KANDIDAT

11655

PRØVE

TMA4100 1 Matematikk 1

Emnekode	TMA4100
Vurderingsform	Hjemmeeksamen
Starttid	08.12.2020 08:00
Sluttid	08.12.2020 12:00
Sensurfrist	08.01.2021 22:59
PDF opprettet	27.01.2021 15:59

Oppgave	Oppgavetype
i	Dokument
1	Flervalg (flere svar)
2	Flervalg (flere svar)
3	Paring
4	Filopplasting
5	Filopplasting
6	Filopplasting
7	Filopplasting
8	Filopplasting
9	Filopplasting
10	Filopplasting
11	Filopplasting

1 Hvilke(t) av følgende utsagn er **feil**?

Velg ett eller flere alternativer

- Rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
er absolutt konvergent.

- En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som består av reelle tall a_n, der $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \geq 1$ og hvor $a_n \leq 17$ for alle $n \geq 1$, vil konvergere.

- Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon som er definert på det lukkede intetvallet $[a, b]$, der $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$. Da angir integralet
$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$
volumet av omdreiningslegemet som oppstår når vi dreier området i xy-planet avgrenset av grafen til $y = f(x)$, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ om x-aksen.

- En kontinuerlig funksjon $f(x)$ som er definert på et lukket intervall $[a, b]$, og som har egenskapen at
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$, må nødvendigvis være strengt voksende eller strengt avtagende.

2 Hvilke(t) av følgende utsagn er **riktig**?

Velg ett eller flere alternativer

- Gitt at
$$F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + t^3}\, dt,$$
så er
$$F'(x) = \sqrt{1 + x^6}.$$

- Gitt at $f(x) = \cos x$, der x er målt i grader, så er $f'(x) = -\sin x$.

- Det uegentlige integralet
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x + x^4}}\, dx$$
er et uegentlig integral av type 1 og 2.

- $$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad -1 < x < 1$$

3 I denne oppgaven skal du koble riktig initialverdiproblem (kolonner) med riktig løsning (rader).

Finn de som passer sammen:

	$y' + x^2y = -x^2, \quad y(0) = 0$	$y' - x^2y = x^2, \quad y(0) = 0$	$y' + x^2y = x^2, \quad y(0) = 0$	$y' - x^2y = -x^2, \quad y(0) = 0$
$y(x) = e^{-x^3/3} - 1$	◉	○	○	○
$y(x) = 1 - e^{-x^3/3}$	○	○	◉	○
$y(x) = 1 - e^{x^3/3}$	○	○	○	◉
$y(x) = e^{x^3/3} - 1$	○	◉	○	○

4 Vis at stigningstallet til tangentlinjen til kurven $y = y(x)$, gitt ved

$$x^5y^2 + 2xy^2 + x = y + 1,$$

er lik 1 i punktet $(x, y) = (1, 0)$.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned | Fjern | Erstatt

Filnavn:	Oppgave4.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	1.28 MB
Opplastingstidspunkt:	08.12.2020 08:29
Status:	**Lagret**

5 La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon definert på $\mathbb{R}$. Er funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt & x \neq 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

kontinuerlig? Svaret må begrunnes.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	oppgave5.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	858.47 KB
Opplastingstidspunkt:	08.12.2020 10:29
Status:	**Lagret**

