Introducción a las cadenas de Markov

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,
  - los precios de las acciones,

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,
  - los precios de las acciones,
  - popularidad de los políticos,

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,
  - los precios de las acciones,
  - popularidad de los políticos,
  - el uso de la CPU de un ordenador,

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,
  - los precios de las acciones,
  - popularidad de los políticos,
  - el uso de la CPU de un ordenador,
  - la velocidad de una determinada conexión a internet,

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
    - la temperatura,
    - los precios de las acciones,
    - popularidad de los políticos,
    - el uso de la CPU de un ordenador,
    - la velocidad de una determinada conexión a internet,
    - etc.

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
  - la temperatura,
  - los precios de las acciones,
  - popularidad de los políticos,
  - el uso de la CPU de un ordenador,
  - la velocidad de una determinada conexión a internet,
  - etc.
- De cara a modelar una determinada situación, necesitamos que las variables aleatorias cambien con el tiempo.

Introducción a los procesos estocásticos

- El mundo que nos rodea es dinámico, va cambiando con el tiempo:
    - la temperatura,
    - los precios de las acciones,
    - popularidad de los políticos,
    - el uso de la CPU de un ordenador,
    - la velocidad de una determinada conexión a internet,
    - etc.
- De cara a modelar una determinada situación, necesitamos que las variables aleatorias cambien con el tiempo.
- Por dicho motivo, vamos a introducir los procesos estocásticos, que son variables aleatorias que además de depender de los elementos del espacio muestral, dependen del tiempo.

Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una variable aleatoria $X(w,t)$ que depende de dos argumentos:

- un elemento del espacio muestral $w \in \Omega$,
- el tiempo $t \in \mathcal{T}$, donde el conjunto $\mathcal{T}$ puede ser
    - discreto: $\mathcal{T} = \{0,1,2,\ldots\}$, o $\mathcal{T} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,
    - continuo: $\mathcal{T} = [0,\infty)$ o $\mathcal{T} = [-\infty,\infty)$.

- Si fijamos el tiempo t, la variable aleatoria $X(w,t) = X_t(w)$ sería una variable aleatoria que modelizaría lo que pasa en el sistema en el instante t.

Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una variable aleatoria $X(w,t)$ que depende de dos argumentos:

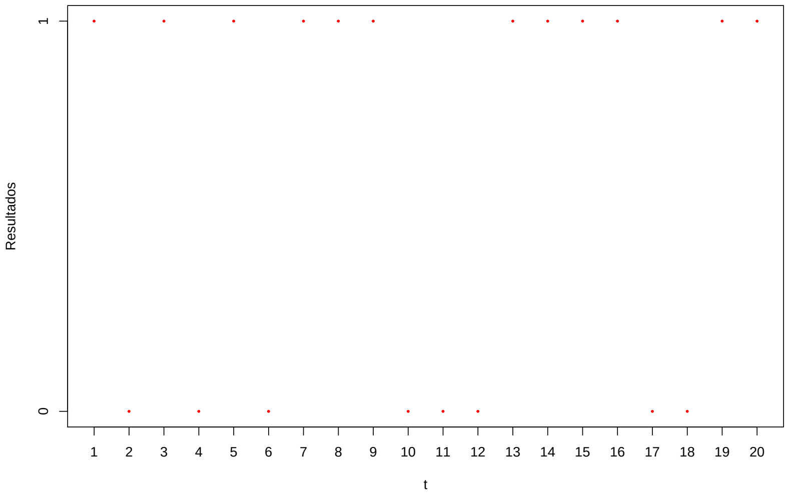
- un elemento del espacio muestral $w \in \Omega$,
- el tiempo $t \in \mathcal{T}$, donde el conjunto $\mathcal{T}$ puede ser
  - discreto: $\mathcal{T} = \{0,1,2,\ldots\}$, o $\mathcal{T} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,
  - continuo: $\mathcal{T} = [0,\infty)$ o $\mathcal{T} = [-\infty,\infty)$.

- Si fijamos el tiempo t, la variable aleatoria $X(w,t) = X_t(w)$ sería una variable aleatoria que modelizaría lo que pasa en el sistema en el instante t.
- Si fijamos el elemento w del espacio muestral Ω, tenemos la función dependiendo del tiempo $X(w,t) = X_w(t)$. Dicha función se denomina trayectoria del proceso estocástico.

