Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 3.

Predpokladajme, že prvky máme uložené v poli. Myšlienkou bude začať zdola a postupne postaviť malé haldy, ktoré sa pospájajú do jednej veľkej až ku koreňu. Postup:

1. Vyrátam si hĺbku haldy ako $\lceil \log_2 n \rceil$.
2. Zoberiem si všetky prvky, ktoré sa vojdú na predošlé poschodia haldy. Tých bude prvých $2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 1$ v poli.
3. Zoberiem ten najviac vpravo z nich a spravím z neho a prvkov na pozícii jeho synov ($2i$ a $2i+1$ ak indexujem od 1) malú haldu sporovnaním veľkostí.
4. Posuniem sa o 1 prvok doľava a pokračujem až kým mi nedôjdu prvky v poli.
5. Keď dôjdu, budem mať postavenú haldu zo všetkých prvkov v poli, pretože pre každý prvok bude platiť, že je v správnej relácii so všetkými jeho synmi a halda bude plná zhora dole a zľava doprava.

Martin Števko

MFF UK, Informatika, 1. ročník

Úloha 4.

Tvrdím, že elektrikár musí prejsť najmenej $\lceil \log_2 n \rceil$ ciest po schodoch na identifikáciu $n$ káblov. Dokážem najprv, že toľko vyhovuje a potom, že na menej sa to nedá. Nech elektrikár má dole káble označené $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a hore $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Elektrikár si zoberie $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$ káblov a spojí ich. Pripojí k nim zdroj a výjde hore, kde postupne ku každej dvojici pripojí žiarovku a ak sa žiarovka rozsvieti, poznačí si obe žiarovky ako spojené v prvom skúšaní. Keď prejde všetkými dvojicami zvyšné si poznačí ako nespojené v prvom skúšaní. Musí ich byť $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$ a $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$, pretože toľko ich bolo spojených, pričom tieto sa rozsvietiť museli a žiadne iné sa rozsvietit nemohli

Následne vyberie $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 2}$ káblov z tých, ktoré si označil ako spojené a $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 2}$ z tých, ktoré ako nespojené. Všetky ich spojí, poznačí si, ktoré sú spojené a zíjde dole. Pre každú dvojicu káblov pripojí zdroj na jeden, žiarovku na druhý a potom spojí zdroj a žiarovku. Ak sa žiarovka rozsvieti, káble si poznačí ako spojené, ak ani po všetkých dvojicách nebudú označené ako spojené, tak ako nespojené.

Takto bude pokračovať spolu $\lceil \log_2 n \rceil$–krát, pričom pri $s$–tom skúšaní bude káble vyberať tak, aby vybral $\binom{s-1}{i} \cdot 2^{\lceil \log_2 n \rceil - s - 1}$ káblov, ktoré žiarovku rozsvietili $i$–krát pre všetky $i$ prirodzené menšie ako $s$. Týmto dostane spolu zakaždým $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$ káblov (lebo súčet n–tého riadku v Pascalovom trojuholníku je $2^n$). Tie spojí a pokračuje ako v príkladoch vyššie. Je dôležité uvedomiť si, že vždy (či je hore alebo dole), vie, ktoré káble sa mu rozsvietili, pretože dole vie, ktoré v pokuse keď bol so žiarovkov hore zapojil a teda sa mu hore rozsvietili a vidí, ktoré mu svietili v pokusoch, keď bol dole. Naopak je to analogiské, teda hore vie, ktoré mal spojené keď bol so žiarovkov dole a vidí, ktoré mu svietia keď je hore.

Takto dostane po $\lceil \log_2 n \rceil$ skúšaniach pre každý kábel pre každé skúšanie, informáciu či žiarovku rozsvietil, alebo nie. Naviac viem, že žiadne 2 káble neboli oba vybraté, alebo oba nevybraté, pre všetky skúšania rovnako, čo zabezpečilo delenie vyššie a počet opakovaní. Potom teda viem každé dva káble jednoznačne odlíšiť. Ostáva dokázať, že ich viem aj priradiť. Avšak na oboch stranách budovy mám káble jednoznačne odlíšené a zároveň viem, pre ktoré vybratia kábel žiarovku rozsvietil, takže podľa poradia viem určiť to, ktorý kábel je ktorý.

Teraz musím dokázať, že na menej pokusov to nejde. Každým skúšaním viem o kábli dostať len 2 informácie. Rozsvietil niektorú žiarovku, alebo nie. Ak by to malo ísť na $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ skúšaní, celkovo mám teda len $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$ informácií o kábli. $n$ je ale väčšie ako $2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$, lebo horná celá časť nikdy nepridá k číslu celú jednotku, takže nedokážem rozlíšiť všetky káble.