Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \quad \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ \quad\quad\quad + \end{array}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \tag{2}$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Vorüberlegung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \ldots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

A ist pos. Definit $\Leftrightarrow$ alle führenden Hauptminore von A sind positiv
$\Leftrightarrow$ es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{21} - {l_{21}}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \text{Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber } A \text{ ist symmetrisch} \tag{12}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht pos. Definit} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in $Ly = b$

Require: Lower, invertable, triangular Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor b
  procedure SOLVE(L, b)
    for $i \in \{ 1, \ldots n \}$ **do**
      $y_i \leftarrow b_i$
      for $k \in \{ 1, \ldots, i-1 \}$ **do**
        $y_i \leftarrow y_i - l_{ik} \cdot y_k$
      end for
      $y_i \leftarrow \frac{y_i}{l_{ii}}$
    end for
  end procedure

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

Require: Matrix A, Vektor b
  procedure LOESELGS(A, b)
    $P, L, R \leftarrow$ LRZER(A)
    $b^* \leftarrow P \cdot b$
    $c \leftarrow$ VORSUB(L, b^*)
    $x \leftarrow$ RUECKSUB(R, c)
    return x
  end procedure

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Laut Skript ist eine Iteration gegeben durch:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} \cdot f(x_k) \tag{14}$$

Zur praktischen Durchführung Lösen wir

$$f'(x_0, y_0)\Delta x = -f(x_0, y_0)$$

mit Hilfe der LR Zerlegung:

$$f'(x_0, y_0) = L \cdot R \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}}^{R} \tag{16}$$

$$L \cdot c = -f(x_0, y_0) \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{26}{27} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{32}{27} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$R \cdot \Delta x = c \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \cdot \Delta x = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{32}{27} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Anschließend berechnen wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta x \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Aufgabe 4

Aufgabe:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

1. Integrand am linken und am rechten Rand interpolieren
2. Interpolationspolynom mit Quadraturformel integrieren

Lösung:

Nutze Interpolationsformel von Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} f_i \cdot L_i(x)$$

Berechne Lagrangepolynome:

$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \tag{26}$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{27}$$

So erhalten wir:

$$p(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

Nun integrieren wir das Interpolationspolynom:

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)dx &= \int_a^b f(a)\frac{x-b}{a-b}dx + \int_a^b f(b)\frac{x-a}{b-a}dx \\
&= \int_a^b \frac{f(a)\cdot x}{a-b}dx - \int_a^b \frac{f(a)\cdot b}{a-b}dx + \int_a^b \frac{f(b)\cdot x}{b-a}dx - \int_a^b \frac{f(b)\cdot a}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{f(a)\cdot b^2}{a-b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f(a)\cdot a^2}{a-b} - \frac{f(a)\cdot b^2}{a-b} + \frac{f(a)\cdot b\cdot a}{a-b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)\cdot b^2}{b-a} \\
&\quad - \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)\cdot a^2}{b-a} - \frac{f(b)\cdot a\cdot b}{b-a} + \frac{f(b)\cdot a^2}{b-a}
\end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Sei nun $f(x) = x^2$ und $a = 0$ sowie $b = 4$. Man soll die ermittelte Formel zwei mal auf äquidistanten Intervallen anwenden.

Lösung:

$$\int_0^4 p(x)dx = \int_0^2 p(x)dx + \int_2^4 p(x)dx = 24 \tag{28}$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\dots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p-1$ liefert.

Teilaufgabe b

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \text{ für } q = 1, \dots, p$$

Teilaufgabe c

Aufgabe Bestimmen Sie zu den Knoten $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ Gewichte, um eine Quadraturformel maximaler Ordnung zu erhalten. Wie hoch ist die Ordnung?

Lösung Als erstes stellen wir fest, dass die Knoten nicht symmetrisch (d.h. gespiegelt bei $\frac{1}{2}$) sind. TODO: Warum ist das wichtig?

$\overset{\text{Satz 28}}{\Rightarrow}$ Wenn wir Ordnung $s = 2$ fordern, sind die Gewichte eindeutig bestimmt.

Da $c_1 = 0$ kann es sich nicht um die Gauß-QF handeln. Somit können wir nicht Ordnung 4 erreichen.

Nach VL kann bei Vorgabe von s Knoten auch die Ordnung s durch geschickte Wahl der Gewichte erreicht werden. Also berechnen wir die Gewichte, um die Ordnung 2 zu sichern:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x) \mathrm{d}x \tag{29}$$
$$b_1 = \frac{1}{4} \tag{30}$$
$$b_2 = \frac{3}{4} \tag{31}$$

Diese Gewichte b_1, b_2 erfüllen die 1. und 2. Ordnungsbedingung.

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{2} b_i \cdot c_i^2 \tag{32}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{3} \tag{34}$$

Damit ist auch die 3. Ordnungsbedingung und mit den Knoten maximale Ordnung erfüllt.