Ejemplo: lanzamiento de una moneda

Un proceso estocástico sencillo es considerar lanzar una moneda cada cierto espacio de tiempo, por ejemplo cada minuto, y observar el resultado.
En este caso $\Omega = \{c, +\}$ y $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
$X(w, t)$ sería la variable aleatoria que nos dice el comportamiento de la moneda en el lanzamiento t-ésimo.
La distribución de dicha variable será de Bernoulli de parámetro p para cualquier instante t donde p es la probabilidad de sacar cara.

Procesos estocásticos



Tipos de procesos estocásticos

Diremos que el proceso estocástico es de estado discreto si la variable aleatoria $X_t(w)$ es discreta y es de estado continuo si la variable aleatoria $X_t(w)$ es continua para todo valor del tiempo t. Diremos que el proceso estocástico es de tiempo discreto si el conjunto $\mathcal{T}$ de valores del tiempo es discreto y es de tiempo continuo si $\mathcal{T}$ es continuo.

- Ejemplo anterior del lanzamiento de una moneda de parámetro p: estado discreto y tiempo discreto.

Procesos estocásticos. Ejemplos

- Ejemplo anterior del lanzamiento de una moneda de parámetro p: estado discreto y tiempo discreto.
- Número de infectados diarios por una pandemia: estado discreto y tiempo discreto.

Procesos estocásticos. Ejemplos

- Ejemplo anterior del lanzamiento de una moneda de parámetro p: estado discreto y tiempo discreto.
- Número de infectados diarios por una pandemia: estado discreto y tiempo discreto.
- Temperatura en un lugar determinado: estado continuo y tiempo continuo.

- Ejemplo anterior del lanzamiento de una moneda de parámetro p: estado discreto y tiempo discreto.
- Número de infectados diarios por una pandemia: estado discreto y tiempo discreto.
- Temperatura en un lugar determinado: estado continuo y tiempo continuo.
- Tiempo de espera del n-ésimo cliente de una cola en el supermercado modelado como $X(n, w)$. Este ejemplo es "lioso" ya que el tiempo sería el número del cliente y el espacio muestral sería precisamente el tiempo. Pensar que la variable aleatoria "tiempo" dependerá del número de cliente n: estado continuo y tiempo discreto.

Cadena de Markov

Un proceso estocástico $X(t)$ es un proceso de Markov si para cualquier secuencia de valores $t_1 < \cdots < t_n < t$ y para cualquier secuencia de sucesos $A, A_1, \ldots, A_n$,

$$P(X(t) \in A | X(t_1) \in A_1, \ldots, X(t_n) \in A_n)$$
$$= P(X(t) \in A | X(t_n) \in A_n).$$

- Es decir, que la distribución condicionada de la variable $X(t)$ condicionada a los valores del proceso estocástico en n instantes cualesquiera del pasado sólo depende de la distribución condicionada de la variable $X(t)$ condicionada al proceso correspondiente al último instante de la secuencia.

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{FUTURO}|\text{PASADO},\ \text{PRESENTE})\\
&= P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).
\end{aligned}
$$

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$\begin{aligned}&P(\text{FUTURO}|\text{PASADO},\ \text{PRESENTE})\\&=P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).\end{aligned}$$

- Ejemplos:

Procesos de Markov

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$P(\text{FUTURO}|\text{PASADO},\ \text{PRESENTE})$$
$$= P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).$$

- Ejemplos:
    - Temperatura en un día determinado: no es un proceso de Markov.

Procesos de Markov

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$P(\text{FUTURO}|\text{PASADO},\ \text{PRESENTE})$$
$$= P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).$$

- Ejemplos:
  - Temperatura en un día determinado: no es un proceso de Markov.
  - Número de conexiones registradas en un router de internet en un instante determinado: sí es un proceso de Markov ya que la gente se conecta aleatoriamente.

