

# Geometrie und Topologie



Siehe [tinyurl.com/GeoTopo](http://tinyurl.com/GeoTopo)

8. Januar 2014

# Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet [tinyurl.com/GeoTopo](http://tinyurl.com/GeoTopo).

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Vielen Dank auch an Frau Lenz, die es mir erlaubt hat, ihre Übungsaufgaben und Lösungen zu benutzen.

## Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche  $S^2$  lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum  $\mathbb{R}^2$  oder zu einem Torus  $T^2$ . Für den  $\mathbb{R}^2$  müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

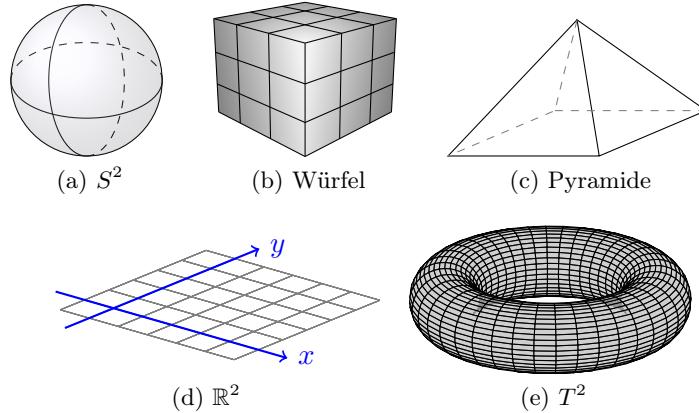


Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Topologische Grundbegriffe</b>	<b>2</b>
1.1 Topologische Räume . . . . .	2
1.2 Metrische Räume . . . . .	5
1.3 Stetigkeit . . . . .	8
1.4 Zusammenhang . . . . .	11
1.5 Kompaktheit . . . . .	13
1.6 Wege und Knoten . . . . .	16
Übungsaufgaben . . . . .	20
<b>2 Mannigfaltigkeiten und Simpizidkomplexe</b>	<b>21</b>
2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	21
2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	25
2.3 Simplizialkomplex . . . . .	30
Übungsaufgaben . . . . .	38
<b>3 Fundamentalgruppe und Überlagerungen</b>	<b>39</b>
3.1 Homotopie von Wegen . . . . .	39
3.2 Fundamentalgruppe . . . . .	42
3.3 Überlagerungen . . . . .	45
3.4 Gruppenaktionen . . . . .	54
Übungsaufgaben . . . . .	57
<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>58</b>
<b>Bildquellen</b>	<b>61</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>62</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>63</b>

# 1 Topologische Grundbegriffe

## 1.1 Topologische Räume

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B.  $[0, 1]$ . Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

### Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  mit der „trivialen Topologie“  $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ .

Es gilt:  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen. Außerdem  $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$  und  $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

### Beispiel 1

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik.

$$\begin{aligned} U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} &\Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \\ &\text{sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\} \subseteq U \end{aligned}$$

Also:  $\mathfrak{T} = \{M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel}\}$ . Diese Topologie wird auch „Standardtopologie des  $\mathbb{R}^n$ “ genannt.

- 2) Jeder metrische Raum  $(X, d)$  ist auch ein topologischer Raum.
- 3) Für eine Menge  $X$  heißt  $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$  „diskrete Topologie“.
- 4)  $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  heißt „Zariski-Topologie“  
Beobachtungen:
  - $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X], \text{ sodass } \mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$
  - Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in  $\mathfrak{T}_Z$ .
- 5)  $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

- 6)  $X := \{ 0, 1 \}$ ,  $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$  heißt „Sierpiński Raum“.  $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \}$  sind dort alle abgeschlossenen Mengen.

### Definition 2

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

### Definition 3

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- a)  $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$  heißt **Inneres** oder **offener Kern** von  $M$ .

- b)  $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von  $M$ .

- c)  $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$  heißt **Rand** von  $M$ .

- d)  $M$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\overline{M} = X$  ist.

### Beispiel 2

- 1) Sei  $X = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie und  $M = \mathbb{Q}$ . Dann gilt:  $\overline{M} = \mathbb{R}$  und  $M^\circ = \emptyset$
- 2) Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $M = (a, b)$ . Dann gilt:  $\overline{M} = [a, b]$
- 3) Sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$  und  $M = (a, b)$ . Dann gilt:  $\overline{M} = \mathbb{R}$

### Definition 4

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.
- b)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis**, wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.

### Beispiel 3

Gegeben sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit euklidischer Topologie  $\mathfrak{T}$ . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von  $\mathfrak{T}$ .

### Bemerkung 1

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$ , für die  $\mathfrak{B}$  Subbasis ist.

### Definition 5

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Spurtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$

**Definition 6**

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  
 $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .



Abbildung 1.1: Zu  $x = (x_1, x_2)$  gibt es Umgebungen  $U_1, U_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq U$

**Beispiel 4**

- 1)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  
 $\Rightarrow$  Die Produkttopologie auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$  überein.
- 2)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie.  $\mathfrak{T}$  Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^2$ :  $U_1 \times U_2$   
(Siehe Abb. 1.2)

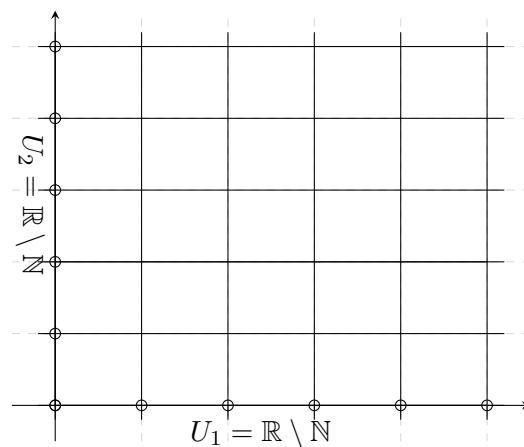


Abbildung 1.2: Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}^2$

**Definition 7**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : x \rightarrow \bar{x}, x \mapsto [x]_\sim$ .

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{ U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$  heißt **Quotiententopologie**.

### Beispiel 5

$$X = \mathbb{R}, a \sim b : \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

### Beispiel 6

$$\text{Sei } X = \mathbb{R}^2 \text{ und } (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ und } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

$X/\sim$  ist ein Torus.

### Beispiel 7

$$X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x$$

$\Leftrightarrow x$  und  $y$  liegen auf der gleichen Ursprungsgerade

$$\overline{X} = \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für  $n = 1$ :



## 1.2 Metrische Räume

### Definition 8

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) Definitheit:  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- (ii) Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

### Bemerkung 2

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ .

### Beispiel 8

Sei  $V$  ein euklidischer oder hermitischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird  $V$  durch  $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  zum metrischen Raum.

### Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik  $d$  induziert die **diskrete Topologie**.

### Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$  und  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$  ist Metrik.

*Beobachtung:*  $d$  erzeugt die euklidische Topologie.



Abbildung 1.3: Veranschaulichungen zur Metrik  $d$

### Beispiel 11 (SNCF-Metrik<sup>1</sup>)

$$X = \mathbb{R}^2$$

**Definition 9**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)**

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$ .

**Bemerkung 4**

Seien  $X, X_1, X_2$  Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum um  $X$  ist Hausdorffsch.
- b)  $X_1 \times X_2$  ist Hausdorffsch.

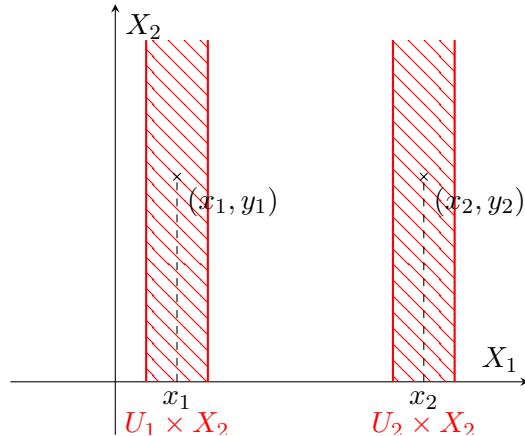


Abbildung 1.4: Wenn  $X_1, X_2$  hausdorffsch sind, dann auch  $X_1 \times X_2$

**Definition 10**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .  $x \in X$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0$  gibt, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

**Korollar 1.2**

Ist  $X$  hausdorffsch, so hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine konvergierende Folge und  $x$  und  $y$  Grenzwerte der Folge.

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Es existiert ein  $n_0$  mit  $x_n \in U_x \cap U_y$  für alle  $n \geq n_0 \Rightarrow x = y$  ■

## 1.3 Stetigkeit

### Definition 11

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- a)  $f$  heißt **stetig**, wenn für jedes offene  $U \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.
- b)  $f$  heißt **Homöomorphismus**, wenn  $f$  stetig ist und es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Korollar 1.3<sup>2</sup>

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta(x, \varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in X, \varepsilon > 0$  gegeben und  $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$ .

Dann ist  $U$  offen in  $Y$ .

$$\begin{aligned} &\stackrel{11.a}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist offen in } X. \text{ Dann ist } x \in f^{-1}(U). \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ sodass } \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U) \\ &\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U \\ &\Rightarrow \{y \in X \mid d_X(x, y) < \delta\} \Rightarrow \text{Beh.} \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq Y$  offen,  $X \in f^{-1}(U)$ .

Dann gibt es  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Vor}}{\implies} \text{Es gibt } \delta > 0, \text{ sodass } f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \\ &\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Bemerkung 5

Eine Ableitung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq Y$  gilt:  $f^{-1}(A) \subseteq X$  ist abgeschlossen.

