: Այսպիսով, A պատահույթը բաղկացած է C_n^k տարրական ելքերից, որոնցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը հավասար է $p^k q^{n-k}$, հետևաբար՝

$$\mathrm{P}(\mu_n = k) = \mathrm{P}(A) = C_n^k p^k q^{n-k} : \qquad \square$$

Սահմանում 4.2 : $\{C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\dots,n\}$ թվերի հաջորդականությունը կոչվում է հավանականությունների *բինոմական* բաշխում:

Նշանակենք ν-ով Բեռնուլիի սխեմայում առաջին հաջող փորձի համարը:

Թեորեմ 4.2 : *Հավանականությունը, որ առաջին հաջողությունը տեղի կունենա k-րդ ($k \in \mathbb{N}$) փորձում, հավասար է՝*

$$\mathrm{P}(\nu = k) = pq^{k-1} :$$

Ապացույց: Հավանականությունը, որ առաջին $k-1$ փորձերում տեղի կունենա անհաջողություն, իսկ վերջին k-րդում՝ հաջողություն, հավասար է՝

$$\mathrm{P}(\nu = k) = \mathrm{P}(\underbrace{ա, ա, \dots, ա}_{k-1}, h) = p^k q^{n-k} : \qquad \square$$

Սահմանում 4.3 : $\{pq^{k-1},\ k = 0,1,\dots,n\}$ թվերի հաջորդականությունը կոչվում է հավանականությունների *երկրաչափական* բաշխում:

§4.2. Անկախ փորձերի խնդրի ընդհանրացումը

Դիտարկենք անկախ փորձերի սխեմա՝ յուրաքանչյուր փորձում ոչ թե երկու, այլ մի քանի հնարավոր ելքերով:

Օրինակ 1 : Խաղոսկրը նետվում է 15 անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ "3"-ը հանդես կգա ճիշտ տասը անգամ, իսկ "1"-ը՝ երեք:

Այս օրինակում խաղոսկրի նետման յուրաքանչյուր փորձում հնարավոր են երեք ելքեր.՝ "3"-ի, "1"-ի և ցանկացած այլ նիստի հանդես գալը: Հետևաբար, օգտագործել Բեռնուլիի բանաձևը հնարավոր չէ:

Դուրս բերենք համապատասխան բանաձև որոնելի հավանականությունը հաշվելու համար: Դիցուք յուրաքանչյուր փորձում հնարավոր են m ելքեր՝ $A_1, A_2, \dots, A_m$, ընդ որում, A_i պատահույթի հավանականությունն ամեն մի առանձին փորձում կախում չունի փորձի համարից և հավասար է p_i-ի, որտեղ $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$: Նշանակենք $\mathrm{P}(n_1,n_2,\ldots,n_m)$-ով հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում A_1 պատահույթը հանդես կգա n_1 անգամ, A_2-ը՝ n_2 անգամ և վերջապես A_m-ը՝ n_m անգամ:

Թեորեմ 4.2 : *Ցանկացած $n\in\mathbb{N}$ բնական թվի և $n_1,n_2,\ldots,n_m$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի համար, որոնց գումարը հավասար է n-ի, տեղի ունի*

$$\mathrm{P}(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիտարկենք մեզ հետաքրքրող պատահույթին նպաստավոր տարրական ելքերից մեկը, երբ, օրինակ, A_1 պատահույթը հանդես է գալիս առաջին n_1 փորձերում, A_2-ը՝ հետևյալ n_2 փորձերում, և այլն, A_m-ը՝ վերջին n_m փորձերում.

$$(\underbrace{A_1,\ldots,A_1}_{n_1},\underbrace{A_2,\ldots,A_2}_{n_2},\underbrace{A_m,\ldots,A_m}_{n_m}): \qquad (4.2)$$

Այս պատահույթի իրականանալու հավանականությունը, համաձայն անկախ պատահույթների բազմապատկման թեորեմի, հավասար է՝

$$p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}:$$

Նկատենք, որ ամեն մի այլ նպաստավոր ելք կտարբերվի (4.2) մասնավոր դեպքից՝ միայն $A_1,A_2,\ldots,A_m$ ելքերի դիրքերով n հնարավոր տեղերում: Այսպիսի ելքերի թիվը հավասար է n տեղերում n_1 հատ A_1, n_2 հատ A_2 և այլ, n_m հատ A_m դասավորելու հնարավոր եղանակների թվին, այսինքն՝

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{m-1}}^{n_m}=\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}:$$

Այսպիսով, բոլոր նպաստավոր ելքերի քանակը $\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}$ է, որոնցից յուրաքանչյուրի իրականացման հավանականությունը նույնն է և հավասար է $p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}$-ի, հետևաբար, գումարման աքսիոմի համաձայն, կստանանք՝

$$\mathrm{P}(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}: \qquad \square$$

Այժմ կարող ենք վերադառնալ օրինակ 1-ի լուծմանը: Հավանականությունը, որ խաղոսկրի 15 նետումների արդյունքում կստանանք տասը "3", երեք հատ "1" և ևս երկու այլ միավորներ, հավասար է՝

$$\mathrm{P}(10,3,2)=\frac{15!}{10!\,3!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{2},$$

քանի որ յուրաքանչյուր փորձում "3"-ի և "1"-ի երևան գալու հավանականությունը $1/6$ է, իսկ այլ միավորներինը՝ $4/6$:

§4.3. Պուասոնի թեորեմը Բեռնուլիի սխեմայի համար

Հավանականությունների հաշվումը (4.1) բանաձևով զգալիորեն դժվարանում է n-ի մեծացման դեպքում, կապված բանաձևում ֆակտորիալների առկայության հետ: Ընդ որում, եթե p-ն մնում է անփոփոխ, ապա ցանկացած թվով հաջողություններ ստանալու հավանակնությունը փոքրանում է՝ ձգտելով զրոյի: Անհրաժեշտ է, որ հաջողության հավանականությունը՝ $p=p_n$, փոքրանա n-ի մեծացմանը զուգընթաց: Բայց, համաձայն Բեռնուլիի սխեմայի սահմանմանը, հաջողության p հավանականությունը փորձից փորձ փոփոխվել չի կարող: Հետևաբար, կդիտարկենք, այսպես կոչված, անկախ փորձերի «սերիաների սխեման». եթե կատարվում է մեկ փորձ, ապա հաջողության հավանականությունը հավսար է p_1-ի, եթե փորձերը երկուսն են, ապա հաջողության հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում հավասար է p_2-ի և այլն: Այսինքն՝ հաջողության հավանականությունը փոփոխվում է ոչ թե մեկ սերիայի ներսում, այլ սերիայից սերիա, երբ փոխվում է ընդհանուր փորձերի թիվը:

Թեորեմ 4.3 (Պուասոնի թեորեմ): *Եթե $n\to\infty$ և $p_n\to 0$, այնպես, որ $np_n\to\lambda>0$, ապա հավանականությունը, որ հաջողության p_n հավանականությամբ Բեռնուլիի սխեմայի n փորձերում հաջողությունը կլինենա m անգամ ձգտում է $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ սահմանին՝*

$$\mathrm{P}(\mu_n=m)=C_n^m\,p_n^m\,(1-p)^{n-m}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\ :$$

Ապացույց: Նշանակենք $\lambda_n=np_n$: Ըստ թեորեմի պայմանների՝ $\lambda_n\to\lambda>0$: Համաձայն Բեռնուլիի (4.1) բանաձևի՝

$$\mathrm{P}(\mu_n = m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p_n^m (1-p_n)^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(np_n)^m}{n^m} \cdot (1-p_n)^{n-m} =$$

$$= \frac{(np_n)^m}{m!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \cdot (1-p_n)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda_n^m}{m!}(1-p)^{n-m} \prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{n}\right): \qquad (4.3)$$

Եթե հաշվի առնենք, որ $n \to \infty$,, $\lambda_n = np_n \to \lambda$ և

$$(1-p_n)^{n-m} = \frac{(1-p)^n}{(1-p)^m} = \frac{(1-\frac{\lambda_n}{n})^n}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^m} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda},$$

ապա, (4.3)-ում անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\mathrm{P}(\mu_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} : \qquad \square$$

Սահմանում 4.3: $\left\{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,1,\ldots,\right\}$ թվերի հաջորդականությունը կոչվում է λ պարամետրով *Պուասոնի* բաշխում:

Օրինակ 1: Հաշվել հաջողության 0,003 հավանականությամբ Բեռնուլիի սխեմայի հազար փորձերում 7-ից ոչ պակաս հաջողություններ ստանալու հավանականությունը:

Լուծում: Եթե օգտվենք Բեռնուլիի բանաձևից, ապա այս պատահույթի հավանականությունը կարելի է հաշվել հետևյալ երկու բանաձևերով՝

$$\sum_{k=7}^{1000} C_{1000}^k (0,003)^k (0,007)^{1000-k} = 1 - \sum_{k=0}^{6} C_{1000}^k (0,003)^k (0,007)^{1000-k} :$$

Սակայն առնչություններից յուրաքանչյուրում հաշվարկները բավականին բարդ են: Օգտվելով Պուասոնի թեորեմից, կարող ենք հաշվել որոնելի հավանականության մոտավոր արժեքը: Քանի որ $n = 1000$, իսկ $p_n = 0,003$, ապա, վերցնելով $\lambda = np_n = 3$, ստանում ենք հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝

$$1-\sum_{k=0}^{6} C_{1000}^{k}\,(0,003)^{k}\,(0,007)^{1000-k} \approx 1-\sum_{k=0}^{6}\frac{3^{k}}{k!}e^{-3} \approx 0,034: \qquad (4.4)$$

Մնում է միայն պարզել, թե արդյոք $n=1000$-ը բավականաչափ մեծ, իսկ $p_n=0,003$-ը բավականաչափ փոքր է, որպեսզի ստույգ հավանականությունը փոխարինվի մոտավոր արժեքով: Դրա համար պետք է կարողանալ գնահատել այս երկու հավանականությունների տարբերությունը:

Թեորեմ 4.3 (Պուասոնի ճշգրտված թեորեմը): *Դիցուք A-ն ոչ բացասական ամբողջ թվերի կամայական հաջորդականություն է, μ_n-ը՝ p հավանականությամբ Բեռնուլիի n փորձերում հաջողությունների հանդես գալու թիվը, իսկ $\lambda=np$: Տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\left|\mathrm{P}\left(\mu_n\in A\right)-\sum_{m\in A}\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}\right|=\left|\sum_{m\in A}C_{n}^{m}p^{m}\left(1-p\right)^{n-m}-\sum_{m\in A}\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}\right|\le\min\left(p,np^{2}\right):$$

Օգտվելով այս թեորեմից, որոշենք (4.4) բանաձևում առկա սխալը՝

$$\left|\mathrm{P}\left(\mu_n\ge 7\right)-0,034\right|\le\min\left(0,003;0,009\right)=0,003:$$

ԳԼՈՒԽ 5
ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԲԱՇԽՈՒՄԸ

§5.1. Պատահական մեծություններ

Պատահական ելքերով փորձերի արդյունքների նկարագրման համար հաճախ նպատակահարմար է որակական բնութագրիչներից՝ պատահույթներից, անցում կատարել քանակական բնութագրիչների: Այս մոտեցումը կատարվում է հավանականությունների տեսության հիմնական հասկացություններից մեկի՝ *պատահական մեծության* միջոցով: Իրականում փորձի արդյունքները միշտ կարելի է ներկայացնել մեկ կամ մի քանի թվային տվյալների միջոցով: Այլ կերպ ասած, փորձի յուրաքանչյուր տարրական ելք հնարավոր է համապատասխանեցնել որևէ իրական թվի և գործողությունները կատարել միայն թվերով:

Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-ն կամայական հավանականային տարածություն է:

Սահմանում 5.1: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է *պատահական մեծություն*, եթե ցանկացած $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ բորելյան բազմության համար $\xi^{-1}(B)$ բազմությունը պատահույթ է, այսինքն՝ պատկանում է $\mathcal{F}$ σ-հանրահաշվին:

$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ բազմությունը, որը կազմված է այն ω տարրական ելքերից, որոնց համար $\xi(\omega)$ պատկանում է B-ին, կոչվում է B բազմության *լրիվ նախապատկեր*:

Դիտողություն: Ընդհանրապես, եթե f-ը X բազմությունից Y արտապատկերող ֆունկցիա է, իսկ $\mathcal{F}$-ը և $\mathcal{G}$-ն համապատասխանաբար X-ի և Y-ի ենթաբազմությունների σ-հանրահաշիվներն են, ապա f ֆունկցիան կոչվում է *չափելի*, եթե ցանկացած $B \in \mathcal{G}$ բազմության համար $f^{-1}(B)$ նախապատկերը պատկանում է $\mathcal{F}$-ին:

Այսպիսով, պատահական մեծությունը $(\Omega,\mathcal{F})$ չափելի բազմությունը արտապատկերում է $\left(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ չափելի տարածության վրա: Չափելիության պայմանը պատահական մեծության սահմանման մեջ շատ կարևոր է հետևյալ պատճառով: Եթե $(\Omega,\mathcal{F})$-ի վրա որոշված է P հավանականություն, ապա իմաստ ունի խոսել $\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$ պատահույթի հավանականության մասին: Այդ իսկ պատճառով $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ի համար ξ պատահական մեծությունը որոշում է

$$\mathrm{P}_{\xi}(B)=\mathrm{P}\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$$

հավանականությունը և հավանականային $\left(\Omega,\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathrm{P}_{\xi}\right)$ տարածությունը:

Սահմանում 5.1-ում կարելի էր պահանջել, որ պատահույթ լինի ցանկացած միջակայք՝ $\{\omega:\xi(\omega)\in(a,b)\}\in\mathcal{F}$, կամ ցանկացած կիսամիջակայք՝ $\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$:

Սահմանում 5.2: $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է *պատահական մեծություն*, եթե ցանկացած $a<b$ իրական թվերի համար $\{\omega:\xi(\omega)\in(a,b)\}$ բազմությունը պատահույթ է, այսինքն՝ պատկանում է $\mathcal{F}$ σ-հանրահաշվին:

Թեորեմ 5.1: *Պատահական մեծության 5.1 և 5.2 սահմանումները համարժեք են:*

Ապացույց: Եթե ξ-ն պատահական մեծություն է սահմանում 5.1-ի իմաստով, ապա այն պատահական մեծություն է նաև սահմանում 5.2-ի իմաստով, քանի որ ցանկացած (a,b) միջակայք բորելյան բազմություն է:

Այժմ ցույց տանք, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը: Դիցուք ցանկացած $B=(a,b)$ միջակայքի համար $\xi^{-1}(B)\in\mathcal{F}$: Պիտի ցույց տանք, որ նույնը ճիշտ է նաև կամայական բորելյան բազմության համար: Դիտարկենք իրական առանցքի այն B ենթաբազմությունների համակարգը, որոնց նախապատկերները պատահույթ են՝ $\mathcal{A}=\left\{B\subseteq\mathbb{R}:\xi^{-1}(B)\in\mathcal{F}\right\}$: Համաձայն սահմանման՝ $B\in\mathcal{A}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\xi^{-1}(B)\in\mathcal{F}$: Պարզ է, որ $\mathcal{A}$-ն արդեն պարունակում է բոլոր (a,b) միջակայքերը: Ցույց տանք, որ $\mathcal{A}$-ն σ-հանրահաշիվ է:

1. Ցույց տանք, որ $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$: Քանի, որ $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, ապա $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$:

2. Ցույց տանք, որ ցանկացած $B \in \mathcal{A}$ բազմության համար $\overline{B} \in \mathcal{A}$: Քանի որ $B \in \mathcal{A}$, ապա $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, հետևաբար՝

$$\xi^{-1}(\overline{B}) = \{\omega : \xi(\omega) \notin B\} = \Omega \setminus \{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \Omega \setminus \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}:$$

3. Այժմ համոզվենք, որ եթե $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$, ապա $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$: Քանի որ $B_i \in \mathcal{A}$, ապա $\xi^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$: Մյուս կողմից, եթե հաշվի առնենք, որ $\mathcal{F}$-ը σ-հանրահաշիվ է, ապա կստանանք՝

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \{\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega : \xi(\omega) \in B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}:$$

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ $\mathcal{A}$-ն σ-հանրահաշիվ է և պարունակում է (a,b) տիպի բոլոր միջակայքերը: Մյուս կողմից՝ հայտնի է, որ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-ը (a,b) տիպի բոլոր միջակայքերը պարունակող մինիմալ σ-հանրահաշիվն է, հետևաբար՝ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$: □

Օրինակ 1: Կետը պատահականորեն նետվում է $[a,b]$ հատվածի վրա: Ունենք $\Omega = [a,b]$, $\mathcal{F} = \{B \bigcap [a,b] : B \in \mathcal{B}\}$: Նետված կետի կոորդինատը՝ $\omega \in [a,b]$, նշանակենք $\xi(\omega)$-ով: Այս դեպքում կունենանք՝

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing, & x \leq a, \\ [a,x), & a < x \leq b, \\ \Omega, & x > b : \end{cases}$$

Հետևաբար՝ $\xi(\omega) = \omega$-ն պատահական մեծություն է:

Օրինակ 2: Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-ն հավանականային տարածություն է, իսկ $J_A(\omega)$-ն $A \in \mathcal{F}$ պատահույթի ինդիկատորն է: Քանի որ

$$\{\omega : J_A(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing, & x \leq 0, \\ \overline{A}, & 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & x > 1, \end{cases}$$

ապա $J_A(\omega)$-ն պատահական մեծություն է:

Հաջորդ պարագրաֆում կծանոթանանք հիմնական հասկացություններից մեկին՝ պատահական մեծության «բաշխման» հետ և կնկարագրենք պատահական մեծությունների բաշխումների տարբեր տիպեր:

§5.2. Պատահական մեծությունների բաշխումը

Սահմանում 5.3 : ξ պատահական մեծության *բաշխում կամ բաշխման օրենք է* կոչվում $\mathbb{R}$ -ի բորելյան ենթաբազմությունների վրա տրված $\mathrm{P}(\xi \in B)$ հավանականային չափը:

Պատահական մեծությունների բաշխումը կարելի է մեկնաբանել որպես համապատասխանություն $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ բազմությունների և $\mathrm{P}(\xi \in B)$ հավանականությունների միջև: Կախված նրանից, թե ինչ տիպի բազմությունների վրա է կենտրոնացված ամբողջ հավանականային զանգվածը, առանձնացվում են պատահական մեծությունների բաշխումների *ընդհատ (դիսկրետ), անընդհատ և սինգուլյար* տիպեր:

Սահմանում 5.4 : Կասենք, որ ξ պատահական մեծությունն ունի *դիսկրետ* բաշխում, եթե գոյություն ունի $x_1, x_2, \ldots$ թվերի այնպիսի վերջավոր կամ հաշվելի հավաք, որ

$$\mathrm{P}(\xi = x_i) > 0 \text{ բոլոր } i\text{-երի համար և } \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = x_i) = 1:$$

Այսպիսով, $\xi = \xi(\omega)$ պատահական մեծությունը կոչվում է դիսկրետ, եթե այն ընդունում է վերջավոր կամ հաշվելի թվով արժեքներ: Եթե ξ պատահական մեծությունն ունի դիսկրետ բաշխում, ապա ցանկացած $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ բազմության համար

$$\mathrm{P}(\xi \in B) = \sum_{i:\, x_i \in B} \mathrm{P}(\xi = x_i):$$

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխումը հարմար է ներկայացնել նրա բոլոր հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականություններից կազմված հետևյալ աղյուսակով.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

:

Սահմանում 5.5 : Կասենք, որ ξ պատահական մեծությունն ունի *բացարձակ անընդհատ* բաշխում, եթե գոյություն ունի այնպիսի $f_\xi(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիա, որ ցանկացած $B \in \mathcal{B}$ բորելյան բազմության համար տեղի ունի

$$\mathrm{P}(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)\, dx:$$

հավասարությունը: $f_\xi(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ξ պատահական մեծության *բաշխման խտություն:*