Procesos de Markov

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$P(\text{FUTURO}|\text{PASADO, PRESENTE}) \\ = P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).$$

- Ejemplos:
  - Temperatura en un día determinado: no es un proceso de Markov.
  - Número de conexiones registradas en un router de internet en un instante determinado: sí es un proceso de Markov ya que la gente se conecta aleatoriamente.
  - Precio de un stock en la bolsa en un día determinado: no es un proceso de Markov.

Procesos de Markov

- Esquemáticamente, podemos escribir:

$$P(\text{FUTURO}|\text{PASADO},\ \text{PRESENTE}) \\ = P(\text{FUTURO}|\text{PRESENTE}).$$

- Ejemplos:
  - Temperatura en un día determinado: no es un proceso de Markov.
  - Número de conexiones registradas en un router de internet en un instante determinado: sí es un proceso de Markov ya que la gente se conecta aleatoriamente.
  - Precio de un stock en la bolsa en un día determinado: no es un proceso de Markov.
  - Ejemplo del lanzamiento de la moneda: sí es un proceso de Markov.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.
  - Modelos epidemiológicos: modelización de una epidemia.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.
  - Modelos epidemiológicos: modelización de una epidemia.
  - Internet: el pagerank usado por Google para dar un peso a las páginas web.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.
  - Modelos epidemiológicos: modelización de una epidemia.
  - Internet: el pagerank usado por Google para dar un peso a las páginas web.
  - Economía y finanzas: modelización del colapso de una bolsa de valores.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.
  - Modelos epidemiológicos: modelización de una epidemia.
  - Internet: el pagerank usado por Google para dar un peso a las páginas web.
  - Economía y finanzas: modelización del colapso de una bolsa de valores.
  - Genética: teoría genética de poblaciones.

Cadenas de Markov. Introducción

- Dentro de los procesos de Markov están las denominadas cadenas de Markov:

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso de Markov de estado discreto y de tiempo discreto.

- Las cadenas de Markov se aplican a:
  - Meteorología: modelización de modelos meteorológicos básicos.
  - Modelos epidemiológicos: modelización de una epidemia.
  - Internet: el pagerank usado por Google para dar un peso a las páginas web.
  - Economía y finanzas: modelización del colapso de una bolsa de valores.
  - Genética: teoría genética de poblaciones.
  - Redes neuronales: se utilizan en las máquinas de Boltzmann.

- Vamos a introducir algunas simplificaciones:

- Vamos a introducir algunas simplificaciones:
  - Definiremos $\mathcal{T} = \{0, 1, 2 \ldots\}$. Entonces la cadena de Markov sería una secuencia aleatoria de variables aleatorias $X(0), X(1), X(2), \ldots$.

- Vamos a introducir algunas simplificaciones:
  - Definiremos $\mathcal{T} = \{0, 1, 2 \ldots\}$. Entonces la cadena de Markov sería una secuencia aleatoria de variables aleatorias $X(0), X(1), X(2), \ldots$.
  - Llamaremos al conjunto Ω conjunto de estados. Como es discreto, lo enumeraremos de la forma siguiente $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Por ser una cadena de Markov, un proceso de Markov, tenemos la denominada propiedad de Markov que nos dice que la variable aleatoria en un instante $t+1$ sólo depende de los valores que toma la variable aleatoria $X(t)$ o el proceso en el instante t.

- Por ser una cadena de Markov, un proceso de Markov, tenemos la denominada propiedad de Markov que nos dice que la variable aleatoria en un instante $t+1$ sólo depende de los valores que toma la variable aleatoria $X(t)$ o el proceso en el instante t.
- Es decir, $p_{ij}(t) = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$ vale:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) =& P(X(t+1) = j | X(t) = i) \\ =& P(X(t+1) = j | X(t) = i, X(t-1) = h, X(t-2) = g, \ldots) \end{aligned}$$

Probabilidades de transición

Las probabilidades $p_{ij}(t)$ se llaman probabilidades de transición.
La probabilidad

$$p_{ij}^{(h)}(t) = P(X(t+h) = j | X(t) = i),$$

es la probabilidad de ir desde el estado i hasta el estado j usando h transiciones. Dicha probabilidad se llama probabilidad de transición de h pasos.

