ESPACIOS VECTORIALES

Introducción.

La idea de vector está tomada de la Física, donde sirven para representar magnitudes vectoriales como fuerzas, velocidades o aceleraciones. Para ello se emplean vectores de dos componentes en el plano, de tres componentes en el espacio...

Se supone conocida la representación gráfica y manejo de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

En Matemáticas, tratamos de abstraer las propiedades que caracterizan a los vectores para extenderlas también a otro tipo de objetos diferentes de los vectores de la Física.

Esencialmente, el comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- **Podemos sumar dos vectores y obtenemos otro vector;**
- **Podemos multiplicar un vector por un número (escalar) y obtenemos otro vector.**

Además estas operaciones cumplen ciertas propiedades, que observamos en los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$:

En lo sucesivo, utilizaremos habitualmente la siguiente notación: u,v,w (u otras letras latinas) para vectores, mientras que las letras griegas designarán escalares.

Propiedades de la suma de vectores.

- Asociativa: (u+v)+w = u+(v+w)
- Conmutativa: v+u=u+v.
- Existe un elemento neutro, el vector $\vec{0}$, tal que $\vec{0}$ + v = v para cualquier vector v.
- Para cada vector v existe un elemento opuesto, –v, que sumado con él da $\vec{0}$.

Propiedades del producto de un vector por un escalar.

- Asociativa: $\beta(\alpha v) = (\beta\alpha) v$
- Distributivas:
  - Respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta) v = \alpha v + \beta v$
  - Respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- Existe un elemento unidad: el escalar 1, tal que 1· v = v para cualquier vector v.

Definición: espacio vectorial.

Cualquier conjunto que posea unas operaciones suma y producto por escalares, cumpliendo todas las propiedades anteriores, diremos que es un espacio vectorial. Los elementos de tal conjunto se llamarán vectores (aunque pueda tratarse de objetos diferentes a los vectores de la Física.)

Diremos que el espacio vectorial es real o complejo, según sean los escalares.

• Otras propiedades de los espacios vectoriales pueden deducirse de las anteriores propiedades básicas. Por ejemplo:

Si α **v** = $\vec{0}$ (α escalar, **v** vector) entonces o bien es $\alpha = 0$ o bien es **v** = $\vec{0}$.

Ejemplos de espacios vectoriales.

1) El espacio $\mathbb{R}^n$, formado por los vectores de n componentes $(x_1, \ldots, x_n)$ **es un espacio vectorial real**, en el que se pueden sumar vectores y multiplicar por un escalar (real) de la forma habitual.

Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas para ambas operaciones.
El vector cero es (0,. . .,0).

No es un espacio vectorial complejo, pues no podemos multiplicar por escalares complejos (si lo hacemos, el resultado no se mantendrá dentro de $\mathbb{R}^n$).

2) Consideremos el conjunto $\mathbb{P}_2$ de los **polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales**:

$$\mathbb{P}_2 = \{ ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos elementos de $\mathbb{P}_2$ y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$; también podemos multiplicar un elemento de $\mathbb{P}_2$ por un escalar real y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$. Veámoslo:

- <u>Suma</u>: $(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a+a') x^2 + (b+b') x + (c+c')$ que pertenece a $\mathbb{P}_2$.
- <u>Producto por un escalar real</u>: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(ax + bx + c) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$ que pertenece a $\mathbb{P}_2$.

Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas. El vector $\vec{0}$ es el polinomio cero: $0x^2 + 0x + 0$

No es un espacio vectorial complejo, pues al multiplicar por un escalar complejo el resultado podrá ser un polinomio complejo que no pertenece a $\mathbb{P}_2$.

3) Consideremos el conjunto G de los polinomios de grado = 3 (exactamente 3) con coeficientes reales.

No es un espacio vectorial (real ni complejo), pues al sumar dos elementos de G, no está garantizado que el resultado esté en G. En efecto, consideremos los polinomios

$$p = x^3+x^2+x+1 \quad , \quad q = -x^3+x^2+x+1$$

Pertenecen a G, pues su grado es 3. Pero su suma es $p+q = 2x^2+2x+2$ que no pertenece a G (su grado no es 3).

4) Consideremos el conjunto $\mathbb{M}_{2x2}$ (también denotado por $\mathbb{M}_2$) de las **matrices 2x2 con términos reales:**

$$\mathbb{M}_{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos matrices de $\mathbb{M}_{2x2}$ obteniendo otra matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$, y multiplicar una matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$ por un escalar real obteniendo otra matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$. Se puede comprobar que se cumplen las propiedades. El vector $\bar{0}$ es, en este caso, la matriz con todos sus términos nulos.

No es un espacio vectorial complejo.

5) Consideremos el conjunto MC de las **matrices 2x3 con términos complejos.**

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos matrices de MC obteniendo otra matriz de MC, y multiplicar un elemento de MC por un escalar **real** obteniendo otra matriz de MC.