### Beispiel 12

- 1) Für jeden topologischen Raum  $X$  gilt:  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  ist Homöomorphismus.
- 2) Ist  $Y$  trivialer topologischer Raum, d. h.  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$ , so ist jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig.
- 3) Ist  $X$  diskreter topologischer Raum, so ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Abbildung  $f$ .
- 4) Sei  $X = [0, 1], Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  und  $f(t) = e^{2\pi i t}$ . Die Umkehrabbildung  $g$  ist nicht stetig, da  $g^{-1}(U)$  nicht offen ist (vgl. Abb. 1.5).

### Korollar 1.4

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen.

---

<sup>2</sup>Im Grunde wird die Äquivalenz von Stetigkeit im Sinne der Analysis und Topologie auf metrischen Räumen gezeigt.



Abbildung 1.5: Beispiel einer stetigen Funktion  $f$ , deren Umkehrabbildung  $g$  nicht stetig ist.

Dann ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

**Beweis:** Sei  $U \subseteq Z$  offen  $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .  $g^{-1}(U)$  ist offen in  $Y$  weil  $g$  stetig ist,  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  ist offen in  $X$ , weil  $f$  stetig ist. ■

### Bemerkung 6

- a) Für jeden topologischen Raum ist  $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$  eine Gruppe.
- b) Jede Isometrie  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- c)  $\text{Iso}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$  ist eine Untergruppe von  $\text{Homöo}(X)$  für jeden metrischen Raum  $X$ .

### Korollar 1.5

Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionen

$$\pi_X : (x, y) \mapsto x \text{ und } \pi_Y : (x, y) \mapsto y$$

Wird  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen, so sind  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  stetig.

**Beweis:** Sei  $U \subseteq X$  offen  $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$  ist offen in  $X \times Y$ . ■

### Korollar 1.6

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  der Bahnenraum versehen mit der Quotiententopologie,  $\pi : X \rightarrow \overline{X}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ .

Dann ist  $\pi$  stetig.

**Beweis:** Nach Definition ist  $U \subseteq \overline{X}$  offen  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen. ■

*Beobachtung:* Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass  $\pi$  stetig wird.

### Beispiel 13 (Stereographische Projektion)

$\mathbb{R}^n$  und  $S^n \setminus \{ N \}$  sind homöomorph für beliebiges  $N \in S^n$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} S^n &= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

O. B. d. A. sei  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Gerade durch  $N$  und  $P$  schneidet die Ebene  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .  $P$  wird auf  $\hat{P}$  abgebildet.

$$f : S^n \setminus \{ N \} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

genau ein Punkt

$$P \mapsto \overbrace{L_P \cap H}$$

wobei  $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\}$  und  $L_P$  die Gerade in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $P$  ist.



Abbildung 1.6: Visualisierung der stereographischen Projektion

Sei  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ , so ist  $x_{n+1} < 1$ , also ist  $L_P$  nicht parallel zu  $H$ . Also schneiden sich  $L_P$  und  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .

Es gilt:  $f$  ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

## 1.4 Zusammenhang

### Definition 12

Ein Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen  $U_1, U_2$  von  $X$  gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  und  $U_1 \cup U_2 = X$ .

### Bemerkung 7

$X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es gibt keine abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen  $A_1, A_2$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  und  $A_1 \cup A_2 = X$ .

### Bemerkung 8

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt zusammenhängend, wenn  $Y$  als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

### Beispiel 14 (Zusammenhang von Räumen)

1)  $\mathbb{R}^n$  ist mit der euklidischen Topologie zusammenhängend, denn:

Annahme:  $\mathbb{R}^n = U_1 \cup U_2$  mit  $U_i$  offen,  $U_i \neq \emptyset$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  existieren.

Sei  $x \in U_1, y \in U_2$  und  $[x, y]$  die Strecke zwischen  $x$  und  $y$ . Dann ist  $U_1 \cap [x, y]$  die Vereinigung von offenen Intervallen. Dann gibt es  $z \in [x, y]$  mit  $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$ , aber  $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$ . In jeder Umgebung von  $z$  liegt ein Punkt von  $U_1 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $U_2$  offen.

2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$

3)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist zusammenhängend.

4)  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, da  $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$

5)  $\{x\}$  ist zusammenhängend für jedes  $x \in X$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum ist.

6)  $\mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend

### Korollar 1.7

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  zusammenhängend. Dann ist auch  $\overline{A}$  zusammenhängend.

**Beweis:** Annahme:  $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ ,  $A_i$  abgeschlossen,  $\neq \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\text{abgeschlossen}} \underbrace{\quad}_{\text{disjunkt}}$$

Wäre  $A \cap A_1 = \emptyset$

$$\Rightarrow A \subseteq A_2$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq A_2$$

$$\Rightarrow A_1 = \emptyset$$

$\Rightarrow$  Widerspruch zu  $A_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \cap A_1 \neq \emptyset$  und analog  $A \cap A_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow$  Widerspruch zu  $A$  ist zusammenhängend

■

### Korollar 1.8

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A, B \subseteq X$  zusammenhängend.

Ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $A \cup B = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$  offen, disjunkt

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{o. B. d. A.}} A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \text{ offen, disjunkt} \\ &\xrightarrow{A \text{ zhgd.}} A \cap U_1 = \emptyset \\ &\xrightarrow{A \cap B \neq \emptyset} U_1 \subseteq B \\ &B = \underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung} \end{aligned}$$

■

### Definition 13

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

Für  $x \in X$  sei

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ X \in A}} A$$

$Z(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente**.

### Korollar 1.9

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a)  $Z(X)$  ist die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.
- b)  $Z(X)$  ist abgeschlossen.
- c)  $X$  ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

**Beweis:**

- a) Sei  $Z(x) = A_1 \cup A_2$  mit  $A_i \neq \emptyset$  abgeschlossen, disjunkt.

O. B. d. A. sei  $x \in A_1$  und  $y \in A_2$ .  $y$  liegt in einer zusammenhängenden Teilmenge  $A$ , die auch  $x$  enthält.  $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$  ist unerlaubte Zerlegung.

- b) Nach Korollar 1.7 ist  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend  $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x)}$
- c) Ist  $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \xrightarrow{1.8} Z(y) \cup Z(x)$  ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Z(x) \cup Z(y) \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ &\subseteq Z(y) \Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

### Korollar 1.10

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $A \subseteq X$  zusammenhängend, so ist  $f(A) \subseteq Y$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ , offen, disjunkt.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \\ &\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset} \end{aligned}$$

■

## 1.5 Kompaktheit

### Definition 14

Sei  $X$  eine Menge und  $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

$T$  heißt eine **Überdeckung** von  $X$ , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in T : x \in M$$

### Definition 15

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}, \quad U_i \text{ offen in } X, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

### Korollar 1.11

$I = [0, 1]$  ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in J}$  eine offene Überdeckung von  $I$ .

z. Z.: Es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass jedes Teilintervall der Länge  $\delta$  von  $I$  in einem der  $U_i$  enthalten ist.

Angenommen, es gibt kein solches  $\delta$ . Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Intervall  $I_n \subseteq [0, 1]$  der Länge  $1/n$  sodass  $I_n \not\subseteq U_i$  für alle  $i \in I$ .

Sei  $x_n$  der Mittelpunkt von  $I_n$ . Die Folge  $(x_n)$  hat einen Häufungspunkt  $x \in [0, 1]$ . Dann gibt es  $i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$ . Dann gibt es  $n$  mit  $1/n < \varepsilon/2$  und  $|x - x_n| < \varepsilon/2$ , also  $I_n \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$

⇒ Widerspruch

Dann überdecke  $[0, 1]$  mit endlich vielen Intervallen  $I_1, \dots, I_d$  der Länge  $\delta$ . Jedes  $I_j$  ist in  $U_{ij}$  enthalten.

⇒  $U_{j_1}, \dots, U_{j_d}$  ist endliche Teilüberdeckung von  $U$  ■

### Beispiel 15

1)  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt.

2)  $(0, 1)$  ist nicht kompakt.

$$U_n = (1/n, 1 - 1/n) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1)$$

3)  $\mathbb{R}$  mit der Zariski-Topologie ist kompakt und jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist es auch.

### Korollar 1.12

Sei  $X$  kompakter Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$ .

Der  
Be-  
weis  
ist ko-  
misch.  
Das  
würde  
ich  
gerne  
mit  
je-  
man-  
den  
durch-  
spre-  
chen.

Dann gibt es für jedes  $i \in I$  eine offene Teilmenge  $U_i \subseteq X$  mit  $V_i = U_i \cap A$ .

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \\
 &\Rightarrow \mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\} \cup \{X \setminus A\} \text{ ist offene Überdeckung von } X \\
 &\xrightarrow{X \text{ kompakt}} \text{es gibt } i_1, \dots, i_n \in I, \text{ sodass } \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) = X \\
 &\Rightarrow \left( \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) \right) \cap A = A \\
 &\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(U_{i_j} \cap A)}_{=V_{i_j}} \cup \underbrace{((X \setminus A) \cap A)}_{=\emptyset} = A \\
 &\Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \text{ überdecken } A
 \end{aligned}$$

■

### Korollar 1.13

Seien  $X, Y$  kompakte topologische Räume. Dann ist  $X \times Y$  mit der Produkttopologie kompakt.

**Beweis:** Sei  $(W_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X \times Y$ . Für jedes  $(x, y) \in X \times Y$  gibt es offene Teilmengen  $U_{x,y}$  von  $X$  und  $V_{x,y}$  von  $Y$  sowie ein  $i \in I$ , sodass  $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq W_i$ .