Cadenas de Markov homogéneas

Una cadena de Markov es homogénea cuando las probabilidades de transición no dependen del tiempo t.
Es decir:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h)}.$$

- Notación:

Cadenas de Markov homogéneas

Una cadena de Markov es homogénea cuando las probabilidades de transición no dependen del tiempo t.
Es decir:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h)}.$$

- Notación:
  - $p_{ij} = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$: probabilidad de transición.

Cadenas de Markov homogéneas

Una cadena de Markov es homogénea cuando las probabilidades de transición no dependen del tiempo t.
Es decir:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h)}.$$

- Notación:
  - $p_{ij} = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$: probabilidad de transición.
  - $p_{ij}^{(h)} = P(X(t+h) = j | X(t) = i)$: probabilidad de transición en h pasos.

Cadenas de Markov homogéneas

Una cadena de Markov es homogénea cuando las probabilidades de transición no dependen del tiempo t.
Es decir:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h)}.$$

- Notación:
  - $p_{ij} = P(X(t+1) = j|X(t) = i)$: probabilidad de transición.
  - $p_{ij}^{(h)} = P(X(t+h) = j|X(t) = i)$: probabilidad de transición en h pasos.
  - $P_t(x) = P(X(t) = x)$: distribución de la variable aleatoria $X(t)$.

Cadenas de Markov homogéneas

Una cadena de Markov es homogénea cuando las probabilidades de transición no dependen del tiempo t.
Es decir:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h)}.$$

- Notación:
  - $p_{ij} = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$: probabilidad de transición.
  - $p_{ij}^{(h)} = P(X(t+h) = j | X(t) = i)$: probabilidad de transición en h pasos.
  - $P_t(x) = P(X(t) = x)$: distribución de la variable aleatoria $X(t)$.
  - $P_0(t) = P(X(0) = x)$: distribución inicial o en el tiempo 0.

Ejemplo

Un ordenador es compartido por dos usuarios. Estudiamos cuantos usuarios hay conectados cada minuto. Nos dicen que un usuario puede desconectarse con probabilidad 0.3 y se puede conectar con probabilidad 0.4.

Modelizamos la situación anterior con una cadena de Markov $X(t)$ que nos da el número de usuarios conectados al cabo de t minutos.

Los valores de $X(t)$ pueden ser $0, 1$ y 2. Por tanto, el conjunto de estados será: $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

A continuación, calculemos las probabilidad de transición:

Ejemplo

Si $X(0) = 0$, o no hay ningún usuario conectado, el número de usuarios que habrá en el siguiente minuto es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 2$ y $p = 0.4$:

$$p_{00} = \binom{2}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^2 = 0.36,$$

$$p_{01} = \binom{2}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^1 = 0.48,$$

$$p_{02} = \binom{2}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^0 = 0.16.$$

Ejemplo

Si $X(0) = 1$, o hay un usuario conectado, el número de usuarios nuevos que habrá en el siguiente minuto es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 1$ y $p = 0.4$ y el número de desconexiones en el minuto siguiente será una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 1$ y $p = 0.3$:

$$
\begin{aligned}
p_{10} &= 0.6 \cdot 0.3 = 0.18,\\
p_{11} &= 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.54,\\
p_{12} &= 0.7 \cdot 0.4 = 0.28.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

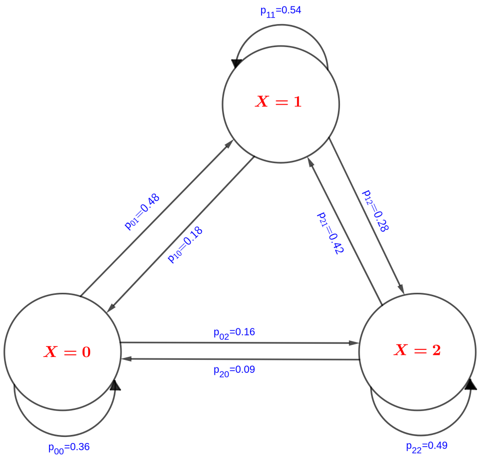
Si $X(0) = 2$, o hay los dos usuarios conectados, el número de usuarios desconectados que habrá en el siguiente minuto es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 2$ y $p = 0.3$.

$$p_{20} = \binom{2}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^2 = 0.09,$$

$$p_{21} = \binom{2}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^1 = 0.42,$$

$$p_{22} = \binom{2}{2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^0 = 0.49.$$

Diagrama de transición del ejemplo.



