SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Espacio Euclídeo.

A) Soluciones a las Cuestiones

C-1) a) El producto escalar debe ser cero. Podemos poner, por ejemplo, (-2,1,0), o bien (0,1,2), o (1,0,1), etc.

b) El producto escalar es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'+dd'$. Entonces,

aprovechando que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ tiene un cero, podemos poner $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y así el producto escalar será cero.

C-2) Esta operación cumple algunas de las propiedades de un producto escalar, por ejemplo, el resultado es un escalar, tiene la propiedad conmutativa... Pero la propiedad *definida positiva* no se cumple, pues al multiplicar un vector por sí mismo puede obtenerse un número negativo:

$(1,2) \cdot (1,2) = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3$

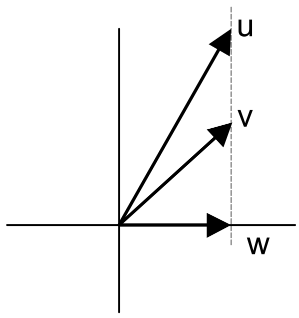
Por tanto, **no es un producto escalar**.

C-3) **No**, puesto que los vectores ortogonales son linealmente independientes, y no puede haber 5 vectores independientes en $\mathbb{R}^4$

C-4) **Falso.** Por ejemplo el conjunto { (1,0,0), (0,1,0) } es ortonormal y tiene dos vectores. (La afirmación sería cierta si dijera “base” en lugar de “conjunto”).

C-5) **No es posible,** ya que la proyección sobre la recta ha de dar como resultado un vector perteneciente a la misma, pero el vector (1,2) no pertenece a la recta y = x.

C-6) **Sí,** como indica la siguiente figura, en que los vectores u y v tienen ambos la misma proyección sobre el eje X, que es el vector w.



C-7) Es cuadrada, simétrica y se comprueba que es idempotente ($A^2 = I$)

Por tanto, **sí es matriz de proyección**.

El subespacio es el generado por sus columnas. Podemos multiplicar los vectores por 3 y siguen generando el mismo subespacio, por tanto éste es el generado por (2,-1,1) , (-1,2,1), (1,1,2) .

(y también se puede quitar uno de ellos pues son linealmente dependientes).

B) Soluciones a los Ejercicios

E-1) **a)** $| u |^2 = u \cdot u = (4,0,3)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 25$, luego $| u | = \sqrt{25} = \mathbf{5.}$

$| v |^2 = v \cdot v = (1,1,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 11$, luego $| v | = \sqrt{\mathbf{11}}$.

b) La distancia es el módulo del vector diferencia (4,0,3) – (1,1,3) = (3,–1,0)

$| (3,-1,0) | = \sqrt{\mathbf{10}}$

c) $\cos \alpha = \dfrac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \dfrac{(4,0,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{5\sqrt{11}} = \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{5\sqrt{11}}} \cong 0.784$, α=arc cos (0.784) = **0.669 rad**

E-2) **a)** (1,0,0,3,4) · (1,2,3,1,-1) = 1+0+0+3 - 4= 0 **sí son ortogonales.**

b) (3,3,1) · (-1,1,-1) = 3·(-1) + 2·3·1 + 3·1·(-1) = 0 **sí son ortogonales**.

c) $f \cdot g = \int_0^1 x(x+1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{5}{6} \neq 0$ **no son ortogonales.**

E-3) **a)** Hallamos el módulo de v con el producto escalar usual:

$v \cdot v = (2,1,3,-2) \cdot (2,1,3,-2) = 4+1+9+4 = 18$ luego $| v | = \sqrt{18} = 3\sqrt{3}$

Normalizamos v dividiéndolo por su módulo: $\dfrac{v}{|v|} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(2,1,3,-2) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{3}{3\sqrt{3}}, \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$

b) Hallamos el módulo de v con el producto escalar dado:

$v \cdot v = (2,1,3,-2) \cdot (2,1,3,-2) = 4 + 1 + 2\cdot 9 + 2\cdot 4 = 18$ luego $| v | = \sqrt{31}$

Normalizamos v dividiéndolo por su módulo: $\frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{31}}(2,1,3,-2) = \left(\frac{2}{\sqrt{31}}, \frac{1}{\sqrt{31}}, \frac{3}{\sqrt{31}}, \frac{-2}{\sqrt{31}} \right)$

E-4) **a)** Hay que comprobar si sus columnas son vectores ortonormales, es decir, si son unitarios y son ortogonales entre sí.

