Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

<u>Úloha 1.</u>

Na to aby sme výrok vyvrátili, stačí nájsť prípad kedy máme čiastočné usporiadanie $\preceq$ a lineárne usporiadanie $\leq$ a zároveň $\preccurlyeq$ nie je lineárne usporiadanie. Zvoľme si teda rôzne x, y a z také, že $x \prec y$, $y \prec z$, no x a z sú v usporiadaní $\preceq$ neporovnateľné. Zároveň nech platí $z \leq x$. Keďže usporiadanie $\preceq$ má byť len čiastočné a usporiadanie $\leq$ lineárne, takáto podmnožina im zjavne vyhovuje.

Potom však platí $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$ (pretože $x \prec y \prec z$). Pre spor predpokladajme, že usporiadanie $\preccurlyeq$ bude lineárne, potom z definície lineárneho usporiadania viem, že aj $x \preccurlyeq z$. Zároveň však keďže x a z sú v usporiadaní $\preceq$ neporovnateľné a $z \leq x$, tak $z \preccurlyeq x$, čo je spor s tým, že usporiadanie je lineárne, teda antisymetrické, keďže x a z som si zvolil ako rôzne. Usporiadanie $\preccurlyeq$ preto nemusí byť stále lineárne.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 2.

Viem povedať, že každé 2 usporiadané dvojice sú buď neporovnateľné, alebo sú menšie ako dvojica s väčším súčtom, respektíve väčšie ako dvojica s menším súčtom. Platí to preto, lebo ak mám napríklad (a, b) a (c, d), tak ak $(a, b) \neq (c, d)$ a $a + b \geq c + d$, tak ak $a \geq c$, potom buď $b \geq d$ (vačšie), alebo $b \leq d$ (neporovnateľné) a ak $a \leq c$, potom nutne $b > d$ (neporovnateľné). Zároveň viem, že všetky dvojice s rovnakým súčtom budú neporovnateľné, lebo ak $a + b = c + d$ a $a \geq c$, potom nutne $b \leq d$, pričom aby platilo $(a, b) \neq (c, d)$, tak v oboch nerovnostiach rovnosť súčastne nastať nemôže. Potom najdlhší reťazec môže byť len taký, ktorý každý súčet obsahuje práve raz. Takýchto reťazcov existuje hneď niekoľko, spĺňa to napríklad reťazec s dĺžkou 199, ktorý vyzerá ako

$$(1, 1) \preceq (2, 1) \preceq \cdots \preceq (100, 1) \preceq (100, 2) \preceq (100, 3) \preceq \cdots \preceq (100, 100)$$

Ďalej tvrdím, že antireťazec môže mať dĺžku najviac 100, pretože najviac navzájom neporovnateľných prvkov má množina usporiadaných dvojíc so súčtom 101 a jej mohutnosť je 100 (pretože prvý prvok si vyberiem z 1 až 100 a druhý mám jednoznačne určený). Dlhší antireťazec neexistuje, pretože akonáhle vyberiem prvok s iným súčtom, viem ho porovnať s aspoň 2 prvkami so súčtom 101, ktoré ak sa v antireťazci nenachádzajú viem s týmto prvkom vymeniť a zväčšiť jeho dĺžku, alebo ak sa tam nachádzajú, tak to nie je antireťazec. Antireťazec s dĺžkou 100 je napríklad

$$(1, 100),\ (2, 99),\ (3, 98), \ldots,\ (100, 1)$$

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Pozrime sa na to, čo znamená ľavá strana. Najprv vyberiem m–prvkové podmnožiny z n–prvkovej množiny a ich počet vynásobím počtom r–prvkových podmnožín, ktoré pre každú z nich existujú. Dostanem teda číslo, ktoré znamená počet r–prvkových podmnožín z n–prvkovej množiny, pričom každá táto podmnožina tam bude zarátaná x–krát (lebo tú istu podmnožinu dostanem z viacerých m–prvkových podmnožín). Každá z nich tam je ale zarátaná $\binom{n-r}{m-r}$–krát pretože je to to isté, ako by som si r prvkov vybral dopredu a potom zo zvyšných $n-r$ vyberal zvyšných $m-r$ prvkov. Dostávam teda

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$$

čo som mal dokázať.