Abbildung 1.7: Die blaue Umgebung ist Schnitt vieler Umgebungen

Die offenen Mengen  $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$  für festes  $x_0$  und alle  $y \in Y$  überdecken  $\{x_0\} \times Y$ . Da  $Y$  kompakt ist, ist auch  $\{x_0\} \times Y$  kompakt. Also gibt es  $y_1, \dots, y_{m(x_0)}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i} \supseteq \{x_0\} \times Y$ .

$$\begin{aligned}
 &\text{Sei } \underline{U}_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i}. \text{ Da } X \text{ kompakt ist, gibt es } x_1, \dots, x_n \in X \text{ mit } \bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X \\
 &\Rightarrow \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{m(x_j)} \underbrace{(U_{x_j,y_i} \times V_{x_j,y_i})}_{\text{Ein grün-oranges Kästchen}} \supseteq X \times Y \\
 &\Rightarrow \bigcup_j \bigcup_i W_i(x_j, y_i) = X \times Y
 \end{aligned}$$

■

### Korollar 1.14

Sei  $X$  ein Hausdorffraum und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

**Beweis:** z. Z.: Komplement ist offen

Ist  $X = K$ , so ist  $K$  abgeschlossen in  $X$ . Andernfalls sei  $y \in X \setminus K$ . Für jedes  $x \in K$  seien  $U_x$  bzw.  $V_y$  Umgebungen von  $x$  bzw. von  $y$ , sodass  $U_x \cap V_y = \emptyset$ .



Da  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in K$ , sodass  $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supseteq K$ .

$$\begin{aligned}
 &\text{Sei } V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \\
 &\Rightarrow V \cap \left( \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) = \emptyset \\
 &\Rightarrow V \cap K = \emptyset \\
 &\Rightarrow V \text{ ist Überdeckung von } y, \text{ die ganz in } X \setminus K \text{ enthalten ist.} \\
 &\Rightarrow X \setminus K \text{ ist offen}
 \end{aligned}$$

Damit ist  $K$  abgeschlossen. ■

### Korollar 1.15

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $K \subseteq X$  kompakt, so ist  $f(K) \subseteq Y$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $f(K)$

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{f \text{ stetig}} (f^{-1}(V_i))_{i \in I} \text{ ist offene Überdeckung von } K \\
 &\xrightarrow{\text{Kompakt}} \text{es gibt } i_1, \dots, i_n, \text{ sodass } f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_n}) \text{ Überdeckung von } K \text{ ist.} \\
 &\Rightarrow f(f^{-1}(V_{i_1})), \dots, f(f^{-1}(V_{i_n})) \text{ überdecken } f(K).
 \end{aligned}$$

Es gilt:  $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$  ■

### Satz 1.16 (Heine-Borel)

Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) kompakt.

Da  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  hausdorffsch sind, ist  $K$  nach Korollar 1.14 abgeschlossen. Nach Voraussetzung kann  $K$  mit endlich vielen offenen Kugeln von Radien 1 überdeckt werden  $\Rightarrow K$  ist beschränkt.

, $\Leftarrow$ “ Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) beschränkt und abgeschlossen.

Dann gibt es einen Würfel  $W = \underbrace{[-N, N] \times \cdots \times [-N, N]}_{n \text{ mal}}$  mit  $A \subseteq W$  bzw. „Polyzyylinder“  
 $Z = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \leq N \text{ für } i = 1, \dots, n \}$

Nach Korollar 1.13 und Korollar 1.11 ist  $W$  kompakt, also ist  $A$  nach Korollar 1.12 auch kompakt. Genauso ist  $Z$  kompakt, weil

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$$

homöomorph zu

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1 \}$$

ist. ■

## 1.6 Wege und Knoten

### Definition 16

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a) Ein **Weg** in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .
- b)  $\gamma$  heißt **geschlossen**, wenn  $\gamma(1) = \gamma(0)$  gilt.
- c)  $\gamma$  heißt **einfach**, wenn  $\gamma|_{[0,1]}$  injektiv ist.

### Beispiel 16

Ist  $X$  diskret, so ist jeder Weg konstant, d. h. von der Form

$$\forall x \in [0, 1] : \gamma(x) = c, \quad c \in X$$

Denn  $\gamma([0, 1])$  ist zusammenhängend für jeden Weg  $\gamma$ .

### Definition 17

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

### Korollar 1.17

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i)  $X$  ist wegzusammenhängend  $\Rightarrow X$  ist zusammenhängend
- (ii)  $X$  ist wegzusammenhängend  $\not\Leftarrow X$  ist zusammenhängend

### Beweis:

- (i) Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $A_1, A_2$  nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von  $X$  mit  $A_1 \cup A_2 = X$ . Sei  $x \in A_1, y \in A_2, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ .

Dann ist  $C := \gamma([0, 1]) \subseteq X$  zusammenhängend, weil  $\gamma$  stetig ist.

$$C = \underbrace{(C \cap A_1)}_{\exists x} \cup \underbrace{(C \cap A_2)}_{\exists y}$$

ist Zerlegung in nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen  $\Rightarrow$  Widerspruch

- (ii) Sei  $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \vee y = 1 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{10}x} \right\}$ .

Abbildung 1.8a veranschaulicht diesen Raum.



Abbildung 1.8: Beispiele für Räume, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.

Sei  $U_1 \cup U_2 = X, U_1 \neq U_2 = \emptyset, U_i$  offen.  $X = C \cup S$ . Dann ist  $C \subseteq U_1$  oder  $C \subseteq U_2$ , weil  $C$  und  $S$  zusammenhängend sind.

Also ist  $C = U_1$  und  $S = U_2$  (oder umgekehrt).

Sei  $\gamma \in C = U_1, \varepsilon > 0$  und  $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \subseteq U_1$  eine Umgebung von  $y$ , die in  $U_1$  enthalten ist.

Aber:  $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$  Widerspruch ■

**Achtung:** Es gibt stetige, surjektive Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Ein Beispiel ist die in Abbildung 1.9 dargestellte Hilbert-Kurve.



Abbildung 1.9: Hilbert-Kurve

### Definition 18

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in  $X$  ist ein Homöomorphismus  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C \subseteq X$  ( $\gamma : S^1 \rightarrow C \subseteq X$ )

**Satz 1.18 (Jordanscher Kurvensatz)**

Ist  $C = \gamma([0, 1])$  eine geschlossene Jordankurve in  $\mathbb{R}^2$ , so hat  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt ist und eine unbeschränkt.

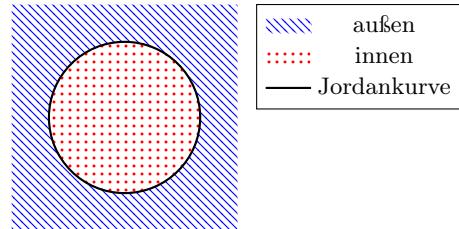


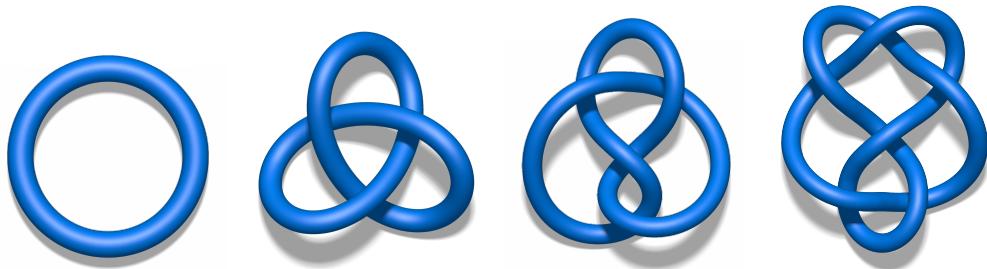
Abbildung 1.10: Die unbeschränkte Zusammenhangskomponente wird häufig inneres, die beschränkte äußeres genannt.

**Beweis:** ist technisch mühsam und wird daher hier nicht geführt. Er kann in „Algebraische Topologie: Eine Einführung“ von R. Stöcker und H. Zieschang auf S. 301f (ISBN 978-3519122265) nachgelesen werden.

Idee: Ersetze Weg  $C$  durch Polygonzug.

**Definition 19**

Eine geschlossene Jordankurve in  $\mathbb{R}^3$  heißt **Knoten**.

**Beispiel 17**

(a) Trivialer Knoten    (b) Kleeblattknoten    (c) Achterknoten    (d) 6<sub>2</sub>-Knoten

Abbildung 1.11: Beispiele für verschiedene Knoten

**Definition 20**

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt mit  $H(z, 0) = \gamma_1(z), H(z, 1) = \gamma_2(z)$  und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist  $H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z, t)$  ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

**Definition 21**

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens  $\gamma$  ist eine Projektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  auf eine Ebene  $E$ , sodass  $|(\pi|C)^{-1}(x)| \leq 2$  für jedes  $x \in D$ .

Ist  $(\pi|C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so liegt  $y_1$  über  $y_2$ , wenn  $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$  für ein  $\lambda > 1$  ist.

**Satz 1.19 (Reidemeister)**

Zwei endliche Knotendiagramme gehören genau dann zu äquivalenten Knoten, wenn sie durch endlich viele „Reidemeister-Züge“ in einander überführt werden können.



