Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 1.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že byty sú očíslované v smere hodinových ručičiek. Pre každú rodinu si poďme vyrátať ich vzdialenosť v smere hodinových ručičiek od miesta, kam sa chcú presťahovať (alebo o koľko bytov ich musíme posunúť). Na začiatku nech to je 1 pre všetky rodiny, teda spolu n. Pozrime sa ale na to, že táto vzdialenosť sa nezmení ani ak vymením nejakú dvojicu, pretože 1 rodine sa vzdialenosť o 1 zníži a tej druhej zas o 1 zvýši.

Premyslime si ale ešte ako to bude vyzerať v okolí miesta, kde nejaká rodina chce bývať, pretože uvažujeme vzdialenosti v jednom smere, takže tu sa budú výrazne meniť. Ak sa presťahujú do cieleného bytu, pričom sa sťahovali v smere hodinových ručičiek, tak ich vzdialenosť sa zníži o 1 a vzdialenosť druhej sťahovanej rodini sa o 1 zvýši, alebo nastane prípad, kedy sa aj táto druhá rodina presťahovala do bytu kde chce bývať, no tentokrát sa sťahovali v protismere hodinových ručičiek, čiže zo vzdialenosti $n-1$ sa stala vzdialenosť 0. Potom súčet vzdialeností sa buď zachoval, alebo ak nastal prípad, kedy sa obe rodiny presťahovali tam, kde chcú bývať, tak sa súčet znížil o n. Ostáva sa ešte zamyslieť nad prípadom kedy sa rodina do cieleného bytu presťahuje v protismere hodinových ručičiek a druhá sťahovaná rodina sa do cieleného bytu nepresťahuje, no to je analogické ako prípad vyššie a súčet sa pri tom nezmení a nad prípadom, kedy sa rodina z cieleného bytu presťahuje v smere hodinových ručičiek o 1 ďalej, avšak vtedy nastáva prípad symetrický tomu popísanému vyššie a teda súčet sa o n zvýši.

Na začiatku teda máme vzdialenosť 1 pre každú rodinu a potrebujeme z nej spraviť nejaký násobok n, pretože až vtedy budú všetky rodiny v bytoch kde chcú. Potom sa ale každá rodina musí presťahovať aspoň raz v smere hodinových ručičiek, alebo aspoň $n-1$ krát v protismere hodinových ručičiek. Zároveň viem, že prípad, kedy sa každá rodina presťahuje iba aspoň raz v smere hodinových ručičiek nastať nemôže, lebo to by sme celkový súčet znížili na 0 bez toho, aby sa nejaká rodina presťahovala do svojho bytu v protismere hodinových ručičiek, o čom sme dokázali, že sa to nedá. Musí teda nastať prípad, kedy sa nejaká rodina sťahuje aspoň $(n-1)$–krát, čo znamená, že za menej ako $n-1$ dní sa sťahovanie uskutočniť nedá. To že za $n-1$ dní sa to dá dokážem nájdením konkrétnej konštrukcie, napríklad tej, že zoberiem rodinu n a prvý deň ju vymením s rodinou $n-1$, druhý deň s $n-2$, až $(n-1)$. deň s rodinou $n-(n-1)=1$. Potom budú všetky rodiny v bytoch kde byť chcú.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 2.

Maximálny počet banánov, ktoré vieme dopraviť do kilometra d označme v_d. Tvrdím, že do kilometra $d+1$ vieme dopraviť najviac

$$v_{d+1} = v_d - (2 \cdot \lceil \frac{v_d - 2S}{N} \rceil - 1) \cdot S$$

banánov. Tvrdenie platí, pretože nech mám prenesených koľkokoľvek banánov, vždy ak na kôpke o kilometer dozadu ostalo aspoň $2S+1$ banánov, tak sa mi po ne oplatí vrátiť, pretože po ceste tam a späť zje velblúd iba $2S$ banánov. Potom viem vzťah upraviť všeobecne na:

$$v_d = V - \sum_{i=0}^{d-1} (2 \cdot \lceil \frac{v_d - 2S}{N} \rceil - 1) \cdot S$$

V úlohe v bode 2 mi teda stačí nájsť v_D a mám riešenie, respektíve $v = v_D$.