Դիտողություն: Վերոհիշյալ ինտեգրալը ոչ թե Ռիմանի, այլ Լեբեգի ինտեգրալ է: Եթե ընթերցողը ծանոթ չէ Լեբեգի ինտեգրալին, ապա լիովին բավական է այն պատկերացնել որպես B բազմության վրա ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված պատկերի մակերես: Ընդ որում, զրոյական Լեբեգի չափ ունեցող B բազմության համար այդ մակերեսը հավասար է զրոյի: Նկատենք, որ ցանկացած ֆունկցիա, որը տարբերվում է $f_\xi(x)$-ից միայն վերջավոր կամ հաշվելի թվով կետերում (կամ զրոյական Լեբեգի չափ ունեցող բազմության վրա), կհանդիսանա խտություն նույն բաշխման համար, քանի որ ինտեգրալը չի փոխվի ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի փոփոխումից զրոյական չափի բազմության վրա:

Այս սահմանումը համարժեք է հետևյալին:

Թեորեմ 5.2: *Բաշխման խտությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

$$\text{(f1)}\ \ f_\xi(x) \geq 0 \ \ \text{ցանկացած } x\text{-ի համար;} \qquad \text{(f2)} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) = 1 :$$

Ապացույց: Հատկություն (f1)-ն անմիջապես բխում է խտության սահմանումից: Հատկություն (f2)-ն ապացուցելու համար սահմանում 5.5-ում որպես B բազմություն վերցնենք ամբողջ թվային ուղիղը. կստանանք՝

$$\mathrm{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) : \qquad \square$$

Այս երկու հատկությունները լիովին բնորոշում են խտության ֆունկցիաների դասը:

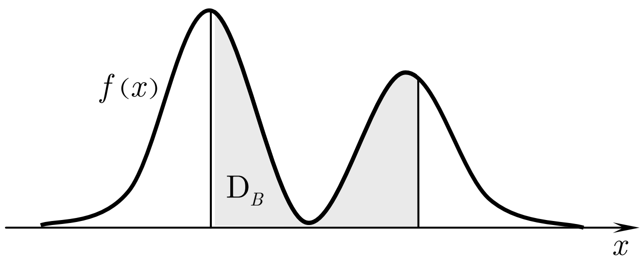
Թեորեմ 5.3: *Եթե f ֆունկցիան բավարարում է* (f1) *և* (f2) *հատկություններին, ապա գոյություն ունի հավանականային տարածություն և այդ տարածության վրա որոշված ξ պատահական մեծություն, որի համար f-ը բաշխման խտություն է:*

Ապացույց: Դիցուք Ω-ն աբսցիսների առանցքով և f ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված է տիրույթ է: Համաձայն (f2)-ի՝ Ω-ի մակերեսը հավասար է 1-ի: Որպես $\mathcal{F}$ վերցնենք Ω-ի բորելյան ենթաբազմությունների բազմությունը, իսկ որպես P հավանականություն՝ Լեբեգի չափը (մակերես) $\mathcal{F}$-ի բազմությունների վրա: Ենթադրենք՝ ξ

պատահական մեծությունը Ω տիրույթ նետած պատահական կետի աբսցիսն է: Այդ դեպքում ցանկացած $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ բազմության համար՝

$$\mathrm{P}(\xi \in B) = \frac{S(\mathrm{D}_B)}{S(\Omega)} = \int_B f(x)\,dx : \qquad (5.1)$$

Այստեղ D_B տիրույթը խտության գրաֆիկի տակ ընկած B հիմքով կորագիծ սեղանն է (նկ 5.1): Համաձայն սահմանում 5.5-ի՝ (5.1) հավասարությունը նշանակում է, որ f-ը ξ մեծության բաշխման խտությունն է:



Նկ. 5.1.

Նշենք բացարձակ անընդհատ բաշխումների մի կարևոր հատկություն: □

Թեորեմ 5.4: *Եթե ξ պատահական մեծությունն ունի բացարձակ անընդհատ բաշխում, ապա $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ ցանկացած $x \in \mathbb{R}$-ի համար:*

Ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանում 5.5-ից և դրան հաջորդող դիտողությունից:

Առանձնացնենք բաշխումների մեկ այլ՝ եզակի դաս:

Սահմանում 5.6: Կասենք, որ ξ պատահական մեծությունն ունի ***սինգուլյար*** բաշխում, եթե գոյություն ունի զրոյական Լեբեգի չափ ունեցող այնպիսի B բորելյան բազմություն, որ $\mathrm{P}(\xi \in B) = 1$, բայց $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ ցանկացած $x \in B$ կետի համար:

Նշենք, որ B բազմությունը, որտեղ կենտրոնացված է ամբողջ բաշխումը, չի կարող բաղկացած լինել վերջավոր կամ հաշվելի թվով կետերից: Իրոք, եթե B-ն վերջավոր է կամ հաշվելի, ապա $\mathrm{P}(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} \mathrm{P}(\xi = x_i)$: Վերջին գումարը, որպես հաշվելի թվով զրոների գումար, հավասար է զրոյի, ինչը հակասում է $\mathrm{P}(\xi \in B) = 1$ ենթադրությանը:

Այսպիսով, ցանկացած սինգուլյար բաշխում կենտրոնացած է զրոյական Լեբեգի չափ ունեցող ոչ հաշվելի բազմության վրա: Այսպիսի բազմության օրինակ կարող է ծառայել Կանտորի բազմությունը:

§5.3. Բաշխման ֆունկցիան. նրա հատկությունները

Ինչպես տեսանք, ξ պատահական մեծության հավանականային կառուցվածքը լիովին նկարագրվում է $\mathrm{P}(\xi \in B)$ հավանականությունների միջոցով, սակայն պատահական մեծության բաշխման օրենքի նմանատիպ նկարագրությունը այդքան էլ հարմար չէ, քանի որ չափազանց շատ բորելյան բազմություններ գոյություն ունեն: Ուստի հարց է ծագում. արդյո՞ք հնարավոր չէ սահմանափակվել՝ իմանալով հավանականությունները թվային ուղղի բազմությունների ավելի փոքր հավաքի դեպքում: Ակնհայտ է, որ դիսկրետ բաշխումները կարելի է նկարագրել բաշխման աղյուսակի, իսկ բացարձակ անընդհատ բաշխումները՝ բաշխման խտության միջոցով: Փորձենք գտնել ցանկացած տիպի բաշխում նկարագրելու ունիվերսալ եղանակ:

Պարզվում է, որ կամայական բաշխման համար, օրինակ, բավական է իմանալ հավանականությունները միայն $(-\infty, x)$ տեսքի անվերջ միջակայքերի համար:

Ստորև ներմուծվող *բաշխման ֆունկցիայի* գաղափարը տալիս է համարժեք նկարագրություն պատահական մեծության հավանականային կառուցվածքի մասին:

Սահմանում 5.7 : ξ պատահական մեծության հավանականությունների *բաշխման ֆունկցիա է* կոչվում $F_\xi(x): \mathbb{R} \to [0,1]$ ֆունկցիան, որը $\forall x \in \mathbb{R}$ թվի համար հավասար է ξ պատահական մեծության x-ից փոքր արժեք ընդունելու հավանականությանը՝

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \ \forall x \in \mathbb{R}: \qquad (5.2)$$

Դժվար չէ նկատել, որ այսպես սահմանված բաշխման ֆունկցիան որոշված է կամայական պատահական մեծության համար և տալիս է սպառիչ տեղեկություններ վերջինիս մասին:

Թեորեմ 5.5 : *Յանկացած բաշխման ֆունկցիա օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.*

(F1) *մոնոտոնություն. եթե* $x_1 \le x_2$, *ապա* $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$;

(F2) *գոյություն ունեն* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ *և* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$ *սահմանները;*

(F3) *ձախից անընդհատություն.* $F_\xi(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$:

Ապացույց (F1): Իսկապես, $x_1 \le x_2$ պայմանից բխում է, որ $\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$, հետևաբար՝

$$F_\xi(x_1) = \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \le \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) < x_2\} = F_\xi(x_2):$$

Ապացույց (F2): Սահմանափակվենք հավասարություններից մեկի ապացուցմամբ, քանի որ դրանց ապացույցները համանման են: Նշանակենք $B_n = \{\omega : \xi(\omega) \le x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, որտեղ $x_n \downarrow -\infty$: Պարզ է, որ $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ և $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$: Համաձայն անընդհատության աքսիոմի՝

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = P(\varnothing) = 0:$$

Ապացույց (F3): Դիցուք x_n հաջորդականությունն աճում է, և $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$: Այդ դեպքում.

$$B_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \subset B_{n+1} = \{\omega : \xi(\omega) < x_{n+1}\} \quad \text{և}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B = \{\omega : \xi(\omega) < x_0\}:$$

Համաձայն անընդհատության աքսիոմի հետևանքի՝

$$\lim_{n \to \infty} P(B_n) = P(B)$$

կամ

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x_0) \Rightarrow F_\xi(x_0 - 0) = F_\xi(x_0): \qquad \square$$

Եթե $F(x)$ ֆունկցիան բավարարում է 1-3 հատկությունները, ապա «կարելի է համարել», որ այն բաշխման ֆունկցիա է: Այս թեորեմի պնդումը կընդունենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 5.6 : *Եթե* $F(x)$ *ֆունկցիան բավարարում է* (F1)-(F3) *հատկություններին, ապա գոյություն ունի* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *հավանականային տարածություն, և նրա վրա որոշված* $\xi = \xi(\omega)$ *պատահական մեծություն այնպիսին, որ* $F(x) = F_\xi(x)$:

Բացի թեորեմ 5.5 -ում նշված հատկություններից՝ բաշխման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով:

Թեորեմ 5.7 : *Ցանկացած ξ պատահական մեծության համար.*

(1) $\mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$;

(2) $\mathrm{P}(\xi = x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x)$:

Ապացույց (1): Քանի որ

$$(\xi < x_2) = (x_1 \le \xi < x_2) + (\xi < x_1),$$

ապա, համաձայն հավանականության ադիտիվության աքսիոմի՝

$$\mathrm{P}(\xi < x_2) = \mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) + \mathrm{P}(\xi < x_1):$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (5.2)-ը, կունենանք՝

$$\mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1):$$

Ապացույց (2): Համաձայն $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x, x+1/n)$ առնչության և անընդհատության աքսիոմի, կունենանք՝

$$\mathrm{P}(\xi = x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big(x \le \xi < x+1/n\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (F_\xi(x+1/n) - F_\xi(x)) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x): \qquad \square$$

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան: Դիսկրետ բաշխման սահմանման համաձայն՝ բաշխման ֆունկցիան կարելի է գտնել բաշխման աղյուսակից հետևյալ կերպ՝

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \sum_{k:\, x_k \le x} \mathrm{P}\big(\xi = x_k\big):$$

Պարզ է, որ այս դեպքում այն աստիճանաձև է և դրա խզման կետերն են $x_1, x_2, \ldots$ կետերը: Այս կետերում $F_\xi(x)$ ֆունկցիայի թռիչքի մեծությունը հավասար է պատահական մեծության համապատասխան արժեքն ընդունելու հավանականությանը՝

$$F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k) = \mathrm{P}\big(\xi = x_k\big):$$

Բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան: Դիցուք ξ պատահական մեծությունն ունի բացարձակ անընդհատ բաշխում $f_\xi(x)$ խտությամբ: Այս դեպքում բաշխման ֆունկցիան խտության ֆունկցիայի միջոցով կարելի է գտնել հետևյալ կերպ՝

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}\big(\xi \in (-\infty, x)\big) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt: \qquad (5.3)$$

Հաճախ հենց այս ներկայացումն ընդունում են որպես բացարձակ անընդհատ բաշխման սահմանում, այսինքն, ասում են, որ ξ պատահական մեծությունն ունի բացարձակ անընդհատ բաշխում, եթե գոյություն ունի այնպիսի ոչ բացասական $f_\xi(x)$ ֆունկցիա, որ տեղի ունի (5.3) ներկայացումը:

Թեորեմ 5.8 : *Եթե ξ պատահական մեծությունն ունի բացարձակ անընդհատ բաշխում, ապա.*

(1) $F_\xi(x)$*-ն ամենուրեք անընդհատ է*;

(2) $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \dfrac{\partial}{\partial x} F'_\xi(x)$;

(3) $\mathrm{P}(x_1 < \xi < x_2) = \mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) = \mathrm{P}(x_1 < \xi \le x_2) =$

$$= \mathrm{P}(x_1 \le \xi \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(x)\,dx:$$

Ապացույց: Առաջին և երկրորդ հատկությունները հետևանք են վերին փոփոխական սահմանով ինտեգրալի ընդհանուր հատկությունների, իսկ երրորդ հատկությունն անմիջպես բխում է բացարձակ անընդհատ բաշխման սահմանումից և առաջին հատկությունից: □

§5.4. Դիսկրետ բաշխումների օրինակներ

Բեռնուլիի բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունն ունի p պարամետրով Բեռնուլիի բաշխում և գրում են $\xi \sim \mathrm{B}_p$, եթե ξ-ն ընդունում է 0 և 1 արժեքներ՝ համապատասխանաբար p և $1-p$ հավանականություններով: Այսպիսի բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծությունը հավասար է «հաջողության» p հավանականությամբ Բեռնուլիի սխեմայի մեկ փորձում «հաջողությունների» հանդես գալու թվին: Պարզ է, որ ξ պատահական մեծության $F_\xi(x)$ բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-p, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1: \end{cases}$$

Բինոմական բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունը ենթարկվում է հավանականությունների *բինոմական բաշխմանը*

$n \in \mathbb{N}$ և $p \in (0,1)$ պարամետրերով և գրում են $\xi \sim \mathrm{B}_{n,p}$, եթե ξ-ն ընդունում է $k = 0,1,2,\ldots,n$ արժեքներ

$$\mathrm{P}(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

հավանականություններով: Այս պատահական մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես «հաջողությունների» հանդես գալու թիվ Բեռնուլիի սխեմայի n փորձերում: ξ-ի բաշխման աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

ξ	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

:

Օրինակ խաղոսկրի 20 նետումների դեպքում 6 թվանշանի հանդես գալու թիվն ունի $\mathrm{B}_{20,\frac{1}{6}}$ բինոմական բաշխում: Ակնհայտ է, որ Բեռնուլիի բաշխումը համընկնում է $\mathrm{B}_{1,p}$ բաշխման հետ:

Երկրաչափական բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունն ունի $p \in (0,1)$ պարամետրով երկրաչափականի բաշխում և գրում են $\xi \sim \mathrm{G}_p$, եթե ξ-ն ընդունում է $k = 1,2,\ldots$ արժեքներ $\mathrm{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ հավանականություններով: Այսպիսի բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծությունը մեկնաբանվում է, որպես «հաջողության» p հավանականությամբ Բեռնուլիի սխեմայում առաջին «հաջողության» հանդես գալու համար: ξ-ի բաշխման աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

ξ	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	$p(1-p)$	$\ldots$	$p(1-p)^k$	$\ldots$

:

Պուասոնի բաշխում: Եթե ξ պատահական մեծությունն ընդունում է $k = 0,1,2,\ldots$ արժեքներ $\mathrm{P}(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda > 0)$ հավանականություններով, ապա ասում են, որ այն ունի λ պարամետրով Պուասոնի բաշխում և գրում են $\xi \sim \Pi_\lambda$:

Պուասոնի բաշխումն առաջացել է Պուասոնի թեորեմում որպես սահմանային բաշխում Բեռնուլիի սխեմայում «հաջողությունների» հանդես գալու թվի համար (տե՛ս §4.3):

§5.5. Բացարձակ անընդհատ բաշխումների օրինակներ

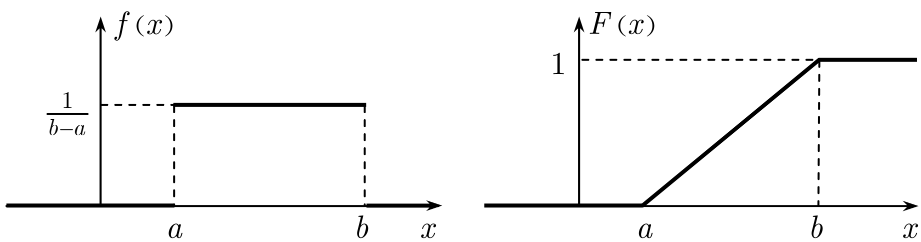
Հավասարաչափ բաշխում: Կասենք, որ ξ պատահական մեծությունն ունի հավասարաչափ բաշխում $[a,b]$ հատվածի վրա և կգրենք $\xi \sim \mathrm{U}_{a,b}$, եթե ξ-ի բաշխման խտությունը հաստատուն է $[a,b]$ հատվածի ներսում և հավասար է զրոյի դրանից դուրս.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]: \end{cases}$$

$\xi \sim \mathrm{U}_{a,b}$ պատահական մեծությունն ունի $[a,b]$ հատվածից պատահականորեն ընտրված կետի կոորդինատի իմաստը: Օգտվելով (5.3) բանաձևից՝ կգտնենք ξ-ի բաշխման ֆունկցիան՝

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b: \end{cases}$$

Ստորև բերված են հավասարաչափ բաշխման խտության և ֆունկցիայի գրաֆիկները (նկ. 5.2.):



Նկ. 5.2. $\mathrm{U}_{a,b}$ բաշխման խտության և ֆունկցիայի գրաֆիկները.

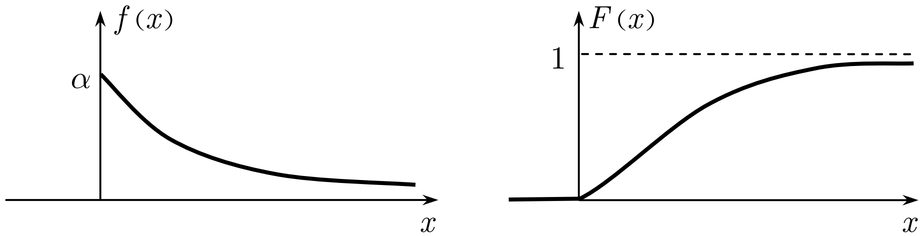
Ցուցչային բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունն ունի $\alpha > 0$ պարամետրով ցուցչային (էքսպոնենցիալ) բաշխում և գրում են $\xi \sim \mathrm{E}_\alpha$, եթե ξ-ն ունի բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0: \end{cases}$$

ξ-ի բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x>0:\end{cases}$$

Նկար 5.3-ում բերված են ցուցչային բաշխման խտության և ֆունկցիայի գրաֆիկները:

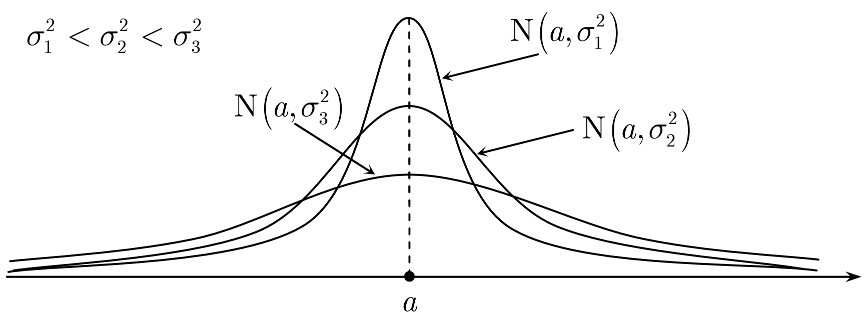


Նկ. 5.3. E_α բաշխման խտության և ֆունկցիայի գրաֆիկները.

Նորմալ բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում a $(a\in\mathbb{R})$ և σ^2 $(\sigma>0)$ պարամետրերով և գրում են $\xi\sim \mathrm{N}\left(a,\sigma^2\right)$, եթե ξ-ն ունի բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

Նկ. 5.4-ում բերված են նորմալ բաշխման խտության գրաֆիկները a պարամետրի միևնույն և σ-ի տարբեր արժեքների դեպքում:



Նկ. 5.4. Նորմալ բաշխման խտության գրաֆիկները.

