APLICACIONES LINEALES.

INTRODUCCIÓN: APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS.

Una **aplicación entre dos conjuntos A y B** es una regla que permite asignar a cada elemento de A, uno de B.

La aplicación f del conjunto A al conjunto B se indica mediante f: $A \longrightarrow B$ o bien $A \xrightarrow{f} B$.

El conjunto A se llama conjunto inicial, y el B conjunto final.

Si la aplicación **f** asigna al elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ el elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, diremos que **b** es la imagen de **a**, lo que se denota por **f(a) = b.**

La regla ha de estar inequívocamente definida, de modo que para todos y cada uno de los elementos de A, esté claro qué elemento de B es su imagen.

Clasificación de las aplicaciones:

- Se dice que una aplicación es inyectiva si no hay dos elementos que tengan imágenes iguales. Una aplicación inyectiva "crea una copia" de A dentro de B.
- Se dice que una aplicación es suprayectiva (o sobreyectiva) si todos los elementos del conjunto final B han sido utilizados.
- Se dice que una aplicación es biyectiva si es a la vez inyectiva y suprayectiva. Una aplicación biyectiva establece una "igualdad" entre los conjuntos A y B, pues a cada elemento de A le corresponde uno de B, y a cada elemento de B, exactamente uno de A.

Si f es biyectiva existe su inversa, denotada f^{-1}: $A \longrightarrow B$, que "deshace" lo hecho por f.

Ejemplos:

1. La aplicación del conjunto de la población española mayor de edad en el conjunto de los números naturales, que asigna a cada ciudadano su número de DNI.

Es inyectiva, pues no hay dos personas con el mismo DNI. No es suprayectiva, pues no todos los números se utilizan.

2. La aplicación del conjunto de los números reales en el conjunto de los reales positivos, que asigna a cada número su cuadrado: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

No es inyectiva, pues hay números con el mismo cuadrado (p.ej. 2 y –2). Es suprayectiva, pues todos los reales positivos son el cuadrado de algún número.

***Nota**: No hay ninguna relación entre ser inyectiva y suprayectiva. Una aplicación puede ser una cosa o la otra, o las dos, o ninguna.*

En este capítulo definiremos aplicaciones entre espacios vectoriales.

APLICACIONES LINEALES. PROPIEDADES

Dentro de las aplicaciones que se pueden definir en espacios vectoriales, tienen especial interés las que cumplen ciertas condiciones, que llamaremos aplicaciones lineales. También se pueden llamar homomorfismos.

Definición: Aplicación lineal

Dados dos espacios vectoriales V y W, y dada una aplicación f: $V \longrightarrow W$, diremos que f es lineal si conserva las combinaciones lineales, es decir: dada una combinación lineal entre vectores de V, sus imágenes en W verifican la misma combinación:

si **u =** α**v+**β **w** (en V) entonces **u' =** α**v' +**β **w'** (en W)

donde **u', v', w'** son respectivamente las imágenes de **u, v, w.**

Esto se puede expresar también así:

(1) f(α**v+**β **w) =** α **f(v) +**β **f(w)** para v, w$\in$ V

("La imagen de una combinación lineal, es la combinación lineal de las imágenes".)

También es equivalente a afirmar que se conserva la suma y el producto por escalares:

(2) (2a) **f(v+ w) = f(v) + f(w)** para v, w$\in$ V

(2b) **f(**α **v) =** α **f(v)** para v$\in$ V, α escalar**.**

Por tanto, a la hora de probar si una aplicación es lineal, podemos utilizar indistintamente **(1)** o **(2).**

- Las aplicaciones lineales también se llaman homomorfismos.
- Pueden también definirse aplicaciones en subespacios vectoriales, pues éstos funcionan como espacios vectoriales. Por ejemplo,

S={(α, 2α) : $\alpha \in \mathbb{R}$ } es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y en él podemos definir la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha,2\alpha) & \mapsto & (3\alpha,4\alpha,5\alpha) \end{array}$$

Ejemplos.

1. Consideremos la siguiente aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y veamos si es lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x,z) \end{array}$$

Vamos a comprobar que se cumple la afirmación **(2)** anterior.

(2a): Veamos que f(v+ w) = f(v) + f(w) para cualesquiera v, w$\in \mathbb{R}^3$:

Sean dos vectores genéricos de $\mathbb{R}^3$, v=(a,b,c), w= (a', b', c'), entonces

$$\left.\begin{array}{l} f(v + w) = f\big((a,b,c) + (a', b', c') \big) = f(a+a', b+b', c+c') = \big(2(a+a'),\ c+c' \big) \\ f(v) + f(w) = f(a,b,c) + f(a',b',c') = (2a, c) + (2a', c') = \big(2a+2a'),\ c+c' \big) \end{array}\right\} \text{son iguales.}$$

(2b): Veamos que f(v) = α f(v) para cualesquiera v $\in \mathbb{R}^3$, con α escalar.