Ejemplo en R

Las probabilidades anteriores se almacenarían en R de la forma siguiente.
Vemos que la suma de las filas vale 1:

```
P=matrix(c(0.36,0.48,0.16,0.18,0.54,0.28,0.09,0.42,0.49),
         3,3,byrow=T)
P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 0.36 0.48 0.16
## [2,] 0.18 0.54 0.28
## [3,] 0.09 0.42 0.49
```

```
apply(P,1,sum)
```

```
## [1] 1 1 1
```

Ejemplo en python

```
import numpy as np
P=np.matrix([[0.36,0.48,0.16],[0.18,0.54,0.28],
[0.09,0.42,0.49]])
P
```

```
## matrix([[0.36, 0.48, 0.16],
##         [0.18, 0.54, 0.28],
##         [0.09, 0.42, 0.49]])
```

```
np.sum(P, axis = 1)
```

```
## matrix([[1.],
##         [1.],
##         [1.]])
```

- Las probabilidades de transición se pueden escribir en forma de matriz de la forma siguiente:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{P}$ se llama matriz de probabilidades de transición.

- Las probabilidades de transición se pueden escribir en forma de matriz de la forma siguiente:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

  donde $\mathbf{P}$ se llama matriz de probabilidades de transición.

- El valor p_{ij} es la probabilidad de transición desde el estado i al estado j.

- La matriz de probabilidades de transición es una matriz estocástica, es decir la suma de las filas vale 1:

$$p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in} = 1.$$

Cadenas de Markov. Matriz de transición

- La matriz de probabilidades de transición es una matriz estocástica, es decir la suma de las filas vale 1:

$$p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in} = 1.$$

- Recordemos que $p_{ij} = P(X(1) = j | X(0) = i)$. Por tanto el vector $(p_{i1}, \ldots, p_{in})$ representaría la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria discreta $X(1)|X(0) = i$.

Ejemplo anterior

La matriz de probabilidades de transición sería la siguiente:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.16 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \\ 0.09 & 0.42 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

- La matriz de probabilidades de transición de h pasos para la transición de h pasos sería la siguiente:

$$\mathbf{P}^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & p_{12}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ p_{21}^{(h)} & p_{22}^{(h)} & \cdots & p_{2n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(h)} & p_{n2}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix},$$

donde recordemos que $p_{ij}^{(h)} = P(X(h) = j | X(0) = i)$.

- La matriz de probabilidades de transición de h pasos es también una matriz estocástica:

$$p_{i1}^{(h)}+p_{i2}^{(h)}+\cdots+p_{in}^{(h)}=1.$$

- La matriz de probabilidades de transición de h pasos es también una matriz estocástica:

$$p_{i1}^{(h)} + p_{i2}^{(h)} + \cdots + p_{in}^{(h)} = 1.$$

- Por tanto el vector $(p_{i1}^{(h)}, \ldots, p_{in}^{(h)})$ representaría la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria discreta $X(h)|X(0) = i$.

- Empecemos con el cálculo de $\mathbf{P}^{(2)}$, es decir $p_{ij}^{(2)}$, las probabilidades de transición de 2 pasos:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} =& P(X(2) = j|X(0) = i) \\
=& \sum_{k=1}^{n} P(X(1) = k|X(0) = i) \cdot P(X(2) = j|X(1) = k) \\
=& \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj} = (p_{i1}, \ldots, p_{in}) \cdot \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- La probabilidad $p_{ij}^{(2)}$ se calcula como la suma de probabilidades de ir del estado i a j pasando por el estado k, para k desde 1 hasta n:

$$i \longrightarrow k \longrightarrow j.$$

- La probabilidad $p_{ij}^{(2)}$ se calcula como la suma de probabilidades de ir del estado i a j pasando por el estado k, para k desde 1 hasta n:
$$i \longrightarrow k \longrightarrow j.$$
- En resumen $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2$.