Համոզվենք, որ $f_\xi(x)$ ֆունկցիան իրոք բաշխման խտություն է: Քանի որ $\forall x\in\mathbb{R}$ թվի համար $f_\xi(x)>0$, ապա (f1)-ը բավարարված է: Ստուգենք հատկություն (f2)-ը.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[t = \frac{x-a}{\sigma};\, dx = \sigma dt\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{J}{\sqrt{2\pi}} = 1 :$$

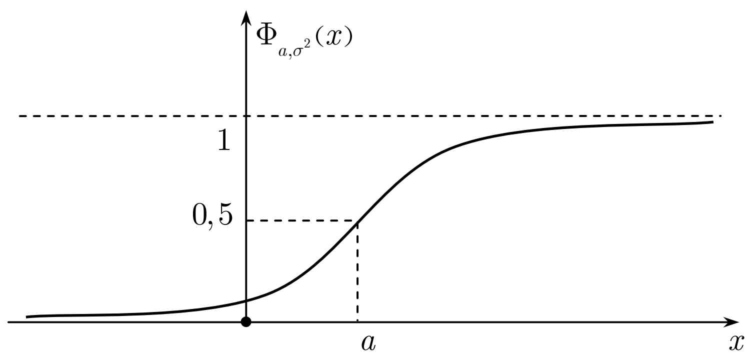
Այստեղ J -ով նշանակված է Պուասոնի աղյուսակային ինտեգրալը*: Հայտնի է, որ

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} :$$

$a = 0$ և $\sigma^2 = 1$ պարամետրերով $\mathrm{N}(0,1)$ նորմալ բաշխումը կոչվում է *ստանդարտ նորմալ բաշում,* որի բաշխման խտությունն է՝

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} :$$

$\mathrm{N}\left(a, \sigma^2\right)$ նորմալ բաշխման ֆունկցիայի համար կօգտագործենք $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$ նշանակումը (նկ. 5.3):



Նկ. 5.4: Նորմալ բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկները:

Քանի որ $e^{-x^2/2}$ ֆունկցիայի նախնականը հնարավոր չէ արտահայտել տարրական ֆունկցիաների միջոցով, ուստի $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$ ֆունկցիան

* Այս ինտեգրալը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy :$$

Այժմ անցնելով $x = r\cos\varphi$ և $y = r\sin\varphi$ բևեռային կոորդինատներին՝ կստանանք.

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} d(r^2/2) d\varphi = 2\pi \Rightarrow J = \sqrt{2\pi} :$$

կարելի է գրել միայն ինտեգրալ տեսքով.

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt, \quad \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt :$$

Կոշիի բաշխում: Ասում են, որ ξ պատահական մեծությունը բաշխված է Կոշիի օրենքով a $(a \in \mathbb{R})$ և σ $(\sigma > 0)$ պարամետրերով և գրում են $\xi \sim C_{a,\sigma}$, եթե ξ-ն ունի բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sigma^2 + (x-a)^2}, \quad -\infty < x < \infty :$$

Կոշիի բաշխման խտությունը սիմետրիկ է $x = a$ ուղղի նկատմամբ և նման է նորմալ բաշխման խտությանը, սակայն $\pm\infty$-ում ունի ավելի ծանր «պոչեր»: Կոշիի օրենքով բաշխված պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան հավասար է

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty :$$

§5.6. Նորմալ բաշխման հատկությունները

Առանձին դիտարկենք ամենակարևոր բաշխման որոշ հատկություններ: Նախ՝ կապ հաստատենք $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$ և $\Phi_{0,1}(x)$ բաշխման ֆունկցիաների միջև:

Հատկություն 1: $\forall x \in \mathbb{R}$ թվի համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը՝

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right):$$

Ապացույց: Իսկապես, ունենք՝

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt :$$

Այս ինտեգրալում կատարելով $y = \dfrac{t-a}{\sigma}$ փոփոխականի փոխարինում՝ կստանանք $dt = \sigma dy$, իսկ ինտեգրման $t = x$ վերին սահմանը կփոխարինվի $y = \dfrac{x-a}{\sigma}$-ով, ուստի՝

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dt = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right): \qquad \square$$

Հատկություն 2: Եթե $\xi \sim \mathrm{N}\left(a,\sigma^2\right)$, ապա $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$:

Ապացույց: Համոզվենք, որ η պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան $\Phi_{0,1}(x)$-ն է.

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = \mathrm{P}(\xi < \sigma x + a) =$$

$$= \Phi_{a,\sigma^2}(\sigma x + a) = \Phi_{0,1}\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = \Phi_{0,1}(x) : \qquad \square$$

Հատկություն 3 (երեք սիգմաների կանոն): Եթե $\xi \sim \mathrm{N}\left(a,\sigma^2\right)$, ապա՝

$$\mathrm{P}\left(|\xi - a| \geq 3\sigma\right) = 0,0027 \quad \text{(բավականաչափ փոքր է):}$$

Ապացույցը կատարենք՝ անցնելով հակադիր պատահույթի՝

$$\mathrm{P}\left(|\xi - a| \geq 3\sigma\right) = 1 - \mathrm{P}\left(|\xi - a| < 3\sigma\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right):$$

Քանի որ $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$ պատահական մեծությունն ունի ստանդարտ նորմալ բաշխում, ուստի

$$1 - \mathrm{P}\left(|\eta| < 3\right) = 1 - \mathrm{P}(-3 < \eta < 3) = 1 - \Phi_{0,1}(3) + \Phi_{0,1}(-3) =$$

$$= 2 \cdot \Phi_{0,1}(-3) = 2 \cdot 0,00135 = 0,0027 : \qquad \square$$

ԳԼՈՒԽ 6
ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԲԱՇԽՈՒՄՆԵՐ

§6.1. Համատեղ բաշխում

Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունները տրված են միևնույն՝ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ հավանականային տարածության վրա:

Սահմանում 6.1 :

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$$

ֆունկցիան կոչվում է $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ պատահական վեկտորի *բաշխման ֆունկցիա* կամ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունների *համատեղ բաշխում*:

Թվարկենք համատեղ բաշխման ֆունկցիայի հատկությունները: Գրառման պարզության համար, առանց ընդհանրությունը խախտելու, սահմանափակվենք (ξ_1, ξ_2) երկչափ վեկտորների դիտարկումով:

(F1) Ցանկացած x_1, x_2 թվերի համար ճիշտ են $0 \le F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \le 1$ անհավասարությունները:

(F2) $F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$ ֆունկցիան չնվազող է ըստ (x_1, x_2) վեկտորի յուրաքանչյուր կոորդինատի:

(F3) $F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$ ֆունկցիան ըստ (x_1, x_2) վեկտորի յուրաքանչյուր կոորդինատի ձախից անընդհատ է:

(F4) Ցանկացած $i = 1,2$ ինդեքսի համար գոյություն ունեն $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = 0$ և $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \lim\limits_{x_2 \to +\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = 1$ սահմանները:

(F5) Համատեղ բաշխման ֆունկցիայի միջոցով ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների միաչափ բաշխման ֆունկցիաները վերականգնելու համար, պետք է ձգտեցնել խանգարող փոփոխականը անվերջության.

$$\lim_{x_2 \to +\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1), \quad \lim_{x_1 \to +\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2): \qquad (6.1)$$

Այս բոլոր հատկություններն ապացուցվում են միաչափ դեպքին համանման: Սակայն այս դեպքում (F1)-(F3) հատկությունները դեռ բավարար չեն՝ նկարագրելու համատեղ բաշխման ֆունկցիաների դասը: Այլ կերպ ասած, եթե այս հատկությունները որևէ $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար տեղի ունեն, ապա դրանք դեռ չեն երաշխավորում, որ այս ֆունկցիան հանդիսանում է որևէ պատահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիա: Դրա համար F-ը պետք է բավարարի լրացուցիչ այլ հատկությունների:

§6.2. Բազմաչափ բաշխման տեսակները

Սահմանափակվենք միայն երկու տիպային օրինակների դիտարկումով, երբ (ξ_1, ξ_2) պատահական վեկտորի կոորդինատների համատեղ բաշխումը կամ դիսկրետ է, կամ բացարձակ անընդհատ:

Սահմանում 6.2: ξ_1, ξ_2 պատահական մեծություններն ունեն *համատեղ դիսկրետ բաշխում*, եթե գոյություն ունի $\{a_i, b_i\}$ թվազույգերի այնպիսի հավաք, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\xi = a_i, \xi = b_j\right) = 1:$$

Երկու պատահական մեծությունների համատեղ բաշխման օրենքը հարմար է նկարագրել բաշխման աղյուսակի միջոցով, որի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման տեղում գտնվում է $P_{i,j} = \mathrm{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)$ հավանականությունը.

	a_1	a_2	$\ldots$	a_i	$\ldots$
b_1	P_{11}	P_{21}	$\ldots$	P_{i1}	$\ldots$
b_2	P_{12}	P_{22}	$\ldots$	P_{i2}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
b_j	P_{1j}	P_{2j}	$\ldots$	P_{ij}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

(6.2)

ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների առանձին (միաչափ) բաշխման աղյուսակները հեշտությամբ կարելի է վերականգնել (6.2) աղյուսակից, հետևյալ բանաձևերի միջոցով՝

$$\mathrm{P}(\xi_1 = a_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}, \ \ i = 1,2,\ldots,$$

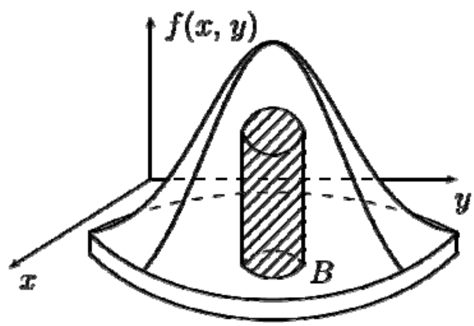
$$\mathrm{P}(\xi_2 = b_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}, \ \ j = 1,2,\ldots:$$

Սահմանում 6.3 : ξ_1, ξ_2 պատահական մեծություններն ունեն *համատեղ բացարձակ անընդհատ բաշխում,* եթե գոյություն ունի այնպիսի ոչ բացասական $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ ֆունկցիա, որ ցանկացած $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ բորելյան բազմության համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\mathrm{P}((\xi_1,\xi_2) \in B) = \iint_B f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dxdy :$$

$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ ֆունկցիան, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է ξ_1, ξ_2 պատահական մեծությունների *համատեղ բաշխման խտություն:*

Սահմանում 6.3-ում կրկնակի ինտեգրալն ըստ B բազմության բավական է հասկանալ որպես $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված տիրույթի ծավալ, ինչպես ցույց է տրված նկ. 6.1-ում:



Նկ. 6.1. Համատեղ բաշխման խտությունն $\mathbb{R}^2$-ում.

Համատեղ բաշխման խտությունն օժտված է նույնպիսի հատկություններով, ինչ մեկ պատահական մեծության բաշխման մեծությունը.

(f1) $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) \geq 0$ ցանկացած $x, y \in \mathbb{R}$ թվերի համար;

(f2) $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dxdy = 1:$

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը. ցանկացած ֆունկցիա, որն օժտված է այս երկու հատկություններով, որևէ համատեղ բաշխման խտություն է: Այս փաստի ապացույցը ոչնչով չի տարբերվում միաչափ դեպքից:

Եթե ξ_1, ξ_2 պատահական մեծություններն ունեն համատեղ բացարձակ անընդհատ բաշխում, ապա ցանկացած x_1, x_2 թվերի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\mathrm{P}(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dxdy\ :$$

Համատեղ բաշխման ֆունկցիայի միջոցով խտությունը կարելի է գտնել որպես խառը մասնակի ածանցյալ. $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ համարյա բոլոր (x,y) զույգերի համար:

ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների խտությունների գոյությունից դեռ չի հետևում այդ մեծությունների համատեղ բաշխման բացարձակ անընդհատությունը: Սակայն, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեմը, հակառակ պնդումը միշտ ճիշտ է:

Թեորեմ 6.1 : *Եթե ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն ունեն բացարձակ անընդհատ համատեղ բաշխում $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ խտությամբ, ապա ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն առանձին նույնպես ունեն բացարձակ անընդհատ բաշխումներ համապատասխանաբար*

$$f_{\xi_1}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dy,\quad f_{\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dx$$

խտություններով:

Ապացույց: Հավասարություն (6.1)-ի համաձայն՝

$$F_{\xi_1}(x_1)=\lim_{x_2\to+\infty}F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dy\right)dx=\int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(x)dx\ :$$

Հանգունորեն ապացուցվում է երկրորդ հավասարության ճշմարտացիությունը: □

§6.3. Բազմաչափ բաշխման օրինակներ

Դիտարկենք բացարձակ անընդհատ բազմաչափ բաշխումների երկու՝ առավել օգտագործվող օրինակներ.

1. Հավասարաչափ բաշխում: Դիցուք $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ բազմությունը $\operatorname{mes}\Omega$ վերջավոր Լեբեգի չափ ունեցող բորելյան բազմություն է: Կասենք, որ $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ պատահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված Ω տիրույթում, եթե $\xi_1,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունների համատեղ բաշխման խտության $f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ֆունկցիան հաստատուն է Ω տիրույթում և հավասար է զրոյի այդ տիրույթից դուրս:

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{եթե} \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)\notin\Omega,\\ \dfrac{1}{\operatorname{mes}\Omega}, & \text{եթե} \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega:\end{cases}$$

Համոզվենք, որ այս ֆունկցիան իսկապես հանդիսանում է բաշխման խտություն.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx_1\ldots dx_n=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\cdot\operatorname{mes}\Omega=1:$$

2. Բազմաչափ նորմալ բաշխում: Դիցուք Σ-ն $n\times n$ չափի դրական որոշված սիմետրիկ մատրից է, որի հակադարձը Σ^{-1} մատրիցն է, իսկ $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$-ը n - չափանի սյուն վեկտոր է, որի տրանսպոնացվածը կնշանակենք՝ $\vec{a}^{\,\mathrm{T}}=(a_1,\ldots,a_n)$:

Կասենք, որ $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ վեկտորն ունի $\mathrm{N}(\vec{a},\Sigma)$ բազմաչափ **նորմալ** բաշխում միջինների $\vec{a}$ վեկտորով և Σ կովարիացիոն մատրիցով, եթե $f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ համատեղ բաշխման խտությունը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{\det\Sigma\cdot(2\pi)^n}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^{\mathrm{T}}\cdot\Sigma^{-1}\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right):$$

Նկատենք, որ $\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^{\mathrm{T}}\cdot\Sigma^{-1}\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right)$ արտահայտությունը իրենից ներկայացնում է քառակուսային ձև (x_i-a_i) փոփոխականներից: Իրոք, (b_{ij}) տարրեր ունեցող $B=\Sigma^{-1}$ մատրիցի համար

$$\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^{\mathrm{T}}\cdot B\cdot(\vec{x}-\vec{a})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j):$$

§6.4. Պատահական մեծությունների անկախությունը

Սահմանում 6.4 : Միևնույն $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ հավանականային տարածության վրա որոշված $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունները կոչվում են *անկախ* (համախմբության մեջ), եթե $B_1,B_2,\ldots,B_n\in\mathcal{B}$ բորելյան բազմությունների ցանկացած հավաքի համար

$$\mathrm{P}\{\xi_1\in B_1,\ldots,\xi_n\in B_n\}=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_k\in B_k\}: \qquad (6.3)$$

Մասնավորապես, (6.3)-ից ստանում ենք, որ անկախ պատահական մեծությունների համար տեղի ունի

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot F_{\xi_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n) \qquad (6.4)$$

Հավասարությունը՝ $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^1$:

(6.4) բանաձևը կարող է ծառայել որպես $\xi_1,,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունների անկախության սահմանում:

Դիսկրետ բաշխված պատահական մեծությունների անկախութ - յունը կարելի է նկարագրել դրանց համատեղ բաշխման աղյուսակի միջոցով:

Սահմանում 6.5: Դիսկրետ բաշխված $\xi_1,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունները կոչվում են *անկախ* (համախմբության մեջ), եթե ցանկացած $a_1,a_2,\ldots,a_n$ թվերի համար

$$\mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\ldots,\xi_n=a_n\}=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_k=a_k\}:$$

Բացարձակ անընդհատ $\xi_1,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունների համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 6.1: *Բացարձակ անընդհատ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծություններն անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $x_1,x_2,\ldots,x_n$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{\xi_n}(x_n): \qquad (6.5)$$

Դիտողություն: Քանի որ բաշխման խտության փոփոխությունը զրոյական չափի բազմության վրա չի հանգեցնում բաշխման փոփոխության, ապա (6.5) հավասարությունը կարելի է հասկանալ որպես հավասարություն համարյա ամենուրեք:

Ապացույց: Դիցուք $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծություններն անկախ են, այսինքն՝

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n):$$

Բաշխման ֆունկցիաների վերը նշված առնչության աջ և ձախ մասերը գրենք հետևյալ տեսքերով՝

$$F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}f_{\xi_1}(t_1)dt_1\cdot\ldots\cdot\int_{-\infty}^{x_n}f_{\xi_n}(t_n)dt_n=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}f_{\xi_1}(t_1)\cdots f_{\xi_n}(t_n)dt_1\ldots dt_n:$$

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dt_1\ldots dt_n:$$

Հետևաբար՝

$$\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1}(t_1)\cdots f_{\xi_n}(t_n)dt_1\dots dt_n = \int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)dt_1\dots dt_n :$$

Այսպիսով , (6.5) հավասարությունը համարյա ամենուրեք ճիշտ է:

Այժմ ենթադրենք, որ (6.5) հավասարությունից բխում է $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ պատահական մեծությունների անկախությունը: Իրոք, այս դեպքում ունենք՝

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)dt_1\dots dt_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1}(t_1)\cdots f_{\xi_n}(t_n)dt_1\dots dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(t_1)dt_1\cdot\ldots\cdot\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_n}(t_n)dt_n =$$

$$= F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n) : \qquad \square$$

§6.4. Ֆունկցիաներ պատահական մեծություններից

Որոշ դեպքերում պատահական մեծությունները միմյանց հետ կապվում են ֆունկցիոնալ կապով: Իմանալով դրանցից մեկի բաշխման օրենքը՝ հաճախ պահանջվում է գտնել մյուսինը: Նախ՝ դիտարկենք դիսկրետ պատահական մեծությունների դեպքը: Դիցուք ξ -ն դիսկրետ պատահական մեծություն է, իսկ $y=\varphi(x)$ -ը որևէ ֆունկցիա է: Ենթադրենք ξ -ն ունի հետևյալ բաշխումը աղյուսակը՝

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

:

Գտնենք $\eta=\varphi(\xi)$ պատահական մեծության բաշխման աղյուսակը: Պարզ է, որ η-ն նույնպես դիսկրետ է և նրա հնարավոր արժեքներն են՝

$$y_1=\varphi(x_1), y_2=\varphi(x_2),\dots, y=\varphi(x_n) :$$

Այն դեպքում դեպքում, երբ բոլոր $y_1,y_2,\dots,y_n$ արժեքները տարբեր են, ապա $\{\xi=x_i\}$ և $\{\eta=y_i\}$, $i=1,2,\dots,n$ պատահույթները համարժեք են, հետևաբար, համաձայն հավանականության հատկությունների՝

$$\mathrm{P}\{\xi=x_i\}=\mathrm{P}\{\eta=y_i\}=p_i, \quad i=1,2,\dots,n :$$

Այսպիսով, $\eta=\varphi(\xi)$ պատահական մեծության աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը՝

η	y_1	y_2	$\dots$	y_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

:

Եթե $y_1, y_2, \dots, y_n$ արժեքների մեջ կան հավասարներ, օրինակ՝ $y_i = y_j = y$, ապա աղյուսակում y արժեքին հատկացնում ենք մեկ տեղ և դրան համապատասխան հավանականությունը որոշում ենք $p = p_i + p_j$ առնչությամբ:

