

SOLUCIONES: Ejercicios Tema 3 - Variables aleatorias continuas

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

1. El tiempo X que utiliza un comercial para exponer un producto cuando LO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros $\mu = 3$ minutos 45 segundos y $\sigma = 10$ segundos.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga la venta en menos de 4 minutos?
 - b. ¿Y en más de 3.5 minutos?

Solución

Tenemos que X es $N(\mu = 3, \sigma = 10)$ tenemos que $P(X < 4) = 1$

En segundo lugar nos piden $P(> 3.5) = 1 - P(\leq 3.5) = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(pnorm(4,mean=3,sd=10),4)# apartado a.  $P(X < 4)$ 
```

```
## [1] 0.5398
```

```
round(1-pnorm(3.5,mean=3,sd=10),4)# apartado b.  $P(X > 3.5)$ 
```

```
## [1] 0.4801
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

1. El tiempo X que utiliza un comercial para exponer un producto cuando LO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros $\mu = 3$ minutos 45 segundos y $\sigma = 10$ segundos.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga la venta en menos de 4 minutos?
 - b. ¿Y en más de 3.5 minutos?

Solución

Tenemos que X es $N(\mu = 3, \sigma = 10)$ tenemos que $P(X < 4) = 1$

En segundo lugar nos piden $P(> 3.5) = 1 - P(\leq 3.5) = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(pnorm(4,mean=3,sd=10),4)# apartado a. P(X<4)
```

```
## [1] 0.5398
```

```
round(1-pnorm(3.5,mean=3,sd=10),4)# apartado b. P(X>3.5)
```

```
## [1] 0.4801
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Problema 1	mu	sigma		
4	X normal	3	10		
5	P(X<4)=	0.5398			
6	Función	NORMDIST(4,3,10,TRUE)			
7	P(X>3)=1-P(X<=3)	0.4801			
8	Función	1-NORMDIST(3.5,3,10,TRUE)			
9					

2. El tiempo X que utiliza un comercial para exponer un producto cuando NO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros $\mu = 2$ y $\sigma = 0.8$.
- ¿Cuál es el cuantil 0.95 de esta variable? Interpretarlo en el sentido de tiempo perdido por el comercial.
 - ¿Cuál es el tiempo perdido en el 40% de las llamadas más cortas?

Solución

Tenemos que X es $N(\mu = 2, \sigma = 0.8)$ tenemos que buscar el cuantil 0.95 es decir el valor $x_{0.95}$ tal que $P(X < x_{0.95}) = 0.95$ que es $x_{0.95} = 2$

En segundo lugar nos piden el cuantil $x_{0.4}$ es decir el valor $x_{0.4}$ tal que $P(X < x_{0.4}) = 0.4$ que es $x_{0.4} = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(qnorm(0.95,mean=2,sd=0.8),4)# apartado a, cuantil 0.95
```

```
## [1] 3.3159
```

```
round(qnorm(0.4, mean=2,sd=0.8),4)# apartado b. cuantil 0.4
```

```
## [1] 1.7973
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

10	Problema 2	mu	sigma		
11	X normal	1	0.8		
12	cuantil 0.95	3.3159			
13	Función	NORMINV(0.95,2,0.8)			
14	cuantil 0.4	1.7973			
15	Función	NORMINV(0.4,2,0.8)			
16					

3. Un centro de atención telefónica por voz (*call center*) recibe por término medio 102 llamadas por hora. Suponemos que el tiempo entre llamadas consecutivas es exponencial.
- Sea X el tiempo entre dos llamadas consecutivas ¿cuál es la distribución de X ?
 - Calcular la probabilidad que pasen al menos 2.5 minutos hasta recibir la primera llamada.
 - Calcular la probabilidad que pasen menos de 3 minutos hasta recibir la siguiente llamada.
 - Calcular la esperanza y la varianza de X .

Solución

- En 60 minutos recibe 100 llamadas así que en un minuto recibe $\lambda = \frac{102}{60} = 1.7$. Luego X = tiempo entre dos llamadas consecutivas en minutos sigue una ley $Exp(\lambda = 1.7)$
- $P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) = 0.0143$.
- $P(X < 3) = P(X \leq 3) = 0.9939$.
- $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.7} = 0.5882$ y $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1.7^2} = 0.346$.