- En general, las probabilidades de transición de h pasos se pueden calcular en función de las probabilidades de transición de $h-1$ pasos razonando de forma similar:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(h)} =& P(X(h)=j|X(0)=i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X(h-1)=k|X(0)=i)\cdot P(X(h)=j|X(h-1)=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(h-1)}\cdot p_{kj} = (p_{i1}^{(h-1)},\dots,p_{in}^{(h-1)})\cdot \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Cadenas de Markov. Cálculo de $\mathbf{P}^{(h)}$

- En general, las probabilidades de transición de h pasos se pueden calcular en función de las probabilidades de transición de $h-1$ pasos razonando de forma similar:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(h)} &= P(X(h)=j|X(0)=i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X(h-1)=k|X(0)=i)\cdot P(X(h)=j|X(h-1)=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(h-1)}\cdot p_{kj} = (p_{i1}^{(h-1)},\ldots,p_{in}^{(h-1)})\cdot \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

- En conclusión,

$$\mathbf{P}^{(h)} = \mathbf{P}^{(h-1)}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}^{h-1}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}^{h}.$$

Ejemplo

Calculemos las probabilidades de transición de 2 y 3 pasos:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.16 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \\ 0.09 & 0.42 & 0.49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.16 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \\ 0.09 & 0.42 & 0.49 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2304 & 0.4992 & 0.2704 \\ 0.1872 & 0.4956 & 0.3172 \\ 0.1521 & 0.4758 & 0.3721 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)}\cdot\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2304 & 0.4992 & 0.2704 \\ 0.1872 & 0.4956 & 0.3172 \\ 0.1521 & 0.4758 & 0.3721 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.16 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \\ 0.09 & 0.42 & 0.49 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.197136 & 0.493728 & 0.309136 \\ 0.185148 & 0.490704 & 0.324148 \\ 0.173889 & 0.486222 & 0.339889 \end{pmatrix}$$

```r
P2=P%*%P
P2
```

```
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.2304 0.4992 0.2704
## [2,] 0.1872 0.4956 0.3172
## [3,] 0.1521 0.4758 0.3721
```

```r
P3=P2%*%P
P3
```

```
##          [,1]     [,2]     [,3]
## [1,] 0.197136 0.493728 0.309136
## [2,] 0.185148 0.490704 0.324148
## [3,] 0.173889 0.486222 0.339889
```

```
P2 = np.dot(P,P)
P2
```

```
## matrix([[0.2304, 0.4992, 0.2704],
##         [0.1872, 0.4956, 0.3172],
##         [0.1521, 0.4758, 0.3721]])
```

```
P3 = np.dot(P2,P)
P3
```

```
## matrix([[0.197136, 0.493728, 0.309136],
##         [0.185148, 0.490704, 0.324148],
##         [0.173889, 0.486222, 0.339889]])
```

Distribución de $X(h)$

- Dar la distribución de la variable aleatoria $X(h)$, es decir, la distribución de la transición al cabo de h pasos sería equivalente a dar la función de probabilidad que sería una tabla del tipo:

$X(h)$	1	2	$\cdots$	n
	$P_h(1)$	$P_h(2)$	$\cdots$	$P_h(n)$

Distribución de $X(h)$

- Dar la distribución de la variable aleatoria $X(h)$, es decir, la distribución de la transición al cabo de h pasos sería equivalente a dar la función de probabilidad que sería una tabla del tipo:

$X(h)$	1	2	$\cdots$	n
	$P_h(1)$	$P_h(2)$	$\cdots$	$P_h(n)$

-

$$P_h(j) = P(X(h)=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X(0)=k)\cdot P(X(j)=j|X(0)=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_0(k)\cdot p_{kj}^{(h)} = (P_0(1),\ldots,P_0(n))\cdot \begin{pmatrix} p_{1j}^{(h)} \\ \vdots \\ p_{nj}^{(h)} \end{pmatrix}$$

Distribución de $X(h)$

- La expresión nos da la función de probabilidad de $X(h)$ en función de la función de probabilidad de $X(0)$ y de las probabilidades de transición $\mathbf{P}^{(h)}$.

- La expresión nos da la función de probabilidad de $X(h)$ en función de la función de probabilidad de $X(0)$ y de las probabilidades de transición $\mathbf{P}^{(h)}$.
- Matricialmente $\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}^h$.