Խնդիր 1: Դիցուք ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների համար (ξ_1, ξ_2) վեկտորի բաշխման օրենքը տրվում է (6.2) աղյուսակով: Պահանջվում է գտնել $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, որտեղ $g(x, y)$-ը որևէ ֆունկցիա է:

Լուծում: η պատահական մեծության հնարավոր արժեքները նշանակենք $z_1, z_2, \dots$: Այդ դեպքում՝

$$P\{\eta = z_k\} = P\left\{g(\xi_1, \xi_2) = z_k\right\} = \sum_{(i,\, j:\, g(a_i, b_j) = z^k)} P\{\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j\} =$$

$$= \sum_{(i,\, j:\, g(a_i, b_j) = z^k)} P_{ij} :$$

Խնդիր 2: Օգտվելով այս առնչությունից, ցույց տանք, որ եթե ξ և η պատահական մեծությունները անկախ են և բաշխված են Պուասոնի օրենքով համապատասխանաբար՝ λ_1 և λ_2 պարամետրերով, ապա $\zeta = \xi + \eta$ պատահական մեծությունը նույնպես բաշխված է Պուասոնի օրենքով՝ $\lambda_1 + \lambda_2$ պարամետրով:

Լուծում: Դիցուք

$$P\{\xi = n\} = e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$P\{\eta = m\} = e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots :$$

Այդ դեպքում $\zeta = \xi + \eta$ պատահական մեծությունը նույնպես կընդունի $k = 0, 1, 2, \dots$ արժեք, ընդ որում՝

$$P\{\zeta = k\} = \sum_{(i,\, j:\, i+j=k)} P\{\xi = i, \eta = j\} = \sum_{(i,\, j:\, i+j=k)} P\{\xi = i\} \cdot P\{\eta = j\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P\{\xi = i\} \cdot P\{\eta = k - i\} = \sum_{i=0}^{k} (e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}) =$$

$$= e^{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \sum_{i=0}^{k} (\frac{\lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} \cdot \frac{k!}{k!}) = \frac{e^{\lambda_1 + \lambda_2}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i} = e^{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} :$$

Խնդիր 3: Դիցուք $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$-ը ξ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է, իսկ $\varphi(x)$-ը բորելյան ֆունկցիա է, այսինքն՝ $\varphi^{-1}(B) = \{x : \varphi(x) \in B\}$ բազմությունը ցանկացած բորելյան B բազմության համար բորելյան բազմություն է: Գտնենք $\eta = \varphi(\xi)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

Լուծում: Ունենք

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\{\varphi(\xi) < x\} = \mathrm{P}\{\xi \in \varphi^{-1}(-\infty, x)\}: \qquad (6.6)$$

Պարզ է, որ (6.6)-ի աջ կողմում գրված հավանականությունը կարելի է հաշվել $F_\xi(x)$-ի միջոցով: Մասնավորապես, եթե $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է, ապա գոյություն ունի $x = \varphi^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան, որը նույնպես կլինի մոնոտոն աճող: Հետևաբար՝

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\varphi(\xi) < y\} = \mathrm{P}\{\xi < \varphi^{-1}(y)\} = F_\xi\{\varphi^{-1}(y)\}: \qquad (6.7)$$

Եթե ենթադրենք, որ ξ-ն անընդհատ պատահական մեծություն է, իսկ $\varphi(x)$-ը մոնոտոն նվազող է, ապա՝

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\varphi(\xi) < y\} = \mathrm{P}\{\xi > \varphi^{-1}(y)\} = 1 - F_\xi(\varphi^{-1}(y)), \qquad (6.8)$$

քանի որ անընդհատ պատահական մեծության համար $\mathrm{P}\{\xi = x\} = 0$:

Այժմ գտնենք $\eta = \varphi(\xi)$ պատահական մեծության բաշխման խտությունը ξ պատահական մեծության $f_\xi(x)$ բաշխման խտության միջոցով՝ հավելյալ ենթադրելով, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է:

Համաձայն և (6.8) բանաձևերի, կունենանք՝

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \frac{dF_\xi\{\varphi^{-1}(y)\}}{d\varphi^{-1}(y)} \cdot \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy},$$

երբ $\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = -\frac{dF_\xi\{\varphi^{-1}(y)\}}{d\varphi^{-1}(y)} \cdot \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = -f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy},$$

երբ $\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է: Նկատենք, որ այս դեպքում $\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} < 0$: Այսպիսով, միավորելով վերջին երկու հավասարությունները, ստանում ենք, որ եթե $f_\xi(x)$-ը ξ-ն անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտությունն է, իսկ $\varphi(x)$-ը՝ մոնոտոն և դիֆերենցելի ֆունկցիա, ապա $\eta=\varphi(\xi)$ պատահական մեծության բաշխման խտությունն է՝

$$f_\eta(y)=f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|: \tag{6.9}$$

Խնդիր 4. Դիցուք $F_\xi(x)$-ը ξ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է: Գտնել $F_\eta(x)$-ն, եթե $\eta=\xi^n$:

Լուծում:

ա) Ենթադրենք՝ n-ը կենտ թիվ է: Այդ դեպքում, օգտվելով (6.7) բանաձևից, կարող ենք գրել.

$$F_\eta(x)=F_\xi(\varphi^{-1}(x))=F_\xi(\sqrt[n]{x}):$$

Ընդ որում, եթե ξ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է, ապա՝

$$f_\eta(x)=\left(F_\xi(\sqrt[n]{x})\right)'_x=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}\cdot f_\xi(\sqrt[n]{x}):$$

բ) Ենթադրենք՝ n-ը զույգ թիվ է: Այս դեպքում արդեն $\varphi(x)=x^n$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, հետևապես՝ չենք կարող կիրառել (6.7) բանաձևը: Ընտրենք այլ եղանակ: Եթե $x\le 0$, ապա $F_\eta(x)=P\{\xi^n<x\}=0$: Եթե $x>0$, ապա

$$F_\eta(x)=P\{\xi^n<x\}=P\{-\sqrt[n]{x}<\xi<\sqrt[n]{x}\}=F_\xi(\sqrt[n]{x})-F_\xi(-\sqrt[n]{x}+0):$$

Այսպիսով՝

$$F_\eta(x)=P(\xi^n<x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ F_\xi(\sqrt[n]{x})-F_\xi(-\sqrt[n]{x}+0), & x>0:\end{cases}$$

Եթե ξ բացարձակ անընդհատ է, ապա $F_\xi(-\sqrt[n]{x}+0)=F_\xi(-\sqrt[n]{x})$ և

$$f_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{n}\,x^{-\frac{n-1}{n}}\left[f_\xi(\sqrt[n]{x})+f_\xi(-\sqrt[n]{x})\right], & x>0:\end{cases}$$

Խնդիր 5. Դիցուք $F_\xi(x)=\mathrm{P}(\xi<x)$-ը անընդհատ է: Պահանջվում է գտնել $\eta=F_\xi(\xi)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

Լուծում: Քանի որ $0\le F_\xi(x)\le 1$, $\forall x\in(-\infty,\infty)$, ապա $F_\eta(x)=0$, $x\le 0$ և $F_\eta(x)=1$, եթե $x>1$: Այժմ ենթադրենք, որ $0<x\le 1$: Քանի որ $(0,1]$ միջակայքում $F_\xi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, ուստի, համաձայն (6.7)-ի, $F_\eta(x)=F_{F_\xi(\xi)}(x)=F_\xi(F_\xi^{-1}(x))=x$: Հետևաբար՝

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 : \end{cases}$$

Այսպիսով, η-ն $[0,1]$-ում բաշխված է հավասարաչափ:

Խնդիր 6: Դիցուք ξ պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում: Գտնենք $\eta = \sin\xi$ պատահական մեծության բաշխման խտությունը:

Լուծում: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված ξ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է՝

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi},$$

եթե $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ և $f_\xi(x) = 0$, եթե $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

Քանի որ $\varphi(x) = \sin x$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում մոնոտոն է, հետևաբար՝ այդ միջակայքում այն ունի հակադարձ ֆունկցիա՝ $x = \varphi^{-1}(y) = \arcsin y$: Համաձայն (6.9) բանաձևի, կունենանք՝

$$f_\eta(y) = f_\xi(\arcsin y) \cdot (\arcsin y)' = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} :$$

Քանի որ $y = \sin x$, իսկ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ապա $-1 < y < 1$: Այսպիսով՝

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \notin (-1,1) : \end{cases}$$

Խնդիր 7: Դիցուք $f(x,y)$-ը (ξ,η) պատահական վեկտորի բաշխման խտությունն է: Պահանջվում է գտնել $F_{\xi+\eta}(z)$-ն:

Լուծում: Ունենք $F_{\zeta=\xi+\eta}(z) = \mathrm{P}(\zeta < z) = \mathrm{P}(\xi + \eta < z)$: Քանի որ $\mathrm{P}(\xi + \eta < z)$-ը (ξ,η) կետի $\xi + \eta < z$ կիսահարթություն ընկնելու հավանականությունն է, ապա

$$F_\zeta(z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z} f(x, u-x)\,du dx = \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)\,dx \right) du,$$

որից հետևում է, որ ζ պատահական մեծությունը բացարձակ անընդհատ է, և նրա բաշխման խտությունն ունի

$$f_\zeta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,, u-x)\,dx \tag{6.10}$$

տեսքը:

Եթե ξ և η պատահական մեծությունները անկախ են, ապա $f(x\,,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ և (6.10)-ից ստանում ենք՝

$$f_\zeta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,f_\eta(u-x)\,dx: \tag{6.11}$$

(6.11) բանաձևը կոչվում է *կոմպոզիցիայի բանաձև*: Օգտվելով այս բանաձևից՝ կարելի է ցույց տալ, որ եթե պատահական մեծություններն անկախ են և ենթարկվում են նորմալ բաշխմանը (a_1,σ_1) և (a_2,σ_2) պարամետրերով, ապա դրանց գումարը նույնպես կենթարկվի նորմալ բաշխմանը $(\,a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,)$ պարամետրերով, որը թողնվում է ընթերցողին:

Խնդիր 8: Դիցուք $f(x\,,y)$ ֆունկցիան $(\xi\,,\eta)$ պատահական վեկտորի բաշխման խտությունն է: Պահանջվում է գտնել $F_{\zeta=\xi\eta}(z)$-ը:

Լուծում: Ունենք՝

$$F_\zeta(z) = \mathrm{P}(\zeta<z) = \mathrm{P}(\xi\cdot\eta<z) = \mathrm{P}\Big(\eta<\frac{z}{\xi}\mid\xi>0\Big)+\mathrm{P}\Big(\eta>\frac{z}{\xi}\mid\xi<0\Big)=$$

$$=\iint_{xy<z} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{z/x} f(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{0}\int_{z\setminus x}^{\infty} f(x,y)\,dxdy =$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f\Big(x\,,\frac{u}{x}\Big)\frac{du}{x}\right)dx-\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{z} f\Big(x\,,\frac{u}{x}\Big)\frac{du}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\,x\,|}f\Big(x\,,\frac{u}{x}\Big)dx\right)du:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\zeta=\xi\cdot\eta$ պատահական մեծությունը բացարձակ անընդհատ է և նրա խտությունն է՝

$$f_\zeta(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\,x\,|}f\Big(x\,,\frac{u}{x}\Big)dx:$$

Եթե ξ և η պատահական մեծություններն անկախ են, ապա՝

$$f_\zeta(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\,x\,|}f_\xi(x)\,f_\eta\Big(\frac{u}{x}\Big)dx:$$

ԳԼՈՒԽ 7
ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԸ

§7.1. Մաթեմատիկական սպասելի

Պատահական մեծությունները ամբողջությամբ բնութագրվում են իրենց բաշխման ֆունկցիաների միջոցով: Սակայն հաճախ ավելի հարմար է օգտվել պատահական մեծությունների, այսպես կոչված, թվային բնութագրիչներից, որոնք ավելի ամփոփ տեղեկություն են տալիս պատահական մեծության այս կամ այն հատկության մասին: Ամեն բաշխում ունի իր թվային բնութագրիչները՝ մոմենտները: Դրանցից ամենակարևորներն են $\mathrm{M}\xi$ մաթեմատիկական սպասելին (բաշխման միջինը) և $\mathrm{D}\xi$ դիսպերսիան (ցրվածության աստիճանը միջինի նկատմամբ):

Հավանականային տարածության ընդհանուր դեպքի համար մաթեմատիկական սպասումը հարմար է սահմանել՝ օգտվելով Լեբեգի ինտեգրալից.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ հավանականային տարածության վրա որոշված $\xi(\omega)$ պատահական մեծության *մաթեմատիկական սպասելի* է կոչվում

$$\mathrm{M}\xi = \int_{\Omega} \xi\left(\omega\right) dP\left(\omega\right)$$

թիվը, եթե հավասարության աջ մասում գրված Լեբեգի ինտեգրալը գոյություն ունի:

Առանց օգտվելու Լեբեգի ինտեգրալի տեսությունից՝ կսահմանենք մաթեմատիկական սպասելին միայն դիսկրետ և բացարձակ անընդհատ պատահական մեծությունների համար:

Սահմանում 7.1: $\xi = \xi(\omega)$ դիսկրետ պատահական մեծության *մաթեմատիկական սպասելի*՝ $\mathrm{M}\xi$, կոչվում է հետևյալ շարքի գումարը՝

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathrm{P}\{\, \xi = x_n\},, \tag{7.1}$$

եթե միայն այդ շարքը բացարձակ զուգամետ է՝ $\sum_{i=1}^{\infty} |\, x_n \,|\, p_n < \infty$: Հակառակ դեպքում ասում են, որ մաթեմատիկական սպասելի գոյություն չունի:

Սահմանում 7.2 : $f_\xi(x)$ խտությամբ *բացարձակ անընդհատ* բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծության $\mathrm{M}\xi$ *մաթեմատիկական սպասելի է* կոչվում

$$\mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\, dx$$

ինտեգրալը, եթե այն բացարձակ զուգամետ է՝ $\int_{-\infty}^{\infty} |\, x \,|\, f(x)\, dx < +\infty$:

Օրինակ 1: Դիցուք ξ պատահական մեծությունը հավասար է խաղոսկրի մեկ նետման ժամանակ հայտնված միավորների թվին: Այդ դեպքում

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{n=1}^{6} n \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \Big(1+2+3+4+5+6\Big) = 3{,}5 :$$

Այսպիսով, մեկ նետման ժամանակ միջինում հայտվում է $3{,}5$ միավոր:

Օրինակ 2: Դիցուք ξ պատահական մեծությունը $[a,b]$ հատվածի վրա պատահականորեն նետված կետի կոորդինատն է: Այդ դեպքում

$$\mathrm{M}\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_b^a = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2} :$$

Հավասարաչափ բաշխման ծանրության կենտրոնը հատվածի միջնակետն է:

§7.2. Մաթեմատիկական սպասելիի հատկությունները

Ստորև նշված բոլոր հատկությունների համար ենթադրվում է, որ մաթեմատիկական սպասելին գոյություն ունի:

(M1) Կամայական $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ բորելյան ֆունկցիայի համար՝

$\mathrm{M}g(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathrm{P}(\xi=x_n)$, եթե ξ -ի բաշխումը դիսկրետ է և շարքը՝ բացարձակ զուգամետ, և

$\mathrm{M}g(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_\xi(x)\,dx$, եթե ξ -ի բաշխումը բացարձակ անընդհատ է և ինտեգրալը՝ բացարձակ զուգամետ :

Ապացույց: Մաթեմատիկական սպասելիի այս և հետագա գրեթե բոլոր հատկությունների ապացուցումները կկատարենք միայն դիսկրետ պատահական մեծությունների համար: Ենթադրենք $z_1,z_2,\dots$ թվերը $g(\xi)$ պատահական մեծության արժեքներն են: Համաձայն մաթեմատիկական սպասման սահմանման՝

$$\mathrm{M}g(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\mathrm{P}(g(\xi)=z_k)$$

ξ պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների՝ $x_1,x_2,\dots$, բազմությունը տրոհենք միմյանց հետ չհատվող $E_1,E_2,\dots$ խմբերի, որտեղ $E_k=\{x_n : g(x_n)=z_k\}$, $k\ge 1$: Այդ դեպքում

$$\mathrm{P}(g(\xi)=z_k)=\sum_{n:x_n\in E_k}\mathrm{P}(\xi=x_n):$$

$\sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathrm{P}(\xi=x_n)$ շարքում (բացարձակ զուգամետ) կատարելով անհրաժեշտ տեղափոխություններ՝ կստանանք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathrm{P}(\xi=x_n)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\sum_{n:x_n\in E_k}\mathrm{P}(\xi=x_n)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\mathrm{P}(g(\xi)=z_k)=\mathrm{M}g(\xi): \qquad \square$$

(M2) Ցանկացած C հաստատունի համար $\mathrm{M}C=C$ և $\mathrm{M}(C\xi)=C\cdot\mathrm{M}\xi$:

Ապացույց: Քանի որ հաստատուն պատահական մեծությունը 1 հավանականությամբ ընդունում է C արժեք, ուստի

$$\mathrm{M}C=C\cdot 1=C:$$

Ապացուցենք, երկրորդ առնչությունը նախ՝ դիսկրետ, ապա՝ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության համար: Դիցուք ξ պատահական մեծությունն ընդունում է $x_1, x_2, \ldots$ արժեքներ համապատասխանաբար $p_1, p_2, \ldots$ հավանականություններով: Այդ դեպքում $C\xi$ պատակահական մեծությունը կընդունի $Cx_1, Cx_2, \ldots$ արժեքներ՝ $p_1, p_2, \ldots$ հավանականություններով, ուստի՝

$$\mathrm{M}(C\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Cx_n p_n = C\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = C \cdot \mathrm{M}\xi :$$

Այժմ ապացուցենք այս հատկությունը բացարձակ անընդհատ բաշխում ունեցող պատահական մեծության համար: $C = 0$ դեպքում այն ակնհայտ է: Դժվար չէ նկատել, որ $C > 0$ դեպքում՝

$$F_{C\xi}(x) = \mathrm{P}(C\xi < x) = \mathrm{P}\left(\xi < \frac{x}{C}\right) = F_\xi\left(\frac{x}{C}\right), \quad \text{և} \quad f_{C\xi}(x) = \frac{1}{C} f_\xi\left(\frac{x}{C}\right),$$

որտեղից

$$\mathrm{M}(C\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{C\xi}(x)\, dx = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi\left(\frac{x}{C}\right) dx = C\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_\xi(y)\, dy = C \cdot \mathrm{M}\xi :$$

Իսկ եթե $C < 0$, ապա

$$F_{C\xi}(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{x}{C}\right) \quad \text{և} \quad f_{C\xi}(x) = -\frac{1}{C} f_\xi\left(\frac{x}{C}\right),$$

որտեղից էլ՝

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(C\xi) &= -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi\left(\frac{x}{C}\right) dx = \\ &= -\frac{C^2}{C}\int_{+\infty}^{-\infty} y f_\xi(y)\, dy = C\int_{-\infty}^{\infty} y f_\xi(y)\, dy = C \cdot \mathrm{M}\xi :\end{aligned}$$

$\square$

(M3) Եթե $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունները որոշված են միևնույն $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ հավանականային տարածության վրա, ապա

$$\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n :$$

Ապացույցը կատարվում է ինդուկցիայի մեթոդով (ըստ n-ի), որի համար հիմք է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 : \tag{7.2}$$

Ապացուցենք (7.2) հավասարությունը:

Դիսկրետ դեպքի համար ենթադրենք՝ $z_1, z_2, \ldots$ թվերը $\xi_1 + \xi_2$ պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքներն են: Յանկացած z_k, $k \geq 1$ արժեք ստացվում է ξ_1 պատահական մեծության (հնարավոր արժեքներն են՝ $x_1, x_2, \ldots$) և ξ_2 մեծության (հնարավոր արժեքներն են՝ $y_1, y_2, \ldots$) այնպիսի արժեքներից, որ $x_i + y_j = z_k$: Հետևաբար՝

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} P_{ij}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