Sea un vector genérico v=(a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ y un escalar α, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ f(v) = \alpha\ f(a,b,c) = \alpha\ (2a, c) = (2\alpha a,\ \alpha c) \\ f(\alpha v) = f\big(\alpha(a,b,c)\big) = f(\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha c) = (2\alpha a,\ \alpha c) \end{array}\right\} \text{son iguales.}$$

Como (2a) y (2b) se cumplen para vectores genéricos, concluimos que la aplicación f es lineal.

2. Veamos ahora la siguiente aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x,\ y,\ x+y, 1) \end{array}$$

Si encontramos un caso concreto en que no se cumpla (2a) o (2b), la aplicación ya no será lineal. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} (1,0) \mapsto (1,0,1,1) \\ (2,0) \mapsto (2,0,2,1) \end{array}\right\} \text{Al multiplicar un vector por 2, su imagen no ha quedado multiplicada por 2.}$$

Por tanto g no es lineal.

Por su importancia o significado geométrico, destacamos algunas aplicaciones lineales:

1. <u>Aplicación identidad:</u> de un espacio vectorial en sí mismo. Asigna a cada vector el mismo vector, es decir, no altera el espacio vectorial.

$$\begin{array}{lcl} V & \xrightarrow{id} & V \\ u & \mapsto & u \end{array}$$

2. <u>Aplicación nula:</u> entre dos espacios vectoriales V y W, transforma todo vector de V en el vector cero de W.

$$\begin{array}{lcl} V & \xrightarrow{n} & W \\ u & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

3. <u>Giros:</u> pueden hacerse en el plano o el espacio ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$). Por ejemplo la siguiente aplicación en $\mathbb{R}^2$ hace girar a todos los vectores del plano 45º en sentido antihorario:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) \end{array}$$

4. Reflexiones o simetrías: en el espacio $\mathbb{R}^3$ podemos "reflejar" los vectores como en un espejo, respecto a un plano dado. En el plano $\mathbb{R}^2$ podemos hacerlo respecto a una recta. Por ejemplo, la siguiente aplicación es una simetría en $\mathbb{R}^3$, respecto del plano XZ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, -y, z) \end{array}$$

5. Homotecias: Multiplican los vectores por un cierto escalar (el mismo para todos los vectores). Si el escalar es mayor que 1, se trata de una dilatación, mientras que si es menor que 1 se trata de una contracción. La siguiente homotecia puede representar la dilatación del 1% de una lámina de metal bajo el efecto del calor:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (1.01x, 1.01y) \end{array}$$

6. Proyecciones: Son aplicaciones que llevan todos los vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ a un cierto plano, sobre el que proyectamos (como si fuese un objeto produciendo sombra).

La siguiente aplicación transforma cualquier pieza tridimensional en su vista en alzado (proyección sobre el plano XZ).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,0,z) \end{array}$$

Propiedad: Si f: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal, la imagen del vector cero de V siempre es el vector cero de W.

Demostración:

Denotemos por $\vec{0}_V$ y $\vec{0}_W$ el vector cero de V y de W respectivamente.

Entonces, partiendo de cualquier vector v$\in$ V, tenemos:

$f(\vec{0}_V) = f(v - v) = f(v) - f(v) = \vec{0}_W$

Observación. Esta propiedad puede utilizarse para probar que una aplicación no es lineal, pues si no cumple esta propiedad no podrá serlo. Pero si la cumple, podrá ser lineal o no.

Teorema: Transformación de subespacios.

a) Una aplicación lineal f: V $\longrightarrow$ W transforma subespacios de V en subespacios de W.

Dado S un subespacio de V, su imagen se denota por f(S). Es el subespacio de W formado por las imágenes de todos los vectores de S.

b) El subespacio f(S) tiene dimensión menor o igual que la dimensión de S.

Además se tiene que si la aplicación f es inyectiva, entonces se conservan las dimensiones, es decir, f(S) tiene la misma dimensión que S.

- Observar el significado geométrico de este teorema: ya que los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son rectas, planos..., el apartado **a)** afirma que éstos no pueden transformarse, por una aplicación lineal, en líneas curvas o superficies curvas.

El apartado **b)** significa que una recta no puede, por ejemplo, transformarse en un plano (la dimensión no puede aumentar). Un plano podrá transformarse en otro plano; en una recta; o en un punto $\{\vec{0}\}$.

