TMA4110 - Øving 5 - Martin Skatvedt

tirsdag 1. november 2022 16:17

$\boxed{1}$

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)(-3-\lambda) - (-1)\cdot 0$$

$$= -6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 = \underline{\lambda^2 + \lambda - 6}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot -6}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2 \text{ og } \lambda = -3}}$$

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{Egenvektor til } \lambda = 2 \text{ er } \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Egenvektor til } \lambda = -3 \text{ er } \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\boxed{1}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda) \circ \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} - 1 \circ \det\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} -$$

$$0 \circ \det\begin{bmatrix} 0 & 4-\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \circ \left[(4-x)(\lambda) - -3 \circ 1\right] - 1 \circ \left[(0 \circ -\lambda) - (-3 \circ 0)\right]$$

$$- 0 \circ \left[(0 \circ 1) - ((4-\lambda) \circ 0)\right]$$

$$= \quad -\lambda) \circ \left[4\lambda - \lambda^2 + 3\right] = \underline{-(\lambda-3)^2(\lambda-1)}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1 \quad og \quad \lambda = 3}}$$

$$A - 1I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektor ved $\lambda = 1$ $\quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Egenvetor ved $\lambda = 3$ $\quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Egenvektor

tirsdag 1. november 2022 17:22

$\boxed{1}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & i \end{bmatrix}$ $\quad A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} -1-\lambda & i & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ i & i & i-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I_3) = (-1-\lambda)\circ\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ i & i-\lambda \end{bmatrix} - i\circ\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & i-\lambda \end{bmatrix}$$
$$-(-1)\circ\det\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda \\ i & i \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ i & i-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(i-\lambda) - 0\circ i = i-\lambda-i\lambda+\lambda^2$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & i-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda \\ i & i \end{bmatrix} = (0\circ i) - (1-\lambda)(i) = -(i-i\lambda)$$
$$= i\lambda - i$$

$$\det(A-\lambda I_3) = (-1-\lambda)(i-\lambda-i\lambda+\lambda^2)$$
$$+ i\lambda - i = \underline{-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1-i)}$$

$\lambda = -1+i$ og $\lambda = 1$ og $\lambda = 0$

$A-(-1+i)I_3 = \begin{bmatrix} -i & i & -1 \\ 0 & 2-i & 0 \\ i & i & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A-1I_3 = \begin{bmatrix} -2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & i & -1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5}+\frac{2i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}+\frac{3i}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}-\frac{2i}{5} \\ -\frac{4}{5}-\frac{3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A-0I_3 = \begin{bmatrix} -1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

onsdag 2. november 2022 10:22

1 c) $\lambda = -1+i$ egenvektor: $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 1$ egenvektor: $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5} \\ -\frac{4}{5} - \frac{3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 0$ egenvektor: $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

---

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I_3) = 0 \cdot \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$+ (1-\lambda) \cdot \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 0) = \underline{(1-\lambda)(\lambda^2)}$

$\underline{\lambda = 1}$ og $\underline{\lambda = 0}$ og $\underline{\lambda = 0}$

$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

$A - 0I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

$\lambda = 1$ egenvektor: $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\lambda = 0$ ev: $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

---

onsdag 2. november 2022 10:47

$\boxed{2}$

1a) Egenrom $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi 2

algebraisk multiplisitet 1

geometrisk multiplisitet 1

Egenrom $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\1\end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi -3

algebraisk multiplisitet 1

geometrisk multiplisitet 1

1d) Egenrom $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ for egenverdi 1

algebraisk multiplisitet 1

geometrisk multiplisitet 1

Egenrom $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ for egenverdi 0

Algebraisk multiplisitet 2

Geometrisk multiplisitet 1

onsdag 2. november 2022 11:06

$\boxed{3}$ Teorem 10.18

Hvis 6-i skal være en egenverdi må $\overline{6-i}$ også være en egenverdi.
Då får vi 6 egenverdier som er mer en de 5 faktorene vi får fra $\det(A - \lambda I_5) = 0$.
Det kan ikke stemme

$\boxed{4}$ a) Det finnes 5 vektorer som er gitt ved $Ax = 0$, som er de samme som nullromme

Der for har 0, geometrisk t til A. multiplisitet = 5

b) Siden $\lambda = 0$ har geometrisk multiplisit = 5, må $\lambda = 0$ ha algebraisk mutiplisitet ≥ 5

Då må egenvektorene ha

$\lambda = 0$ algebraisk mutiplisitet = 5

λ_1 algebraisk mutiplisitet = 1

λ_2 algebraisk mutiplisitet = 1

siden en 7×7 matrise har 7 egenverdier talt med algebraisk multipisitet.

onsdag 2. november 2022 11:11

$\boxed{5}$ Hvis $A^2 = A$ vil

$\lambda x = A^2 x = A\lambda x = \lambda^2 x$

Hvis $\lambda^2 x = \lambda x$ må $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$

en $n \times n$ matrise vil alltid ha n egenverdier, kan ikke ha 0 egenverdier / eller 1 egenverdier.

