Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 1.

Na to aby sme výrok vyvrátili, stačí nájsť prípad kedy máme čiastočné usporiadanie $\preceq$ a lineárne usporiadanie $\leq$ a zároveň $\preccurlyeq$ nie je lineárne usporiadanie. Zvoľme si teda rôzne x, y a z také, že $x \prec y$, no y, z a x, z sú po dvojiciach v usporiadaní $\preceq$ neporovnateľné. Zároveň nech platí $y \leq z$ a $z \leq x$. Keďže usporiadanie $\preceq$ má byť len čiastočné a usporiadanie $\leq$ lineárne, takáto podmnožina im zjavne vyhovuje.

Potom však platí $y \preccurlyeq z \preccurlyeq x$ (pretože $y \leq z \leq x$). Pre spor predpokladajme, že relácia $\preccurlyeq$ bude lineárnym usporiadaním. Potom z definície lineárneho usporiadania viem, že aj $y \preccurlyeq x$. Zároveň však keďže $x \preceq y$, tak $x \preccurlyeq y$, čo je spor s tým, že usporiadanie je lineárne, teda antisymetrické, keďže x a y som si zvolil ako rôzne. Usporiadanie $\preccurlyeq$ preto nemusí byť stále usporiadaním, alebo aspoň nie lineárnym.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

<u>Úloha 2.</u>

Viem povedať, že každé 2 usporiadané dvojice sú buď neporovnateľné, alebo sú menšie ako dvojica s väčším súčtom, respektíve väčšie ako dvojica s menším súčtom. Platí to preto, lebo ak mám napríklad (a,b) a (c,d), tak ak $(a,b) \neq (c,d)$ a $a+b \geq c+d$, tak ak $a \geq c$, potom buď $b \geq d$ (vačšie), alebo $b \leq d$ (neporovnateľné) a ak $a \leq c$, potom nutne $b > d$ (neporovnateľné). Zároveň viem, že všetky dvojice s rovnakým súčtom budú neporovnateľné, lebo ak $a+b = c+d$ a $a \geq c$, potom nutne $b \leq d$, pričom aby platilo $(a,b) \neq (c,d)$, tak v oboch nerovnostiach rovnosť súčastne nastať nemôže. Potom najdlhší reťazec môže byť len taký, ktorý každý súčet obsahuje práve raz. Takýchto reťazcov existuje hneď niekoľko, spĺňa to napríklad reťazec s dĺžkou 199, ktorý vyzerá ako

$$(1,1) \preceq (2,1) \preceq \cdots \preceq (100,1) \preceq (100,2) \preceq (100,3) \preceq \cdots \preceq (100,100)$$

Ďalej tvrdím, že antireťazec môže mať dĺžku najviac 100. Pozrime sa teraz na reťazce, ktoré začínajú v $(1,x)$ a končia v $(100,x)$ pre všetky x od 1 do 100. Týchto reťazcov je 100, sú navzájom disjunktné a zároveň pokrývajú celú množinu zo zadania (lebo každý prvok je aspoň v nejakom reťazci). Z toho zjavne vyplýva, že si neviem vybrať antireťazec dlhší než je počet týchto reťazcov, lebo ináč by som vybral 2 prvky z jedného reťazca, čím by boli porovnateľné. Antireťazec s dĺžkou 100 skutočne existuje a je to napríklad

$$(1,100),\ (2,99),\ (3,98),\ldots,\ (100,1)$$

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Pozrime sa na to, čo znamená ľavá strana. Najprv vyberiem m–prvkové podmnožiny z n–prvkovej množiny a ich počet vynásobím počtom r–prvkových podmnožín, ktoré pre každú z nich existujú. Dostanem teda číslo, ktoré znamená počet r–prvkových podmnožín z n–prvkovej množiny, pričom každá táto podmnožina tam bude zarátaná x–krát (lebo tú istu podmnožinu dostanem z viacerých m–prvkových podmnožín). Každá z nich tam je ale zarátaná $\binom{n-r}{m-r}$–krát pretože je to to isté, ako by som si r prvkov vybral dopredu a potom zo zvyšných $n-r$ vyberal zvyšných $m-r$ prvkov. Dostávam teda

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$$

čo som mal dokázať.