AUTOEVALUACIÓN
Endomorfismos. Autovectores y diagonalización.

Cada **(●)** *es un punto.*

Hay en total 40 puntos, de los cuales 15 son de cuestiones y 25 de ejercicios.

A) Cuestiones (15 puntos)

(●) C-1) Razonar por qué una matriz 3x3 no puede tener 4 valores propios.

C-2) Si la matriz de un endomorfismo en base canónica es $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(●) **a)** Di, sin calcular, cuáles son los valores propios.

(●) **b)** Di, sin calcular, cuáles son los vectores propios.

C-3) Una cierta matriz A, de tamaño 4x4, tiene como valor propio el 8.

(●) **a)** ¿Qué posibilidades hay para el rango de la matriz $A-8\,I$?

(●) **b)** ¿Qué posibilidades hay para la dimensión del subespacio propio V_8 ?

C-4) Señalar si estas matrices serían diagonalizables *(sí ; no ; no se sabe).*

(●●) **a)** Una matriz 2x2 con valores propios: 3, 5 simples.

(●●) **b)** Una matriz 3x3 con valores propios: 6,7,8 simples.

(●●) **c)** Una matriz 2x2 con valor propio: –3 doble

(●●) **d)** Una matriz 3x3 con valores propios: 9 doble, 1 simple.

(●) C-5) Inventa una matriz 3x3 que sea diagonalizable. (Busca un ejemplo lo más sencillo posible).

(●) C-6) Sea A una matriz real simétrica 2x2 con dos valores propios, λ y μ . Si un vector propio asociado a λ es (–1, 3), ¿cuál será un vector propio asociado a μ?

B) Ejercicios (25 puntos)

E-1) Clasificar los siguientes endomorfismos:

(•) **a)** En $\mathbb{R}^3$, dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(•) **b)** En $\mathbb{R}^2$, dado por la ecuación f(x,y) = (2x+5, 4x+10)

(•) **c)** En $\mathbb{R}^2$, la aplicación identidad (matriz identidad).

E-2) Dado el endomorfismo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determinar si los siguientes vectores son o no vectores propios, y en caso afirmativo, hallar su valor propio.

(•) **a)** u = (0,3,0)

(•) **b)** v = (1, 0 , -1)

(•) **c)** w = (2,2,1)

E-3) Hallar los valores propios de los siguientes endomorfismos:

(••) **a)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(•) **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

E-4) Dado el siguiente endomorfismo, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(•) **a)** Hallar sus valores propios.

(••) **b)** Hallar sus vectores propios.

(•) **c)** Determinar si es diagonalizable, y diagonalizar en su caso.

E-5) Considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por f(x,y,z) = (3x–3z, 3y+9z, –3z)

(•) **a)** Hallar sus valores propios.

(••) **b)** Hallar sus vectores propios.

(•) **c)** Determinar si es diagonalizable.

(•) **d)** En caso afirmativo, escribir la diagonal y la matriz de paso P.

(●) E-6) Sabiendo que una cierta matriz A tiene valores propios 1, –1 ,2, hallar los valores propios
de A^t, de 4A, de A^3, y de A^{-1}.

(●●) E-7) Dado el endomorfismo $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x,-y,x+z) \end{array}$ hallar la matriz de f en la base
B= { (1,0,2), (1,0,-1), (0,3,0) }

(●●) E-8) De una matriz A de tamaño 2x2, se sabe que es diagonalizable y que los valores propios son 0 y 3 , con vectores propios respectivamente (1,1) y (4,1). Hallar la matriz A. *(Sugerencia: $A=PDP^{-1}$).*

(●●) E-9) Dada $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ hallar, mediante el método de las potencias, el valor propio dominante y su vector propio.