Cálculos con R

```
round(1-pexp(2.5,rate=1.7),4)# apartado b.
```

```
## [1] 0.0143
```

```
round(pexp(3,rate=1.7),4)# apartado c.
```

```
## [1] 0.9939
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

17				
18	Problema 3	lambda		
19	X exponencial	1.7		
20	$P(X>2.5)=1-P(X\leq 2.5)$	0.0143		
21	Función	1-EXPON.DIST(2.5,B19,TRUE)		
22	$P(X\leq 3)=$	0.9939		
23	Función	EXPON.DIST(3,B19,TRUE)		
24				

4. Sea X una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 1$. Calculad el valor de b tal que $P((X - 1)^2 \leq b) = 0.1$.

Solución

La v.a. X es $N(\mu = 1, \sigma = 1)$ nos piden b tal que $P((X - 1)^2 \leq b) = 0.1$,. Notemos que $b \geq 0$, además sabemos que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 1}{1} = X - 1$ sigue una distribución $N(0, 1)$.

Tenemos que $P((X - 1)^2 \leq b) = P(-\sqrt{b} \leq (X - 1) \leq \sqrt{b}) = P(-\sqrt{b} \leq Z \leq \sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - F_Z(-\sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - (1 - F_Z(\sqrt{b})) = 2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1$.

Entonces buscamos b tal que $2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1 = 0.1$ y de aquí tenemos que

$F_Z(\sqrt{b}) = \frac{1+0.1}{2} = 0.55$ luego $\sqrt{b} = z_{0.55}$ y $b = \sqrt{z_{0.55}}^2$ donde $z_{0.55}$ es el cuantil 0.55 de una normal estándar $P(Z \leq z_{0.55}) = 0.55$. En definitiva $b = \sqrt{z_{0.55}}^2 = \sqrt{0.1257} = 0.3545$.

Para el cálculo del cuantil $z_{0.55}$ con R es

```
z0.55=round(qnorm(0.55,0,1),4)
z0.55
```

```
## [1] 0.1257
```

```
round(sqrt(z0.55),4)
```

```
## [1] 0.3545
```

5. Sea Z una variable aleatoria $N(0, 1)$. Calcular $P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right)$.

Solución

$$\begin{aligned} P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right) &= 1 - P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{16}\right) \\ &= 1 - P\left(-\sqrt{\frac{1}{16}} \leq Z - \frac{1}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{16}}\right) \\ &= 1 - P\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - P(0 \leq Z \leq 0.5) = 1 - (P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq 0)) \\ &= 1 - (0.6915 - 0.5) = 0.8085. \end{aligned}$$

6. Un contratista de viviendas unifamiliares de lujo considera que el coste en euros de una contrata habitual es una variables X que sigue una distribución $N(\mu = 600000, \sigma = 60000)$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el coste del edificio esté entre 560000 y 660000 euros?
 - 0.2 es la probabilidad de que el coste de la vivienda supere ¿qué cantidad?
 - ¿Cuál es el coste mínimo del 5% de las casa más caras?

Solución

- a. $P(560000 \leq X \leq 660000) = P(X \leq 660000) - P(X \leq 560000) = 0.8413 - \text{round}(\text{pnorm}(560000, \text{mean} = 600000, \text{sd} = 60000), 4)$.

Con R

```
round(pnorm(660000,mean=600000,sd=60000)-pnorm(560000,mean=600000,sd=60000),4)
```

```
## [1] 0.5889
```

En el 58% de los casos (aproximadamente) el coste se titulará entre esas dos cantidades

- b. Nos piden el valor x_0 tal que $P(X > x_0) = 0.2$, es decir el valor que supera el 20% de las viviendas más caras. Este valor será el que deje por debajo el coste del 80% de las casas por lo que es el cuantil 0.8 lo calculamos con R (ejercicio utiliza google sheets para obtener el mismo resultado)

```
qnorm(0.8,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 650497.3
```

El 20% de las casas más caras cuestan por encima de 650500 euros aproximadamente.

- c. Ahora somos más ambiciosos y queremos gastar para estar entre el 5% de casas más caras. De manera similar al caso anterior queremos calcular el cuantil $x_{0.95}$, lo haremos con R

```
qnorm(0.95,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 698691.2
```

El 5% de viviendas más costosas supera los 699000 euros aproximadamente

Con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

25	Problema 7	mu	sigma			
26	X normal	600000	60000			
27	$P(560000 < X < 660000) =$	0.5889				
28	Función	NORMDIST(660000,B26,C26,TRUE)-NORMDIST(560000,B26,C26,TRUE)				
29	cuantil 0.8	650497.3				
30	Función	NORMINV(0.8,B26,C26)				
31	cuantil 0.95	698691.2				
32	Función	NORMINV(0.95,B26,C26)				
33						

7. Si X está distribuida uniformemente en $(0, 2)$ e Y es una variable exponencial con parámetro λ . Calcular el valor de λ tal que $P(X < 1) = P(Y < 1)$.

Solución

X sigue una ley $U(0, 2)$ luego $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ si $0 < x < 2$ y la variable Y es una $Exp(\lambda)$ luego $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-\lambda \cdot y}$ si $y > 0$.

Luego $P(X < 1) = \frac{1}{2}$ y $P(Y \leq 1) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1}$. Por lo tanto nos piden el valor de λ tal que $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda}$. Así que $e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$ luego $-\lambda = \ln(0.5) = -0.6931472$. por lo tanto $\lambda = 0.6931472$.