También es un espacio vectorial complejo, pues podemos multiplicar una matriz de MC por un escalar **complejo** obteniendo otra matriz de MC.

(Compruébese con elementos genéricos).

6) Consideremos el conjunto ME de las **matrices 3x2 con términos enteros.**

Podemos sumar dos matrices de ME y obtenemos otro elemento de ME:

En efecto, si tomamos $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ con a, a', b, b', c, c', d, d' enteros,

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$ también tiene términos enteros, luego pertenece a ME.

Sin embargo ME **no es un espacio vectorial real,** pues al multiplicar un elemento de ME por un escalar real no está garantizado que el resultado permanezca dentro de ME. Si el escalar es p.ej. el número real 1.25, el resultado ya no es una matriz con términos enteros.

Por similar razón **tampoco es un espacio vectorial complejo.**

7) El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se puede considerar como un espacio vectorial real. En efecto, se pueden sumar dos números complejos obteniéndose otro número complejo; y se puede multiplicar un complejo por un escalar real, obteniéndose otro complejo.

Es decir,

- Suma: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$, que es otro número complejo.
- Producto por un escalar real: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi$ que es otro número complejo.

La suma y el producto por un escalar cumplen todas las propiedades requeridas. En este caso el vector $\vec{0}$ es el número complejo cero, $0+0i$.

Nótese que aquí los complejos funcionan como vectores (elementos del espacio vectorial $\mathbb{C}$) y los reales como escalares.

Observar además que, en este contexto, el conjunto de los números complejos se comporta igual que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, identificando el número complejo $a+bi$ con el vector (a,b).

Este es el motivo por el cual se suele representar el plano complejo como si fuera $\mathbb{R}^2$, con la parte real en el eje de abscisas y la parte imaginaria en el eje de ordenadas.

8) El conjunto de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$: Se pueden sumar dos funciones, y se puede multiplicar una función por un escalar real.

Por ejemplo, las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\log(x)$ pueden sumarse y resulta otra función $h(x)=x^2+\log(x)$.
La función $g(x)=\log(x)$ puede multiplicarse por el escalar λ y resulta la función $k(x)=\lambda \log(x)$.

Si sumamos dos funciones continuas, el resultado es otra función continua. Si multiplicamos una función continua por un escalar, el resultado es otra función continua.

Las operaciones cumplen las propiedades requeridas. El vector $\vec{0}$ es la función constante 0.

Por tanto se trata de un **espacio vectorial real**.

- Hay muchos otros espacios vectoriales. Gracias a esto, las propiedades que encontremos para espacios vectoriales en general, las podemos aplicar a matrices, polinomios, funciones...

Observación.

En algunos espacios vectoriales reales, distintos de $\mathbb{R}^n$, puede hacerse un "paralelismo" o "identificación" con $\mathbb{R}^n$, para un **n** adecuado.

Por ejemplo, ya hemos visto cómo el espacio vectorial real $\mathbb{C}$ de los números complejos puede identificarse con $\mathbb{R}^2$, correspondiendo el número complejo $a+bi$ al vector (a,b)

Veamos cómo el espacio $\mathbb{P}_2$ = { polinomios de grado ≤ 2 } puede identificarse con $\mathbb{R}^3$: cada polinomio $\mathbf{ax^2+bx+c}$ correspondería al vector **(a,b,c)** de $\mathbb{R}^3$.

Lo mismo ocurre con el espacio de matrices $\mathbb{M}_{2x2}$ = { matrices 2x2 }, que se identifica con $\mathbb{R}^4$, correspondiendo a la matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ el vector (a,b,c,d).

En todos los casos las operaciones de suma y producto por escalar se pueden trasladar paralelamente del espacio considerado a $\mathbb{R}^n$.

Esto hace posible efectuar las operaciones en $\mathbb{R}^n$ en lugar de otros espacios.

SUBESPACIOS VECTORIALES

Dado un espacio vectorial V, podemos considerar una parte S de él que funcione como un espacio vectorial "más pequeño", incluido en V.

Como V es un espacio vectorial, posee unas operaciones (suma, producto por un escalar) que en particular se pueden efectuar en S. Solo necesitaremos que, al efectuarlas, su resultado quede dentro de S.

Definición: Subespacio.

Dado un espacio vectorial V, se dice que un subconjunto S de V es un subespacio vectorial si contiene al vector $\vec{0}$, y si al efectuar las operaciones de suma y producto por escalar entre vectores de S, el resultado permanece en S.

(Se puede decir que S es "cerrado" para las operaciones suma y producto por escalar.)

Es decir:

- $\vec{0} \in$ S .
- Si **v, w** $\in$ S entonces **v** + **w** $\in$ S.
- Si **v** $\in$ S y λ es un escalar, entonces λ**v** $\in$ S.

