Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 1.

Podľa princípu inklúzie a exklúzie striedavo prirátavame a odrátavame súčin počtu n–členných skupín s počtom ráz, koľko s nimi matematik obedoval, až kým každý obed nemáme zarátany práve raz. Výsledný počet obedov, čiže aj dní konferencie teda bude:

$$\binom{5}{1} \cdot 10 + \binom{5}{2} \cdot 5 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{4} \cdot 2 + \binom{5}{5} \cdot 1 = 50 - 50 + 30 - 10 + 1 = 21$$

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 2.

V riešení budem hovoriť o "množinách". Vždy budem mať na mysli množiny A a B, do ktorých musím vedieť rozdeliť vrcholy grafu tak, aby žiadna množina neobsahovala 2 vrcholy spojené hranou (z definície).

Pozrime za najprv na graf G. Ak nastane situácia, že v tomto grafe budú existovať 3 vzájomne nespojené body, v grafe $\overline{G}$ už spojené budú, avšak potom nemôže byť bipartitný, lebo z Dirichletovho princípu bude vždy existovať množina, v ktorej budú aspoň 2 takéto vrcholy, no tie budú navzájom spojené hranou, čo je spor s definíciou bipartitného grafu.

Na to aby bola možnosť, že také 3 body neexistujú, môže mať graf najviac 4 vrcholy, lebo inak by znova z dirichletovho princípu aspoň v jednej z množín boli aspoň 3 vrcholy (a tie by nesmeli byť spojené). Číslo n sa teda môže rovnať iba 1, 2, 3 a 4 (prípadne aj 0 ak ju berieme ako prirodzené číslo). To že skutočne môže dokážem nájdením konkrétneho príkladu grafu.

Pre $n = 1$ (prípadne 0) je riešenie triviálne, máme len vrchol (prípadne nič).

Pre $n = 2$ majme graf $G(\{1,2\},\{(1,2)\})$, potom $\overline{G}(\{1,2\},\varnothing)$, čiže ak v oboch grafoch $1 \in A$ a $2 \in B$, grafy sú bipartitné.

Pre $n = 3$ majme graf $G(\{1,2,3\},\{(1,2),(1,3)\})$, potom $\overline{G}(\{1,2,3\},\{(2,3)\})$, čiže ak v prvom grafe $1 \in A$ a $2,3 \in B$ a v druhom grafe $1,2 \in A$ a $3 \in B$, grafy sú bipartitné.

Pre $n = 4$ majme graf $G(\{1,2,3,4\},\{(1,2),(1,3),(3,4)\})$, potom $\overline{G}(\{1,2,3,4\},\{(1,4),(2,3),(2,4)\})$, čiže ak v prvom grafe $1,4 \in A$ a $2,3 \in B$ a v druhom grafe $1,2 \in A$ a $3,4 \in B$, grafy sú bipartitné.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Keďže pán Novák (budem značiť mrN) dostal od každého inú odpoveď a mohol dostať iba odpovede 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 a pýtal sa siedmich ľudí, každú odpoveď dostal práve raz.

Pani Nováková (budem značiť msN) si nemohla podať ruku so 6 ľudmi, lebo inak by iba mrN mohol odpovedať 0, no sám seba sa nepýtal. Zoberme si teda pár msA a mrA, kde si mrA podal ruku so 6 ľuďmi. Potom msA je posledná, ktorá si nepodala ruku s nikým a teda ona musela odpovedať 0.

Odoberme teraz pár A. Ostávajú 3 páry a odpovede 1, 2, 3, 4, 5. Keďže ale doposiaľ si každý z nich podal ruku práve s 1, pre jednoduchosť zmeňme odpovede na o 1 nižšie a toto podanie ignorujme. Máme teda odpovede 0, 1, 2, 3, 4.

Pani Nováková si nemohla podať ruku so 4 ľudmi, lebo inak by iba mrN mohol odpovedať 0, no sám seba sa nepýtal. Zoberme si teda pár msB a mrB, kde si mrB podal ruku so 4 ľuďmi. Potom msB je posledná, ktorá si nepodala ruku s nikým a teda ona musela odpovedať 0.

Odoberme teraz pár B. Ostávajú 2 páry a odpovede (pôvodné) 2, 3, 4. Keďže ale doposiaľ si každý z nich podal ruku práve s 2, pre jednoduchosť zmeňme odpovede na o 2 nižšie a tieto podania ignorujme. Máme teda odpovede 0, 1, 2.

Pani Nováková si nemohla podať ruku s 2 ľudmi, lebo inak by iba mrN mohol odpovedať 0, no sám seba sa nepýtal. Zoberme si teda pár msC a mrC, kde si mrC podal ruku s 2 ľuďmi. Potom msC je posledná, ktorá si nepodala ruku s nikým a teda ona musela odpovedať 0.

Odoberme teraz pár C. Ostáva iba pár N a odpoveď (pôvodná) 3. MsN si teda musela podať ruku s práve 3 ľuďmi.