որտեղ $P_{ij} = \mathrm{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$: Այսպիսով,

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \mathrm{P}\left(\xi_1 + \xi_2 = z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} P_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) \cdot \mathrm{P}(\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j):$$

Քանի որ՝

$$\mathrm{P}(\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j),\ \mathrm{P}(\xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j),$$

ապա՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi_1 = x_i) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathrm{P}(\xi_2 = y_j) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 :$$

Այժմ ենթադրենք, որ ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն ունեն բացարձակ անընդհատ բաշխումներ: Հայտնի է, որ $\xi_1 + \xi_2$ պատահական մեծության $f_{\xi_1 + \xi_2}(x)$ բաշխման խտությունը որոշվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\, u - x)\, dx\,, \tag{7.3}$$

որտեղ $f(x, y)$-ը $(\xi_1,\, \xi_2)$ պատահական վեկտորի բաշխման խտությունն է: Ելնելով մաթեմատիկական սպասման սահմանումից և (7.3)-ից, ստանում ենք՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, u - x)\, dx \right] du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u\, f(x, u - x)\, du dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+z)\,f\,(x\,,z)\,dzdx\,:$$

Մյուս կողմից, քանի որ ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների բաշխման խտությունները որոշվում են

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,z)\,dz \quad \text{և} \quad f_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,z)\,dx\,:$$

հավասարություններով, ուստի՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_1(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} z\,f_2(z)\,dz = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2\,: \qquad \square$$

(M4) Եթե $\xi \geq 0$, ապա $\mathrm{M}\xi \geq 0$: Մասնավորապես, եթե $\xi \geq 0$ և $\mathrm{M}\xi = 0$, ապա $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1$:

Ապացույց: Այս հատկությունը կապացուցենք, նախապես ենթադրելով, որ ξ պատահական մեծությունն ունի դիսկրետ բաշխում և ընդունում է $x_n \geq 0$ արժեքներ: Քանի որ $x_n \geq 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ շարքի բոլոր անդամները ոչ բացասական են, հետևաբար՝ $\mathrm{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \geq 0$:

Այժմ, եթե $\mathrm{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = 0$, ապա շարքի բոլոր գումարելիները հավասար կլինեն զրոյի, այսինքն՝ բոլոր p_n հավանականությունները զրոյական են, բացի $x_n = 0$ արժեքին համապատասխան հավանականությունից: Հետևաբար՝ $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1$: $\square$

(M5) Եթե $\xi \geq \eta$, ապա $\mathrm{M}\xi \geq \mathrm{M}\eta$:

Ապացույց: Հատկություն (M5)-ը ամիջապես բխում է հատկություն (M4)-ից:

(M6) $\mathrm{M}(\xi - M\xi) = 0$:

Ապացույց: Օգտվելով (M2) և (M3) հատկություններից, ստանում ենք՝

$$\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi) = \mathrm{M}\xi - \mathrm{M}(\mathrm{M}\xi) = \mathrm{M}\xi - \mathrm{M}\xi = 0\,: \qquad \square$$

(M7) Եթե ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն անկախ են, և գոյություն ունեն դրանց մաթեմատիկական սպասելիները, ապա՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 \cdot \mathrm{M}\xi_2 :$$

Ապացուցենք այս առնչությունը դիսկրետ պատահական մեծությունների համար:

Ենթադրենք՝ $z_1, z_2, \cdots$ թվերը $\xi_1 \cdot \xi_2$ պատահական մեծության բոլոր արժեքներն են: Համաձայն մաթեմատիկական սպասելիի սահմանմանը՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \mathrm{P}(\xi_1 \cdot \xi_2 = z_k), \tag{7.4}$$

եթե աջ մասի շարքը բացարձակ զուգամետ է: Ենթադրենք՝ $x_1, x_2, \ldots$ թվերը ξ_1 պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքներն են, իսկ $y_1, y_2, \ldots$ թվերը՝ ξ_2-ի: $E_k = ((x_n, y_m) : x_n \cdot y_m = z_k)$, $k = 1,2,\ldots$ բազմությունների $\left\{(x_n, y_m)\right\}_{n,m=1}^{\infty,}$ հաջորդականությունը տրոհում են իրար հետ չհատվող խմբերի այնպես, որ՝

$$\mathrm{P}(\xi_1 \cdot \xi_2 = z_k) = \sum_{(x_n, y_m) \in E_k} \mathrm{P}(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_m) :$$

(7.4) հավասարության աջ մասի շարքի անդամների տեղափոխմամբ կստանանք՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_n y_m \mathrm{P}(\xi_1 = x_n,\ \xi_2 = y_m) :$$

Եվ քանի որ ξ_1 և ξ_2-ն անկախ են, ապա՝

$$\mathrm{P}(\xi_1 = x_n,\ \xi_2 = y_m) = \mathrm{P}(\xi_1 = x_n) \cdot \mathrm{P}(\xi_2 = y_m),$$

հետևաբար՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathrm{P}(\xi_1 = x_n)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} y_m \mathrm{P}(\xi_2 = y_m)\right) = \mathrm{M}\xi_1 \cdot \mathrm{M}\xi_2 : \qquad \square$$

§7.3. Ստանդարտ բաշխումների մաթեմատիկական սպասելիները

1. Դիցուք ξ պատահական մեծությունը բաշխված է բինոմական օրենքով՝ $\mathrm{P}(\xi = k;\ k = 0,1,\ldots,n) = P_k = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \le p \le 1$: Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{M}\xi=\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{P}(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$
$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}=$$
$$=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!(n-l)!}p^l(1-p)^{n-l}=np\cdot\big(p+1-p\big)^{n-1}=np:$$

Այսպիսով, $\mathrm{M}\xi=np$, եթե $\xi\sim\mathrm{B}_{n,p}$:

2. Եթե ξ -ն ունի երկրաչափական բաշխում ($\xi\sim\mathrm{G}_p$)՝

$$P_k=\mathrm{P}(\xi=k)=q^{k-1}\cdot p,\ \ k=1,\,2,\,\ldots,\ \ 0\le p\le 1,\ \ q=1-p,$$

ապա՝

$$\mathrm{M}\xi=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\cdot\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)=$$
$$=p\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}:$$

3. Եթե ξ -ն ունի Պուասոնյան բաշխում՝ $\xi\sim\Pi_\lambda$, ապա՝

$$\mathrm{M}\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda:$$

4. Դիցուք ξ պատահական մեծությունը $[a,b]$ հատվածում ենթարկվում է հավասարաչափ բաշխմանը՝ $\xi\sim\mathrm{U}_{a,b}$: Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{M}\xi=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}:$$

5. Եթե $\xi\sim\mathrm{N}\left(a,\sigma^2\right)$, ապա՝

$$\mathrm{M}\xi=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+$$
$$+\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx:$$

Քանի որ

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0,$$

(որպես կենտ ֆունկցիայի սիմետրիկ ինտեգրալ), իսկ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 1,$$

(որպես N(0,1) նորմալ բաշխում ունեցող պատահական մեծության խտության ինտեգրալ), ապա՝ $\mathrm{M}\xi = a$:

6. Կոշիի օրենքով բաշխված ξ պատահական մեծության համար ($\xi \sim \mathrm{C}_{a,\sigma}$).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\infty} = \infty,$$

հետևաբար՝ $\mathrm{M}\xi$ գոյություն չունի:

7. Եթե ξ-ն ունի ցուցչային բաշխում՝ $\xi \sim \mathrm{E}_\alpha$, ապա՝

$$\mathrm{M}\xi = \int_0^{\infty} xae^{-ax}dx = a\int_0^{\infty} xe^{-ax}dx = a\cdot(-\frac{1}{a})\int_0^{\infty} xde^{-ax} =$$

$$= -(xe^{-ax}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-ax}dx) = \int_0^{\infty} e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{\infty} =:$$

$$= -\frac{1}{a}(0-1) = \frac{1}{a}:$$

§7.4. Դիսպերսիա և բարձր կարգի մոմենտներ

Դիցուք $\xi = \xi(\omega)$ պատահական մեծությունը որոշված է $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ կամայական հավանակային տարածության վրա:

Սահմանում 7.3 : Դիցուք $\mathrm{M}|\xi|^k < \infty$: ξ պատահական մեծության n-րդ կարգի *մոմենտ է* կոչվում

$$v_n = \mathrm{M}\xi^n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

թիվը, իսկ n-րդ կարգի *կենտրոնական մոմենտ է* կոչվում

$$\mu_n = (\xi - \mathrm{M}\xi)^n, \quad n = 0,1,2,\ldots:$$

թիվը:

$\mathrm{M}\,|\,\xi^n\,|$ թիվը կոչվում է n-րդ կարգի *բացարձակ մոմենտ*, իսկ $\mathrm{M}|\,\xi-\mathrm{M}\xi\,|^n$-ը՝ n-րդ կարգի *կենտրոնական բացարձակ մոմենտ*, մասնավորապես, $\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2$ թիվը (երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը) կոչվում է ξ պատահական մեծության *դիսպերսիա*:

Այսպիսով պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն առաջին կարգի սկզբնական մոմենտն է, իսկ դիսպերսիան՝ երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը:

Օրինակ 2: $\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2$ դիսպերսիան հանդիսանում է «ξ պատահական մեծության՝ իր միջինից ունեցած շեղման քառակուսու միջին արժեքը»: Պարզենք, թե ինչ է բնութագրում այս մեծությունը:

Դիցուք ξ պատահական մեծությունը հավասար հավանականություններով ընդունում է ±1 արժեքները, իսկ η-ն՝ ±10 արժեքները նույնպես հավասար հավանականություններով: Պարզ է, որ $\mathrm{M}\xi=$ $=\mathrm{M}\eta=0$, հետևաբար՝ $\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}\xi^2=1$, $\mathrm{D}\eta=\mathrm{M}\eta^2=100$:

Այսպիսով, ասում են, որ դիսպերսիան բնութագրում է պատահական մեծության արժեքների «ցրվածության աստիճանը» իր մաթեմատիկական սպասելիի շուրջը:

Սահմանում 7.4: $\sigma=\sqrt{\mathrm{D}\xi}$ մեծությունը կոչվում է ξ պատահական մեծության *միջին քառակուսային շեղում*:

Որպեսզի կապ հաստատենք տարբեր կարգերի մոմենտների միջև, ապացուցենք որոշ անհավասարություններ: Նախ՝ ցույց տանք, որ բարձր կարգի մոմենտների գոյությունն ապահովում է ավելի ցածր կարգի մոմենտների գոյությունը:

Թեորեմ 7.1: *Եթե գոյություն ունի ξ պատահական մեծության $t>0$ կարգի մոմենտը, ապա գոյություն ունեն նաև ξ-ի s-րդ կարգի մոմենտները, եթե $0<s<t$:*

Ապացույց: Նկատենք, որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|x|^s\le\max\left(|x|^t,1\right)\le|x|^t+1:$$

Իսկապես, $|x|^s<|x|^t$, եթե $|x|>1$ և $|x|^s\ge1$, եթե $|x|\le1$:

Այս անհավասարությունից բխում է, որ $|\xi(\omega)|^s \le |\xi(\omega)|^t + 1$ ցանկացած ω-ի համար, ուստի, համաձայն մաթեմատիկական սպասելիի (M5) հատկության՝

$$\mathrm{M}|\xi|^s \le \mathrm{M}|\xi|^t + 1:$$

Քանի որ $\mathrm{M}|\xi|^t < \infty$, հետևաբար՝ $\mathrm{M}|\xi|^s < \infty$: □

Թեորեմ 7.2 (Իենսենի անհավասարություն): *Դիցուք $g(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է դեպի ներքև: Այդ դեպքում վերջավոր առաջին կարգի մոմենտ ունեցող ցանկացած ξ պատահական մեծության համար տեղի ունի*

$$\mathrm{M}g(\xi) \ge g(\mathrm{M}\xi)$$

անհավասարությունը: Եթե $g(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է դեպի վերև, ապա անհավասարության նշանը պետք է փոխել հակառակով:

Ապացույց: Դիցուք $g(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է դեպի ներքև: Այդ դեպքում ցանկացած x_0 կետի համար գոյություն կունենա այնպիսի $c(x_0)$ թիվ, որ բոլոր x-երի համար

$$g(x) \ge g(x_0) + c(x_0)(x - x_0):$$

Վերջին անհավասարությունն ակնհայտ է, քանի որ ուռուցիկ դեպի ներքև ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջությամբ գտնվում է իրեն տարված ցանկացած շոշափողից վերև: Այս անհավասարության մեջ տեղադրելով $x_0 = \mathrm{M}\xi$ և $x = \xi$, կունենանք՝

$$g(\xi) \ge g(\mathrm{M}\xi) + c(\mathrm{M}\xi)(\xi - \mathrm{M}\xi):$$

Հաշվենք այս անհավասարության երկու կողմերի մաթեմատիկական սպասելիները: Քանի որ $\mathrm{M}(\xi - M\xi) = 0$, ապա, (M5) հատկության համաձայն, $\mathrm{M}g(\xi) \ge g(\mathrm{M}\xi)$: □

Հաջորդ անհավասարությունը կապ է հաստատում տարբեր կարգերի մոմենտների միջև:

Հետևանք 7.1: *Եթե* $\mathrm{M}|\xi|^t < \infty$, *ապա՝*

$$\left(\mathrm{M}|\xi|^s\right)^{1/s} \le \left(\mathrm{M}|\xi|^t\right)^{1/t}$$

եթե $0 < s < t$:

Ապացույց: Քանի որ $0 < s < t$, ապա $g(x) = |x|^{t/s}$ ֆունկցիան ուռուցիկ է դեպի ներքև: Կիրառելով Իենսենի անհավասարությունը $\eta = |\xi|^s$ պատահական մեծության նկատմամբ, կստանանք՝

$$\left(\mathrm{M}|\xi|^s\right)^{t/s} = (\mathrm{M}\eta)^{t/s} = g(\mathrm{M}\eta) \le \mathrm{M}g(\eta) = \mathrm{M}|\eta|^{t/s} = \mathrm{M}|\xi|^{s \cdot t/s} = \mathrm{M}|\xi|^t :$$

Հետևաբար՝

$$\left(\left(\mathrm{M}|\xi|^s\right)^{t/s}\right)^{1/t} = \left(\mathrm{M}|\xi|^s\right)^{1/s} \le \left(\mathrm{M}|\xi|^t\right)^{1/t} : \qquad \square$$

Իենսենի անհավասարությունից ստացվում են, օրինակ, հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\mathrm{M}e^{\xi} \ge e^{\mathrm{M}\xi}, \qquad \mathrm{M}\xi^2 \ge (\mathrm{M}\xi)^2, \qquad \mathrm{M}|\xi| \ge |\mathrm{M}\xi|,$$

$$\mathrm{M}\ln\xi \le \ln \mathrm{M}\xi, \qquad \mathrm{M}\frac{1}{\xi} \ge \frac{1}{\mathrm{M}\xi}, \qquad \mathrm{M}\sqrt{\xi} \le \sqrt{\mathrm{M}\xi} :$$

Վերջին երեք անհավասարությունները ճիշտ են միայն դրական ξ -երի համար:

§7.5. Դիսպերսիայի հատկությունները

Դիսպերսիայի հատկությունները բխում են մաթեմատիկական սպասելիի համապատասխան հատկություններից: Նկատենք, որ երկրորդ կարգի մոմենտի գոյությունից հետևում են մաթեմատիկական սպասելիի գոյությունը և դիսպերսիայի վերջավորությունը: Ստորև բերված բոլոր հատկություններում ենթադրվում է պատահական մեծությունների երկրորդ կարգի մոմենտի գոյությունը:

(D1) Դիսպերսիայի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 :$$

Ապացույց: Նշանակենք $a = \mathrm{M}\xi$: Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - a)^2 = \mathrm{M}(\xi^2 - 2a\xi + a^2) =$$

$$= \mathrm{M}\xi^2 - 2a\mathrm{M}\xi + a^2 = \mathrm{M}\xi^2 - a^2 : \qquad \square$$

(D2) Ցանկացած c հաստատունի համար՝

$$\mathrm{D}(c\xi) = c^2\mathrm{D}\xi, \quad \mathrm{D}(\xi + c) = \mathrm{D}\xi, \quad \mathrm{D}c = 0 :$$

Վարժություն: Ապացուցել (D2) հատկությունը:

(D3) Եթե ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն անկախ են, ապա

$$\mathrm{D}(\xi_1+\xi_2)=\mathrm{D}\xi_1+\mathrm{D}\xi_2:$$

Ապացույց: Իրոք,

$$\mathrm{D}(\xi_1+\xi_2)=\mathrm{M}(\xi_1+\xi_2)^2-\left(\mathrm{M}(\xi_1+\xi_2)\right)^2=$$

$$=\mathrm{M}\xi_1^2+\mathrm{M}\xi_2^2+2\mathrm{M}(\xi_1\xi_2)-(\mathrm{M}\xi_1)^2-(\mathrm{M}\xi_2)^2-2\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2=\mathrm{D}\xi_1+\mathrm{D}\xi_2,$$

քանի որ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասելին հավասար է դրանց մաթեմատիկական սպասելիների արտադրյալին: □

Մաթեմատիկական սպասման հետևյալ կարևոր հատկությունը թույլ է տալիս ստանալ նոր ներկայացում դիսպերսիայի համար:

§7.6. Ստանդարտ բաշխումների դիսպերսիաները

1. Դիցուք ξ պատահական մեծությունը բաշխված է բինոմական օրենքով՝ $\xi \sim \mathrm{B}_{n,p}$: Այդ դեպքում $\mathrm{M}\xi=np$ և

$$\mathrm{M}\xi^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^k(1-p)^k=\sum_{k=0}^{n}k^2\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np=$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{l=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{l!(n-2-l)!}p^l(1-p)^{n-2-l}+np=$$

$$=n(n-1)p^2\cdot(p+1-p)^{n-2}+np=n^2p^2-np^2+np:$$

Հետևաբար՝

$$\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}\xi^2-(\mathrm{M}\xi)^2=n^2p^2-np^2+np-(np)^2=np(1-p):$$

2. Եթե ξ-ն ունի երկրաչափական բաշխում՝ $\xi \sim \mathrm{G}_p$, ապա $\mathrm{M}\xi = \dfrac{1}{p}$: Հաշվենք ξ-ի երկրորդ ֆակտորիալ մոմենտը՝

$$\mathrm{M}\,\xi(\xi-1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p = pq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2q^k}{dq^2} = pq\cdot\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) =$$
$$= pq\cdot\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q}{1-q}\right) = pq\cdot\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}:$$

Այժմ, օգտվելով ֆակտորիալ մոմենտից, գտնենք երկրաչափական բաշխման դիսպերսիան՝

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\,\xi(\xi-1) + \mathrm{M}\,\xi - (\mathrm{M}\,\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}:$$

3. $\xi \sim \Pi_\lambda$ Պուասոնյան բաշխում ունեցող պատահական մեծության համար ունենք $\mathrm{M}\xi = \lambda$, հետևաբար՝

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$
$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}((k-1)+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$
$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$
$$= \lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda:$$

4. $[a,b]$ հատվածում $\mathrm{U}_{a,b}$ հավասարաչափ բաշխման համար՝

$$\mathrm{M}\xi^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2),$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}:$$

5. $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ նորմալ օրենքի համար՝

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi-a)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx\ .$$

Կատարելով $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$՝ կստանանք $x=z\sigma+a$, $dx=\sigma\,dz$: Հետևաբար.

$$\mathrm{M}(\xi-a)^2=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}zde^{-\frac{z^2}{2}}=$$

$$=-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(ze^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sigma^2:$$

6. Բաշխման ցուցչային օրենքի համար՝

$$\mathrm{M}\xi^2=\int_0^{\infty}x^2ae^{-ax}\,dx=-\left(x^2e^{-ax}\Bigg|_0^{\infty}-2\int_0^{\infty}xe^{-ax}\,dx\right)=-\frac{2}{a}\int_0^{\infty}xde^{-ax}=$$

$$=-\frac{2}{a}\left(xe^{-ax}\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-ax}\,dx\right)=\frac{2}{a^2},$$

$$\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}\xi^2-(\mathrm{M}\xi)^2=\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}:$$