Ya no hace falta comprobar que se cumplen las propiedades asociativa, conmutativa, etc. puesto que sabemos que se cumplen en V, y por tanto también en S (se dice que S "hereda" las propiedades de las operaciones en V).

Por supuesto si para V utilizamos escalares reales, también para S; si para V utilizamos complejos, también para S.

Ejemplos de subespacios.

1) La recta x=y es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Está formado por los vectores de la forma (a,a).
Contiene al vector (0,0).
Además, es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (a,a) + (b,b) = (a+b, a+b) que también es un elemento de la recta.
- Producto por un escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(a,a) = (λa, λa) que también es un elemento de la recta.

2) El plano XY es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Está formado por los vectores de la forma (x,y,0). Contiene al vector (0,0,0).
Además, es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0) que también es un elemento del plano.
- Producto por un escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0) que también es un elemento del plano.

Podemos decir que este plano "es como $\mathbb{R}$" pero incluido en $\mathbb{R}^3$.

3) ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los vectores de la forma (a,1)?
No, puesto que no contiene al (0,0).
O también: porque no se puede sumar dentro de este conjunto, por ejemplo (a,1)+(b,1)=(a+b,2) que no pertenece al conjunto.

4) En el espacio $\mathbb{P}_2$ = { polinomios de grado ≤ 2 }, el conjunto de los polinomios de grado ≤1 forma un subespacio. En efecto, contiene al polinomio cero, y podemos sumar y multiplicar por un escalar sin salir del conjunto:

- Suma: (ax+b) + (a'x+b') = (a+a')x + (b+b') que también es un polinomio de grado ≤1.
- Producto por escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(ax+b)= λax+λb que también es un polinomio de grado ≤1.

5) En $\mathbb{M}_2$ = { matrices 2x2 }, el conjunto de las matrices simétricas $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es un subespacio.

Contiene a la matriz nula, y es cerrado para las operaciones:

- Suma: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}$ que también es una matriz simétrica.
- Producto por escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$ que también es una matriz simétrica.

6) Geométricamente, los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son rectas, planos, y solo uno de ellos es un punto, el $\{\vec{0}\}$.

Las curvas o las superficies curvas no son subespacios; tampoco las figuras geométricas finitas, como círculos o polígonos en el plano, esferas o poliedros en el espacio.

(Comprobar gráficamente que no pueden sumarse vectores dentro de este tipo de conjuntos)

7) En todo espacio vectorial existen el subespacio cero, formado solamente por el vector $\{\vec{0}\}$, y el subespacio total, formado por todos los vectores del espacio.

Descripción de los subespacios de $\mathcal{R}^n$.

Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ pueden describirse de dos formas: implícita y paramétrica.

- **Forma implícita**: Mediante ecuaciones. Los vectores que verifiquen las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio.
- **Forma paramétrica**: Mediante una expresión con parámetros, los cuales al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio.

Para pasar de una a otra forma:

- De la forma implícita a la paramétrica: Basta considerar las ecuaciones implícitas como un sistema, y resolverlo. La solución general del sistema (que podrá depender de parámetros) es la expresión paramétrica.
- De la forma paramétrica a la implícita: Podemos decir, aunque no es un método riguroso, que se trata de "describir" mediante ecuaciones cómo es el vector genéricos del subespacio.

Ayudará el conocer qué número de ecuaciones es necesario (lo que se verá más adelante).

Ejemplos:

1) En $\mathbb{R}^2$, la recta bisectriz del primer cuadrante puede describirse en implícitas como { y=x }, y en paramétricas como $\{ (\lambda,\lambda) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

2) En $\mathbb{R}^3$, dado el subespacio en paramétricas $\{ (\alpha, \beta, \alpha-\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$, su forma implícita es la ecuación { z=x–y } .

3) En $\mathbb{R}^3$, dado el subespacio en paramétricas $\{ (\lambda, \lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$, para describirlo en forma implícita necesitamos dos ecuaciones: $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

4) Consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado en implícitas por $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

¿Cuál es su forma paramétrica? Para ello resolvemos el sistema, que es compatible indeterminado. La solución depende de un parámetro y es $\{ (\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

5) El subespacio cero y el subespacio total constituyen un caso especial. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

- El subespacio { (0,0,0) } tiene como ecuaciones implícitas $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Su forma paramétrica es (0,0,0): no hay parámetros, pues como se trata de un solo punto, no se puede variar nada.

Por el contrario el subespacio total $\mathbb{R}^3$ tiene como forma paramétrica $\{ (\alpha,\beta,\gamma) : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \}$ (tres parámetros variando libremente, pues no hay ninguna limitación).
Ecuaciones implícitas no tiene ninguna, pues no hay restricción alguna que imponer.

Relación entre la forma implícita y paramétrica.

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, la forma implícita y paramétrica de S satisfacen en general la siguiente relación:

Nº de ecuaciones implícitas + Nº de parámetros = n.

Comprobar esta relación en los ejemplos anteriores.

