HAI718 Probabilité et statistiques

TD1 : Introduction - Lois usuelles

1 Combinatoire et premiers calculs de probabilités

Exercice 1

1. *En considérant les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 2 lettres ? Combien peut-on former de mots de deux lettres constitués d'une consonne suivie d'une voyelle ? Combien peut-on former de mots de 2 lettres constitués d'une consonne et d'une voyelle ?*
2. *Combien d'équipes différentes de 3 personnes peut-on former à partir d'un groupe de 5 personnes ?*
3. *Avec 17 chevaux au départ, combien y a-t-il de tiercés possibles ? Dans le désordre ?*

Exercice 2 *Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.*

1. *Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?*
2. *Étudier le sens de variation de la suite p_n et calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$.*

2 Loi binomiale

Exercice 3
On jette une fois un dé non pipé.

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir la face 1 ? Quelle est la loi de cet évènement ?*
   On jette 18 fois le dé en question. Quelles sont les probabilités des évènements suivants :
2. *Obtenir exactement 3 fois la face 1*
3. *Obtenir au moins 3 fois la face 1*
4. *Obtenir au plus 16 fois la face 1*

3 La loi normale (gaussienne)

On suppose que $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ (Loi normale centrée réduite).

Exercice 4 *Calculer les probabilités suivantes :* $P(U < 1.5)$ *;* $P(U > 2.5)$ *;* $P(U < -1.5)$ *;* $P(-1.5 < U < 2.5)$

Exercice 5 *Trouver la valeur de u telle que :* $P(U < u) = 0.95$ *;* $P(U < u) = 0.1$ *;* $P(U > u) = 0.99$ *;* $P(-u < U < u) = 0.95$

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$ (Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). On a alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6 *Calculer les probabilités suivantes :* $P(X < 10)$ *;* $P(0 < X < 10)$

Exercice 7 *Trouver la valeur de* x *telle que :* $P(X < x) = 0.95$ *;* $P(X < x) = 0.05$ *;* $P(2 - x < X < 2 + x) = 0.95$

4 La loi du Chi-deux χ^2 (ou loi de Pearson)

$U_1, \ldots, U_p$ étant p variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes, on appelle loi du chi-deux à p degrés de liberté (χ^2_p) la loi de la variable $\sum_{i=1}^{p} U_i^2$.

Exercice 8

1. *Que vaut la somme de deux variables de* χ^2 *indépendantes à p et q degrés de liberté.*
2. *Soit* $X \sim \chi^2_{15}$ *et* $Y \sim \chi^2_{10}$*. Calculer* $P(X < 6.26)$*,* $P(Y > 3.25)$*,* $P(X + Y > 11.52)$*.*
3. *Soit* $X \sim \chi^2_{15}$*. Trouver* x *tel que* $P(X < x) = 0.01$*,* $P(X < x) = 0.05$*,* $P(X < x) = 0.99$*.*

5 Théorème de la limite centrale

Quelques propriétés de la loi normale

1. Linéarité
   Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La transformation linéaire $Y = aX + b$ où a et b sont deux réels, définit une variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
2. Somme
   La somme de deux variables aléatoires normales est normale. La moyenne de la somme est la somme des moyennes. La variance de la somme est la somme des variances si les variables sont indépendantes (dans le cas contraire cela est un peu plus compliqué).

Exercice 9 *Soit* X *de loi* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$*. On pose* $Y = aX + b$ *où* a *et* b *sont deux réels.*

1. *Que vaut* $E(Y)$ *?*
2. *Que vaut* $V(Y)$ *?*

Exercice 10 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ n *variables aléatoires normales* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *et indépendantes. On note* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *la moyenne empirique. Quelle est la loi de* $\bar{X}$ *?*

Le théorème de la limite centrale généralise le résultat précédent à une variable aléatoire X quelconque. Si $X_1, \ldots, X_n$ est une suite de variables aléatoires de même loi et indépendantes, ayant une moyenne théorique m et un écart-type σ, alors la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$.