6 Vis at funksjonen

$$f(x) = 2 - xe^{x^8}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

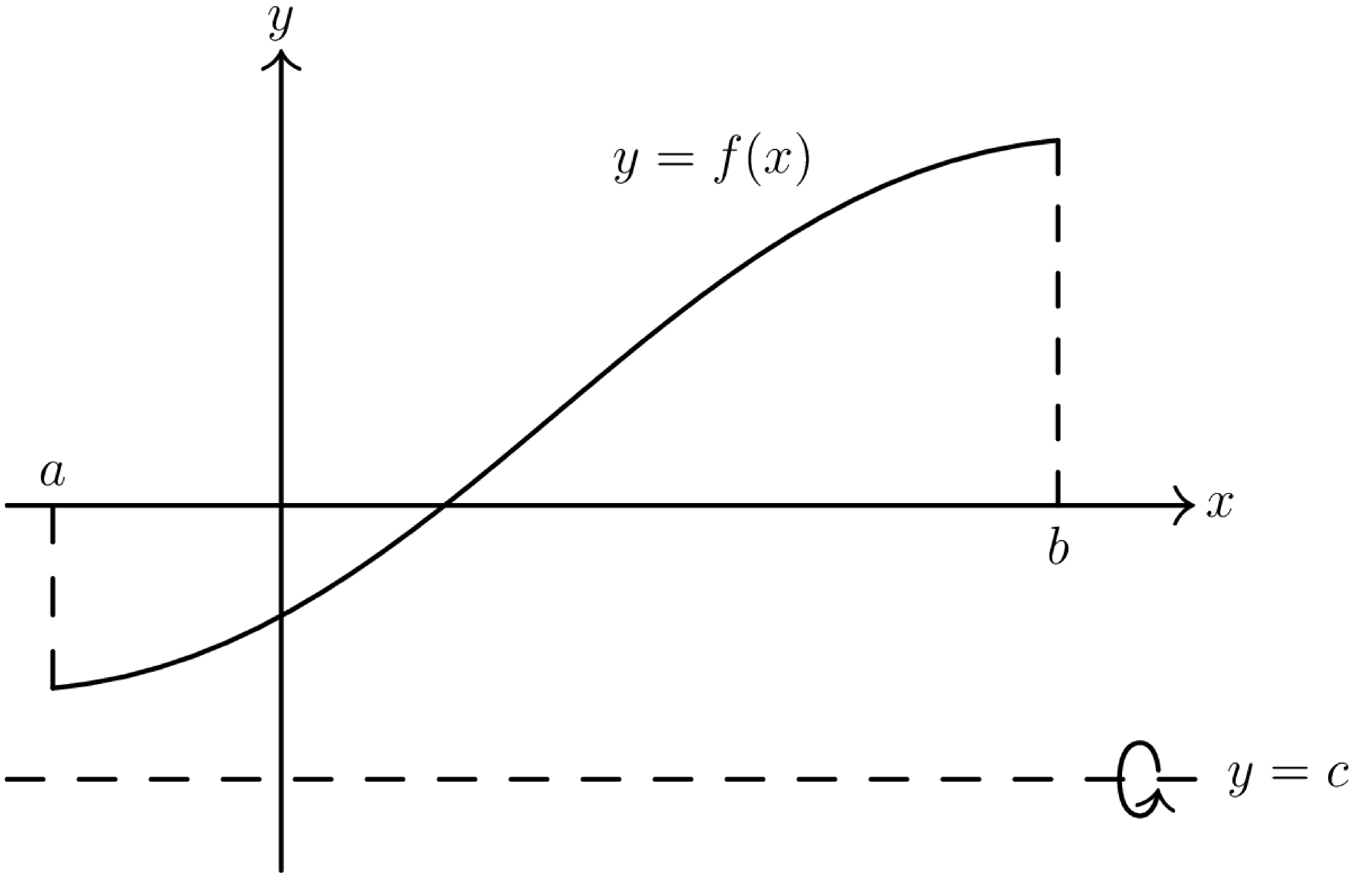
har en invers, og regn ut $(f^{-1})'(2)$.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	oppgave6.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	822.39 KB
Opplastingstidspunkt:	08.12.2020 11:57
Status:	**Lagret**

7 Angi integralet som svarer til arealet av omdreiningsflaten som oppstår når vi dreier grafen til $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ om linjen $y = c$ som vist i figuren under. Svaret må begrunnes.



Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave7.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	889.6 KB
Opplastingstidspunkt:	08.12.2020 09:23
Status:	**Lagret**

8 Finn taylorrekken til

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$$

om $x = 0$, der

$$f(x) = 4x + 8x^3 + 12x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1)x^{2n+1}, \qquad -1 < x < 1.$$

Last opp filen her. Maks én fil (formatert som fortrinnsvis PDF).

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

9 Merete har fått i oppgave på eksamen å avgjøre om grenseverdien

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

eksisterer eller ei, der hun har fått oppgitt at

$$f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{og} \qquad g(x) = x.$$

Merete noterer følgende i sin besvarelse.

«Siden $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ gir L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Og da vi vet at

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ikke eksisterer, kan vi slutte fra L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

heller ikke eksisterer.»

Kan du se hva Merete har gjort feil? Husk å begrunne hva du mener er feil i besvarelsen til Merete og skriv ned det du mener er en riktig redegjørelse for hvorvidt den aktuelle grensen eksisterer eller ei.

Last opp filen her. Maks én fil (formatert som fortrinnsvis PDF).

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

10 Eva skal kjøre fra Trondheim til Ålesund. Når Eva starter å kjøre har hun 30 l (l = liter) med bensin på tanken. Vi kan anta at hun kjører med jevn fart med et konstant bensinforbruk på 0.8 l/mil.

Det viser seg at det er et ørlite hull i bensintanken. Utstrømningsraten er proporsjonal med bensinvolumet i tanken. La k betegne proporsjonalitetskonstanten.

Hun stanser etter å ha kjørt 10 mil. Bensinmåleren i bilen forteller Eva at hun har nå 20 liter igjen.

La $V(x)$ være bensinvolumet i tanken (målt i liter). Skriv opp en differensialligning for $V(x)$ og vis at k må tilfredsstille ligningen

$$\ln\left(\frac{0.8+20k}{0.8+30k}\right) = -10k.$$

Eva regner seg så grovt frem til at den eneste løsningen for k som er interessant er tilnærmet lik 0.008. (Du trenger ikke vise dette.)

Fra Trondheim til Ålesund er det omtrent 30 mil. Vil Eva komme frem til Ålesund uten å måtte fylle på bensin underveis?