Distribución de $X(h)$

Ejemplo anterior

Vamos a calcular la distribución de los usuarios conectados al cabo de 2 y 3 minutos en dos casos:

- Suponiendo que inicialmente hay un usuario conectado.
- Suponiendo que el número de usuarios conectados inicialmente es equiprobable.

Distribución de $X(h)$

Ejemplo anterior

En el primer caso, la función de probabilidad de $X(0)$ será $X(0) = (0, 1, 0)$.
La función de probabilidad de los usuarios conectados al cabo de 2 y 3 minutos será:

$$\mathbf{P}_2 = (0,1,0)\cdot \mathbf{P}^{(2)} = (0,1,0)\cdot \begin{pmatrix} 0.2304 & 0.4992 & 0.2704 \\ 0.1872 & 0.4956 & 0.3172 \\ 0.1521 & 0.4758 & 0.3721 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1872 \\ 0.4956 \\ 0.3172 \end{pmatrix},$$

Distribución de $X(h)$

Ejemplo anterior

$$\mathbf{P}_3 = (0,1,0)\cdot \mathbf{P}^{(3)} = (0,1,0)\cdot \begin{pmatrix} 0.197136 & 0.493728 & 0.309136 \\ 0.185148 & 0.490704 & 0.324148 \\ 0.173889 & 0.486222 & 0.339889 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.185148 \\ 0.490704 \\ 0.324148 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo anterior

En el segundo caso, la función de probabilidad de $X(0)$ será $X(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
La función de probabilidad de los usuarios conectados al cabo de 2 y 3 minutos será:

$$\mathbf{P}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \mathbf{P}^{(2)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0.2304 & 0.4992 & 0.2704 \\ 0.1872 & 0.4956 & 0.3172 \\ 0.1521 & 0.4758 & 0.3721 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1899 \\ 0.4902 \\ 0.3199 \end{pmatrix},$$

Distribución de $X(h)$

Ejemplo anterior

$$\mathbf{P}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \mathbf{P}^{(3)}$$
$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0.197136 & 0.493728 & 0.309136 \\ 0.185148 & 0.490704 & 0.324148 \\ 0.173889 & 0.486222 & 0.339889 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.185391 \\ 0.490218 \\ 0.324391 \end{pmatrix}.$$

```r
X01=c(0,1,0)
(dist.X21 = t(X01)%*%P2)
```

```
##         [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.1872 0.4956 0.3172
```

```r
(dist.X31 = t(X01)%*%P3)
```

```
##          [,1]     [,2]     [,3]
## [1,] 0.185148 0.490704 0.324148
```

Cadenas de Markov. Ejemplo en python

```
X01= np.matrix([0,1,0])
dist_X21 = X01*P2
dist_X21
```

```
## matrix([[0.1872, 0.4956, 0.3172]])
```

```
dist_X31 = X01*P3
dist_X31
```

```
## matrix([[0.185148, 0.490704, 0.324148]])
```

```r
X02=c(1/3,1/3,1/3)
(dist.X22 = t(X02)%*%P2)
```

```
##          [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.1899 0.4902 0.3199
```

```r
(dist.X32 = t(X02)%*%P3)
```

```
##           [,1]     [,2]     [,3]
## [1,] 0.185391 0.490218 0.324391
```

Cadenas de Markov. Ejemplo en python

```
X02= np.matrix([1/3,1/3,1/3])
dist_X22 = X02*P2
dist_X22
```

```
## matrix([[0.1899, 0.4902, 0.3199]])
```

```
dist_X32 = X02*P3
dist_X32
```

```
## matrix([[0.185391, 0.490218, 0.324391]])
```

Distribución en el equilibrio

- La distribución de la cadena de Markov en el equilibrio nos dice cuál es la distribución de $X(h)$, $\mathbf{P}_h$, al cabo de un número muy grande de transiciones h.