Sin embargo para que esto sea cierto debe cumplirse que las ecuaciones implícitas sean independientes entre sí, es decir, que ninguna sea combinación lineal de otras. Esto significa que, considerando las ecuaciones como un sistema, no debe "sobrar" ninguna ecuación: es decir, que la matriz de coeficientes tenga **rango** igual al **número de ecuaciones.**

También los parámetros deben ser independientes entre sí: por ejemplo en la expresión paramétrica **$(\alpha+\beta, \alpha+\beta, 0)$,** que en $\mathbb{R}^3$ corresponde a la forma implícita **{x=y , z=0},** no se cumple la relación anterior: $2+2 \neq 3$. Esto ocurre porque los dos dos parámetros no son independientes. En realidad puede sustituirse $\alpha+\beta$ por un solo parámetro λ y así tendríamos **$(\lambda, \lambda, 0)$** y ya se cumple 2+1=3.

(Esto será más fácil de comprobar más adelante, en el punto *"Bases y dimensión",* pues el número de parámetros independientes es igual a la dimensión del subespacio).

Inclusión de subespacios.

Dados dos subespacios A y B, puede ocurrir que uno esté incluido en otro (una recta dentro de un plano, por ejemplo).

Se dice que A está contenido o incluido en B (y se denota $A \subset B$) si todos los elementos de A están también en B.

En cualquier espacio vectorial V, el subespacio $\{\vec{0}\}$ está contenido en todos los demás subespacios; mientras que todos ellos están contenidos en el total V.

Veamos cómo reconocer si un subespacio está incluido en otro.

- En forma implícita: Si las ecuaciones de B están incluidas en las de A, entonces $A \subset B$. (Cuantas más ecuaciones implícitas, más pequeño es el subespacio).

- En forma paramétrica: Para ver si $A \subset B$, tendremos que ver si todo vector genérico de A, está en B.

Ejemplo

1) En $\mathbb{R}^3$**,** sean los siguientes subespacios dados en implícitas:

$A = \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\qquad$ B= { y=0 }

Tenemos que $A \subset B$, pues todo vector que satisfaga las dos ecuaciones de A, es decir que cumpla y=0, z=0, también satisface la ecuación de B, y=0.

2) En $\mathbb{R}^3$**,** sean los siguientes subespacios dados en paramétricas:

A= { $(\lambda,0,0)$: $\lambda \in \mathbb{R}$ }   b= { $(\alpha,0,\beta)$: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ }

Tenemos que A $\subset$ B , pues todo vector de la forma $(\lambda,0,0)$ también es de la forma $(\alpha,0,\beta)$, tomando $\beta=0$.

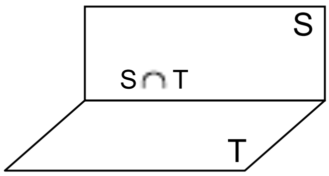
Ambos ejemplos son en realidad el mismo, pues se trata del eje X contenido en el plano XZ.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS

A partir de dos subespacios podemos construir otro efectuando las operaciones de <u>suma</u> o <u>intersección</u> de subespacios.

1. Intersección de subespacios.

La intersección, indicada por el símbolo $\cap$, puede aplicarse a conjuntos cualesquiera, no solo a espacios vectoriales. Consiste en encontrar los <u>elementos comunes a dos conjuntos.</u>



Por ejemplo, la intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$ podrá ser una recta.

Notar que dados dos subespacios cualesquiera, siempre hay vectores comunes a ambos (al menos el $\vec{0}$, que está en todos los subespacios.)

Teorema

La intersección de subespacios es un subespacio.

En efecto, es posible sumar vectores dentro de $S \cap T$, pues por ser S y T subespacios, la suma debe permanecer dentro de S y dentro de T, y por tanto dentro de $S \cap T$. Lo mismo para el producto por escalares.

Cálculo de la intersección.

La forma más sencilla (aunque no la única) de calcular $S \cap T$ es utilizar la expresión implícita de S y de T.

Como buscamos los vectores que verifiquen a la vez ambas condiciones, podremos describir $S \cap T$ <u>considerando conjuntamente las ecuaciones implícitas de S y las de T</u> (formando un sistema con todas ellas).

Este sistema, si es "sencillo", puede considerarse ya como la forma implícita de $S \cap T$.

En todo caso, resolviendo este sistema obtenemos la forma paramétrica de $S \cap T$.

Ejemplos.

1) Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios S=plano XY, T=plano XZ.

Sus ecuaciones implícitas son: $S \equiv \{ z=0 \}$, $T \equiv \{ y=0 \}$

Uniendo ambas tenemos $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$ que es la expresión implícita de $S \cap T$.

Se trata por tanto del eje X , $\{ (\lambda,0) \}$ en paramétricas.

2) Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios dados por las ecuaciones implícitas

$U \equiv \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$ $\quad W \equiv \begin{cases} 2x+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

Uniendo todas las ecuaciones resulta $\begin{cases} x+z = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ sistema cuya solución es (0,0,0,0) por tanto $U \cap W = \{ (0,0,0,0) \}$

2. Suma de subespacios.

Dados dos subespacios S, T se define el <u>subespacio suma</u> como:

$S+T = \{ u + v \ : \ u \in S , v \in T \}$

es decir, aquellos vectores que podamos construir sumando un vector de S y uno de T.

Teorema

La suma de subespacios es un subespacio.

Cálculo del subespacio suma.

Al contrario que la intersección, la suma S+T se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de S y de T. Esto nos permite tomar un vector genérico de cada uno de los subespacios y sumarlos, obteniéndose una expresión paramétrica de S+T.

No obstante la forma paramétrica así obtenida puede tener parámetros no independientes.

Más adelante, en el punto *"Sistemas generadores"* se dará otro método para calcular el subespacio suma.

Ejemplo.

Consideremos los subespacios en $\mathbb{R}^3$ dados en paramétricas por:

$H=\{ (\alpha, \alpha+\beta, \beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$

$K=\{ (0,0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R} \}$

Entonces los elementos de H+K se formarán sumando $(\alpha, \alpha+\beta, \beta) + (0,0, \gamma) = (\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma)$

es decir, $H + K = \{ (\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma) \ : \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \}$

Observación

La intersección $S \cap T$ es un subespacio "más pequeño" que S y que T (está contenido en S y también en T).

Por el contrario la suma S+T es un subespacio "más grande" que S y que T, pues contiene a ambos.

De hecho $S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en ambos, y S+T es el menor subespacio que contiene a ambos.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición: Combinación lineal.

Dado un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ se llama una combinación lineal de ellos a cualquier vector de la forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares, llamados coeficientes de la combinación lineal.

Teorema.

Para probar que un conjunto S es subespacio, basta probar que:

La combinación lineal de elementos de S está en S.

(Ello es debido a que calcular una combinación lineal de vectores involucra tanto la suma como el producto por escalares, así que equivale a probar ambas cosas por separado).

Esto se suele expresar diciendo que un subespacio es un conjunto "cerrado" para las combinaciones lineales.

Ejemplo.

Veamos si es subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto $U=\{ (\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Tomamos dos elementos genéricos de U, (λ,λ) y (μ,μ). Una combinación lineal de ellos es:

$\alpha(\lambda,\lambda) + \beta(\mu,\mu) = (\alpha\lambda+\beta\mu, \alpha\lambda+\beta\mu)$ que también es un elemento de U.

Por tanto U es subespacio.

Definición: Dependencia lineal.

Se dice que un conjunto de vectores es linealmente dependiente (o ligado) si:

(a) Uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Esto se puede expresar también así:

(b) El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de ellos (con coeficientes no todos nulos).

Ejemplo

Sean en $\mathbb{R}^2$ los vectores $u=(1,1)$, $v=(0,3)$, $w=(2,5)$.

- Observamos que son linealmente dependientes por **(a):**

  w es combinación lineal de u y v , puesto que $w = v+2u$.
  (pueden encontrarse también otras combinaciones, como $u = \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}v$, etc).

- También podemos verlo por **(b):**

  $\vec{0}$ es combinación lineal de u, v , w puesto que $\vec{0} = v+2u-w$, (y los coeficientes de esta combinación lineal son 1, 2, –1 que no son todos nulos).

Observación

Si un conjunto es linealmente dependiente, entonces por **(a)** sabremos que existe algún vector entre ellos que es combinación lineal de los demás. Pero esto no quiere decir que "cualquier" vector de ellos sea combinación lineal de los demás.

Por ejemplo, el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^3$ podemos comprobar que es ligado:

u=(1,0,0), v=(0,1,0), w=(1,1,0), k=(0,0,1),

ya que, por (a), tenemos que w = u + v (es decir, w=1u + 1v + 0w), hay un vector que es combinación lineal de los demás. Pero no "cualquier" vector lo es, puesto que k no es combinación lineal de los demás. Esto se puede ver poniendo

$(0,0,1) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(1,1,0)$

y viendo que se obtiene un sistema incompatible.

Definición: Independencia lineal.

En caso de que un conjunto de vectores no sea linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente (o libre) .

Por tanto, escribiendo la negación de la definición de dependencia lineal, tendremos que un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando:

(a) Ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

O equivalentemente:

(b) El vector $\vec{0}$ no es combinación lineal de ellos, a no ser que la combinación tenga coeficientes todos nulos.

Expresando **(b)** de otra manera,

(b) La única forma de poner $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores, es con todos los coeficientes nulos.

Observación.

La definición de dependencia lineal no es: " v, w son dependientes si 0v + 0w = $\vec{0}$ "

Esa afirmación no aporta nada, puesto que se cumple para todos los vectores, dependientes o no.