Abbildung 1.12: Reidemeister-Züge

**Beweis:** Durch sorgfältige Fallunterscheidung.

Literatur

**Definition 22**

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von  $D$  so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

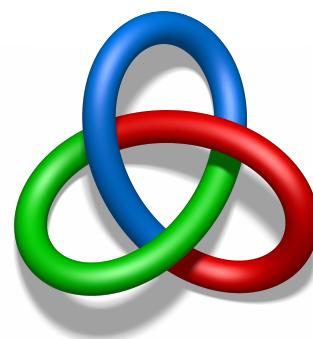


Abbildung 1.13: Ein 3-gefärbter Kleeblattknoten

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 1 (Sierpiński Raum)

Es sei  $X := \{ 0, 1 \}$  und  $\mathfrak{T}_X := \{ \emptyset, \{ 0 \}, X \}$ . Dies ist der sogenannte Sierpiński Raum.

- (a) Beweisen Sie, dass  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ein topologischer Raum ist.
- (b) Ist  $(X, \mathfrak{T}_X)$  hausdorffsch?
- (c) Ist  $\mathfrak{T}_X$  von einer Metrik erzeugt?

### Aufgabe 2

Es sei  $\mathbb{Z}$  mit der von den Mengen  $U_{a,b} := a + b\mathbb{Z} (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \})$  erzeugten Topologie versehen.

Zeigen Sie:

- (a) Jedes  $U_{a,b}$  und jede einelementige Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  ist abgeschlossen.
- (b)  $\{ -1, 1 \}$  ist nicht offen.
- (c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

### Aufgabe 3 (Cantorsches Diskontinuum)

Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  sei  $P_i := \{ 0, 1 \}$  mit der diskreten Topologie. Weiter Sei  $P := \prod_{i \in \mathbb{N}} P_i$ .

- (a) Wie sehen die offenen Mengen von  $P$  aus?
- (b) Was können Sie über den Zusammenhang von  $P$  sagen?

### Aufgabe 4 (Kompaktheit)

- (a) Ist  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0 \}$  kompakt?
- (b) Ist  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \}$  kompakt?
- (c) Ist  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  kompakt?

## 2 Mannigfaltigkeiten und Simpizidkomplexe

### 2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

#### Definition 23

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .
- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionaler Atlas besitzt.

#### Bemerkung 9

- (a) Es gibt surjektive, stetige Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$
- (b) Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph. Zum Beweis benutzt man den „Satz von der Gebietstreue“ (Brouwer):

Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv, so ist  $f(U)$  offen.

Ist  $n < m$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , so wäre

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

eine stetige injektive Abbildung. Also müsste  $f(\mathbb{R}^n)$  offen sein  $\Rightarrow$  Widerspruch

#### Beispiel 18

- 1) Jede offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte.
- 2)  $\mathbb{C}^n$  ist eine  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

- 3)  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim = S^n/\sim$  und  $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$  sind Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $2n$ .

$$\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i,$$

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

$$(y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_n)$$

besser  
auf-  
schrei-  
ben

ist bijektiv.

Die  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Atals.

$$\begin{aligned} x &= (1 : 0 : 0) & y &= (0 : 1 : 1) \in U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \in U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 && y &\mapsto (0, 1) \\ x &\mapsto (0, 0) & \text{Umgebung: } \mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{ (w : z : 1) \mid w^2 + z^2 < 1 \} &= V_2 \end{aligned}$$

Umgebung  $\mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{ (1 : u : v) \mid \|(u, v)\| < 1 \} = V_1$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ?

$$\begin{aligned} (a : b : c) &\in V_1 \cap V_2 \\ \Rightarrow a &\neq 0 \text{ und } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1 \\ \Rightarrow c &\neq 0 \text{ und } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1 \\ \Rightarrow &\text{Widerspruch} \end{aligned}$$

4)  $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Karten:  $O_i := \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0 \} \rightarrow \mathfrak{B}_1(0, \underbrace{\dots, 0}_{\in \mathbb{R}^n})$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})$$

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n x_k^2}, x_i, \dots, x_n) \leftarrow (x_1, \dots, x_n)$$

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i \cup D_i)$$

5)  $[0, 1]$  ist keine Mannigfaltigkeit, denn:

Es gibt keine Umgebung von 0 in  $[0, 1]$ , die homöomorph zu einem offenem Intervall ist.

6)  $V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \}$  ist keine Mannigfaltigkeit.

Das Problem ist  $(0, 0)$ . Wenn man diesen Punkt entfernt, zerfällt der Raum in 4 Zusammenhangskomponenten. Jeder  $\mathbb{R}^n$  zerfällt jedoch in höchstens zwei Zusammenhangskomponenten, wenn man einen Punkt entfernt.

7)  $V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2 \}$  ist eine Mannigfaltigkeit.

8)  $X = (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup (0_1, 0_2)$

$$U \subseteq X \text{ offen} \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, & \text{falls } 0_1 \notin U, 0_2 \in U \\ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U & \text{falls } 0_1 \in U, 0_2 \in U \end{cases}$$

Insbesondere sind  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  offen und homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .

Aber:  $X$  ist nicht hausdorffsch! Denn es gibt keine disjunkten Umgebungen von  $0_1$  und  $0_2$ .

9)  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n^2$ , weil offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n^2}$  eine Mannigfaltigkeit bilden.

#### Definition 24

Seien  $X, Y$   $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten,  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus  $Z = (X \dot{\cup} Y)/_{\sim}$  mit der von  $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$  erzeugten Äquivalenzrelation und der von  $\sim$  induzierten Quotiententopologie.



Abbildung 2.1: Zweifachtorus

$Z$  heißt **Verklebung** von  $X$  und  $Y$  längs  $U$  und  $V$ .  $Z$  besitzt einen Atlas aus  $n$ -dimensionalen Karten. Falls  $Z$  hausdorffsch ist, ist  $Z$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

### Korollar 2.1

Sind  $X, Y$  Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $m$ , so ist  $X \times Y$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + m$ .

**Beweis:** Produkte von Karten sind Karten. ■

### Beispiel 19

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 1:

- 1) Offene Intervalle,  $\mathbb{R}$ ,  $(0, 1)$  sind alle homöomorph
- 2)  $S^1$

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 2:

- 1)  $\mathbb{R}^2$
- 2)  $S^2$  (0 Henkel)
- 3)  $T^2$  (1 Henkel)
- 4) oder mehr Henkel, wie z.B. der Zweifachtorus in Abb. 2.1

### Korollar 2.2

Sei  $n \in \mathbb{N}, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $X = V(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$  das „vanishing set“.

Dann gilt:

- a)  $X$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$
- b) Ist  $\text{grad}(F)(X) \neq 0 \quad \forall x \in X$ , so ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ .

**Beweis:**

- a) Sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus V(F)$ . Weil  $F$  stetig ist, gibt es  $\delta > 0$ , sodass  $F(\mathfrak{B}_\delta(y)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(F(y))$  mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}\|F(y)\|$ . Folgt  $\mathfrak{B}_\delta(y) \cap V(F) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus V(F)$  ist offen.
  - b) Sei  $x \in X$  mit  $\text{grad}(F)(x) \neq 0$ , also o. B. d. A.  $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \neq 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x' := (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun: Es gibt Umgebungen  $U$  von  $x'$  und differenzierbare Funktionen  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \mapsto (g(u), u)$  eine stetige Abbildung auf eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  in  $X$  ist.
-

### Beispiel 20

- a)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $V(F) = S^2$ ,  $\text{grad}(F) = (2x, 2y, 2z) \xrightarrow{\text{24.b}} S^n$   
ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{n+1}$
- b)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto y^2 - x^3$  Es gilt:  $\text{grad}(F) = (-3x^2, 2y)$ . Also:  $\text{grad}(0, 0) = (0, 0)$ .

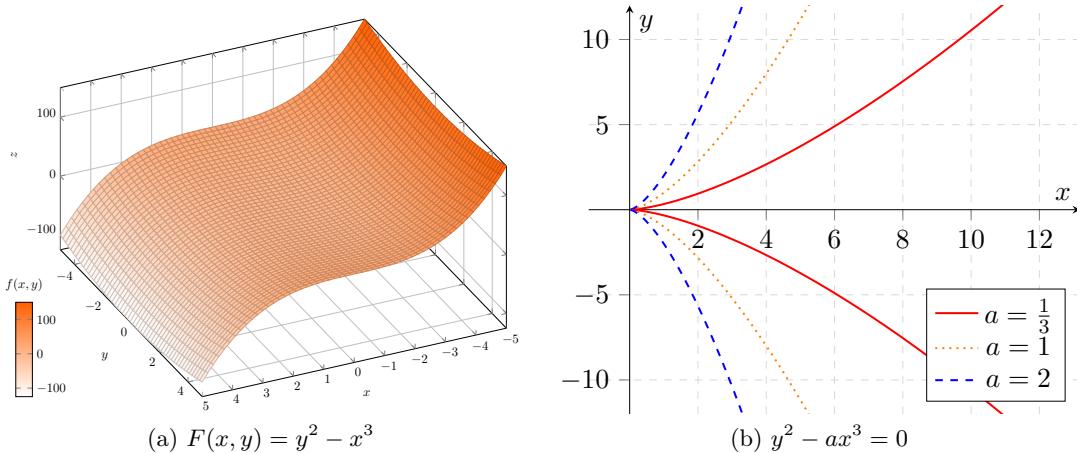


Abbildung 2.2: Rechts ist die Neilsche Parabel für verschiedene Parameter  $a$ .

Daher ist Korollar 24.b nicht anwendbar, aber  $V(F)$  ist trotzdem eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

### Definition 25

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.  $R_{+,0}^n$  ist ein „Halbraum“.