Teorema: imagen de un sistema generador.

Sea f: $V \longrightarrow W$ lineal, y sea S un subespacio de V. Entonces, la imagen de un sistema generador de S es un sistema generador de f(S).

Es decir: si $v_1, \ldots v_r$ generan S, entonces $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ generan f(S).

Ejemplo. Usaremos el teorema anterior para calcular cuál es la imagen de un subespacio.

Sea la aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+2z,\ 3x+3y+6z) \end{array}$$

Calculemos la imagen del subespacio S= $\{(\alpha+\beta, \alpha, \alpha-\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. Para ello hallamos primero un sistema generador de S, que es (1,1,1), (1,0,–1). La imagen de este sistema generador es:

f(1,1,1) = (4,12)

f(1,0,–1) = (–1,–3)

Por tanto f(S) será el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por (4, 12) y (–1,–3).

Notar que estos no forman base de f(S), pues no son independientes. Una base de f(S) podría ser (4, 12), o bien (1,3), por ejemplo.

Teorema: imagen de conjuntos dependientes e independientes.

Sea f: $V \longrightarrow W$ lineal. La imagen de un conjunto linealmente dependiente es otro conjunto linealmente dependiente.

No está asegurado que la imagen de un conjunto independiente siga siendo independiente (esto solo está asegurado si la aplicación es inyectiva).

Observación. Si tenemos en cuenta que una base es un sistema generador linealmente independiente, veremos que de los dos teoremas anteriores se desprende que una base de S no tiene por qué transformarse en una base de f(S). Solo si f es inyectiva está asegurado que sea así.

SUBESPACIOS NÚCLEO E IMAGEN.

Observemos que determinados vectores de V pueden tener como imagen el $\vec{0}_W$. Esto ocurre al menos con $\vec{0}_V$, pero también puede ocurrir con más vectores de V.

Por ejemplo, en la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$ el vector (0,0) tiene como imagen (0,0), pero lo mismo le ocurre a (1,1), y también a todos los vectores de la forma (λ, λ).

Definición: Núcleo.

Se llama núcleo de f al conjunto de los vectores de V cuya imagen es $\vec{0}_W$. Se denota por **Ker(f)** (del inglés kernel=núcleo).

Es decir, Ker(f) = $\{v \in V \ : \ f(v) = \vec{0}_W\}$

El núcleo podrá ser solamente $\{\vec{0}\}$, o podrá ser un subespacio mayor.

Definición: Subespacio imagen.

Dada f: $V \longrightarrow W$ lineal, se llama <u>subespacio imagen de f</u> (o simplemente <u>imagen de f</u>) al conjunto de las imágenes de todos los vectores de V. Se denota por **Im(f).**

Se puede denotar también por f(V), pues es la imagen de todo el espacio inicial V.

Según el teorema de transformación de subespacios, **Im(f)** es un subespacio de W, cuya dimensión es menor o igual que dim(V).

La dimensión de **Im(f)** también ha de ser ≤ dim(W), pues está contenido en W.

Además, si $v_1, \ldots, v_n$ son un sistema generador de V, entonces sus imágenes $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ son un sistema generador de **Im(f).**

- Por tanto, el núcleo es un subespacio de V, y la imagen lo es de W.
- Las dimensiones de ambos siempre cumplen la siguiente relación:

$$\boxed{\textbf{dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n}}$$

donde **n** es la dimensión del espacio inicial V.

Ejemplos.

1) Calcular el núcleo y la imagen de la proyección en planta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$$

Núcleo: Hay que determinar qué vectores se transforman en (0,0,0). En este caso es fácil ver que son los vectores de la forma $(0,0,\alpha)$, es decir, el eje Z.

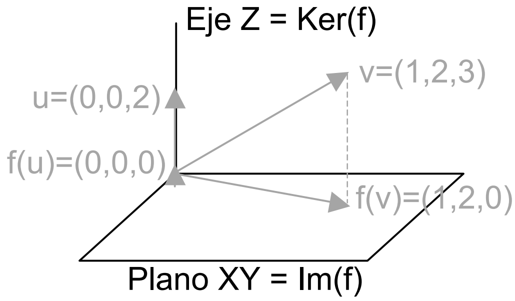

Imagen: Hay que considerar dónde están las imágenes de todos los vectores del espacio. Al ser proyectados, todos ellos van al plano XY. Por ello, este es el subespacio imagen.

Visto de otra manera, si aplicamos f a la base canónica (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) veremos que los dos primeros vectores no varían, mientras que el tercero se transforma en (0,0,0). Por tanto Im(f) estará generado por estas tres imágenes: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,0). El tercer vector no es necesario, y los dos primeros generan el plano XY.

