Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 1.

Naprogramovaný algoritmus je v súbore *u1.py*.

Algoritmom, ktorý hľadá stabilné párovanie je napríklad tento:

- v každom kole každý muž, ktorého si žena "neodložila" pošle návrh žene, ktorej ešte návrh neposielal
- každá žena, ktorej prišli nejaké návrhy si nechá najlepší z nich a zvyšné odmietne
- po najviac n kolách algoritmus skončí, pričom každá žena bude mať priradeného práve 1 muža a toto párovanie bude stabilné.

Teraz musím dokázať 3 veci – algoritmus skončí, skončí po najviac $n^2 - n + 1$ krokoch a párovanie, ktoré vznikne bude stabilné.

Keďže v každom kole je po podaní návrhov n neodmietnutých návrhov, existujú 2 možnosti. Buď má každá žena návrh od práve 1 muža a vtedy algoritmus skončí, alebo má nejaké žena viacero návrhov. Ak nastala druhá situácia, táto žena všetky okrem jedného zo svojich návrhov odmietne, čím sa počet neodmietnutých návrhov zníži. Keďže počet návrhov je konečný a v každom kole kedy sa algoritmus neskončí sa ich počet zníži, algoritmus musí skončiť, najneskôr vtedy, keď ostane práve n zo všetkých neodmietnutých návrhov.

Po4et možných návrhov na podanie je n^2. V prvom kole sa podá n návrhov. Ak by sa v každom ďalšom kole podal iba 1 návrh, ako som dokázal vyššie, návrhy sa vyčerpajú najviac po $n^2 - n + 1$ kolách a teda najneskôr vtedy skončí aj celý algoritmus.

Predstavme si situáciu v ktorej algoritmus skončí. Každý muž má podľa jeho osobných preferencií najlepšiu ženu, ktorá ho neodmietla. Žiaden muž teda pár chcieť meniť nebude (lebo všetky podľa neho lepšie ženy ho odmietnu) a teda každý pár, čiže aj celé párovanie je stabilné.

Martin Števko
MFF UK, Informatika, 1. ročník

<u>Úloha 2.</u>

Program je v súbore *u2.py*.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Najprv dokážem pomocné tvrdenie. Majme 3^k gulí, pričom $3^k = 2n+1$, ktoré máme rozdelené na 2 skupiny početné $n+1$ (označme P) a n (označme Q), pričom vieme, že gule skupiny P sú buď všetky pravé, alebo 1 z nich je ľahšia a gule skupiny Q sú buď všetky pravé, alebo je 1 z nich ťažšia. Potom nepravú guľu vieme nájsť na k vážení. Rovnaké tvrdenie budeme uvažovať aj pre opčný smer, teda že ľahšia je v P, alebo ťažšia v Q, ale dokážem len tento smer a druhý sa ukáže analogicky. Nech teda $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1} \in P$ a $g_{n+2}, g_{n+3}, \ldots, g_{2n+1} \in Q$.

Dokážem indukciou. Pre $k=1$ máme 3 gule. Porovnám gule g_1 a g_2. Ak sú rovnaké, guľa g_3 je ťažšia. Ak nie sú rovnaké viem, že medzi nimi môže byť len ľahšia guľa a teda guľa na tej strane, ktorá je vyššie je ľahšia.

Nech teda tvrdenie vyššie platí pre k a dokážeme indukčný krok pre $k+1$. Podľa n značenia máme v predpoklade $2n+1$ gulí a v indukčnom kroku $6n+3$ gulí. Bez ujmy na všeobecnosti si teda z tvrdenia vieme povedať, že gule $g_1, g_2, \ldots, g_{3n+2} \in P$ a gule $g_{3n+3}, g_{3n+4}, \ldots, g_{6n+3} \in Q$. Rozdeľme si tieto gule na 3 skupiny.

- $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}, g_{3n+3}, g_{3n+4}, \ldots, g_{4n+2}$
- $g_{n+2}, g_{n+3}, \ldots, g_{2n+2}, g_{4n+3}, g_{4n+3}, \ldots, g_{5n+2}$
- $g_{2n+3}, g_{2n+4}, \ldots, g_{3n+2}, g_{5n+3}, g_{5n+4}, \ldots, g_{6n+3}$

Teraz sú všetky skupiny rovnako, konkrétne $2n+1$ početné. Porovnajme prvé 2 skupiny. Ak sú rovnaké, môžu obsahovať len pravé gule a potom v tretej skupine musí byť nepravá. V nej nám ale ostali gule zadelené do P a Q podľa podmienok tvrdenia, takže môžeme využiť indukčný predpoklad. Ak je jedna strana ťažšia viem, že buď je na ťažšej strane ťažšia guľa, alebo na ľahšej ľahšia. Potom ale viem vybrať gule z P z ľahšej strany a gule z Q z tej ťažšej a povedať, že nepravá guľa je medzi vybranými. Na tieto vybrané potom môžem aplikovať indukčný predpoklad, keďže spĺňajú podmienky zadelenia v tvrdení. Avšak v oboch prípadoch som 1 váženie spotreboval a ostalo mi ich k, pričom na indukčný predpoklad potrebujem práve k vážení. Z toho ale vyplýva, že každých 3^k gulí teda odvážim na k vážení, čo som chcel dokázať.