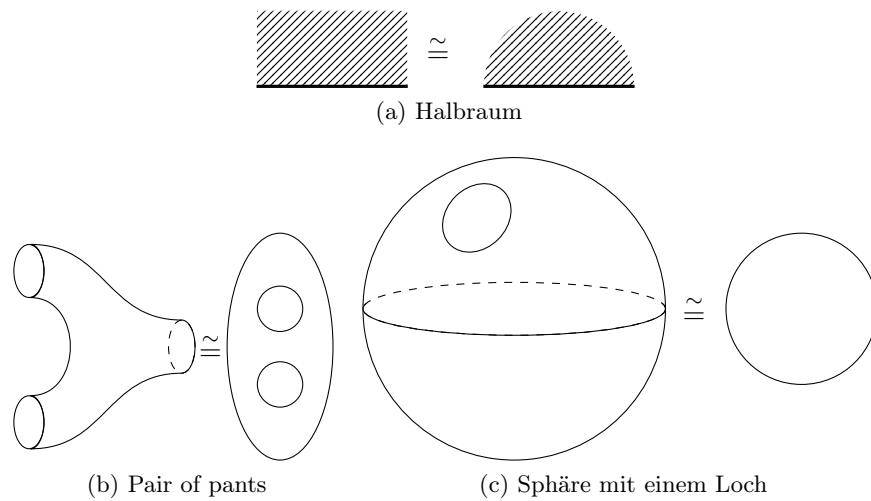


Abbildung 2.3: Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Rand

**Definition 26**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas  $(U_i, \varphi_i)$ . Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{i \in I} \{ x \in U_i \mid \varphi_i(x)_n = 0 \}$$

**Rand** von  $X$ .

$\partial X$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ .

**Definition 27**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für  $i, j \in I$  mit  $U_i, U_j \neq \emptyset$  heißt

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &:= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{aligned}$$

**Kartenwechsel** oder **Übergangsfunktion**.

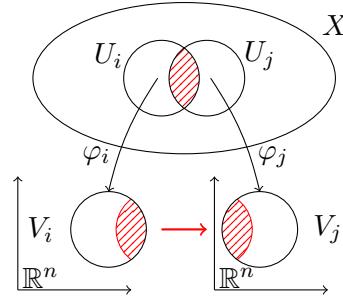


Abbildung 2.4: Kartenwechsel

## 2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition 28**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ .

- a)  $X$  heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$** , wenn jede Kartenwechselabbildung  $\varphi_{ij}$ ,  $i, j \in I$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist.
- b)  $X$  heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^\infty$  ist.

**Definition 29**

Sei  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ .

- a) Eine Karte  $(U, \varphi)$  auf  $X$  heißt **verträglich** mit  $\mathcal{A}$ , wenn alle Kartenwechsel  $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$  und  $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$  ( $i \in I$  mit  $U_i \cap U \neq \emptyset$ ) differenzierbar von Klasse  $C^k$  sind.
- b) Die Menge aller mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten auf  $X$  bildet einen maximalen Atlas von Klasse  $C^k$ . Er heißt  **$C^k$ -Struktur** auf  $X$ .

Eine  $C^\infty$ -Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf  $X$ .

**Bemerkung 10**

Für  $n \geq 4$  gibt es auf  $S^n$  mehrere verschiedene differenzierbare Strukturen, die sog. „exotische Sphären“.

**Definition 30**

Seien  $X, Y$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $m$ ,  $x \in X$ .

- a) Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **differenzierbar** in  $x$  (von Klasse  $C^k$ ), wenn es Karten  $(U, \varphi)$  von  $X$  mit  $x \in U$  und  $(V, \psi)$  von  $Y$  mit  $f(U) \subseteq V$  gibt, sodass  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  stetig differenzierbar von Klasse  $C^k$  in  $\varphi(x)$  ist.
- b)  $f$  heißt **differenzierbar** (von Klasse  $C^k$ ), wenn  $f$  in jedem  $x \in X$  differenzierbar ist.
- c)  $f$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  differenzierbar von Klasse  $C^\infty$  ist und es eine differenzierbare Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  von Klasse  $C^\infty$  gibt mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

**Korollar 2.3**

Die Bedingung in Definition 30.a hängt nicht von den gewählten Karten ab.

**Beweis:** Seien  $(U', \varphi')$  und  $(V', \psi')$  Karten von  $X$  bzw.  $Y$  um  $x$  bzw.  $f(x)$  mit  $f(U') \subseteq V'$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \\ &= \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi')^{-1} \end{aligned}$$

ist genau dann differenzierbar, wenn  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  differenzierbar ist.

**Beispiel 21**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  ist kein Diffeomorphismus, aber Homöomorphismus, da mit  $g(x) := \sqrt[3]{x}$  gilt:  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ ,  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$

**Bemerkung 11**

Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\text{Diffeo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Diffeomorphismus} \}$$

eine Untergruppe von  $\text{Hom}\ddot{\text{o}}(X)$ .

**Definition 31**

$S \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **reguläre Fläche** : $\Leftrightarrow \forall s \in S \exists$  Umgebung  $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3 \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen:  $\exists$  differenzierbare Abbildung  $F : U \rightarrow V \cap S$ :  $\text{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$ .

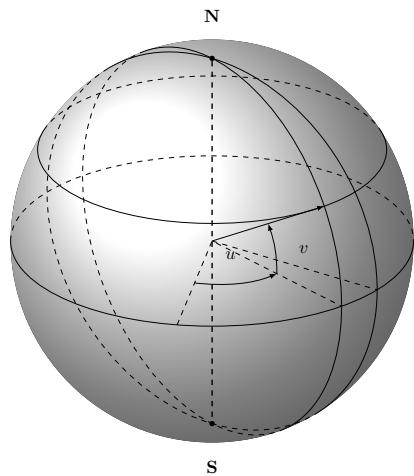
$F$  heißt (lokale) reguläre Parametrisierung von  $S$ .

$$\begin{aligned} F(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ J_F(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

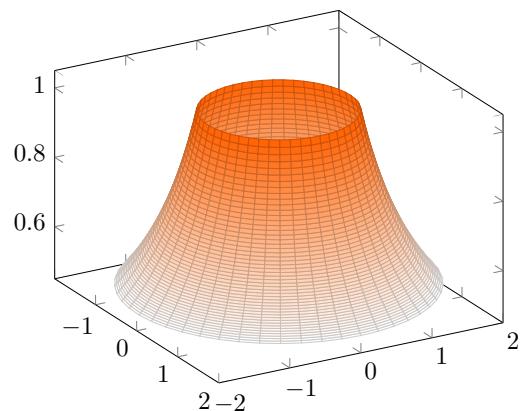
**Beispiel 22**

1) Rotationsflächen: Sei  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine differenzierbare Funktion.

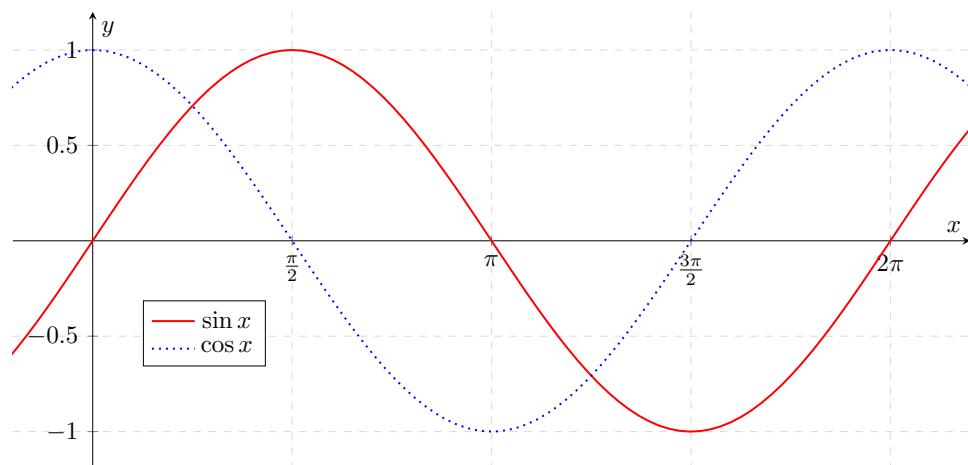
$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto (r(u) \cos(v), r(u) \sin(v), v)$$



(a) Kugelkoordinaten



(b) Rotationskörper



(c) Sinus und Cosinus haben keine gemeinsame Nullstelle

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v) \sin u & r'(v) \cos u \\ r(v) \cos u & r'(v) \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

- 2) Kugelkoordinaten:  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(u, v) \mapsto (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v)$   
 $F(u, v) \in S_R^2$ , denn

$$\begin{aligned} & R^2 \cos^2(v) \cos^2(u) + R^2 \cos^2(v) \sin^2(u) + R^2 \sin^2(v) \\ &= R^2 (\cos^2(v) \cos^2(u) + \cos^2(v) \sin^2(u) + \sin^2(v)) \\ &= R^2 (\cos^2(v)(\cos^2(u) + \sin^2(u)) + \sin^2(v)) \\ &= R^2 (\cos^2(v) + \sin^2(v)) \\ &= R^2 \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -R \cos v \sin u & -R \sin v \cos u \\ R \cos v \cos u & -R \sin v \sin u \\ 0 & R \cos v \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für  $\cos v \neq 0$ . In  $N$  und  $S$  ist  $\cos v = 0$ .