§7.7. Բաշխումների այլ թվային բնութագրիչներ

Պատահական մեծությունների բաշխումները կարելի է բնութագրել մի շարք այլ ցուցանիշներով, որոնց մեծ մասը լայն կիրառություն է գտել մաթեմատիկական վիճակագրությունում:

ξ պատահական մեծության բաշխման *միջին* է կոչվում

$$\mathrm{P}(\xi\le\mu)\ge\frac{1}{2},\ \ \mathrm{P}(\xi\ge\mu)\le\frac{1}{2}$$

անհավասարությունները բավարարող μ թվերից յուրաքանչյուրը:

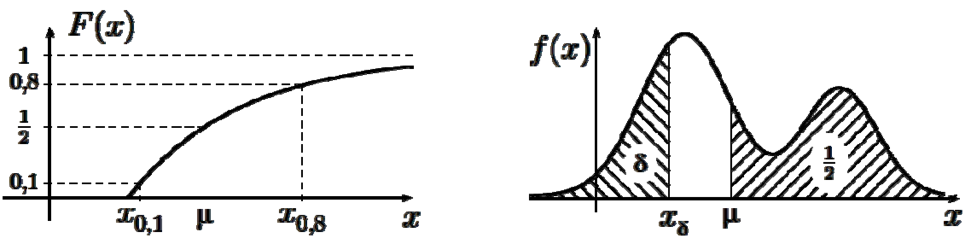
Բաշխման միջինը միշտ գոյություն ունի, սակայն այն կարող է չլինել միակը: Օրինակ, եթե ξ-ն ունի բինոմական բաշխում 3 և $1/2$ պարամետրերով, ապա այս բաշխման միջինը $[1,2]$ հատվածի կամայական թիվ է: Իրոք, այս դեպքում ξ-ն ընդունում է $0,1,2$ և 3 արժեքներ՝ համապատասխանաբար $\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{8}$ և $\dfrac{1}{8}$ հավանականություններով, հետևաբար ցանկացած $\mu\in[1,2]$ թվի համար՝

$$\mathrm{P}(\xi \le \mu) \ge \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(\xi \ge \mu) \le \frac{1}{2}:$$

Եթե ξ պատահական մեծության բաշխումը բացարձակ անընդհատ է, իսկ բաշխման ֆունկցիան խիստ մոնոտոն, ապա միջինը $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$ հավասարման միակ լուծումն է: Թվային ուղղի վրա այս կետից աջ և ձախ կուտակված է ամբողջ հավանականային զանգվածի ուղիղ կեսը (նկ. 7.1): Եթե գոյություն ունի բաշխման f խտությունը, ապա խտության գրաֆիկի տակ μ կետից աջ և ձախ գտնվող տիրույթներն ունեն միևնույն մակերեսները:

Ընդհանրապես, միջինը բաշխման քանորդիչներից մեկն է: Պարզության համար ենթադրենք, որ $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան խիստ մոնոտոն է, այդ դեպքում $\delta \in (0,1)$ մակարդակի քանորդիչ կանվանենք $F(x_\delta) = \delta$ հավասարման լուծումը:

Համաձայն սահմանման δ մակարդակի՝ x_δ քանորդիչը բաշխման խտության գրաֆիկի տակ գտնվող տիրույթը տրոհում է այնպիսի երկու տիրույթների, որ իրենից ձախ գտնվող տիրույթն ունի δ մակերես, իսկ աջ տիրույթը՝ $1-\delta$ (նկ. 7.1):



Նկ. 7.1. Միջինը և քանորդիչները բախման ֆունկցիայի և խտության գրաֆիկների վրա.

Բացարձակ անընդհատ բաշխման խտության գրաֆիկի ցանկացած լոկալ մաքսիմումի կետ կոչվում բաշխման *մոդ*: Դիսկրետ բաշխումների համար մոդ են համարում այն բոլոր a_i արժեքները, որոնց հավանականությունները ավելի մեծ են, քան հարևան արժեքների հավանականությունը:

$\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ նորմալ բաշխման միջինը, մաթեմատիկական սպասելին և մոդան համընկնում են և հավասար են a-ի: Եթե բաշխումն ունի միայն մեկ մոդա, ապա այն անվանում են *ունիմոդալ*: Ունիմոդալ բաշխման վառ օրինակ է նորմալ բաշխումը: Ունիմոդալ բաշխման խտության գրաֆիկը նորմալ բաշխման խտության գրաֆիկի համեմատ կարող է լինել ինչպես ավելի հարթ (հավասարաչափ բաշխում), այնպես էլ ավելի «սրագագաթ», կարող է լինել սիմետրիկ, կամ թեքված որևէ կողմ: Բաշխման խտության այս հատկությունները բնութագրվում են *ասիմետրիայի* և *էքսցեսի* գործակիցներով:

Վերջավոր երրորդ կարգի մոմենտ ունեցող բաշխման ասիմետրիայի գործակից է կոչվում

$$\beta_1 = \mathrm{M}\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3$$

թիվը, որտեղ $a = \mathrm{M}\xi$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi}$: Սիմետրիկ բաշխումների համար $\beta_1 = 0$: Եթե $\beta_1 > 0$, ապա բաշխման խտության գրաֆիկն աջից ունի ավելի թեքություն, քան ձախից, իսկ $\beta_1 < 0$ դեպքում՝ ընդհակառակը:

Վերջավոր չորրորդ կարգի մոմենտ ունեցող բաշխման էքսցեսի գործակից է կոչվում

$$\beta_1 = \mathrm{M}\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3$$

թիվը: Բոլոր նորմալ բաշխումների համար էքսցեսի գործակիցը հավասար է զրոյի: Իրոք, եթե $\xi \sim \mathrm{N}\left(a, \sigma^2\right)$, ապա $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$ մեծությունն ունի ստանդարտ նորմալ բաշխում, որի չորրորդ կարգի մոմենտը հավասար է 3-ի՝ $\mathrm{M}\eta^4 = 3$ (համոզվել ինքնուրույն), հետևաբար՝ $\beta_2 = 0$: Երբ $\beta_2 > 0$, ապա բաշխման խտության գրաֆիկը նորմալ բաշխման համեմատ ունի ավելի սուր գագաթ, իսկ $\beta_2 < 0$ դեպքում՝ ավելի հարթ:

§7.8. Պատահական մեծությունների կովարիացիա. կոռելյացիայի գործակից

ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունները միմյանց հետ կարող են կապված լինել ֆունկցիոնալ կապով, օրինակ, $\xi_1 = a\xi_2 + b$, $\xi_1 = \xi_2^2$,

$\xi_1 = \sin\xi_2$ և այլն: Սակայն փոխկապակցվածությունը կարող է լինել նաև ստոխաստիկ բնույթի, երբ մի պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը փոփոխվում է՝ կախված մյուսի արժեքներից: Պատահական մեծությունների ստոխաստիկ փոխկապակցվածությունը բնութագրվում է երկու պատահական մեծությունների *կովարիացիայի* միջոցով: Ինչպես հայտնի է, դիսպերսիայի հատկություններից վերջավոր երկրորդ կարգի մոմենտ ունեցող անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպեսիան հավասար է այդ մեծությունների դիսպերսիաների գումարին, իսկ ընդհանուր դեպքում՝

$$\mathrm{D}(\xi_1+\xi_2)=\mathrm{D}\xi_1+\mathrm{D}\xi_2+2(\mathrm{M}(\xi_1\xi_2)-\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2):$$

Մաթեմատիկական սպասելիի (M7) հատկության համաձայն՝ $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2)-\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2$ մեծությունը հավասար է զրոյի, եթե ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծություններն անկախ են: Չնայած որ $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2)-\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2=0$ հավասարությունից դեռ չի բխում ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների անկախությունը, սակայն այս մեծությունը կարող է ծառայել որպես պատահական մեծությունների փոխկապակցվածության ցուցանիշ:

Սահմանում 7.5: ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունների *կովարիացիա է* կոչվում

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathrm{M}(\xi_1-\mathrm{M}\xi_1)(\xi_2-\mathrm{M}\xi_2) \tag{7.5}$$

թիվը:

Օգտվելով կովարիացիայի սահմանումից և մաթեմատիկական սպասելիի հատկություններից՝ հեշտ է ցույց տալ, որ տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.

1. $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathrm{M}\xi_1\xi_2-\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2$
2. եթե ξ_1-ը և ξ_2-ը անկախ են, ապա $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$, սակայն հակառակ պնդումը ճիշտ չէ;
3. $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1)$;
4. $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=\mathrm{D}\xi$;
5. $\operatorname{cov}(C\cdot\xi_1,\xi_2)=C\cdot\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$, որտեղ C կամայական հաստատուն է:

Վարժություն: Ապացուցել վերը նշված հատկությունները:

$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ պատահական վեկտորի կովարիացիոն մատրից է կոչվում

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$

մատրիցը, որտեղ $\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)$, $i,j=\overline{1,n}$: Անմիջապես կովարիացիայի հատկություններից հետևում է, որ կովարիացիոն մատրիցը համաչափ է, $\sigma_{ii}=\mathrm{D}\xi$, $i=\overline{1,n}$:

Հատկություն 4-ից պարզ է, որ կովարիացիան գծորեն կախված է պատահական մեծությունների չափման մասշտաբից (այսինքն, եթե $\xi=C\cdot\zeta\Rightarrow\operatorname{cov}(\xi,\eta)=C\cdot\operatorname{cov}(\zeta,\eta)$)։ Այդ պատճառով հաճախ ավելի նպատակահարմար է դիտարկել, այսպես կոչված, նորմավորված պատահական մեծություններ:

Կասենք, որ ξ պատահական մեծությունը *նորմավորված է*, եթե $\mathrm{M}\xi=0$ և $D\xi=1$: Նկատենք, որ $(\xi-\mathrm{M}\xi)/\sqrt{\mathrm{D}\xi}$ ձևափոխությունը հանգեցնում է նորմավորված պատահական մեծության: Իսկապես՝

$$\mathrm{M}\left(\frac{\xi-\mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}\right)=\frac{\mathrm{M}\xi-\mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}=0,$$

$$\mathrm{D}\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{\xi-\mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}\right)^2-0=\frac{\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2}{(\sqrt{\mathrm{D}\xi})^2}=\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}\xi}=1:$$

Դիցուք՝ $\xi_1=\dfrac{\xi-\mathrm{M}\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\xi}}$ և $\eta_1=\dfrac{\eta-\mathrm{M}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\eta}}$:

Սահմանում 7.6: ξ և η պատահական մեծությունների *կոռելյացիայի գործակից*՝ $\rho(\xi,\eta)$, անվանում են հետևյալ մեծությունը՝

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\mathrm{D}\eta}}=\operatorname{cov}(\xi_1,\eta_1)=\mathrm{M}\xi_1\eta_1:$$

Հատկություն 1: $\rho(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\xi_1,\eta_1)=\mathrm{M}\xi_1\eta_1$:

Հատկություն 2: $|\rho(\xi,\eta)|\le 1$:

Իսկապես, $D(\xi_1 \pm \eta_1) \geq 0$ և

$$\mathrm{D}(\xi_1 \pm \eta_1) = \mathrm{M}(\xi_1 \pm \eta_1)^2 = M\xi_1^2 \pm 2\mathrm{M}\xi_1\eta_1 + \mathrm{M}\eta_1^2 =$$
$$= 1 \pm 2\rho(\xi,\eta) + 1 = 2 \pm 2\rho(\xi,\eta):$$ □

Հատկություն 2: Եթե ξ և η-ն անկախ են, ապա $\rho(\xi,\eta) = 0$:

Հատկություն 3: $|\rho(\xi,\eta)| = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ ξ-ն և η-ն h.ա. գծորեն կապված են, այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի a և b հաստատուններ, որ $\mathrm{P}\left(\eta = a\xi + b\right) = 1$:

Ապացույց: Եթե $\eta = a\xi + b$, ապա՝

$$|\rho(\xi,\eta)| = \left|\mathrm{M}\left[\frac{\xi - \mathrm{M}\xi}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{a\xi + b - a\mathrm{M}\xi - b}{\sqrt{D(a\xi + b)}}\right]\right| = \left|\mathrm{M}\left[\frac{\xi - \mathrm{M}\xi}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{a(\xi - \mathrm{M}\xi)}{|a|\sqrt{D\xi}}\right]\right| =$$
$$= \left|\frac{a}{|a|} \cdot \frac{\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2}{|D\xi|}\right| = 1:$$

Այժմ ենթադրենք, որ $\rho(\xi,\eta) = 1$: Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{M}(\xi_1 - \eta_1)^2 = \mathrm{M}\left(\xi_1^{\ 2} - 2\mathrm{M}\xi_1 \cdot \eta_1 + \eta_1^{\ 2}\right) = \mathrm{M}\xi_1^{\ 2} - 2\mathrm{M}\xi_1 \cdot \eta_1 + \mathrm{M}\eta_1^{\ 2} =$$
$$= 1 - 2\rho(\xi \cdot \eta) + 1 = 2\left(1 - \rho(\xi \cdot \eta)\right) = 0$$

Այսինքն՝ $\zeta = (\xi_1 - \eta_1)^2$ պատահական մեծության համար ունենք՝

$$\zeta = (\xi_1 - \eta_1)^2 \geq 0 \quad \text{և} \quad \mathrm{M}\zeta = 0:$$

Մաթեմատիկական սպասման հատկություն 3-ից ստացվում է, որ $\mathrm{P}\left(\zeta = 0\right) = 1$, ինչն էլ տալիս է ξ և η պատահական մեծությունների գծային կախվածությունը:Նույն ձևով դիտարկվում է $\rho(\xi,\eta) = -1$ դեպքը: □

ԳԼՈՒԽ 8
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

§8.1. Չեբիշևի անհավասարությունները: Մեծ թվերի օրենքը

Հավանականությունների տեսության «Սահմանային թեորեմներ» բաժինը սկսվում է անկախ պատահական մեծությունների գումարի սահմանային բաշխումից: Մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարը դիտարկելիս հայտնաբերում ենք, որ գումարելիս շեղումների մասնակի մարումն առաջացնում է միջին թվաբանականի ցրման փոքրացում, ինչը թույլ է տալիս գուշակել նրա վարքը: Օրինակ, անկախ միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը, նրանց քանակի մեծացմանը զուգընթաց, «մոտենում» է մաթեմատիկական սպասմանը: Նմանատիպ օրինաչափությունները և դրանց առաջացման պայմանները կազմում են «մեծ թվերի օրենք» անվանումը կրող մաթեմատիկական թեորեմների բովանդակությունը: Պարզվում է, որ որոշ բավականաչափ ընդհանուր պայմանների դեպքում մեծ թվով անկախ պատահական մեծությունների գումարի բաշխումը մոտենում է նորմալին: Վերջինս էլ կենտրոնական սահմանային թեորեմի բովանդակությունն է:

Դիցուք $\xi=\xi(\omega)$ պատահական մեծությունը որոշված է $(\Omega,\mathscr{F},P)$ հավանականային տարածության վրա: Հետևյալ երկու անհավասարությունները կոչվում են ***Չեբիշևի անհավասարություններ:***

1. *Եթե* $\xi(\omega)\geq 0,\ \forall\omega\in\Omega,$ *ապա* $\forall\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\Big(\xi\geq\varepsilon\Big)\leq\frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon}: \tag{8.1}$$

2. *Եթե* ξ *պատահական մեծությունն ունի վերջավոր դիսպերսիա, ապա* $\forall\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\left(\left|\xi-\mathrm{M}\xi\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^{2}}: \tag{8.2}$$

Նկատենք, որ (8.2) անհավասարությունը (8.1)-ի հետևանքն է: Իսկապես, եթե վերցնենք $\eta(\omega)=\left(\xi-\mathrm{M}\xi\right)^{2}$, $\forall\omega\in\Omega$, ապա կունենանք $\eta(\omega)\geq 0$ և $\mathrm{M}\eta=\mathrm{M}\left(\xi-\mathrm{M}\xi\right)^{2}=\mathrm{D}\xi$: Այժմ (8.1)-ը կիրառելով η-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$\mathrm{P}\left(\eta\geq\varepsilon^{2}\right)\leq\frac{\mathrm{M}\eta}{\varepsilon^{2}},$$

կամ

$$\mathrm{P}\left(\left|\xi-\mathrm{M}\xi\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^{2}}:$$

Մնում է ապացուցել (8.1)-ը: Ներմուծենք հետևյալ գաղափարը:

Սահմանում 8.1: A պատահույթի *ինդիկատոր* կանվանենք $I(A)$ մեծությունը, որը հավասար է մեկի, եթե A պատահույթը տեղի է ունեցել, և զրոյի, եթե A-ն տեղի չի ունեցել:

Համաձայն սահմանման՝ $I(A)$ մեծությունն ունի Բեռնուլիի բաշխում՝ $p=\mathrm{P}(I(A)=1)=\mathrm{P}(A)$ պարամետրով, որի մաթեմատիկական սպասելին հավասար է հաջողության հավանականությանը՝ $\mathrm{M}(I(A))=p=\mathrm{P}(A)$: Պարզ է, որ $I(A)+I(\overline{A})=1$: Հետևաբար, որպես A պատահույթ վերցնելով $A=\{\omega:\xi(\omega)\geq\varepsilon\}$, կունենանք՝

$$\xi=\xi\cdot I(\xi\geq\varepsilon)+\xi\cdot I(\xi<\varepsilon)\geq\xi\cdot I(\xi\geq\varepsilon)\geq\varepsilon\cdot I(\xi\geq\varepsilon),$$

որտեղից՝

$$\mathrm{M}\xi\geq\mathrm{M}(\varepsilon\cdot I(\xi\geq\varepsilon))\geq\varepsilon\cdot\mathrm{M}(I(\xi\geq\varepsilon))\geq\varepsilon\cdot\mathrm{P}(\xi\geq\varepsilon): \qquad \square$$

Չեբիշևի անհավասարությունը թույլ է տալիս ապացուցել որոշ սահմանային առնչություններ վերջավոր դիսպերսիաներով անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունների համար:

Թեորեմ 8.1 (Չեբիշև): *Եթե գոյություն ունի* $c>0$ *այնպիսի հաստատուն, որ* $\mathrm{D}\xi_n\leq c$, $n=1,2,\ldots$, *ապա* $\forall\delta>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\xi_k\right|\geq\delta\right)=0: \tag{8.3}$$

Ապացույց: Նշանակենք $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ և կիրառենք (8.2) անհավասարությունը ζ_n / n պատահական մեծության նկատմամբ $\varepsilon = \delta$ դեպքում: Կստանանք՝

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - \frac{\mathrm{M}\zeta_n}{n}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathrm{D}\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{\mathrm{D}\zeta_n}{\delta^2 n^2} = \frac{\mathrm{D}\xi_1 + \ldots + \mathrm{D}\xi_n}{\delta^2 n^2} = \tag{8.4}$$

$$= \frac{n \cdot \mathrm{D}\xi_k}{\delta^2 n^2} \leq \frac{c}{\delta^2 n} \to 0,\ n \to \infty : \qquad \square$$

Դիտողություն: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում ստացանք հետևյալ օգտակար գնահատականը անկախ միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների միջին թվաբանականի վերաբերյալ՝

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \mathrm{M}\xi_1\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathrm{D}\xi_1}{n\delta^2}:$$

(8.4) անհավասարությունում $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունների անկախության պայմանը կարելի է փոխարինել ավելի թույլ՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{n}\right) = 0 \tag{8.5}$$

պայմանով: Իրոք, այս դեպքում նույնպես (8.4)-ից, երբ $n \to \infty$ կստանանք (8.3):

Այսպիսով, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունների համար տեղի ունի Չեբիշևի թեորեմի ընդհանրացումը:

Թեորեմ 8.2 (Մարկով): *Եթե տեղի ունի (8.5) պայմանը, ապա $\forall\delta > 0$ թվի համար տեղի ունի (8.3) սահմանային առնչությունը:*