Comprobemos que se cumple la ecuación: **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n (2 + 1 = 3)**

Podemos pensar que, habiendo tres dimensiones al principio, una se "pierde" (el núcleo) al transformarse en cero, y quedan dos para la imagen.

2) Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+2z,\ 3x+3y+6z) \end{array}$$

Imagen: Partimos de un sistema generador del espacio inicial $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la base canónica (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Sus imágenes son:

f(1,0,0) = (1,3)

f(0,1,0) = (1,3)

f(0,0,1) = (2,6)

Por tanto Im(f) está generada por (1,3), (1,3), (2,6). Eliminando los vectores que son combinación lineal de los demás, obtenemos que una base de Im(f) es { (1,3) }.

Así pues, la dimensión de Im(f) es 1.

Núcleo: Hay que encontrar los vectores cuya imagen es (0,0), es decir, los (x,y,z) tales que (x+y+2z, 3x+3y+6z) = (0,0) , por tanto debe cumplirse el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 3x+3y+6z=0 \end{array}\right\}$$ sistema compatible indeterminado cuya solución general es:

$$(2\alpha,\ 2\beta,\ -\alpha-\beta)\ :\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Estos son todos los vectores que forman el núcleo, es decir

Ker(f) = $\{ (2\alpha,\ 2\beta,\ -\alpha-\beta)\ :\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$

De esta expresión paramétrica podemos obtener una base de Ker(f): { (2,0,–1), (0,2,–1) }

Por tanto la dimensión del núcleo es 2.

Comprobemos que se cumple la ecuación: **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n (1 + 2 = 3)**

3) Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-3y,\ -x-y) \end{array}$$

Núcleo: Hay que encontrar los vectores cuya imagen es (0,0), es decir, los (x,y) tales que (2x+3y, –x–y) = (0,0) por tanto

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ -x-y=0 \end{array}\right\}$$ este sistema es compatible determinado y por tanto su única solución es x=0, y =0.

Por ello el único vector en Ker(f) es (0,0).

Imagen: De la fórmula **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = 2** , como **dim(Ker(f))** es cero, obtenemos que **dim(Im(f)) = 2.**

Y como Im(f) está contenida en el espacio final $\mathbb{R}^2$, si su dimensión es 2 ha de ser todo el espacio. Por tanto, Im(f) = $\mathbb{R}^2$.

Visto de otra manera: las imágenes de la base canónica (1,0), (0,1) son (2,–1), (–3,–1). Por tanto estos dos vectores generan Im(f). Pero (2,–1), (–3,–1) son independientes, por tanto lo que generan es todo $\mathbb{R}^2$.

CLASIFICACIÓN DE APLICACIONES.

Una aplicación lineal f: $V \longrightarrow W$ puede ser inyectiva, suprayectiva (o sobreyectiva), ninguna de las dos cosas o ambas (y en ese caso es biyectiva). Veremos cómo esto se relaciona con el cálculo del núcleo e imagen.

Suprayectividad:

Im(f) es un subespacio de W, que puede ocupar todo W o no. Si existen elementos de W que estén fuera de Im(f), éstos no serán imagen de ningún elemento de V.

Por tanto, f: $V \longrightarrow W$ será suprayectiva si Im(f) ocupa todo W: **Im(f) = W.**

Para comprobar esto basta comparar las dimensiones: en efecto, como Im(f) siempre está contenido en W, cuando sus dimensiones coincidan tendremos que Im(f) = W.

Así pues, $\boxed{\text{f es suprayectiva cuando } \mathbf{dim\,(\,Im(f)\,) = dim(W).}}$

Inyectividad:

En principio habría que comprobar si existen dos vectores de V cuyas imágenes sean iguales. Pero esto viene facilitado por el siguiente resultado:

Teorema. f es inyectiva si y solo si su núcleo es solamente $\{\vec{0}_V\}$.

Demostración:

Si hay un vector v además de $\vec{0}_V$ en el núcleo, ambos tienen la misma imagen $\vec{0}_W$, con lo que f ya no sería inyectiva.

Y por otra parte, si f no es inyectiva entonces hay dos vectores u, v con imágenes iguales, f(u) = f(v), y entonces tendremos

$f(u)-f(v) = 0 \Rightarrow f(u - v) = 0$ así el vector u – v está en el núcleo, luego éste ya no es $\{\vec{0}_V\}$

Gracias a esto, para comprobar la inyectividad basta calcular el núcleo.