De lo que se trata, es de ver si esa es la única manera de poner $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos.

Ejemplos.

1) Veamos que **u**=(3,1) y **v**=(4,5) en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes.

Para ello intentaremos poner (0,0) como combinación lineal de ellos, y encontraremos que solo es posible con coeficientes nulos.

$$(0,0) = \alpha\,(3,1) + \beta\,(4,5) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{array}\right\}$$ Este sistema es compatible determinado, por tanto sólo tiene la solución $\alpha=0, \beta=0$.

Así pues, la única forma de poner (0,0) como combinación lineal de **u, v** es con coeficientes α, β nulos. Esto significa que son <u>linealmente independientes</u>.

2) Veamos si son independientes **w**=(3,1) y **k**=(6,2): con el mismo planteamiento,

$$(0,0) = \alpha\,(3,1) + \beta\,(6,2) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\alpha + 6\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{array}\right\}$$ Este sistema es compatible indeterminado.

Esto quiere decir (aun sin resolver el sistema) que existen coeficientes α, β no nulos que permiten poner (0,0) como combinación lineal de **w, k**. Por tanto **w, k** son <u>linealmente dependientes</u>.

3) Veamos si son independientes **u**=(1,0,2), **v**=(4,3,1) y **w**=(5,3,3) en $\mathbb{R}^3$:

$$(0,0,0) = \alpha\,(1,0,2) + \beta\,(4,3,1) + \gamma(5,3,3) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es <u>compatible indeterminado</u>, puesto que su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con rango 2.

Esto quiere decir (aun sin resolver el sistema) que existen coeficientes α, β, γ no nulos que permiten poner (0,0,0) como combinación lineal de **u, v, w.** Por tanto son <u>linealmente dependientes</u>.

4) Veamos si son independientes **u**=(3,2,–1), y **v**=(2,2,0) en $\mathbb{R}^3$:

$$(0,0,0) = \alpha\,(3,2,-1) + \beta\,(2,2,0) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha \quad\;\; = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es <u>compatible determinado</u>, puesto que su matriz es:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 y hay 2 incógnitas.

Esto quiere decir que la única solución es $\alpha=0, \beta=0$ y por tanto que la única forma de poner (0,0,0) como combinación lineal de **u, v,** es con coeficientes nulos. Por tanto son <u>linealmente independientes</u>.

<u>Observación.</u>

Si observamos los dos últimos ejemplos, veremos que la matriz del sistema está formada por los vectores dados, en columnas.

Hallando el rango de esa matriz vemos si el sistema es compatible determinado o indeterminado, y por tanto si los vectores son dependientes o independientes.

Volveremos sobre esto más tarde (en el punto *"Rango de un conjunto de vectores"*.)

Propiedades de la dependencia / independencia lineal.

1) El conjunto formado por un solo vector **v** no nulo, es libre.

(En efecto, una combinación lineal de v es solamente λv, y $\lambda v=\vec{0}$ solo puede conseguirse con λ=0).

2) Dos vectores **v, w** son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo del otro , **v**=λ**w**
(ya que esto equivale a decir que uno es combinación lineal del otro).

3) Todo conjunto que contenga al $\vec{0}$ es ligado.

Veámoslo para 3 vectores: si tenemos { v, w, $\vec{0}$} podemos formar $\vec{0}$ como combinación de ellos:

$$0\,v + 0\,w + 1\,\vec{0} = \vec{0}$$

y los coeficientes de esta combinación lineal son 0, 0, 1 y por tanto no todos nulos.

4) Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado.
(En efecto, si un vector es combinación de otros, aunque añadamos más vectores seguirá siéndolo.)

5) Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre.

(En efecto, si no se puede formar $\vec{0}$ como combinación de ellos, al quitar vectores tampoco se podrá)

6) Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número *(que será la dimensión del espacio, según veremos más adelante).* Por encima de este número ya no se pueden añadir más vectores libres.

7) Si un conjunto es ligado, quitándole los vectores que son combinación lineal de los demás, llegará a ser libre.
El desarrollo de esta propiedad nos lleva a un nuevo concepto, el de *rango.*

RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

Ejemplo.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores (2,0), (0,1), (4,3), (2,5); vamos a aplicar la propiedad 7) anterior.

- Este conjunto es linealmente dependiente puesto que observamos que algún vector es combinación de los demás; concretamente

  (4,3) = 2 (2,0) + 3 (0,1)

Suprimimos por tanto el vector (4,3) ; el conjunto restante (2,0), (0,1), (2,5) sigue siendo ligado puesto que

$$(2,5) = 1\ (2,0) + 5\ (0,1)$$

Suprimimos el vector (2,5), el conjunto restante (2,0), (0,1) ya es independiente (son dos vectores y uno no es múltiplo del otro).