V bode 1 mám zadané v a potrebujem zistiť D. Vieme teda, že

$$\frac{V - v}{S} = \sum_{i=0}^{D-1} (2 \cdot \lceil \frac{v_D - 2S}{N} \rceil - 1)$$

z čoho sa D dá zistiť postupným pričítavaním ďalšieho prvku na pravú stranu, až kým nedostanem rovnosť. Potom som našiel hľadané D. Pre výpočet človekom je rovnica vyššie pomerne komplikovaná a dá sa zjednodušiť napríklad tak, že si všimneme, že prvky sumy sa niekoľkokrát za sebou opakujú (majú rovnakú hodnotu), takže by nám stačilo pozerať sa na hodnoty keď sa to zmení. Konkrétne by to pre bod 1 vyzeralo tak, že vyrátame n – v mojom riešení poslednú pozíciu zmeny ako

$$n = \lceil \frac{V}{N} \rceil - \lceil \frac{v}{N} \rceil$$

a následne zrátam dĺžku celého úseku d_n bez zmeny plus k nemu pripočítam sumu dĺžok predošlých úsekov, teda rovnica by vyzerala ako (aj s ošetrením všetkých podmienok aby sme nešli do záporu):

$$D = d_n = \frac{\min\{N, \max[(\lceil \frac{V}{N} \rceil - n + 1) \cdot N, 0]\}}{(2 \cdot \frac{\max[(\lceil \frac{V}{N} \rceil - n + 1) \cdot N, 0]}{N} - 1) \cdot S} + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$$

Pre konkrétne hodnoty v zadaní teda 533 kilometrov.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Generál na začiatku prejde do stavu *nový generál*, čím vedľajšiemu vojakovi povie, že mu posiela signál 1 a signál 2. Signál 1 sa bude šíriť rýchlosťou 1 (teda vždy keď vojak vedľa seba uvidí niekoho v stave 1, prejde v ďalšom takte do stavu 1 aj on a zároveň vojak, ktorý v tomto stave bol celý takt prejde do neutrálneho stavu). Signál 2 sa bude šíriť rýchlosťou 1/3, takže ak vojak vedľa seba vidí niekoho v stave 2 prejde do stavu 2.2, ďalší takt do stavu 2.1 a nakoniec do stavu 2. Po tomto stave prejde znova do neutrálneho stavu. Ak sa nejaký vojak má dostať naraz do stavu 1 aj nejakého dvojkového stavu, prejde do stavu *nový generál*, signály, ktoré zachytil už ďalej nepošle, ale obaja jeho susedia zaregistrujú nové signály spôsobené týmto stavom, ktoré sa budú šíriť ďalej. Po stave *nový generál* prejde do stavu *nový zadák*, aby signály naďalej už len odrážal. Zadák aj nový zadák v stave 1 zotrvá o takt dlhšie ako vojak, aby signál poslal späť.

Vieme, že signály 1 a 2 sa stretnú zakaždým v polovici, pretože zatiaľ čo pomalší prejde x vojakov, rýchlejší prejde $3x$ vojakov. Takto sa teda postupne hľadajú polovice a v momente, keď sa všetci dostanú do stavu aspoň raz do stavu nový generál sa môže ozvať salva, pretože každý (až n agenerála a zadáka) vedľa seba bude mať 2 vojakov, ktorý do tohto stavu prešli len teraz. Ak teda uvidia vedľa seba 2 nových generálov, môžu strieľať.

Aby riešenie bolo prakticky použiteľné, bolo by potrebné doriešiť ešte detaily ako to, že čo sa bude diať ak počet vojakov nie je $2^n - 1$, ale to sa dá vyriešiť viacerými stavmi a vzhľadom na vetu v zadaní "Nejde o přesný popis automatu, ale o myšlenku jejich komunikace" to v tomto riešení nepovažujem za dôležité.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 4.

Postupujme sporom. Nech existuje najviac x mužov, ktorí majú v nejakom stabilnom párovaní lepšiu ženu ako pri pánskej volenke. To znamená, že pri pánskej volenke každého z nich ich terajšia žena odmietla, pretože mala lepšieho muža. Potom na to, aby bolo párovanie stabilné musia aj muži y, kvôli ktorým x mužov tieto ženy odmietli mať lepšiu ženu ako pri pánskej volenke.

Ak muži y patria do skupiny x, tak dostávame spor s tým, že pánska volenka bola stabilná, pretože im stačilo urobiť túto cyklickú zámenu a všetci by mali lepšie ženy.

Ak muži y do skupiny x nepatria, dostávame spor s tým, že najviac x mužov si v tomto párovaní polepšilo. Potom sa za každým dostaneme ku sporu, teda toto párovanie nemôže byť stabilné.