También es suficiente conocer la dimensión, puesto que Ker(f) = $\{\vec{0}_V\}$ es equivalente a que su dimensión sea 0.

Así pues, $\boxed{\text{f es inyectiva cuando } \mathbf{dim\,(\,Ker(f)\,) = 0.}}$

Observación.

Para clasificar una aplicación, es útil emplear la fórmula **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n** y tratar de ver cuánto vale cada sumando.

Si dim (Im(f)) es igual a la dimensión del espacio final, será suprayectiva.

Si dim(Ker(f)) es cero, será inyectiva.

Si ocurren ambas cosas, será biyectiva.

Ejemplos.

1) Consideramos la aplicación del ejemplo 1) anterior
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+2z,\ 3x+3y+6z) \end{array}$$

Como ya hemos calculado el núcleo y la imagen, tenemos:

dim(Im(f)) = 1 $\neq$ 2 $\Rightarrow$ no es suprayectiva.

dim (Ker(f)) = 2 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ no es inyectiva.

2) Ejemplo 2) anterior:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-3y,\ -x-y) \end{array}$$

dim(Im(f)) = 2 $\Rightarrow$ es suprayectiva.

dim (Ker(f)) = 0 $\Rightarrow$ es inyectiva.

Por tanto es biyectiva.

3) Una aplicación f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nunca podrá ser inyectiva: pues como Im(f) está contenida en $\mathbb{R}^2$, su dimensión es ≤ 2 y así

$\underbrace{\textbf{dim(Im(f))}}_{\leq 2}$ **+ dim(Ker(f)) = 3** $\Rightarrow$ es imposible que dim(Ker(f)) sea 0

4) Una aplicación f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ nunca podrá ser suprayectiva:

dim(Im(f)) + $\underbrace{\textbf{dim(Ker(f))}}_{\geq 0}$ **= 2** $\Rightarrow$ es imposible que dim(Im(f)) sea 4.

5) Las aplicaciones destacadas que hemos señalado al principio del tema:

- La <u>identidad</u> es biyectiva; la aplicación <u>nula</u> no es inyectiva ni suprayectiva.

- Los <u>giros</u>, <u>simetrías</u> y <u>homotecias</u> son biyectivas; las <u>proyecciones</u> son suprayectivas pero no inyectivas.

Observación.

Cuando la aplicación es *inyectiva*, la fórmula **dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n** indica que Im(f) tiene la misma dimensión, n, que el espacio inicial.

Así pues, dada f: V $\longrightarrow$ W inyectiva, Im(f) es una "copia" de V dentro de W.

Por ejemplo, dada la siguiente aplicación inyectiva, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\ x-y,\ 0\ ) \end{array}$

el subespacio Im(f) está generado por las imágenes de la base canónica:

f(1,0)= (1,1,0)

f(0,1)=(1,–1,0).

Como (1,1,0) y (1,–1,0) son linealmente independientes, Im(f) tiene dimensión 2. Así, Im(f) es un plano en $\mathbb{R}^3$ y por tanto una "copia" del conjunto inicial $\mathbb{R}^2$ dentro de $\mathbb{R}^3$.

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL.

Veremos que hay una relación entre las matrices y las aplicaciones lineales, tanto es así que cada matriz representa una aplicación, y cada aplicación se puede identificar con una matriz.

Para introducir esto, partimos del concepto de rango de una aplicación.

Definición: Rango de una aplicación lineal.

Se llama rango de una aplicación lineal a la dimensión de su subespacio imagen. Se denota por **rg(f).**

Es decir: rg(f) = dim(Im(f)).

Ejemplo.

Calculemos el rango de la siguiente aplicación: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+3y+z,\ \ y+z) \end{array}$

Para ello hemos de hallar Im(f) y su dimensión.

Partiendo de un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) hallamos sus imágenes,

f(1,0,0)=(2,0)

f(0,1,0)=(3,1)

f(0,0,1)=(1,1)

Estos tres vectores de $\mathbb{R}^2$ generan Im(f), pero solo dos de ellos son linealmente independientes, por lo que la dimensión de Im(f) es 2. Así pues**, rg(f) = 2.**

Observación.

En el ejemplo anterior, para calcular el rango de f, hemos calculado el rango (es decir, el número de vectores independientes) de la familia de vectores (2,0), (3,1), (1,1). Esto equivale, colocando estos vectores en columnas, a calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (en este caso rango 2).

Veremos que esta matriz cumple un papel importante respecto a la aplicación.

Definición: Matriz asociada a una aplicación.

Dada una aplicación lineal f: $V \longrightarrow W$, se llama matriz asociada a f (en bases canónicas) a la matriz que contiene en sus columnas las imágenes de la base canónica de V.