#### Korollar 2.4

Jede reguläre Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine 2-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Beweis:** z.Z.:  $F_j^{-1} \circ F_i$  ist Diffeomorphismus

Hier muss ich nochmals drüberlesen.

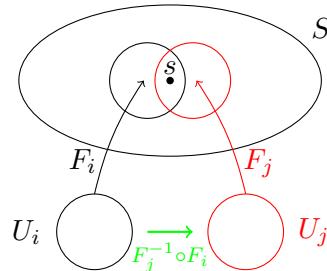


Abbildung 2.5: Reguläre Fläche  $S$  zum Beweis von Korollar 2.4

Idee: Finde differenzierbare Funktion  $\widetilde{F_j^{-1}}$  in Umgebung  $W$  von  $s$ , sodass  $\widetilde{F_j^{-1}}|_{S \cap W} = F_j^{-1}$ .

Ausführung: Sei  $u_0 \in U_i$  mit  $F_i(u_0) = s = F_j(v_0), v_0 \in U_j$ .

Da  $\text{rg } J_{F_j}(v_0) = 2$  ist, ist o. B. d. A.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} (v_0) \neq 0$$

und  $F_j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Definiere  $\widetilde{F}_j : U_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$\widetilde{F}_j(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

Offensichtlich:  $\widetilde{F}_j|_{U_j \times \{0\}} = F_j$

$$J_{\widetilde{F}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{\widetilde{F}_j}(v_0, 0) \neq 0$$

$\xrightarrow{\text{Analysis II}}$  Es gibt Umgebungen  $W$  von  $F_j$  von  $\widetilde{F}_j(v_0, 0) = F_j(v_0) = s$ , sodass  $\widetilde{F}_j$  auf  $W$  eine differenzierbar Inverse  $\widetilde{F}_j^{-1}$  hat.

Weiter ist  $\widetilde{F}_j^{-1}|_{W \cap S} = F_j^{-1}|_{W \cap S} \Rightarrow F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)} = F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)}$  ist differenzierbar.

### Definition 32

Sei  $G$  eine Mannigfaltigkeit,  $\circ : G \times G \rightarrow G$  eine Abbildung,  $(g, h) \mapsto g \cdot h$ , sodass  $(G, \circ)$  eine Gruppe ist.

(a)  $G$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen  $\circ : G \times G \rightarrow G$  und  $\iota : G \rightarrow G$ .

$$(g, h) \mapsto g \cdot h \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

(b) Ist  $G$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt  $G$  **Lie-Gruppe**, wenn  $(G, \circ)$  und  $(G, \iota)$  differenzierbar sind.

### Beispiel 23

- 1) Alle endlichen Gruppen sind 0-dimensionale Lie-Gruppen.
- 2)  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- 3)  $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$
- 4)  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
- 5)  $(\mathbb{R}^n, +)$ , denn  $A \cdot B(i, j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  ist nach allen Variablen differenzierbar

$$(A^{-1})(i, j) = \frac{\det(A_{ij})}{\det A}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

ist diffbar.

$\det A_{ij}$  kann 0 werden, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6) \quad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$\mathrm{grad}(\det - 1)(A) = 0?$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{11}}(\det - 1) = 1 \cdot \det A_{11}$$

$$\text{Es gibt } i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \frac{\partial}{\partial a_{1i}}(\det - 1)A \neq 0$$

Besser strukturieren

### Bemerkung 12

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $g \in G$ , so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} l_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.

## 2.3 Simplizialkomplex

### Definition 33

Seien  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  Punkte.

- a)  $v_0, \dots, v_k$  sind in **allgemeiner Lage**  $\Leftrightarrow$  es gibt keinen  $(k-1)$ -dimensionalen affinen Untervektorraum, der  $v_0, \dots, v_k$  enthält  $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sind linear abhängig.
- b)  $\mathrm{conv}(v_0, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$

### Definition 34

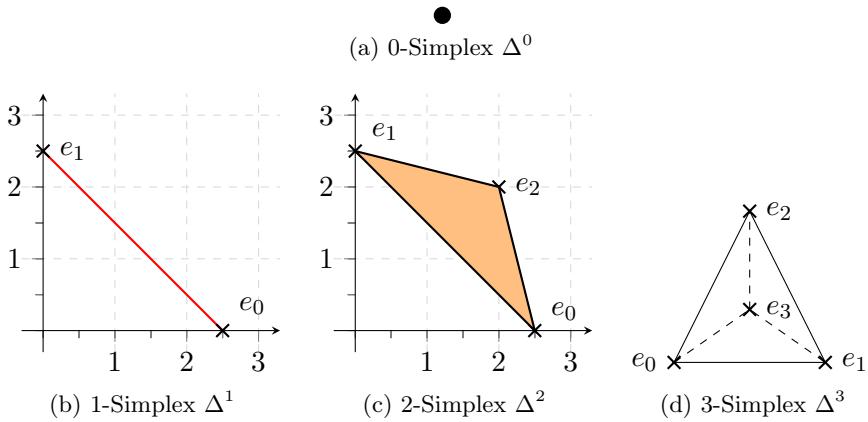
- a) Sei  $\Delta^k = \mathrm{conv}(e_0, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, \dots, e_k$ .

Dann heißt  $\Delta^k$  **Standard-Simplex** und  $k$  die Dimension des Simplex.

- b) Für Punkte  $v_0, \dots, v_k$  im  $\mathbb{R}^n$  in allgemeiner Lage heißt  $\delta(v_0, \dots, v_k) = \mathrm{conv}(v_0, \dots, v_k)$  ein  **$k$ -Simplex** in  $\mathbb{R}^n$ .
- c) Ist  $\Delta(v_0, \dots, v_k)$  ein  $k$ -Simplex und  $I = \{i_0, \dots, i_r\} \subseteq \{0, \dots, k\}$ , so heißt  $s_{i_0, \dots, i_r} := \mathrm{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$  **Teilsimplex** oder **Seite** von  $\Delta$ .  
 $s_{i_0, \dots, i_r}$  ist  $r$ -Simplex.

### Definition 35

- a) Eine endliche Menge  $K$  von Simplizes im  $\mathbb{R}^n$  heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:
  - (i) Für  $\Delta \in K$  und  $S \subseteq \Delta$  Teilsimplex ist  $S \in K$
  - (ii) Für  $\Delta_1, \Delta_2 \in K$  ist  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  leer oder ein Teilsimplex von  $\Delta_1$  und von  $\Delta_2$
- b)  $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$  (mit Spurtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von  $K$ .
- c) Ist  $d = \max \{k \mid K \text{ enthält } k-\text{Simplex}\}$ , so heißt  $d$  **Dimension** von  $K$ .

Abbildung 2.6: Beispiele für  $k$ -Simplexe**Definition 36**

Seien  $K, L$  Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

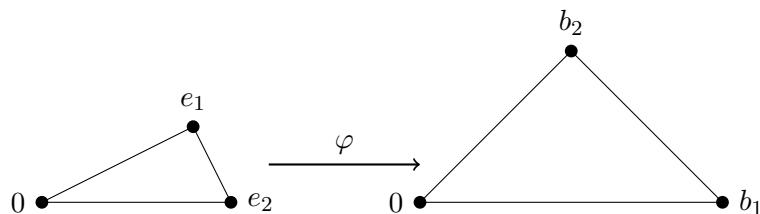
$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

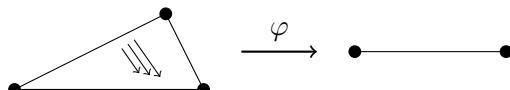
- (i)  $f(\Delta) \in L$
- (ii)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

**Beispiel 24**

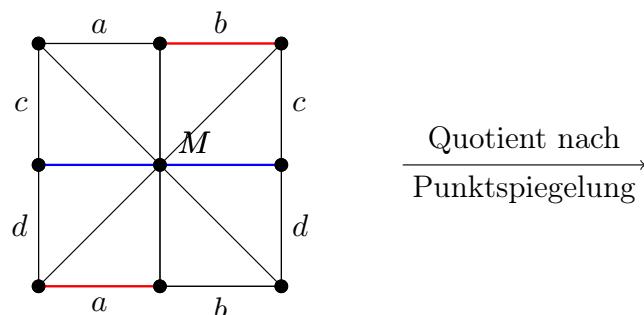
- 1)  $\varphi(e_1) := b_1, \varphi(e_2) := b_2$   
 $\varphi$  ist eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung



- 2) Folgende Abbildung  $\Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  ist simplizial:



- 3) Wozu dient das Beispiel?