- También podríamos haber seguido otro camino, por ejemplo viendo que (2,0) es combinación lineal de los demás (compruébese) y suprimiéndolo. El conjunto restante (0,1), (4,3), (2,5) sigue siendo ligado; vemos que (0,1) es combinación lineal de los demás y lo suprimimos. Llegamos entonces al conjunto (4,3), (2,5) que ya es independiente.

Por los dos caminos llegamos a distintos conjuntos independientes. Pero ambos constan del mismo número de vectores (dos en este caso).

Teorema: Rango de un conjunto de vectores.

Dado un conjunto de vectores, si quitamos aquellos que sean combinación lineal de los demás, queda finalmente un cierto número de vectores, que ya son independientes.

Este número no depende del camino seguido, y se llama rango del conjunto de vectores.

Propiedades del rango.

1) En $\mathbb{R}^n$, el rango de un conjunto de vectores es igual al **rango de la matriz que forman** colocándolos en filas o en columnas (habitualmente se hace por columnas).

2) Dados **m** vectores, **si su rango es m** significa que son **linealmente independientes**.

3) En particular, si tenemos **n** vectores en $\mathbb{R}^n$, la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede calcular su **determinante:**

- Serán independientes si el rango de la matriz es **n**, es decir, si el determinante es no nulo.

- Si el determinante es nulo los vectores son linealmente dependientes.

4) Dado un conjunto de vectores, si al eliminar uno de ellos se conserva el rango del conjunto, entonces dicho vector depende linealmente de los demás.

Si por el contrario al eliminarlo disminuye el rango, entonces es independiente de los demás.

5) Dado un conjunto de vectores, si al añadir un nuevo vector se conserva el rango del conjunto, entonces el nuevo vector depende linealmente de los anteriores.

Si por el contrario al añadirlo aumenta el rango, entonces el nuevo vector es independiente de los anteriores.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^4$ determinar el rango de los vectores (1,2,3,4), (0,1,6,–1), (3,3,1,0) :

La matriz que forman por columnas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3

(lo que puede comprobarse escalonando la matriz).
Esto significa que los 3 vectores son linealmente independientes.

2. En $\mathbb{R}^2$ determinar el rango de los vectores (1,3), (5,8). Como la matriz que forman es cuadrada $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ se puede calcular su determinante. Como este es no nulo, los vectores son linealmente independientes.

3. En $\mathbb{R}^3$ determinar el rango de los vectores u=(1,0,0), v=(0,1,0), w=(1,1,0), k=(0,0,1).

La matriz que forman por columnas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la cual (ya está escalonada) se aprecia que el rango es 3. Esto quiere decir que de los 4 vectores, solo 3 son independientes, y el otro es combinación lineal de los demás.

Observación.

En un caso como el 3 anterior, el cálculo del rango nos dice *cuántos* vectores son independientes, pero no *cuáles*. <u>Aunque el rango sea 3, no está garantizado que 3 vectores *cualesquiera* vayan a ser independientes</u>. Por ejemplo en este caso, **u,v,w** no lo son.

Para saber cuáles lo son, se pueden tomar los correspondientes a las columnas pivotales después de escalonar la matriz (en este caso **u, w, k**).

También podemos verlo usando la propiedad **4)** del rango, quitando el vector que no haga disminuir el rango: en este caso podemos quitar **v**. Otra posibilidad es quitar **u**, o también **w**. Pero no podemos quitar **k**, pues entonces disminuiría el rango.

SISTEMAS GENERADORES

Definición: Subespacio generado y sistema generador.

Dado un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_r$, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama <u>subespacio generado (o engendrado)</u> por $v_1, \ldots, v_r$.

Se dice también que dichos vectores son un <u>sistema generador</u> del subespacio (o del espacio, en su caso).

Observación.

Notar que, dado un conjunto de vectores, el conjunto de todas sus combinaciones lineales es efectivamente un subespacio:

- la suma de dos combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_r$ es otra combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$.

- el producto de un escalar por una combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$ es otra combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$.

Ejemplos.

1) En $\mathbb{R}^2$, un vector no nulo v genera una recta (los vectores de la forma αv).

2) En $\mathbb{R}^3$: Dos vectores generan un plano.
Tres vectores que estén en el mismo plano, generan ese plano.
Tres vectores que no estén en el mismo plano, generan todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

3) Veamos qué subespacio generan en $\mathbb{R}^3$ los vectores (1,0,0) y (0,1,0): las combinaciones lineales de ellos serán de la forma

α (1,0,0) + β (0,1,0)

es decir de la forma { $(\alpha,\beta,0):\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ } que es la expresión paramétrica del plano XY.

4) Obtener un sistema generador del subespacio S={ $(\lambda,\mu,2\lambda+\mu)$: $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ } de $\mathbb{R}^3$.

Observemos que

$(\lambda,\mu,2\lambda+\mu) = \lambda(1,0,2)+\mu(0,1,1)$

por tanto los vectores de S son exactamente las combinaciones lineales de (1,0,2) y (0,1,1).