Propiedades.

1) La matriz de f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de **tamaño m x n.**

2) Si A es la matriz asociada a f, el **rango** de la aplicación f (es decir, la dimensión del subespacio imagen) es el rango de A. (que puede calcularse escalonando la matriz, etc).

3) La matriz A asociada a f puede utilizarse para **calcular la imagen** de cualquier vector. En efecto, si multiplicamos la matriz A por el vector $v \in \mathbb{R}^n$ (en columna), obtenemos el vector $f(v) \in \mathbb{R}^m$ (también en columna).

$$\mathbf{A\ v = f(v)}$$

Ejemplo.

Dada la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\ x-y,\ 0) \end{array}$

su matriz asociada será de tamaño 3x2.

Colocamos en las columnas las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

f(1,0)= (1,1,0)

f(0,1)=(1,–1,0).

así obtenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Utilicemos la matriz para calcular la imagen del vector v=(2,3).

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por tanto f(v) = (5,–1,0)

Observación.

Dada una aplicación lineal podemos calcular su matriz asociada; pero también al revés: dada cualquier matriz A de tamaño m x n, podemos interpretarla como la matriz de una aplicación f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, puesto que con la matriz ya sabemos calcular las imágenes y por tanto está determinada la aplicación f.

Así pues, hay una identificación entre aplicaciones lineales y matrices.

De hecho, una aplicación es lineal precisamente cuando puede definirse del modo anterior mediante una matriz.

Ecuación de una aplicación lineal.

Sea f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con matriz asociada A = $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Denotemos por $(x_1, \dots, x_n)$ un vector del conjunto inicial $\mathbb{R}^n$, y por $(y_1, \dots, y_m)$ su imagen en $\mathbb{R}^m$. Entonces tenemos, según lo anterior,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{(ecuación matricial)}$$

lo que también se puede escribir en forma no matricial, resultando

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

Esta es la ecuación de f, que es la expresión que permite calcular la imagen $(y_1, \dots, y_m)$ a partir del vector $(x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplo.

En el ejemplo anterior, tenemos f dada por su matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si denotamos por (x_1, x_2, x_3) los vectores del conjunto inicial $\mathbb{R}^3$ y por (y_1, y_2) sus imágenes, la ecuación será

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \end{array}\right.$$

Cálculo del núcleo e imagen mediante la matriz asociada.

Supongamos que tenemos una aplicación lineal f: $V \longrightarrow W$ y su matriz asociada A.

- **Núcleo**: Los vectores del núcleo son los v tales que f(v)= $\vec{0}$, es decir, A v=$\vec{0}$.

Basta por tanto plantear el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si es compatible indeterminado, su solución se expresará mediante parámetros, y ésa será la forma paramétrica de Ker(f).

Si es compatible determinado entonces solamente tiene la solución nula, por lo que el núcleo estará formado solamente por el vector $\vec{0}$, Ker(f) = $\{\vec{0}\}$.

- **Imagen**: Las columnas de A son las imágenes de la base canónica, por tanto son imágenes de un sistema generador del espacio inicial V. Así pues dichas columnas son un sistema generador de Im(f).

Por tanto: **Im(f) es el espacio generado por las columnas de A.**

Dichas columnas no tienen por qué formar una base de Im(f); para obtener ésta habrá que suprimir las columnas que dependan linealmente de las demás (por ejemplo, escalonando la matriz y quedándonos con las columnas pivotales).

Ejemplo.

Sea f la aplicación dada por la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **;** calcular bases de su núcleo e imagen.

Notemos que, ya que A es de tamaño 3x3, la aplicación será f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Núcleo: Resolvemos el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, obteniendo la solución $(\lambda, -\lambda, \lambda)$, que es la forma paramétrica de Ker(f). Por tanto una base de Ker(f) es (1,–1,1).

Imagen: Es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por las tres columnas de la matriz A. Como A tiene rango 2, una de las columnas depende linealmente de las demás. Escalonando la matriz se ve que los pivotes quedan en las columnas 1ª y 2ª, por tanto nos quedamos con las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como base de Im(f).

Finalmente podemos comprobar que: **dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n** (1 + 2 = 3)

MATRIZ DE UNA APLICACIÓN EN DISTINTAS BASES.

La matriz de una aplicación que hemos considerado hasta ahora, es la matriz llamada estándar o en bases canónicas. Cuando no se afirme lo contrario se tratará de la matriz estándar.

Ahora bien, si fijamos en los espacios inicial y final otras bases, entonces podemos trabajar con coordenadas en dichas bases.