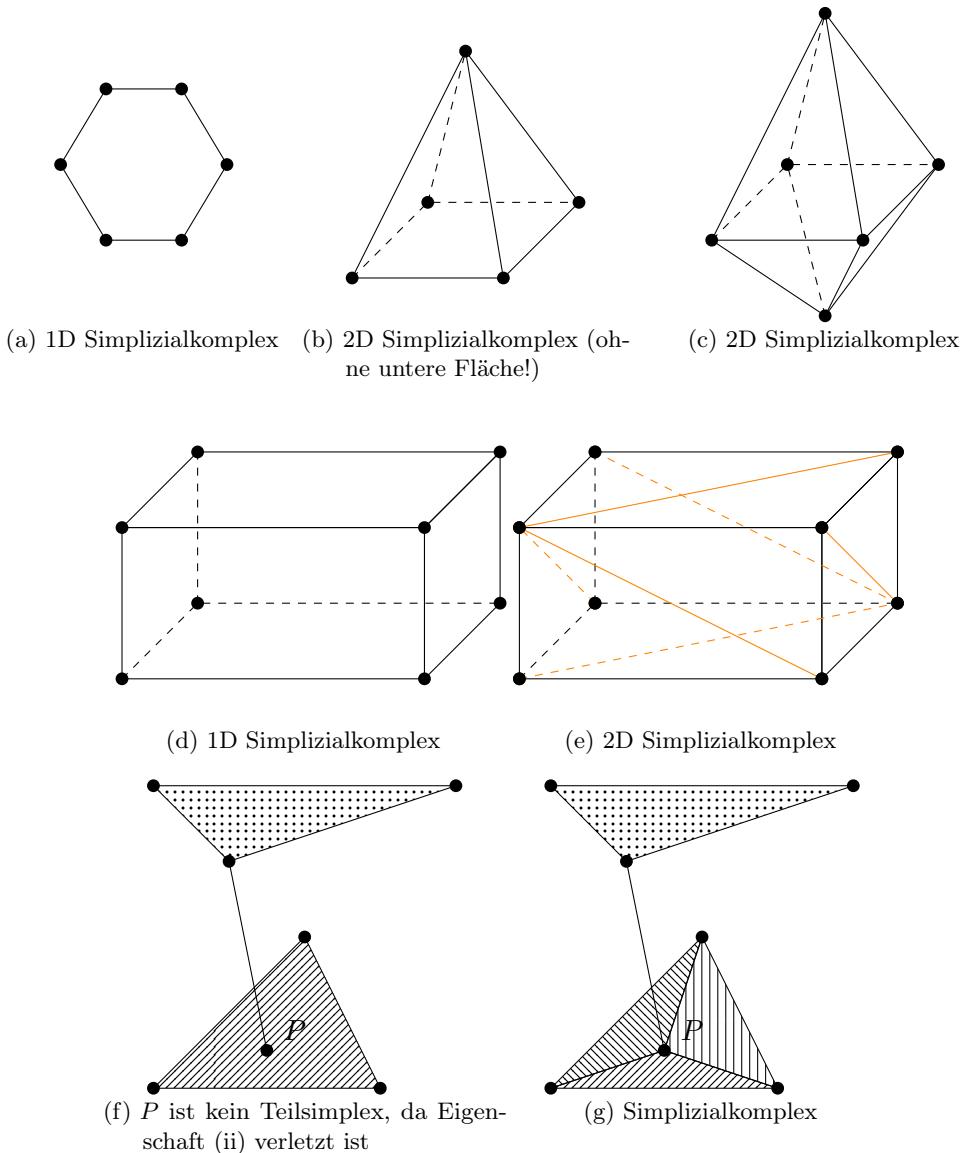


Abbildung 2.7: Beispiele für Simplicialkomplexe

**Definition 37**

Sei  $K$  ein endlicher Simplicialkomplex. Für  $n \geq 0$  sei  $a_n(K)$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes in  $K$ .

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{k=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

**Eulerzahl** (oder Euler-Charakteristik) von  $K$ .

**Beispiel 25**

- 1)  $\chi(\Delta^1) = 2 - 1 = 1$   
 $\chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1$   
 $\chi(\Delta^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$
- 2)  $\chi(\text{Oktaeder-Oberfläche}) = 6 - 12 + 8 = 2$

$$\begin{aligned}\chi(\text{Rand des Tetraeders}) &= 2 \\ \chi(\text{Ikosaeder}) &= 12 - 30 + 20 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad \chi(\text{Würfel}) &= 8 - 12 + 6 = 2 \\ \chi(\text{Würfel, unterteilt in Dreiecksflächen}) &= 8 - (12 + 6) + (6 \cdot 2) = 2\end{aligned}$$

**Korollar 2.5**

$$\chi(\Delta^n) = 1 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0$$

**Beweis:**  $\Delta^n$  ist die konvexe Hülle von  $(e_0, \dots, e_n)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Jede  $(k+1)$ -elementige Teilmenge von  $\{e_0, \dots, e_n\}$  definiert ein  $k$ -Simplex.

$$\Rightarrow a_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1}, \quad k = 0, \dots, n$$

$$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1}$$

$$f(x) = (x+1)^{n+1} \stackrel{\text{Binomischer Lehrsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = \chi(\Delta^n) - 1$$

$$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = 1$$

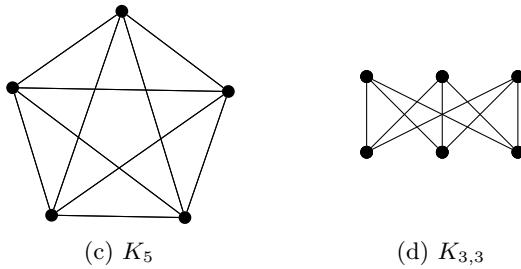
■

**Definition 38**

- a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.
- b) Ein Graph, der homöomorph zu  $S^1$  ist, heißt **Kreis**.
- c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.



(a) Dies wird häufig auch als Multigraph bezeichnet. (b) Planare Einbettung des Tetraeders



(c)  $K_5$  (d)  $K_{3,3}$

Abbildung 2.8: Beispiele für Graphen

**Korollar 2.6**

Für jeden Baum  $T$  gilt  $\gamma(T) = 1$ .

**Beweis:** Induktion über die Anzahl der Ecken.

**Korollar 2.7**

- a) Jeder zusammenhängende Graph  $\Gamma$  enthält einen Teilbaum  $T$ , der alle Ecken von  $\Gamma$  enthält.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> $T$  wird „Spannbaum“ genannt.

- b) Ist  $n = a_1(\Gamma) = a_1(T)$ , so ist  $\chi(\Gamma) = 1 - n$ .

**Beweis:**

a) Siehe „Algorithmus von Kruskal“.

$$\begin{aligned} b) \quad \chi(\Gamma) &= a_0(\Gamma) - a_1(\Gamma) \\ &= a_0(\Gamma) - (n + a_1(T)) \\ &= a_0(T) - a_1(T) - n \\ &= \chi(T) - n \\ &= 1 - n \end{aligned}$$

**Korollar 2.8**

Sei  $\Delta$  ein  $n$ -Simplex und  $x \in \Delta^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $K$  der Simplizialkomplex, der aus  $\Delta$  durch „Unterteilung“ in  $x$  entsteht. Dann ist  $\chi(K) = \chi(\Delta) = 1$ .

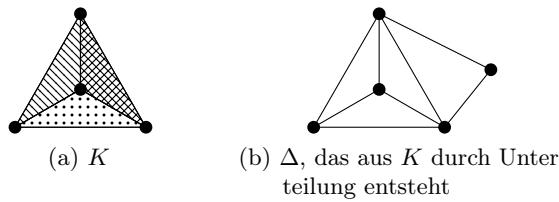


Abbildung 2.9: Beispiel für Korollar 2.8.

**Beweis:**  $\chi(K) = \chi(\Delta) - \underbrace{\underbrace{(-1)^n}_{n\text{-Simplex}}}_{(1+(-1))^{n+1}} + \sum_{k=0}^n (-1)^k = \chi(\Delta)$  ■

**Satz 2.9 (Eulersche Polyederformel)**

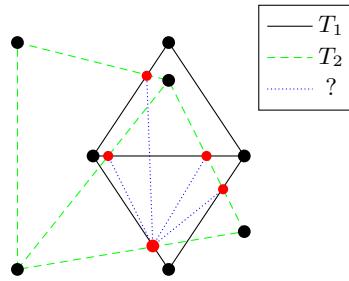
Sei  $P$  ein konvexes Polyeder in  $\mathbb{R}^3$ , d. h.  $\partial P$  ist ein 2-dimensionaler Simplizialkomplex, sodass gilt:

$$\forall x, y \in \partial P : [x, y] \subseteq P$$

Dann ist  $\chi(\partial P) = 2$ .

**Beweis:**

- 1) Die Aussage ist richtig für den Tetraeder.
- 2) O. B. d. A. sei  $0 \in P$  und  $P \subseteq \mathfrak{B}_1(0)$ . Projiziere  $0P$  von  $0$  aus auf  $\partial \mathfrak{B}_1(0) = S^2$ . Erhalte Triangulierung von  $S^2$ .
- 3) Sind  $P_1$  und  $P_2$  konvexe Polygone und  $T_1, T_2$  die zugehörigen Triangulierungen von  $S^2$ , so gibt es eine Triangulierung  $T$ , die sowohl um  $T_1$  als auch um  $T_2$  Verfeinerung ist.



Nach Korollar 2.8 ist  $\chi(\partial P_1) = \chi(T_1) = \chi(T) = \chi(T_2) = \chi(\partial P_2) = 2$ , weil o. B. d. A.  $P_2$  ein Tetraeder ist.

### Korollar 2.10 (Der Rand vom Rand ist 0)

Sei  $K$  ein (endlicher) Simplizialkomplex mit Eckenmenge  $V$  und  $<$  eine Totalordnung auf  $V$ .

Sei  $A_n$  die Menge der  $n$ -Simplizes in  $K$ , d. h.

$$A_n(K) := \{ \sigma \in K \mid \dim(\sigma) = n \} \quad \text{für } n = 0, \dots, d = \dim(K)$$

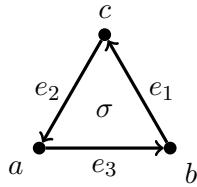
und  $C_n(K)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $A_n(K)$ , d. h.

$$C_n(K) = \left\{ \sum_{\sigma \in A_n(K)} c_\sigma \cdot \sigma \mid c_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei  $\sigma = \Delta(x_0, \dots, x_n) \in A_n(K)$ , sodass  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Für  $i = 0, \dots, n$  sei  $\partial_i \sigma := \Delta(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$  die  $i$ -te Seite von  $\sigma$  und  $d_\sigma = d_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \sigma \in C_{n-1}(K)$  und  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  die dadurch definierte lineare Abbildung.