En este caso las columnas son u=(0,0,2) , v=(3,0,0), w=(0,5,0).

- Son ortogonales entre sí, pues u · v = 0, u · w = 0, v · w = 0.
- Pero no todos son unitarios, pues u tiene módulo 2.

Por tanto, **A no es una matriz ortogonal**.

<u>Otra forma</u>: Una matriz es ortogonal cuando $A A^t = I$. Veamos entonces qué se obtiene multiplicando $A A^t$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ que no es la matriz identidad.

Por tanto, A **no es una matriz ortogonal**.

b) Por cualquiera de los dos métodos del apartado **a),** se tiene que B **sí es una matriz ortogonal**.

E-5) Hay que ver si <u>cada vector de la base de S</u> es ortogonal a <u>cada vector de la base de T.</u>

(-3,-3,0,1) · (0,1,0,3) = 0

(-3,-3,0,1) · (1,1,-1,6) = 0

(1,0,2,0) · (0,1,0,3) = 0

pero (1,0,2,0) · (1,1,-1,6) = –1 ≠ 0 por tanto **S y T no son subespacios ortogonales**.

E-6) **a)** Se trata de hallar todos los vectores (x, y, z) que son ortogonales a (1,0,2).

Planteamos por tanto la ecuación (1,0,2) · (x,y,z) = 0 , es decir

$$x + 2z = 0$$

Se trata de un sistema de una sola ecuación con tres incógnitas, con matriz ampliada $(1 \;\; 0 \;\; 2 \,|\, 0)$.

Su solución es $(-2\beta,\ \alpha,\ \beta)$ que ya es, en paramétricas, el complemento ortogonal de S.

Una base de dicho complemento sería **(-2,0,1), (0,1,0).** Se puede comprobar que estos vectores son ortogonales a (1,0,2), y que la dimensión del complemento es 2, ya que la de S es 1, estando en $\mathbb{R}^3$.

b) Se trata de hallar todos los vectores (x,y,z) que son ortogonales a (1,0,2) y a (1,1,1).

Planteamos por tanto las ecuaciones $\begin{cases} (1,0,2)\cdot(x,y,z)=0 \\ (1,1,1)\cdot(x,y,z)=0 \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por el método de Gauss se obtiene la solución $(-2\lambda, \lambda, \lambda)$ que ya es, en paramétricas, el complemento de T.

Una base de dicho complemento sería **(-2,1,1)** . Comprobar que este vector es ortogonal a (1,0,2) y a (1,1,1), y que la dimensión del complemento es 1, ya que la de T es 2, estando en $\mathbb{R}^3$).

E-7) **a)** proy $_{(1,2,1)}$ (0,3,2) = $\dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (1,2,1) = $\dfrac{8}{6}$(1,2,1) = $\left(\mathbf{\dfrac{4}{3}}, \mathbf{\dfrac{8}{3}}, \mathbf{\dfrac{4}{3}} \right)$

[Comprobar que el resultado pertenece a la recta generada por (1,2,1)]

a) Para aplicar la fórmula de la proyección, primero hay que verificar que (1,2,1) y (0,-1,2) forman una base ortogonal de P. Efectivamente se ve que su producto escalar es cero, por tanto son ortogonales.

Entonces,

proy $_P$ (0,3,2) = $\dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (1,2,1) + $\dfrac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ (0,-1,2) = $\dfrac{8}{6}$(1,2,1) + $\dfrac{1}{5}$(0,-1,2) =

= $\left(\mathbf{\dfrac{4}{3}}, \mathbf{\dfrac{37}{15}}, \mathbf{\dfrac{26}{15}} \right)$

E-8) La mejor aproximación es simplemente su proyección sobre el plano. Por tanto se trata del mismo ejercicio **b)** anterior, cuya solución es $\left(\mathbf{\dfrac{4}{3}}, \mathbf{\dfrac{37}{15}}, \mathbf{\dfrac{26}{15}} \right)$.