Podemos entonces encontrar una expresión de f adecuada a estas coordenadas.

(<u>Nota</u>. A partir de aquí, conviene repasar el punto "COORDENADAS Y CAMBIOS DE BASE" del tema Espacios Vectoriales).

<u>Definición: Matriz de una aplicación en bases cualesquiera.</u>

Sea f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m{}_w$ una aplicación lineal, y consideremos en el espacio inicial $\mathbb{R}^n$ una cierta base B, y en el espacio final otra base B'.

Entonces se define <u>la matriz de f en bases B y B'</u> como la matriz M que contiene en sus columnas las imágenes de los vectores de la base B, expresadas en coordenadas respecto de B'.

<u>Ejemplo.</u>

Sea la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\ x-y,\ 0) \end{array}$

y consideremos las bases siguientes:

- En el espacio inicial $\mathbb{R}^2$ la base B = { (1,1), (1,–1) }

- En el espacio final $\mathbb{R}^3$ la base B' = { (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) }

Calculemos la matriz de f en bases B y B'. Para ello hallamos las imágenes de la base B:

f(1,1) = (2,0,0)

f(1,–1) = (0,2,0)

Estas imágenes, (2,0,0) y (0,2,0), en el espacio final $\mathbb{R}^3$ han de expresarse en coordenadas respecto de la base B'. Esto puede hacerse planteando sistemas o bien utilizando la matriz de cambio de base (ver Tema anterior). Por ejemplo mediante sistemas:

(2,0,0) = α (1,1,0) + β (1,0,1) + γ (0,1,1) $\Rightarrow$ α=1, β=1, γ=–1, es decir, (1,1,–1) son las coordenadas de (2,0,0) en base B' y por tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **es la primera columna de la matriz M.**

$(0,2,0) = \alpha\ (1,1,0) + \beta\ (1,0,1) + \gamma\ (0,1,1) \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=1$, es decir, $(1,-1,1)$ son las coordenadas de (2,0,0) en base B' y por tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **es la segunda columna de la matriz M.**

Así tenemos M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de f en bases B y B'.

Propiedades.

1) La matriz de f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en bases cualesquiera es de **tamaño m x n**, al igual que la matriz estándar.

2) El **rango** de la aplicación f (la dimensión del subespacio imagen) también puede calcularse mediante el rango de M, siendo M la matriz en bases cualesquiera.

4) La matriz M en bases B y B' puede utilizarse para **calcular imágenes de vectores, cuando trabajamos con coordenadas en base B en el espacio inicial y con coordenadas en base B' en el espacio final.**

En efecto, si multiplicamos la matriz M por el vector $v\in \mathbb{R}^n$ (en columna y expresado como coordenadas en base B), obtenemos el vector $f(v) \in \mathbb{R}^m$ (también en columna y expresado como coordenadas en base B'). Es decir,

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

siendo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de $v\in \mathbb{R}^n$ en base B, y siendo $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ las coordenadas de su imagen f(v) expresada en base B'.

Ejemplo.

Consideremos la aplicación del ejemplo anterior, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\ x-y,\ 0) \end{array}$ y hallemos la imagen del vector v=(5,3). Vamos a hacerlo de dos maneras: en bases canónicas, y en las bases B y B' definidas anteriormente:

- En el espacio inicial $\mathbb{R}^2$ la base B = { (1,1), (1,–1) }

- En el espacio final $\mathbb{R}^3$ la base B' = { (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) }

En bases canónicas: La imagen de (x,y) es simplemente (x+y, x-y, 0) por lo que f(v)=**(8,2,0).**

En bases B y B' : Las imágenes pueden calcularse mediante la matriz M que ya hemos hallado: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Para ello expresamos v en base B:

$(5,3) = \alpha(1,1)+ \beta(1,-1) \Rightarrow \alpha=4, \beta=1$, luego (4,1) son las coordenadas de v en base B.

Multiplicando la matriz M por estas coordenadas en columna, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Así pues, la imagen de v es (5, 3, –3) en coordenadas en base B'.

Veamos que esto coincide con la imagen f(v)=(8,2,0) obtenida antes:

Que las coordenadas de f(v) en base B' sean (5,3,–3) significa, por definición de coordenadas, que:

f(v)= 5 (1,1,0) + 3 (1,0,1) – 3 (0,1,1) = **(8,2,0) ,** efectivamente.

Relación entre la matriz estándar y la matriz en otras bases.

Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal con matriz asociada A en bases canónicas.
Consideremos otras bases, *B* base de V y *B'* base de W.
Consideremos las siguientes matrices de cambio de base en cada espacio:

En V: P es la matriz de cambio de la base *B* a la canónica, y P^{-1} de la canónica a *B*.
En W: Q es la matriz de cambio de la base *B'* a la canónica, y Q^{-1} de la canónica a *B'*.