Distribución en el equilibrio

- La distribución de la cadena de Markov en el equilibrio nos dice cuál es la distribución de $X(h)$, $\mathbf{P}_h$, al cabo de un número muy grande de transiciones h.
- Es decir, definimos la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio $\pi(x)$ de la forma siguiente:

$$\pi(x) = \lim_{h\to\infty} \mathbf{P}_h(x),\ x = 1, \ldots, n.$$

Distribución en el equilibrio

- La distribución de la cadena de Markov en el equilibrio nos dice cuál es la distribución de $X(h)$, $\mathbf{P}_h$, al cabo de un número muy grande de transiciones h.
- Es decir, definimos la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio $\pi(x)$ de la forma siguiente:

$$\pi(x) = \lim_{h\to\infty} \mathbf{P}_h(x),\ x = 1, \ldots, n.$$

- La distribución de la cadena de Markov en el equilibrio puede interpretarse como el porcentaje de "tiempo" que una persona pasa en cada estado x suponiendo que realiza un camino aleatorio por la cadena según la matriz de transición de probabilidades.

Distribución en el equilibrio

- Vamos a dar una forma de calcular $\pi(x)$ la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio.

Distribución en el equilibrio

- Vamos a dar una forma de calcular $\pi(x)$ la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio.
- Podemos escribir que la función de probabilidad de $X(h+1)$, $\mathbf{P}_{h+1}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{P}.$$

Distribución en el equilibrio

- Vamos a dar una forma de calcular $\pi(x)$ la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio.
- Podemos escribir que la función de probabilidad de $X(h+1)$, $\mathbf{P}_{h+1}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{P}.$$

- Si hacemos $h \to \infty$ en la expresión anterior, obtenemos:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P}.$$

Distribución en el equilibrio

- Vamos a dar una forma de calcular $\pi(x)$ la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio.
- Podemos escribir que la función de probabilidad de $X(h+1)$, $\mathbf{P}_{h+1}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{P}.$$

- Si hacemos $h \to \infty$ en la expresión anterior, obtenemos:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P}.$$

- Entonces se dice que la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio $\pi(x)$ es un vector propio de valor propio 1 por la izquierda de la matriz de transición de probabilidades $\mathbf{P}$.

- En resumen, para calcular la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio $\pi(x)$, hay que resolver:

$$\begin{aligned}\pi \mathbf{P} &= \pi,\\ \sum_{k=1}^{n} \pi &= 1.\end{aligned}$$

- En resumen, para calcular la distribución de la cadena de Markov en el equilibrio $\pi(x)$, hay que resolver:

$$\begin{aligned} \pi \mathbf{P} &= \pi, \\ \sum_{k=1}^{n} \pi &= 1. \end{aligned}$$

- Hallar un vector propio por la izquierda de la matriz $\mathbf{P}$ es equivalente a hallar un vector propio por la derecha de la matriz $\mathbf{P}^\top$ ya que si:

$$\pi \mathbf{P} = \pi, \Rightarrow \mathbf{P}^\top \cdot \pi^\top = \pi^\top.$$

Distribución en el equilibrio

Ejemplo

El vector propio de valor propio 1 de la matriz $\mathbf{P}^\top$ cuyas componentes suman 1 y son positivas vale:

$$(0.1836735, 0.4897959, 0.3265306).$$

El vector anterior sería la distribución de probabilidad en el equilibrio de la cadena de Markov considerada.

Ejemplo

Para hallar la distribución de probabilidad en el equilibrio en R haríamos lo siguiente:

```
(vectores.propios = eigen(t(P))$vectors)
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -0.2978565 -0.5883484  0.4082483
## [2,] -0.7942841 -0.1961161 -0.8164966
## [3,] -0.5295227  0.7844645  0.4082483
```

Distribución en el equilibrio en R

```r
(vector.propio.vap.1=vectores.propios[,1])
```

```
## [1] -0.2978565 -0.7942841 -0.5295227
```

```r
(equilibrio =
    vector.propio.vap.1/sum(vector.propio.vap.1))
```

```
## [1] 0.1836735 0.4897959 0.3265306
```

Distribución en el equilibrio en python

```
from numpy import linalg as LA
vap, vep = LA.eig(P.T)
vep
```

```
## matrix([[-0.29785653, -0.58834841,  0.40824829],
##         [-0.79428407, -0.19611614, -0.81649658],
##         [-0.52952271,  0.78446454,  0.40824829]])
```

```
equilibrio = vep[:,0]/vep[:,0].sum()
equilibrio
```

```
## matrix([[0.18367347],
##         [0.48979592],
##         [0.32653061]])
```