2 egenverdier = 2×2 matrise med $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 0 \text{ og } \lambda = 1$$

>2 egenverdier

n egenverdier er en $n \times n$ matrise med 1 øverst til venstre, og resten 0

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$ og $\lambda = 0$ med algebraisk multiplisitet lik $n - 1$

onsdag 2. november 2022 11:11

6

1a) 2x2 matrisen har 2 egenverdier og de geometriske og algebraiske multiplisittene er like for begge egenvektorene.

Den er diagonaliserbar

1d) Her er egenverdien 0 defekt

Den er da ikke diagonaliserbar

onsdag 2. november 2022 11:29

$\boxed{7}$ vi kan se at A har tre egen verdier med egenvektorer

$\lambda = 1$ egenvektor $sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 0$ egenvektor $sp\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}\right\}$

Men for $\lambda = 3$ bruker de to forskjellige vektorer

$\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-5\\-2\\-1\end{bmatrix}$. Men begge vektorene ligger i

$sp\left\{\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$. $\left(-1\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-2\\-1\end{bmatrix}\right)$. Da får vi

$\lambda = 3$ egenvektor $sp\left\{\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Begge har rett

8

onsdag 2. november 2022 11:31

a) $\begin{bmatrix} 2i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2i-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2i-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I_3) = (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2i-\lambda & 3 \\ 0 & 2i-\lambda \end{vmatrix}$

$= 4-\lambda \cdot [(2i-\lambda)^2 - (3\cdot 0)] = (4-\lambda)(2i-\lambda)^2$

$\underline{\lambda = 4}$ og $\underline{\lambda = 2i}$ og $\underline{\lambda = 2i}$

$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 2i-4 & 3 & 0 \\ 0 & 2i-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A - 2iI_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$

$\lambda = 4$ egenvektor $= \text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ og $\lambda = 2i$ egenvektor $= \text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Ikke diagonaliserbar, egenverdi $\lambda = 2i$ er defekt fredag 4. november 2022 12:42

$\boxed{8}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A - \lambda I_4 = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I_4) = 2\lambda^2 + \lambda^4 = \lambda^2(2 + \lambda^2)$

$\underline{\lambda = 0}$ og $\underline{x = 0}$ og $\underline{\lambda = 2i}$ og $\underline{\lambda = -2i}$

$A - 0I_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x - 2iI_4 = \begin{bmatrix} -2i & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x + 2iI_4 = \begin{bmatrix} 2i & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$ egenvektor sp $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\lambda = -2i$ ingen egenvektor

$\lambda = 2i$ ingen egenvektor

Ikke diagonaliserbar, fordi vi kun har to lineært avhengige egenvektorer

8

fredag 4. november 2022 14:40

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 40$

$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 40 = 0$ $\underline{\lambda = -2}$ og $\underline{\lambda = 4}$ og $\underline{\lambda = 5}$

$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

$\lambda = -2$ egenvektor $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\lambda = 4$ egenvektor $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 5$ egenvektor $\text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Diagonaliserbar på $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

fredag 4. november 2022 15:03

$\boxed{9}$

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\lambda = -1, 0, 1$

$A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A - 0 I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^{1337} = P D^{1337} P^{-1}$

$D^{1337} = \begin{bmatrix} (-1)^{1337} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1337} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

siden $D^{1337} = D$ vil $A^{1337} = A$

mandag 7. november 2022 12:47

$\boxed{10}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a) $$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot 2 = -2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \underline{\lambda^2 + \lambda - 6}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$\underline{\lambda = -3}$ og $\underline{\lambda = 2}$

$$A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Normaliserer egenvektor:

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{5}}$$

$$\lambda = -3 \quad \text{egenvektor} = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda = 2 \quad \text{egenvektor} = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right\}$$

$\boxed{10}$ b) $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \underline{\underline{0}}$

Indreprodukt = 0, de er ortogonale

d) $P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^T P = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 & (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$