Exercice 11 *Appliquer ce théorème au cas de n variables indépendantes de Bernoulli $\mathcal{B}e(p)$. Que vaut $\bar{X}$? En déduire une approximation de la loi binomiale par une loi normale.*

Exercice 12 *(Application de l'exercice précédent) Mathieu lance 100 fois une pièce de monnaie et compte le nombre de fois où il obtient "face".*

- *Quelles sont les probabilités :*
  1. *Qu'il obtienne moins de trente fois "face" ?*
  2. *Qu'il obtienne un nombre de "face" compris entre 40 et 60 ?*
- *Trouver le plus petit nombre entier n tel que Mathieu ait au plus une chance sur 100 d'avoir un nombre de "face" supérieur ou égal à n.*
- *Mathieu, après avoir lancé 100 fois sa pièce, a obtenu 66 fois "face". Peut-on le soupçonner d'avoir triché ?*

6 Un petit tour en Suisse

On suppose que les hommes suisses de plus de 50 ans ont des poids distribués approximativement selon une loi normale avec une moyenne théorique $\mu = 70kg$ et un écart-type $\sigma = 5kg$.

Exercice 13

1. *Si on tire au hasard un individu dans cette population, calculer la probabilité pour qu'il ait :*
   (a) *un poids compris entre 75 et 80kg.*
   (b) *un poids excédant 85kg.*
2. *Quel poids dépassent les 10% des individus les plus lourds de cette population ?*
3. *On extrait au hasard un échantillon de 25 individus. Quelle est la probabilité pour que la moyenne de cet échantillon dépasse 85kg ?*

7 Le problème de l'ascenseur

Un ascenseur peut supporter une charge de 1000kg. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids, en kilos, qui obéit à une loi normale de moyenne $m = 75$kg et d'écart-type $\sigma = 16$kg. On veut savoir quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6}.

Exercice 14

1. *Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n représentant le poids de n personnes autorisées à monter dans l'ascenseur ?*
2. *Pour quelles valeurs de t a-t-on $P(T > t) \leq 10^{-6}$ où T suit une loi normale centrée réduite ?*
3. *Quelle est alors la condition que doit vérifier n pour que le risque de surcharge soit $\leq 10^{-6}$?*
4. *Résoudre cette équation en posant $x = \sqrt{n}$.*

Exercice 15 *Même question en considérant également que la charge que peut supporter l'ascenseur est aussi une variable aléatoire gaussienne de moyenne 1000kg et d'écart-type 50kg.*

8 La loi de Student $St(n)$ ou T_n

Soit une variable aléatoire $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et X une variable aléatoire suivant indépendamment de U une loi χ^2_n. On définit alors la variable de Student T_n à n degrés de liberté comme étant :

$$T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{X}{n}}}.$$

On note que la loi de Student T_n est symétrique, cela signifie que :

$$\forall x \; P(T_n < -t) = P(T_n > t).$$

De cette propriété, il découle que pour tout $x > 0$:

$$\text{si } P(|T_n| < t) = p \text{ alors } P(T_n < -t) = p/2 \text{ et } P(T_n > t) = p/2.$$

Exercice 16

1. *Soit T une loi de Student à 5 degrés de liberté. Calculer* $P(|T| > 0.408)$, $P(T < 0.408)$, $P(T > 0.132)$, $P(|T| < 4.032)$
2. *Soit T une loi de Student à 5 degrés de liberté. Trouver t tel que* $P(T < t) = 0.5$, $P(T > t) = 0.9$, $P(T < t) = 0.05$, $P(|T| < t) = 0.1$.
3. *Soit T une loi de Student à 30 degrés de liberté et $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer* $P(T < -1.31)$, $P(T < -1.05)$, $P(T < -0.85)$, $P(T < -0.53)$, $P(T < 1.31)$, $P(T < 1.05)$, $P(T < 0.85)$, $P(T < 0.53)$ *et comparer les résultats avec* $P(U < -1.31)$, $P(U < -1.05)$, $P(U < -0.85)$, $P(U < -0.53)$, $P(U < 1.31)$, $P(U < 1.05)$, $P(U < 0.85)$, $P(U < 0.53)$. *Qu'en pensez-vous ?*

9 La loi de Fisher F

Soit deux variables X et Y suivant indépendamment des lois χ^2_n et χ^2_p. On définit alors la variable de Fisher à n et p degrés de liberté comme étant :

$$F(n,p) = \frac{X/n}{Y/p}.$$

On note que si $X \sim F(n,p)$, alors $P(X < 0) = 0$, ce qui signifie que les observations issues d'une loi de Fisher sont toujours des valeurs positives.

Exercice 17 *Soit X une variable de Fisher $F(4,10)$. Trouver x tel que* $P(X > x) = 0.05$, $P(X > x) = 0.01$.