Անմիջապես Չեբիշևի թեորեմից բխում է հետևյալ պնդումը:

Հետևանք: *Եթե $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունները անկախ են և միատեսակ բաշխված, ընդ որում, եթե*

$$\mathrm{M}\xi_n = a,\ \mathrm{D}\xi_n = \sigma^2 < \infty,\ n \geq 1, \tag{8.6}$$

ապա $\forall\delta > 0$ թվի համար տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| \geq \delta\right\} = 0 \tag{8.7}$$

հավասարությունը:

(8.7) պնդումն անկախ միանման բաշխված պատահական մեծությունների համար, առանց (8.6)-ի երկրորդ պայմանի, ներկայացնում է *Խինչինի թեորեմը*:

(8.3), (8.7) տիպի սահմանային հավասարությունները կրում են *մեծ թվերի օրենք* անվանումը: Մեծ թվերի օրենքը նաև պատահական մեծությունների հաջորդականության *զուգամիտության* տեսակ է:

Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots$ պատահական մեծությունները որոշված են միևնույն $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ հավանականային տարածության վրա:

Սահմանում 8.2 : Կասենք, որ պատահական մեծությունների $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը *ըստ հավանականության զուգամիտում է* ξ պատահական մեծությանը, երբ $n \to \infty$, և կգրենք $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} \xi$, եթե $\forall \varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\omega : |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0 \ \ (\text{կամ } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1): \quad (8.8)$$

Օգտվելով այս սահմանումից՝ Խինչինի թեորեմը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

եթե $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *պատահական մեծություններն անկախ են և* $\mathrm{M}\xi_k = a,\ k = 1, 2, \ldots,$ *ապա*՝

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} a:$$

Գործնական խնդիրներ լուծելիս հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում հաշվելու տարբեր պատահույթների հավանականությունները՝ կապված Բեռնուլիի սխեմայում n անկախ փորձերի ժամանակ «հաջողությունների» հանդես գալու թվի հետ: Նշանակենք μ_n-ով Բեռնուլլիի n անկախ փորձերում «հաջողությունների» թիվը, իսկ ξ_k-ով՝ k-րդ փորձում «հաջողությունների» թիվը (պարզ է, որ ξ_k-ն ընդունում է 0 կամ 1 արժեքներ): Նկատենք, որ μ_n-ը կարող ենք ներկայացնել n անկախ միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների գումարի տեսքով՝

$$\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \quad (8.9)$$

որտեղ $\mathrm{P}(\xi_k = 1) = p$, $\mathrm{P}(\xi_k = 0) = 1 - p$: Պարզ է, որ $\mathrm{M}\xi_k = p$, $\mathrm{D}\xi_k = p(1-p)$, $k = 1, 2, \ldots$:

Դժվար չէ համոզվել, որ $D\xi_k$ դիսպերսիաները սահմանափակված են միևնույն հաստատուն թվով՝

$$D\xi_k \le \frac{1}{4},^*$$

հետևաբար, (8.9) գումարի նկատմամբ կիրառելով Չեբիշևի թեորեմը, կստանանք հետևյալը:

Թեորեմ 8.3 (Բեռնուլլիի): *Դիցուք n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում «հաջողության» հավանականությունը հավասար է p-ի: Այդ դեպքում $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$ և կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար*

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}: \qquad (8.10)$$

Օրինակ 1: Դիցուք կանոնավոր մետաղադրամը նետվում է 10^4 անգամ: Գնահատենք հավանականությունը, որ զինանշանի ի հայտ գալու հաճախականությունը կտարբերվի $0,5$-ից ոչ պակաս, քան $0,01$-ով:

Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$-ը $p = 1/2$ պարամետրով Բեռնուլլիի բաշխում ունեցող անկախ պատահական մեծություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրն ընդունում է 1 արժեք, եթե համապատասխան նետման արդյունքում հայտվել է զինանշան և 0 արժեք՝ հակառակ դեպքում: Օգտվելով (8.10) առնչությունից, գնահատենք $P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \ge 0,01\right)$ հավանականությունը, որտեղ $n = 10^4$, իսկ $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ զինանշանի ի հայտ գալու թիվն է.

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \ge 0,01\right) \le \frac{p(1-p)}{n \cdot 0,01^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{10^4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{4}:$$

Այսպիսով, կարող ենք եզրակացնել, որ կանոնավոր մետաղադրամի 10000 նետումներից ոչ ավել, քան քառորդ դեպքում զինանշանի հայտվելու հաճախականությունը կտարբերվի $0,5$-ից ոչ պակաս, քան $0,01$-ով:

---

* Այս անհավասարությունը բխում է $f(x) = x(1-x), x \in [0,1]$ ֆունկցիայի դիտարկումից:

§8.2. Ծնորդ ֆունկցիա

Դիցուք ξ պատահական մեծությունն ընդունում է ամբողջ, ոչ բացասական արժեքներ

$$\mathrm{P}(\xi = k) = p_k, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{8.11}$$

հավանականություններով: Պարզ է, որ՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1: \tag{8.12}$$

Սահմանում 8.3 : ξ պատահական մեծության (26.1) բաշխման *ծնորդ ֆունկցիա է* կոչվում հետևյալ շարքը.

$$\Pi_\xi(x) = \mathrm{M}x^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot p_k, \tag{8.13}$$

որտեղ x-ը ($|x| \le 1$) իրական կամ կոմպլեքս փոփոխական է:

Թեորեմ 8.4 : Դիցուք $\Pi_\xi(x)$*-ը ծնորդ ֆունկցիա է որոշված (8.13) բանաձևով, այդ դեպքում.*

1°. $\Pi_\xi(x)$*-ը որոշված է* $[-1,1]$ *հատվածի բոլոր կետերում:*

2°. $\Pi_\xi(1) = 1$*:*

3°. *(8.12) բանաձևով փոխմիարժեք համապատասխանություն է հաստատվում* $\Pi_\xi(x)$ *ծնորդ ֆունկցիաների բազմության և* $\{p_k\}$ *բաշխումների բազմության միջև:*

Ապացույց. Առաջին պնդումը հետևում է այն փաստից, որ (8.12) զուգամետ շարքը մաժորանտ է (8.13)-ի աջ մասի աստիճանային շարքի համար: $\Pi_\xi(1) = 1$ հավասարությունը համընկնում է (8.11)-ին: Թեորեմի երրորդ պնդումը բխում է ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի վերլուծության միակությունից: □

Օգտագործելով Թեյլորի շարքի գործակիցների բանաձևերը՝ կարելի է գտնել $\Pi_\xi(x)$ ծնորդ ֆունկցիային համապատասխան բաշխման $\{p_k\}$ հավանականությունները՝

$$p_k = \frac{1}{k!}\Pi_\xi^{(k)}(0), \quad k = 0,1,2,\dots: \tag{8.14}$$

Սահմանում 8.4: ξ պատահական մեծության k*-րդ կարգի ֆակտորիալ մոմենտ է* կոչվում
$$\mathrm{M}\xi^{[k]} = \mathrm{M}[\xi\cdot(\xi-1)\cdot\ldots\cdot(\xi-k+1)] \tag{8.15}$$
մաթեմատիկական սպասումը:

Թեորեմ 8.5: *Եթե ξ պատահական մեծության k-րդ կարգի ֆակտորիալ մոմենտը գոյություն ունի, ապա այն կարելի է հաշվել*
$$\mathrm{M}\xi^{[k]} = \frac{d^k}{dx^k}\Pi_\xi(x)\big|_{x=1},\ \ k=1,2,\ldots \tag{8.16}$$
բանաձևով, մասնավորապես՝
$$\mathrm{M}\xi = \Pi'_\xi(1) \quad \text{և} \quad \mathrm{D}\xi = \Pi''_\xi(1) + \Pi'_\xi(1) - [\Pi'_\xi(1)]^2 : \tag{8.17}$$

Ապացույց: Քանի որ աստիճանային շարքն իր զուգամիտության միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած $|x|<1$ կետում որոշված են $\Pi_\xi(x)$ ֆունկցիայի k-րդ $(k\ge 1)$ կարգի ածանցյալները.
$$\Pi_\xi^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\cdot x^{m-k}\cdot \mathrm{P}(\xi=m): \tag{8.18}$$
Համաձայն թեորեմի պայմանի, k-րդ կարգի ֆակտորիալ մոմենտը վերջավոր է, ուստի՝
$$\begin{aligned}\mathrm{M}\xi^{[k]} &= \mathrm{M}[\xi\cdot(\xi-1)\cdot\ldots\cdot(\xi-k+1)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\cdot P(\xi=m) < \infty :\end{aligned} \tag{8.19}$$
Պարզ է, որ (8.19)-ը (8.18) շարքի գումարն է $x=1$ կետում, հետևաբար, համաձայն Աբելի թեորեմի, $\Pi_\xi^{(k)}(x)$-ը ամընդհատ է $x=1$ կետում և
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0}\Pi_\xi^{(k)}(x) &= \Pi_\xi^{(k)}(1) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\cdot\mathrm{P}(\xi=m) = \mathrm{M}\xi^{[k]} :\end{aligned}$$
$\square$

Օրինակ 1. Դիցուք ξ պատահական մեծությունն ունի $\mathrm{B}_{n,p}$ բինոմական բաշխում՝
$$\mathrm{P}(\xi=m) = C_n^{\,m}\cdot p^m\cdot q^{n-m}, \quad m=0,1,\ldots,n:$$
Համաձայն (8.13) բանաձևի՝
$$\Pi_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{\,k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}\cdot x^k = (px+q)^n : \tag{8.20}$$

Երկու անգամ ածանցելով (8.20)-ը, կստանանք՝

$$\Pi'_\xi(x) = n \cdot p \cdot (px+q)^{n-1},$$
$$\Pi''_\xi(x) = n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (px+q)^{n-2} :$$

Այժմ, օգտվելով (8.17) բանաձևերից, կստանանք՝

$$\mathrm{M}\xi = p'_\xi(1) = np(p+q)^{n-1} = np,$$
$$\mathrm{D}\xi = p''_\xi(1) + p'_\xi(1) - [p'_\xi(1)]^2 =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (p+q)^{n-2} + np - n^2p^2 = np \cdot (1-p):$$

Ծնորդ ֆունկցիաների կիրառումը ամբողջ արժեքներ ընդունող անկախ պատահական մեծությունների գումարներն ուսումնասիրելիս հիմնված է հետևյալ թեորեմի վրա:

Թեորեմ 8.6 : *Եթե $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ պատահական մեծությունները անկախ են, ապա՝*

$$\Pi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(x) = \Pi_{\xi_1}(x) \cdot \Pi_{\xi_2}(x) \cdot \ldots \cdot \Pi_{\xi_n}(x):$$

Ապացույց: Օգտվելով ծնորդ ֆունկցիայի ներկայացումից մաթեմատիկական սպասելիի տեսքով, կստանանք՝

$$\Pi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(x) = \mathrm{M}x^{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n} = \mathrm{M}\left[x^{\xi_1} \cdot x^{\xi_2} \cdot \ldots \cdot x^{\xi_n}\right]: \qquad (8.21)$$

Պարզ է, որ $x^{\xi_1}, x^{\xi_2}, \ldots, x^{\xi_n}$ պատահական մեծություններն անկախ են, որպես ֆունկցիաներ անկախ պատահական մեծություններից, ուստի՝

$$\mathrm{M}\left[x^{\xi_1} \cdot \ldots \cdot x^{\xi_n}\right] = \mathrm{M}x^{\xi_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{M}x^{\xi_n} :$$

Այստեղից և (8.21)-ից հետևում է թեորեմի պնդումը, քանի որ $\mathrm{M}x^{\xi_k} = \Pi_{\xi_k}(x):$ □

Սահմանային թեորեմներն ապացուցելիս հաճախ օգտվում ենք ծնորդ ֆունկցիաների բազմության և բաշխումների բազմության անընդհատության համապատասխանության հատկությունից, որը հետևյալ թեորեմի բովանդակությունն է:

Թեորեմ 8.7 : *Դիցուք կամայական ֆիքսած n-ի դեպքում $n = 1,2,\ldots,$ $\{p_k(n)\}$ հաջորդականությունը հավանականությունների բաշխում է, այսինքն՝*

$$p_k(n) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n) = 1: \qquad (8.22)$$

Որպեսզի կամայական ֆիքսված k *-ի համար*

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n) = p_k \quad \text{և} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1\,, \tag{8.23}$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած x *–ի համար* $x \in [0;1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_n(x) = \Pi(x) \tag{8.24}$$

որտեղ $\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n)x^k$, $\Pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $\Pi(1) = 1$.

Ապացույց: Ենթադրենք՝ տեղի ունեն (8.23) առնչությունները: Ներկայացնենք $\Pi_n(x) - \Pi(x)$ տարբերությունը հետևյալ տեսքով՝

$$\Pi_n(x) - \Pi(x) = \sum_{k=0}^{N}(p_k(n) - p_k)x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k(n)x^k - \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k x^k\,,$$

որտեղ N -ը ամբողջ թիվ է: Դիցուք $x \in [0;1)$ ֆիքսված է: Ցույց տանք, որ տեղի ունի (8.24)-ը: Քանի որ $0 \le p_k(n) \le 1$, $0 \le p_k \le 1$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է ընտրել N -ն այնպես, որ ցանկացած $n \ge N$ -ի դեպքում

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} p_k(n)\cdot x^k \le \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k x^k < \frac{\varepsilon}{3}:$$

Այսպիսով, տրված N –ի համար

$$|\Pi_n(x) - \Pi(x)| \le \sum_{k=0}^{N}|p_k(n) - p_k|\cdot x^k + \frac{2}{3}\varepsilon:$$

Վերջին անհավասարության աջ մասի գումարը, բավականաչափ մեծ n -երի դեպքում, կարելի է դարձնել փոքր $\frac{\varepsilon}{3}$, քանի որ այն պարունակում է 0 -ի ձգտող վերջավոր թվով գումարելիներ: $\Pi(1) = 1$ հավասարությունը անմիջապես հետևում է (8.23)–ից:

Այժմ ենթադրենք՝ տեղի ունի (8.24)–ը: Ապացուցենք (8.23)–ը հակառող ենթադրությամբ: Դիցուք այն տեղի չունի: Այդ դեպքում կգտնվեն երկու՝ n'_m և n''_m հաջորդականություններ, որոնց համար

$$\lim_{n'_m\to\infty} p_k(n'_m) = \overline{p}_k, \quad \lim_{n''_m\to\infty} p_k(n''_m) = \overline{\overline{p}}_k\,, \tag{8.25}$$

ընդ որում, $\{\overline{p}_k\}$ և $\{\overline{\overline{p}}_k\}$ չեն համընկնում: Համաձայն թեորեմի արդեն ապացուցված մասի և (8.25) առնչությունների՝

$$\lim_{n'_m\to\infty}\Pi_{n'_m}(x)=\overline{\Pi}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{p}_k x^k,\ \ \lim_{n''_m\to\infty}\Pi_{n''_m}(x)=\overline{\overline{\Pi}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\overline{p}}_k x^k$$

և $\overline{\Pi}(x)\neq\overline{\overline{\Pi}}(x)$: Վերջինս անհնար է, քանի որ գոյություն ունի (8.25) սահմանը: □

Օրինակ 2. Դիցուք μ_n-ը Բեռնուլիի սխեմայում n անկախ փորձերի ժամանակ «հաջողությունների» հանդես գալու թիվն է, իսկ p_n-ը՝ «հաջողության» հավանականությունը մեկ փորձում: Ենթադրենք՝ գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda,\ \ 0<\lambda<\infty$ սահմանը, և հաշվենք $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}(\mu_n=m)$ սահմանը՝ օգտվելով թեորեմ 8.4-ից:

Նշանակենք $\lambda_n=np_n$: Քանի որ μ_n պատահական մեծությունն ունի բինոմական բաշխում $p_n=\dfrac{\lambda_n}{n}$ պարամետրով, ապա համաձայն (8.20) բանաձևի՝

$$\Pi_{\mu_n}(x)=\left(\frac{\lambda_n}{n}x+1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n=\left[1+\frac{\lambda_n}{n}(x-1)\right]^n:$$

Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_{\mu_n}(x)=e^{\lambda(x-1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}x^m:$$

Այստեղից, համաձայն թեորեմ 8.4-ի՝

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(\mu_n=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}:$$

Այսպիսով, ստացանք Պուասոնի թեորեմի մեկ այլ ապացույց:

§8.3. Բնութագրիչ ֆունկցիա

Նախորդ պարագրաֆում ներմուծած ծնորդ ֆունկցիայի գաղափարը սահմանվում էր միայն ամբողջ արժեքներ ընդունող պատահական մեծությունների համար: Կամայական տիպի պատահական մեծությունների բաշխումներն ուսումնասիրելիս օգտվում են բնութագրիչ ֆունկցիաներից: *

Սահմանում 8.5 : $F(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$ բաշխման ֆունկցիայով ξ պատահական մեծության *բնութագրիչ ֆունկցիա է* կոչվում

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

ֆունկցիան:

Մասնավորապես, եթե գոյություն ունի $f(x) = F'(x)$ բաշխման խտությունը, ապա՝

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx:$$

$p_k = \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$ հավանականություններով $x_k,\ k = 1,2,...$ արժեքներ ընդունող դիսկրետ պատահական մեծության համար

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} \cdot p_k:$$

Թեորեմ 8.8: *Դիցուք $\varphi(t)$–ն ξ պատահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան է: Տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

1. $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1, \quad t \in R;$

---

* Բնութագրիչ ֆունկցիաները սահմանվում են ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս արժեքներ ընդունող պատահական մեծությունների համար: Նշենք, որ $\eta + i\xi$ կոմպլեքս պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասելին որոշվում է $\mathrm{E}(\eta + i\xi) = \mathrm{E}\eta + i\mathrm{E}\xi$ առնչությամբ: Այստեղ և ենթագլխում ամենուրեք $i = \sqrt{-1}$ -ը կեղծ միավորն է, t-ն՝ իրական փոփոխական: Հիշենք, որ $z = x + iy$ կոմպլեքս թվի մոդուլ է կոչվում $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ դրական թիվը: Համաձայն Էյլերի բանաձևի՝ $e^{it} = \cos t + i \sin t$, հետևաբար՝ $|e^{it}| = 1$:

2. *$\varphi(t)$-ն ըստ $t \in R$-ի հավասարաչափ անընդհատ է;*

3. *Եթե $\eta = a \cdot \xi + b$, որտեղ a-ն և b-ն հաստատուններ են, ապա*

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)\text{:}$$

Ապացույց: 1. Քանի որ $\forall x \in R$-ի համար $|e^{itx}| \le 1$, հետևաբար՝

$$|\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = \varphi(0) = 1\text{:}$$

2. Այս հատկությունը հետևում է

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |\mathrm{M}e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \le \mathrm{M}|e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| = \mathrm{M}|e^{ih\xi} - 1|$$

գնահատականից, քանի որ $\mathrm{M}|e^{ih\xi} - 1| \to 0$, երբ $h \to 0$:

3. Դիցուք $\eta = a \cdot \xi + b$: Այդ դեպքում՝

$$\varphi_\eta(t) = \mathrm{M}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb} \cdot \mathrm{M}e^{ita\xi} = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)\text{:} \qquad \square$$

Այժմ գտնենք որոշ բաշխումների բնութագրիչ ֆունկցիաները:

Օրինակ 1: Դիցուք ξ պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում (0,1) պարամետրերով: Քանի որ ստանդարտ նորմալ բաշխման համար $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, ապա՝

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx\text{:} \tag{8.26}$$

Ածանցելով (8.26) հավասարության երկու կողմը ըստ t-ի (վերջինս դժվար չէ համոզվել, որ գոյություն ունի), կստանանք՝

$$\varphi'_\xi(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} x dx\text{:} \tag{8.27}$$

