Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 1.

Pre reláciu

$$f : X \to Y$$

$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

viem povedať, že je reflexívna, lebo

$$\forall x \in X : f(x) = f(x)$$

symetrická, lebo

$$\forall x, y \in X : f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

a tranzitívna, lebo

$$\forall x, y, z \in X, x \neq y : f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$$

Potom musí byť relácia nutne ekvivalenciou.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 2.

- $R \circ S$

  Zoberme si $X = \{1, 2, 3\}$, pričom $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$ a $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$. Obe tieto relácie sú ekvivalencie, pretože sú reflexívne, symetrické a ku tranzitivite na nich nedochádza, takže aj tranzitívne. Pre ich zloženie však platí $1(R \circ S)2$, pretože $1R3$ a $3S2$ a neplatí $2(R \circ S)1$, pretože 2 je v R relácii iba s 2 a 2 je v S relácii iba s 2 a 3, nie 1. Potom relácia $(R \circ S)$ nie je symetrická a teda viem povedať, že pre ňu nemusí platiť, že je ekvivalenciou. (Neplatí to napríklad v prípade popísanom vyššie.)

- $R \cap S$

  To, že relácia je ekvivalencia dokážem ak ukážem, že je reflexívna (využitím reflexivity R a S)

  $$\forall x \in X : (x, x) \in R \wedge (x, x) \in S \Rightarrow (x, x) \in (R \cap S)$$

  symetrická (využitím symetri R a S)

  $$\begin{aligned} x(R \cap S)y &\Leftrightarrow (x, y) \in (R \cap S) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in (R \cap S) \\ &\Leftrightarrow y(R \cap S)x \end{aligned}$$

  aj tranzitívna (využitím tranzitivity R a S)

  $$\begin{aligned} x(R \cap S)y \wedge y(R \cap S)z &\Leftrightarrow (x, y) \in (R \cap S) \wedge (y, z) \in (R \cap S) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \wedge (y, z) \in S \\ &\Rightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in S \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in (R \cap S) \\ &\Leftrightarrow x(R \cap S)z \end{aligned}$$

  Keďže $(R \cap S)$ je reflexívna, symetrická aj tranzitívna, je to aj ekvivalencia.

- $R \cup S$

  Zoberme si $X = \{1, 2, 3\}$, pričom $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ a $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$. Obe relácie sú zjavne reflexívne aj symetrické a ku tranzitivite na nich nedochádza, takže aj tranzitívne. V relácii $(R \cup S)$ ale ku tranzitivite už dochádza a neplatí tam, pretože $(1, 2), (2, 3) \in (R \cup S)$ a zároveň $(1, 3) \notin (R \cup S)$. Relácia $(R \cup S)$ teda nemusí byť ekvivalencia.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Dokážem, že $R \circ R \Rightarrow R$ a naopak. Z toho potom nutne vyplýva ekvivalencia, teda aj rovnosť.

Podľa definície zloženia relácií platí

$$\forall x, z : x(R \circ R)z \Leftrightarrow \forall x, z \exists y \in X : xRy \wedge yRz$$

potom ale z tranzitivity

$$\forall x, z \exists y \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow \forall x, z xRz$$

Pre opačný smer zo symetrie a tranzitivity platí, že ak

$$xRz \wedge \exists y \in X, x \neq y : xRy \Rightarrow yRz \Leftrightarrow x(R \circ R)z$$

Ak také y neexistuje pre nejakú dvojicu x, z, potom nutne je táto dvojica v relácii iba v rámci seba, teda so žiadným iným prvkom (kvôli symetrii a tranzitivite). Z toho ale vyplýva, že pre všetky takéto x, z môžem zobrať $y = x$ a potom platí

$$xRx \wedge xRz \Rightarrow x(R \circ R)z$$

Keďže platí obojstranná implikácia (pre všetky prípady), platí aj ekvivalencia, teda $R \circ R = R$, čo som mal dokázať.