Así pues, estos dos vectores son un sistema generador de S.

Por supuesto pueden encontrarse otros sistemas generadores diferentes para S (de hecho hay infinitas posibilidades).

5) Un sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es (1,0), (0,1).
En efecto, todo vector (a,b)$\in\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos:
(a,b) puede expresarse como **a (1,0) + b (0,1)**

6) Otro sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es (2,1), (1,3), (2,0). Veamos que todo vector (a,b)$\in\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos:

(a,b) = λ (2,1) + μ (1,3) + σ (2,0) produce un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda+\mu+2\sigma = a \\ \lambda+3\mu = b \end{array}\right\}$$ (donde las incógnitas son λ,μ,σ mientras que a, b son datos).

Se observa que para cualesquiera datos a, b este sistema es compatible. Así cualquier vector (a,b)$\in\mathbb{R}^2$ puede ponerse como combinación lineal de (2,1), (1,3), (2,0) y por ello son un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

7) ¿Son los vectores (1,1) y (2,2) un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?

Las combinaciones lineales de estos vectores son de la forma α (1,1) + β (2,2), es decir,

$(\alpha+2\beta, \alpha+2\beta)$.

Se observa pues, que solo podemos generar vectores que tengan sus dos componentes iguales. No podemos generar otros vectores como (3,4). (Si se intenta poner (3,4) como combinación lineal de (1,1) y (2,2) se obtiene un sistema incompatible).

Por ello, (1,1) y (2,2) <u>no</u> forman un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

8) El espacio que generan (1,1) y (2,2) no es $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es?
Se trata de la recta $\{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, es decir la bisectriz del primer cuadrante.

De hecho para generar esta recta bastaría con uno de los dos vectores.

9) Hallar un sistema generador del subespacio { x = y } de $\mathbb{R}^3$.
Para ello obtenemos primero la forma paramétrica, que es $\{(\alpha,\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.
Entonces, $(\alpha,\alpha,\beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$.
Así pues, (1,1,0) y (0,0,1) son un sistema generador del subespacio dado.

<u>Observación</u>

¿Cuándo un vector **u** pertenece al subespacio generado por otros vectores $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$?

Esto ocurrirá si **u** es combinación lineal de $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$. , por tanto podemos plantear tal combinación lineal, lo que conducirá a un sistema de ecuaciones, y ver si es compatible o incompatible.

<u>Ejemplo</u>

En $\mathbb{R}^3$, ¿pertenece **u**=(1,2,3) al subespacio generado por **v**=(4,5,6), **w**=(7,8,9) ?
Veamos si es posible poner **u** = α **v** + β **w**.

$$(1,2,3) = \alpha\,(4,5,6) + \beta\,(7,8,9) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 4\alpha + 7\beta = 1 \\ 5\alpha + 8\beta = 2 \\ 6\alpha + 9\beta = 3 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible, por tanto **u** pertenece al subespacio.

- Además, observar que el sistema es compatible porque la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

tiene el mismo rango (=2) que la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Si los rangos fueran diferentes el sistema sería incompatible.

Notar que la matriz de coeficientes está formada por los vectores **v, w** en columnas, y la matriz ampliada se forma añadiendo la columna **u**.

Esto nos lleva a formular el siguiente

Teorema

Un vector **u** pertenece al subespacio generado por un conjunto de vectores $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ si al añadirlo a estos no aumenta el rango.

(En efecto, ya vimos que si al añadir **u** no aumenta el rango, significa que **u** depende linealmente de $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$, es decir, es combinación lineal de ellos).

Sistema generador del subespacio suma.

Hemos visto que puede no ser fácil determinar el subespacio suma U+V a partir de la forma paramétrica de U y de V. Pero conociendo sistemas generadores de U y de V, podemos usar el siguiente resultado:

Uniendo sistemas generadores de U y de V, se obtiene un sistema generador de U+V.

Ejemplo.

Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios:

U=plano XY={ $(\alpha,\beta,0):\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ } , sistema generador (1,0,0), (0,1,0).

V= plano XZ={ $(\lambda,0,\mu):\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ } sistema generador (1,0,0), (0,0,1).

Por tanto un sistema generador de U+V es (1,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1).
El vector repetido (1,0,0) se puede eliminar: un sistema generador más sencillo de U+V es

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$$

Por tanto los elementos de U+V son las combinaciones lineales de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), es decir:
a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a,b,c) por tanto son todos los vectores del espacio.

Es decir, en este caso el subespacio suma es U+V=$\mathbb{R}^3$.

Teorema: Reducción de los sistemas generadores.

Si de un sistema generador suprimimos los vectores que son combinación lineal de los demás, los restantes siguen generando el mismo subespacio.

- Por tanto, siempre será mejor reducir los sistemas generadores en lo posible, suprimiendo todos aquellos vectores que dependan linealmente de los demás.

Esto llevará al concepto de **base**.