(8.27) ինտեգրալում կատարելով մասերով ինտեգրում, կունենանք՝

$$\varphi'_\xi(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} de^{\frac{-x^2}{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{itx} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx \right] =$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = -t \cdot \varphi(t)\text{:}$$

Այսպիսով, $\varphi_\xi(t)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\frac{d\varphi_\xi(t)}{dt} = -t \cdot \varphi(t) \tag{8.28}$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը և $\varphi_\xi(0) = 1$ սկզբնական պայմանին: (8.28) հավասարումից կստանանք, որ $\varphi_\xi(t) = e^{-t^2/2} \cdot c$: Հաշվի առնելով $\varphi_\xi(0) = 1$ պայմանը՝ կունենանք $c = 0$: Այսպիսով՝

$$\varphi_\xi(t) = e^{-t^2/2}:$$

Եթե η պատահական մեծությունն ունի $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ նորմալ բաշխում, ապա տեղադրելով $\xi = \dfrac{\eta - a}{\sigma}$, կունենանք, որ ξ պատահական մեծությունն ունի $\mathrm{N}(0,1)$ նորմալ բաշխում, հետևաբար՝ $\varphi_\xi(t) = e^{-t^2/2}$: Թեորեմ 8.8-ի 3-րդ պնդման համաձայն՝

$$\varphi_\eta(t) = \varphi_{\sigma\cdot\xi+a}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(\sigma\cdot t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}:$$

Օրինակ 2: Դիցուք ξ -ն Պուասոնյան պատահական մեծություն է՝

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots:$$

Այդ դեպքում

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda\cdot e^{it}} = e^{\lambda\cdot(e^{it}-1)}:$$

Դիտողություն 1: Դժվար չէ նկատել, որ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության $\varphi_\xi(t)$ բնութագրիչ ֆունկցիան ներկայացնում է $f_\xi(x)$ խտության Ֆուրյեի ձևափոխությունը, որտեղից $f_\xi(x)$ խտությունը կարտահայտվի $\varphi_\xi(t)$-ի միջոցով Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխությամբ:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)e^{-itx}dt$$

(այս բանաձևը կոչվում է *շրջման բանաձև*):

Իմանալով պատահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան՝ հեշտությամբ կարելի է գտնել պատահական մեծության մոմենտները:

Թեորեմ 8.9 : *Եթե գոյություն ունի ξ պատահական մեծության n-րդ կարգի բացարձակ մոմենտը՝ $\mathrm{M}|\xi|^n < \infty$, ապա $\varphi_\xi(t)$ բնութագրիչ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է, և $k \le n$ դեպքում տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathrm{M}\xi^k :$$

Ապացույց: Պարզության համար թեորեմի ապացույցը կատարենք բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության համար: Նկատենք, որ n-րդ կարգի մոմենտի գոյությունից բխում է $k \le n$ կարգի բոլոր մոմենտների գոյությունը: Այժմ նկատենք, որ բնութագրիչ ֆունկցիայի k-պատիկ ֆորմալ դիֆերենցումը բերում է

$$\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f_\xi(x)\,dx \tag{8.29}$$

հավասարությանը: Քանի որ

$$|\varphi_\xi^{(k)}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f_\xi(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_\xi(x)\,dx = \mathrm{M}|\xi|^k < \infty,,$$

ապա (8.29) հավասարության ձախ կողմում գրված ինտեգրալը, ըստ t-ի, հավասարաչափ զուգամիտում է: Հետևաբար, ճշմարտացի է բնութագրիչ ֆունկցիայի k-պատիկ դիֆերենցման հնարավորությունը: Ընդունելով (8.29)-ում $t = 0$, ստանում ենք՝

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)\,dx = i^k \cdot \mathrm{M}\xi^k : \qquad \square$$

Պատահական մեծության $k \in \mathbb{N}$ կարգի բացարձակ մոմենտների գոյությունը թույլ է տալիս $\varphi_\xi(t)$ բնութագրիչ ֆունկցիան վերլուծել Թեյլորի շարքի $t = 0$ կետի շրջակայքում: Մասնավորապես, համաձայն թեորեմ 8.9-ի, տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{t^j}{j!}\varphi_\xi^{(j)}(0) + o\left(|t|^k\right) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{i^j t^j}{j!}\mathrm{M}\xi^j + o\left(|t|^k\right) =$$
$$= 1 + it\,\mathrm{M}\xi - \frac{t^2}{2}\mathrm{M}\xi^2 + \ldots + \frac{i^k t^k}{k!}\mathrm{M}\xi^k + o\left(|t|^k\right) :$$

Օրինակ 3: Դիցուք ξ-ն ունի $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ նորմալ բաշխում: Այդ դեպքում $\eta = \xi - a$ պատահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi_\eta(t)=e^{-ita}\varphi_\xi(t)=e^{ita}\cdot e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{\frac{-\sigma^2t^2}{2}}:$$

Օգտվելով e^x ֆունկցիայի Մակլորենի վերլուծությունից, կստանանք՝

$$\varphi_\eta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\left(\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}\right)\cdot t^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\left(\frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}\right)\cdot\frac{t^{2k}}{(2k)!}:$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ

$$\varphi_\eta^{(2k+1)}(0)=0,$$

իսկ

$$\varphi_\eta^{(2k)}(0)=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^k k!}\cdot\sigma^{2k}=(-1)^k(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1\cdot\sigma^{2k}=$$
$$=(-1)^k(2k-1)!!\cdot\sigma^{2k},$$

որտեղից, համաձայն թեորեմ 8.9-ի, կստանանք կենտրոնական մոմենտները.

$$\mathrm{M}(\xi-a)^{2k+1}=0,\quad \mathrm{M}(\xi-a)^{2k}=(2k-1)!!\cdot\sigma^{2k}:$$

Թեորեմ 8.10: *Եթե $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ պատահական մեծությունները անկախ են, ապա*

$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_n}(t):$$

Ապացույց: Համաձայն բնութագրիչ ֆունկցիայի սահմանման՝

$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\mathrm{M}e^{it\cdot\sum_{k=1}^{n}\xi_k}=\mathrm{M}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{it\cdot\xi_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{M}e^{it\cdot\xi_k}=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t): \qquad \square$$

§8.3. Թույլ զուգամիտություն. անընդհատության թեորեմ

Գոյություն ունեն պատահական մեծությունների հաջորդականության զուգամիտության տարբեր տեսակներ: §8.1-ում սահմանեցինք պատահական մեծությունների հաջորդականության զուգամիտությունն ըստ հավանականության: Այժմ սահմանենք թույլ զուգամիտության գաղափարը:

Դիցուք միևնույն $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ հավանականային տարածության վրա տրված են $\xi_1, \xi_2, \ldots$ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը և կամայական ξ պատահական մեծություն՝ $F_\xi(x)$ բաշխման ֆունկցիայով:

Սահմանում 8.6: Կասենք, որ պատահական մեծությունների $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը *թույլ զուգամիտում է* ξ պատահական մեծությանը, երբ $n \to \infty$, և կգրենք $\xi_n \Rightarrow \xi$, եթե $F_\xi(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության բոլոր կետերում

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x):$$

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ $\xi_n \Rightarrow \xi$ զուգամիտությունը բաշխումների և ոչ թե պատահական մեծությունների զուգամիտություն է: Եթե, օրինակ, ξ սահմանային պատահական մեծությունը փոխարինենք մեկ այլ η պատահական մեծությամբ, որն ունի նույն բաշխումը ինչ ξ-ին, ապա դրանից ոչինչ չի փոխվի, այսինքն՝ $\xi_n \Rightarrow \eta$:

Վարժություն: Ապացուցել, որ եթե $\xi_n \Rightarrow \xi$ և $c = const$, ապա $c\xi_n \Rightarrow c\xi$ և $\xi_n + c \Rightarrow \xi + c$:

Դիտողություն 2: Ընդհանրապես, թույլ զուգամիտության համար «գումարի սահմանը հավասար է սահմանների գումարին» հատկությունն իմաստ չունի. $\xi_n \Rightarrow \xi$ և $\eta_n \Rightarrow \eta$ զուգամիտությունները նշանակում են, որ մեզ հայտնի են այդ հաջորդականությունների սահմանային բաշխումները: Սակայն դրանց գումարի սահմանային բաշխումը, կախված ξ_n-ի և η_n-ի համատեղ բաշխումից, կարող է տարբերվել: Այլ է, երբ սահմանային բաշխումներից մեկը վերասերված է (հաստատուն է): Այդ դեպքում գումարի սահմանային բաշխման ֆունկցիան որոշված է միարժեք:

Թեորեմ 8.11: *Եթե* $\xi_n \xrightarrow{P} c = const$ *և* $\eta_n \Rightarrow \eta$, ***ապա՝***

$$\xi_n + \eta_n \Rightarrow c + \eta:$$

Ապացույց: Քանի որ $\eta_n \Rightarrow \eta$ զուգամիտությունից հետևում է $\eta_n + c \Rightarrow \eta + c$ զուգամիտությունը, ապա բավական է թեորեմի պնդումն ապացուցել $c = 0$ դեպքի համար: Դիցուք $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ և $\eta_n \Rightarrow \eta$: Ապացուցենք, որ $\xi_n + \eta_n \Rightarrow \eta$:

Ենթադրենք՝ x_0 -ն $F_\eta(x)$ բաշխման ֆունկցիայի անընդհատության կետ է: Պետք է ցույց տանք, որ

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) = F_\eta(x_0):$$

Ընտրենք $\varepsilon > 0$ թիվն այնպես, որ $x_0 \pm \varepsilon$ կետերում $F_\eta(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ:

Քանի որ $H_1 = \{|\xi_n| \geq \varepsilon\}$ և $H_2 = \{|\xi_n| < \varepsilon\}$ պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, ապա՝

$$F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) = \mathrm{P}\{(\xi_n + \eta_n < x_0) \cap H_1\} + \mathrm{P}\{(\xi_n + \eta_n < x_0) \cap H_2\} = P_1 + P_2:$$

Գնահատենք $P_1 + P_2$ գումարը: P_1-ի համար ունենք՝

$$0 \leq P_1 = \mathrm{P}\{(\xi_n + \eta_n < x_0) \cap H_1\} \leq \mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}\{|\xi_n| \geq \varepsilon\}:$$

P_2 հավանականության համար մի կողմից՝ ունենք

$$P_2 = \mathrm{P}\{(\xi_n + \eta_n < x_0) \cap (-\varepsilon < \xi_n < \varepsilon)\} \leq \mathrm{P}\{-\varepsilon + \eta_n < x_0\} = F_{\eta_n}(x_0 + \varepsilon)$$

անհավասարությունը, իսկ մյուս կողմից՝

$$P_2 = \mathrm{P}\{(\xi_n + \eta_n < x_0) \cap (-\varepsilon < \xi_n < \varepsilon)\} \geq \mathrm{P}\{(\varepsilon + \eta_n < x_0) \cap (-\varepsilon < \xi_n < \varepsilon)\} \geq$$
$$\geq \mathrm{P}\{(\varepsilon + \eta_n < x_0)\} - \mathrm{P}\{|\xi_n| \geq \varepsilon\} = F_{\eta_n}(x_0 - \varepsilon) - \mathrm{P}\{|\xi_n| \geq \varepsilon\}:$$

Այստեղ վերջին անհավասարությունը հետևում է հավանականության հետևյալ հատկություններից. քանի որ $\mathrm{P}(A\overline{B}) \leq \mathrm{P}(\overline{B})$, ապա $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\overline{B}) \leq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(\overline{B})$:

Այսպիսով, $F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) = P_1 + P_2$ գումարի համար ստացանք հետևյալ ստորին և վերին գնահատականները՝

$$F_{\eta_n}(x_0 - \varepsilon) - \mathrm{P}\{|\xi_n| \geq \varepsilon\} \leq F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) \leq F_{\eta_n}(x_0 + \varepsilon) + \mathrm{P}\{|\xi_n| \geq \varepsilon\}:$$

Անցնելով այս առնչությունում սահմանի, երբ $n \to \infty$, և հիշելով, որ $x_0 \pm \varepsilon$ կետերում $F_\eta(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, կստանանք՝

$$F_\eta(x_0 - \varepsilon) \leq \underline{\lim} F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) \leq \overline{\lim} F_{\xi_n+\eta_n}(x_0) \leq F_\eta(x_0 + \varepsilon): \quad (8.30)$$

Քանի որ ցանկացած բաշխման ֆունկցիա ունի ոչ ավել, քան հաշվելի թվով խզման կետեր, ապա կարելի է ընտրել 0-ին զուգամիտող այնպիսի ε նվազող հաջորդականություն, որ $x_0 \pm \varepsilon$ կետերում $F_\eta(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ և, հետևաբար, պահպանվեն (8.30) անհավասարությունները: Անցնելով սահմանի՝ ըստ $\varepsilon \to 0$ հաջորդականության, և հիշելով, որ x_0-ն $F_\eta(x)$ բաշխման ֆունկցիայի անընդհատության կետ է, ստանում ենք, որ $F_{\xi_n+\eta_n}(x_0)$ ֆունկցիայի ստորին և վերին սահմաներն համընկնում են և հավասար են $F_\eta(x_0)$-ին: $\square$

Հաջորդ թեորեմի համաձայն, ըստ հավանականության զուգամիտությունից հետևում է թույլ զուգամիտությունը: Հակառակ պնդումն ընդհանուր դեպքում իմաստ չունի (տե՛ս դիտողություն 1):

Թեորեմ 8.12: *Եթե* $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, *ապա* $\xi_n \Rightarrow \xi$:

Ապացույց: Ներկայացնենք ξ_n-ը հետևյալ գումարի տեսքով՝ $\xi_n = (\xi_n - \xi) + \xi$: Այստեղ $(\xi_n - \xi)$ հաջորդականությունը, ըստ հավանականության, զուգամիտում է 0-ի, ξ «հաջորդականությունը» թույլ զուգամիտում է ξ-ին, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 8.11-ի՝ $\xi_n = (\xi_n - \xi) + \xi$ գումարը թույլ զուգամիտում է ξ-ին: $\square$

Այժմ կարող ենք ձևակերպել բնութագրիչ ֆունկցիաների հիմնական հատկությունը, որը կօգտագործենք սահմանային թեորեմներն ապացուցելիս:

Թեորեմ 8.13 (անընդհատության թեորեմ): *Պատահական մեծությունների* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականությունը թույլ զուգամիտում է* ξ *պատահական մեծությանը այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած* $t \in \mathbb{R}$*-ի դեպքում բնութագրիչ ֆունկցիաների* $\left\{\varphi_{\xi_n}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականությունը զուգամիտում է* $\varphi_\xi(t)$ *բնութագրիչ ֆունկցիային:*

Ձևակերպված թեորեմը հաստատում է անընդհատ համապատասխանություն $\langle F_\xi, \Rightarrow \rangle$ և $\langle \varphi_\xi, \rightarrow \rangle$ դասերի միջև, այլ կերպ ասած. բաշխման ֆունկցիաների թույլ զուգամիտությանը համապատասխանում է բնութագրիչ ֆունկցիաների զուգամիտությունը բոլոր կետերում: Համապատասխանության անընդհատությունն այն է, որ մի դասում տրված զուգամիտության նկատմամբ սահմանին համապատասխանում է սահման մյուս դասում տրված զուգամիտության նկատմամբ:

§8.4. Կենտրոնական սահմանային թեորեմ

Դիցուք $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$-ը վերջավոր դիսպերսիաներով անկախ և միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների գումար է:

Համաձայն մեծ թվերի օրենքի՝ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{M}\xi_1$, կամ՝

$$\frac{S_n - n\mathrm{M}\xi_1}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0:$$

Քանի որ $(S_n - n\mathrm{M}\xi_1)$ մեծության սահմանը n-ի բաժանելիս, ըստ հավանականության, զուգամիտում է 0-ի, ապա բնական հարց է առաջանում. արդյո՞ք հնարավոր է $(S_n - n\mathrm{M}\xi_1)$ մեծությունը բաժանել n-ից դանդաղ անվերջության ձգտող այնպիսի մեծության, որ արդյունքում ստացվի ոչ զրոյական սահման: Պարզվում է, որ արդեն իսկ

$$\frac{S_n - n\mathrm{M}\xi_1}{\sqrt{n}}$$

հաջորդականությունը չի զուգամիտում 0-ին: Այս հաջորդականության անդամների բաշխումները, n-ի մեծացմանը զուգընթաց, նմանվում են նորմալ բաշխմանը: Կարելի է ապացուցել, որ այն զուգամիտում է նորմալ բաշխում ունեցող պատահական մեծության, սակայն զուգամիտությունն այստեղ տեղի ունի ոչ թե ըստ հավանականության, այլ թույլ զուգամիտության իմաստով:

Թեորեմ 8.12 (կենտրոնական սահմանային թեորեմ)**:** *Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots$ պատահական մեծություններն անկախ են, միատեսակ բաշխված և ունեն վերջավոր, ոչ զրոյական դիսպերսիաներ՝ $0 < \mathrm{D}\xi_1 < \infty$: Այդ դեպքում տեղի ունի*

$$\frac{S_n - n\mathrm{M}\xi_1}{\sqrt{n\mathrm{D}\xi_1}} \Rightarrow \mathrm{N}(0,1) \tag{8.31}$$

թույլ զուգամիտությունը:

Եթե կատարենք $\mathrm{M}\xi_1 = a$ և $\mathrm{D}\xi_1 = \sigma^2$ նշանակումները, ապա (8.31) զուգամիտությունը կարող ենք գրել

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

տեսքով, որտեղ $x \in \mathbb{R}$:

Ապացույց: Նշանակենք

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - a\right),$$

և ցույց տանք, որ $\{\eta_n\}$ հաջորդականությունը թույլ զուգամիտում է $\mathrm{N}(0,1)$ ստանդարտ նորմալ բաշխմանը: Համաձայն բնութագրիչ ֆունկցիայի հատկությունների, η_n պատահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան հավասար է՝

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Sigma(\xi_k - a)}(t) = \varphi_{\Sigma(\xi_k - a)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\xi_k - a}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n :$$

Այժմ, վերլուծելով $(\xi_k - a)$ պատահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան ըստ Թեյլորի շարքի, կունենանք՝

$$\varphi_{\xi_k - a}(t) = 1 + it\,\mathrm{M}(\xi_k - a) - \frac{t^2}{2}\mathrm{M}(\xi_k - a)^2 + o\left(t^2\right):$$

Քանի որ $\mathrm{M}(\xi_k - a) = 0$, իսկ $\mathrm{M}(\xi_k - a)^2 = \sigma^2$, ապա՝

$$\varphi_{\xi_k - a}(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o\left(t^2\right), \tag{8.32}$$

որտեղից՝

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left(\varphi_{\xi_k - a}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}, \quad \text{երբ } n \to \infty :$$

Այսպիսով, սահմանային բնութագրիչ ֆունկցիան հանդիսանում է $(0,1)$ պարամետրերով նորմալ բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան: Համաձայն §8.3.-ի անընդհատության թեորեմի, $F_{\eta_n}(x)$ բաշխման ֆունկցիան թույլ զուգամիտում է ստանդարտ նորմալ բաշխման ֆունկցիային՝ $\Phi(x)$: Այսինքն՝ տեղի ունի

$$\eta_n = \frac{S_n - n\mathrm{M}\xi_1}{\sqrt{n\mathrm{D}\xi_1}} \Rightarrow \mathrm{N}\left(0,1\right)$$

զուգամիտությունը: □

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Համբարձումյան Գ.Հ. *Հավանականությունների տեսություն, III հրատ.*- Երևան, Լույս, 1977:
2. Հարությունյան Ե.Ա. և ուրիշներ. *Հավանականություն և կիրառական վիճակագրություն.*- Երևան, Գիտություն, 2000:
3. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей.*- Москва, Выспая школа, 1999.
4. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей.*-М.: 1961г
5. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ве приложения. Том. 1,2.*- Москва, Мир, 1984.
6. Чистяков В.П. *Курс теории веоятностей.*- М. Наука, 1982.
7. Ширяев А.Н. *Вероятность.*-Москва, Наука, 1989.