Pozrime sa teraz na samotnú úlohu. Máme teda $n = \frac{3^k-1}{2}$ gulí a chceme dokázať, že ich dokážeme odvážiť na k vážení. Znova indukciou pre $k=1$ máme 1 guľu, tú odvážime so správnou a vieme aká je. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre k a dokážme ho pre $k+1$. Z našich $\frac{3^{k+1}-1}{2}$ si teraz odčlenme $\frac{3^k-1}{2}$ gulí, pretože podľa indukčného predpokladu vieme, že ak si budeme istí, že nepravá guľa je medzi nimi, ktorá to je dokážeme zistiť na k vážení. Ostalo nám teda

$$\frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{3^k-1}{2} = 3^k$$

gulí. Všimnime si teraz ale, že ak výstup z ich váženia (pričom pri vážení ich rozdelíme na polovicu a k menšej časti pridáme správnu guľu, ktorú po vážení odoberieme) použijeme ako vstup pre vyššie dokázaný pomocný argument, tak to, ktorá z nich je nepravá zistíme na k vážení. 1 ďalšie sme potrebovali na ich zadelenie a teda z $\frac{3^{k+1}-1}{2}$ gulí vieme identifikovať nepravú na $k+1$ vážení. Podľa dôkazu z cvičenia je to zároveň maximum, takže toto nemusíme ďalej dokazovať.

V dôkaze je zároveň popísaný algoritmus váženia, ku ktorému môžeme pristupovať rekurzívne, až kým neidentifikujeme nesprávnu guľu. V prípade, že gulí nemáme maximálny možný počet na k vážení, ale menší, ako z algoritmu vyplýva, dôležité je len ich rozdelenie, početnosti môžu byť aj menšie.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 4.

- Koľko správnych gulí nám stačí?

  V algoritme popísanom v úlohe 3 sme použili iba 1 správnu guľu (možno viackrát), je teda zrejmé, že viac ich nepotrebujeme.

- Koľko vážení potrebujeme ak správne gule nemáme?

  Pre 1 a 2 gule sa to zjavne bez správnej zistiť nedá, takže predpokladajme, že máme aspoň 3 gule. Tvrdím, že bez správnej gule dokážeme nesprávnu identifikovať na k vážení, pričom máme najviac $\frac{3^k-3}{2}$ gulí (čiže o 1 menej než v úlohe 3). Znova budeme postupovať indukciou. Nech $k = 2$ (pre 1 je to nemožné). Máme teda 3 gule. Porovnáme 2 z nich, ak sú rovnaké, nesprávna je tretia a môžem využiť algoritmus z úlohy 3 pre 1 guľu, pričom ako správnu použijem jednu z porovnávanej dvojice (keďže tie sú rovnaké a obe nesprávne byť nemôžu), čo je na 1 váženie, teda dokopy som použil 2 váženia. Ak sú rôzne, nesprávna je jedna z nich, takže ako správnu môžem použiť tretiu, odvážiť ju s druhou a ak sú rovnaké, z prvého váženia viem povedať aká nesprávna je prvá, ak sú rôzne, tak z tohto. Počiatočný prípad pre indukciu teda máme dokázaný.

  Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre k a dokážme ho pre $k + 1$. Máme teda $\frac{3^{k+1}-3}{2} = \frac{3\cdot(3^k-1)}{2}$ gulí. Rozdeľme ich na 3 kôpky po $\frac{3^k-1}{2}$. Dve z nich porovnáme. Ak sú rovnaké, zoberieme tretiu a použijeme algoritmus z úlohy 3, pričom správnu gulu budú tie z porovnávania. Ak sú rôzne, ich počet je $3^k - 1$ a sú rozdelené na 2 rovnako početné skupiny. Pridajme k nim teda 1, ktorú sme neporovnávali a vieme použiť pomocné tvrdenie z úlohy 3. Týmto sme teda dokázali, že na $k + 1$ vážení to pôjde a tým sme dokázali aj celé tvrdenie.