Entonces se tiene la igualdad: $\boxed{\mathbf{M = Q^{-1} A P}}$

Esto puede representarse mediante el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
\text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\
\text{base } B \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & \text{base } B' \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

También es posible cambiar de base solo en el espacio inicial, o solo en el espacio final:

1) Aquí M es la matriz en la base canónica y B' (es decir, sus columnas contienen las imágenes de la base canónica, expresadas como coordenadas en B').

Entonces tenemos: : $\boxed{M = Q^{-1} A}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "M"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\ & \text{base } B' \arrow[u, shift right, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \\ \text{base } B \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[ur, "M"'] & \end{tikzcd}$$

2) Ahora M es la matriz en B y la base canónica (es decir, sus columnas contienen las imágenes de la base B, expresadas como coordenadas en base canónica).

Entonces tenemos: : $\boxed{M = A P}$

Ejemplo:

Dada la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 0) \end{array}$

ya hemos calculado anteriormente la matriz en bases canónicas, que es A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y su matriz en bases B={(1,1),(1,–1)}, B'={(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)}, que es M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

Los cambios de base son:

<u>En el espacio inicial</u> $\mathbb{R}^2$: el cambio de B a la base canónica es P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(P se halla colocando en columnas los vectores de B expresados en base canónica).
El cambio inverso, de la base canónica a B será P^{-1}.

<u>En el espacio final</u> $\mathbb{R}^3$: el cambio de B' a la base canónica es Q= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Q se halla colocando en columnas los vectores de B' expresados en base canónica).
El cambio inverso, de la base canónica a B' será Q^{-1}.

Se cumplirá entonces que $M = Q^{-1} A P$.

Así pues, también podríamos haber hallado M de la siguiente manera:

$$M = Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

MATRICES EQUIVALENTES.

La equivalencia es una relación entre matrices que se puede definir de cuatro formas diferentes:

1) Dos matrices A y B son equivalentes (se denota A ~ B) si son **matrices de la misma aplicación lineal**, en distintas bases.

2) Dos matrices A y B son equivalentes si se puede pasar de una a otra mediante **operaciones elementales por filas y/o columnas** (es decir: permutar filas/columnas; multiplicar una fila/columna por un escalar no nulo; sumar a una fila/columna un múltiplo de otra).

3) A y B son equivalentes si existen P, Q matrices cuadradas tales que B=PAQ.

4) Dos matrices son equivalentes cuando tienen la misma **dimensión** mxn y el mismo **rango**.

Ejemplo. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = ,\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ observamos que ambas tienen dimensión 3x4 y rango 3. Así, por la afirmación 4**)** anterior, A y B son equivalentes.

Esto significa, por **2),** que A se puede transformar en B mediante operaciones elementales por filas y/o columnas.

También significa, por **1),** que tanto A como B son matrices de una cierta aplicación lineal en distintas bases. Esta aplicación deberá ser f: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (puesto que así su matriz será 3x4) y deberá ser rg(f)=3 (es decir, dim(Im(f))=3), puesto que así la matriz de f tendrá rango 3.

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES.

Si tenemos dos aplicaciones lineales f: $V \longrightarrow W$ y g: $W \longrightarrow U$, podemos definir la aplicación compuesta h=g $\circ$ f, consistente en aplicar a cada vector f y después g.

$$\begin{array}{l} h : V \longrightarrow W \longrightarrow U \\ \quad v \rightsquigarrow f(v) \rightsquigarrow g(\,f(v)\,) \end{array}$$

La matriz de la aplicación compuesta se obtiene multiplicando las matrices de f y de g.

Si A es la matriz de f y M es la matriz de g, entonces M·A es la matriz de h. (En bases canónicas).

Si se trata de otras bases se verifica una relación similar. Supongamos que:

- $\mathcal{B}$ es base de V, $\mathcal{B}'$ lo es de W, y $\mathcal{B}''$ lo es de U.
- A es la matriz de f en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$
- M es la matriz de g en bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$
- Entonces el producto M·A es la matriz de h en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$.

Ejemplo

Sean las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x,\, y,\, x+y,\, x-y) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x,\, x-y,\, z+t) \end{array}$$

La matriz de f en base canónica es A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz de g en base canónica es B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto la aplicación compuesta h=g $\circ$ f tiene como matriz en base canónica

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

que es de dimensión 3x2 puesto que h comienza en $\mathbb{R}^2$ y acaba en $\mathbb{R}^3$.