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	oppgave10.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	948.56 KB
Opplastingstidspunkt:	08.12.2020 11:58
Status:	**Lagret**

11 Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er definert ved å la

$$a_1 = 5$$

og

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

for alle $n \geq 1$.

Vis at følgen konvergerer og finn grensen.

(Vink: Vis at følgen er avtagende dersom $a_n \geq 2$ for alle n.)

Last opp filen her. Maks én fil (formatert som fortrinnsvis PDF).

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Oppgave 4:

$$x^5y^2 + 2xy^2 + x - y - 1 = g(x,y)$$

$$g'(x,y) = y^2 \cdot 5x^4 + 2y\frac{dy}{dx}\cdot x^5 + 2\left(y^2 + 2y\frac{dy}{dx}\cdot x\right) + 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$y^2 5x^4 + 2y\frac{dy}{dx}x^5 + 2y^2 + 4y\frac{dy}{dx}x + 1 - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2yx^5 + 4yx - 1\right) = -1 - 2y^2 - y^2 5x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2y^2 - y^2 5x^4}{2yx^5 + 4yx - 1} = \frac{-1 - y^2(2 + 5x^4)}{2yx(x^4 + 2) - 1}$$

$$g'(1,0) = \frac{-1 - 0^2(2 + 5\cdot 1^4)}{-1 + 2\cdot 1\cdot 0(1^4 + 2)} = \underline{\underline{1}}$$

Brukte implisitt derivasjon på tangentlinjen for å få et utrykk for stigningstallet

Oppgave 5:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} f(t)\,dt & x \neq 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$ er kontinuerlig dersom

$\lim_{a \to 0} g(a) = g(0) = f(0)$

$n(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

Bruker analysens fundamentalteorem

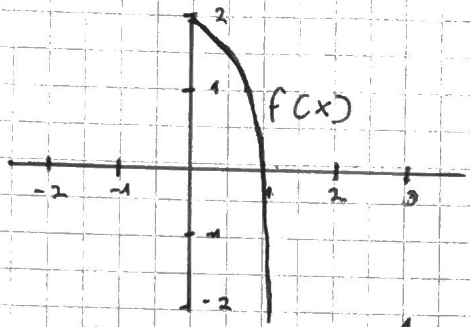
$n(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x f'(x^2) = \frac{2}{x} f'(x^2)$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} f'(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$g'(0) = 0$, men ved $\lim_{x \to 0^+}$ og $\lim_{x \to 0^-}$ vil man få singulariteter og man kan si at funksjon er diskontinuerlig

Oppgave 6:

$$f(x) = 2 - x e^{x^8}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Plottet fuksjonen i geogebra, $f(x)$ er sterkt avtagende, altså injektiv. Da har den også en inovers

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$f' = -\left(e^{x^8} + x e^{x^8} 8x^7\right) = -e^{x^8} - 8x^8 e^{x^8} = \underline{-e^{x^8}(1 + 8x^8)}$$

$$f^{-1} = \left(\frac{2-e}{x}\right)^{\frac{1}{x^8}}$$

Oppgave 7:

Siden vi skal rotere rundt y-aksen velger jeg sylinderskall metoden gitt ved

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x))\,dx$$

* a og b her er a og b på figuren.
* høyden til omdreiningslegemet er gitt ved f(x)
* siden vi skal dreie om $y=c$ vil x-leddet i integralet bli $(x-c)$

da vil volumet bli:

$$V = 2\pi \int_a^b (x-c)(f(x))\,dx$$

Oppgave 10:

$V(10) = 20l$

$V(0) = 30$ liter

$V'(x) = -(0,8x + V(x)k)$

$V' + V \cdot k = -0,8x$ ← linear

Brukte geogebra for å løse diffligningen og fikk da

$V(x) = -\frac{4(kx-1)}{5k^2} + \frac{c}{e^{kx}}$

Men siden $V(0) = 30$, og $V(10) = 20$ vil

$V(0) = -\frac{4(0k-1)}{5k^2} + \frac{c}{e^{0k}} = 30$

$\rightarrow \frac{4}{5k^2} + c = 30 \rightarrow c = 30 - \frac{4}{5k^2}$

$V(10) = -\frac{4(10k-1)}{5k^2} + \frac{c}{e^{10k}} = 20$

$\rightarrow c = 20e^{10k} + \frac{4e^{10k}(10k-1)}{5k^2}$

$30 - \frac{4}{5k^2} = 20e^{10k} + \frac{4e^{10k}(10k-1)}{5k^2}$

$30 \cdot 5k^2 - 4 = 20e^{10k} \cdot 5k^2 + 4e^{10k}(10k-1$

$150k^2 - 4 = 100k^2e^{10k} + 40ke^{10k} - 4e^{10k}$

$150k^2 - 100k^2e^{10k} - 40ke^{10k} + 4e^{10k} = 4$

$150k^2 + -4e^{10k}(25k^2 + 10k + 1) = 4$