## Skolémisation

### Fonctions de skolémisation et herbrandisation

- Si $\Phi$ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$ ;
- $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$ ;
- $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$ ;
- $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$ ;
- $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$ ;
- $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = h(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\forall x.\Phi$ ;
- $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\exists x.\Phi$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.
- Ensuite, une fois le calcul terminé :
  - Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $s(\Phi)$ ;
  - Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\exists x_n.h(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $h(\Phi)$.



## Skolémisation

### Exemple

- Skolémisation de $\forall x.\exists y.\forall z.P(x, y, z)$ ;
- $s(\forall x.\exists y.\forall z.P(x, y, z)) =$
  $s(\exists y.\forall z.P(x, y, z)) =$
  $s(\forall z.P(x, y, z))[f(x)/y] =$
  $s(P(x, y, z))[f(x)/y] =$
  $P(x, y, z)[f(x)/y] =$
  $P(x, f(x), z)$ ;
- On obtient donc : $\forall x.\forall z.P(x, f(x), z)$.



## Clausification

### Principe

- On skolémise : on obtient une formule universelle $\forall \vec{x}.\Phi$ ;
- On élimine les quantificateurs, puis on met $\Phi$ en cnf.

### Exemple

- $s(\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(h((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(s(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow h(P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$ ;
- $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x)) \vee P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a)) =$
  $(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a))$ ;
- $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$.