Dann gilt:  $d_{n-1} \circ d_n = 0$



### Beispiel 26

$a < b < c$

$$d_2 \sigma = e_1 - e_2 + e_3 = (c - b) - (c - a) + (b - a) = 0$$

Beispiel auf Tetraeder übertragen

**Beweis:** Sei  $\sigma \in A_n$ . Dann gilt:

Was bedeutet diese Zeichnung?

Warum in Klammern?

$$\begin{aligned}
d_{n-1}(d_n \sigma) &= d_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \sigma \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{n-1}(\partial_i \sigma) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} \partial_i(\partial_j \sigma) (-1)^j \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \partial_j(\partial_j(\sigma)) + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \partial_{i-1}(\partial_j \sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

weil jeder Summand aus der ersten Summe auch in der zweiten Summe vorkommt, aber mit umgekehrten Vorzeichen. ■

### Definition 39

Sei  $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$  und  $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$ .

- a)  $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$  heißt  $n$ -te **Homotopiegruppe** von  $K$ .
- b)  $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$  heißt  $n$ -te **Betti-Zahl** von  $K$ .

### Bemerkung 13

Nach Korollar 2.10 ist  $B_n \subseteq Z_n$ , denn  $d_{n+1}(C) \in \text{Kern}(d_n)$  für  $C \in C_{n+1}$ .

### Satz 2.11

Für jeden endlichen Simplizialkomplex  $K$  der Dimension  $d$  gilt:

$$\sum_{k=0}^d (-1)^k b_k(K) = \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k(K) = \chi(K)$$

### Bemerkung 14

Es gilt nicht  $a_k = b_k \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

### Beweis:

- Dimensionsformel für  $d_n$ :  $a_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$  für  $n \geq 1$
- Dimensionsformel für  $Z_n \rightarrow H_n = Z_n / B_n$ :  $\dim Z_n = b_n + \dim B_n$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k = a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k (\dim Z_k + \dim B_{k-1}) \quad (2.1)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \dim Z_k + \sum_{k=0}^d (-1)^{k+1} \dim B_{k-1} \quad (2.2)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \dim Z_k - \sum_{k=0}^d (-1)^k \dim B_{k-1} \quad (2.3)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k b_k + (-1)^d \underbrace{\dim Z_d}_{=b_d} - \dim B_0 \quad (2.4)$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k b_k + (-1)^d b_d \quad (2.5)$$

$$= \sum_{k=0}^d (-1)^k b_k \quad (2.6)$$

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 5 (Zusammenhang)

- (a) Beweisen Sie, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann wegzusammenhängend ist, wenn sie zusammenhängend ist
- (b) Betrachten Sie nun wie in Beispiel 8) den Raum  $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$  versehen mit der dort definierten Topologie. Ist  $X$  wegzusammenhängend?

# 3 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

## 3.1 Homotopie von Wegen



(a)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind homotop, da man sie „zueinander verschieben“ kann.  
(b)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind wegen dem Hindernis nicht homotop.

Abbildung 3.1: Beispiele für Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$

### Definition 40

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege von  $a$  nach  $b$ , d. h.  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

a)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H(t, 0) = \gamma_1(t), H(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: I$$

und  $H(0, s) = a$  und  $H(1, s) = b$  für alle  $s \in I$  gibt. Dann schreibt man:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

b)  $\gamma_s : I \rightarrow X$ ,  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  ist Weg in  $X$  von  $a$  nach  $b$  für jedes  $s \in I$ .

### Korollar 3.1

„Homotop“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in  $X$  von  $a$  nach  $b$ .

### Beweis:

- reflexiv:  $H(t, s) = \gamma(t)$  für alle  $t, s \in I \times I$
- symmetrisch:  $H'(t, s) = H(t, 1 - s)$  für alle  $t, s \in I \times I$
- transitiv: Seien  $H'$  bzw.  $H''$  Homotopien von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  bzw. von  $\gamma_2$  nach  $\gamma_3$ .

$$\text{Dann sei } H(t, s) := \begin{cases} H'(t, 2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H''(t, 2s - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow H$  ist stetig und Homotopie von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$

■

### Beispiel 27

1) Sei  $X = S^1$ .  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  aus Abb. 3.3a nicht homöotop.

Abbildung 3.2: Zwei Wege im  $\mathbb{R}^2$  mit Anfangs- und Endpunkt  $(0,0)$ 

- 2) Sei  $X = T^2$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  aus Abb. 3.3b sind paarweise nicht homöotop.
- 3) Sei  $X = \mathbb{R}^2$  und  $a = b = (0,0)$ .

Je zwei Wege im  $\mathbb{R}^2$  mit Anfangs- und Endpunkt  $(0,0)$  sind homöotop.

Sei  $\gamma_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  der konstante Weg  $\gamma_0(t) = 0 \forall t \in I$ . Sei  $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ .

$H(t, s) := (1 - s)\gamma(t)$  ist stetig,  $H(t, 0) = \gamma(t) \forall t \in I$  und  $H(t, 1) = 0 \forall t \in I$

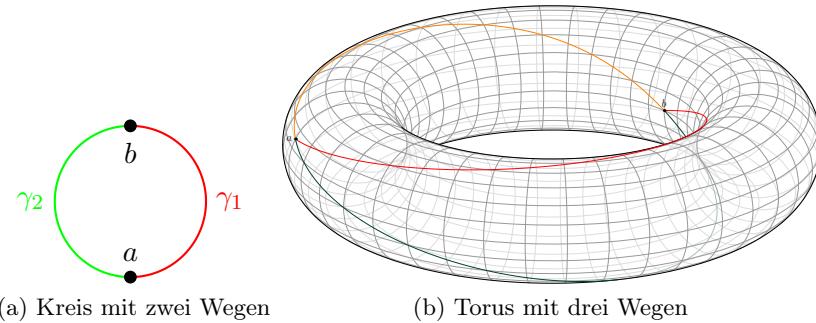


Abbildung 3.3: Beispiele für (nicht)-homotopie von Wegen

### Korollar 3.2

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg und  $\varphi : I \rightarrow I$  stetig mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ . Dann sind  $\gamma$  und  $\gamma \circ \varphi$  homotop.

**Beweis:** Sei  $H(t, s) = \gamma((1 - s)t + s \cdot \varphi(t))$ .

Dann ist  $H$  stetig,  $H(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $H(t, 1) = \gamma(\varphi(t))$ ,  $H(0, s) = \gamma(0)$  und  $H(1, s) = \gamma(1 - s + s) = \gamma(1)$   
 $\Rightarrow H$  ist Homotopie. ■

**Definition 41**

Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Wege in  $X$  mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in  $X$ . Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ .

**Korollar 3.3**

Das zusammensetzen von Wegen ist nur bis auf Homotopie assoziativ, d. h.:

$$\begin{aligned} \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) &\neq (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \\ \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) &\sim (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \end{aligned}$$

mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  und  $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ .

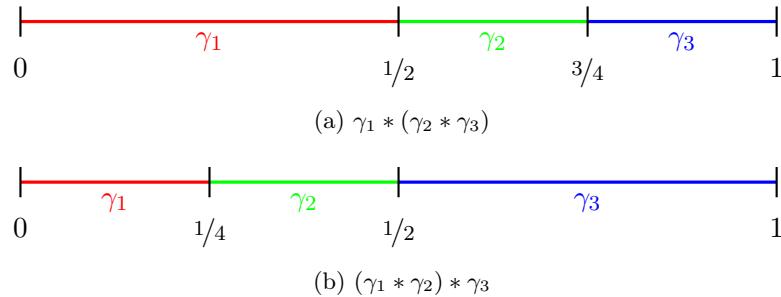


Abbildung 3.4: Das Zusammensetzen von Wegen ist nicht assoziativ

**Beweis:** Das Zusammensetzen von Wegen ist wegen Korollar 3.2 bis auf Homotopie assoziativ, da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ 2t - 1 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Korollar 3.4**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b, c \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma'_1$  Wege von  $a$  nach  $b$  und  $\gamma_2, \gamma'_2$  Wege von  $b$  nach  $c$ .

Sind  $\gamma_1 \sim \gamma'_1$  und  $\gamma_2 \sim \gamma'_2$ , so ist  $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma'_1 * \gamma'_2$ .

**Beweis:** Sei  $H_i$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_i$  und  $\gamma'_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Dann ist

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \forall s \in I \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Homotopie zwischen  $\gamma_1 * \gamma_2$  und  $\gamma'_1 * \gamma'_2$  (!)

Hier fehlt noch was

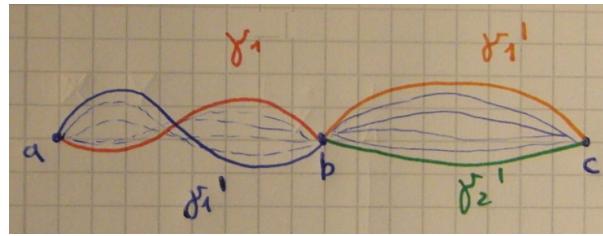


Abbildung 3.5: Situation aus Korollar 3.4

## 3.2 Fundamentalgruppe

Für einen Weg  $\gamma$  sei  $[\gamma]$  seine **Homotopiekasse**.

### Definition 42

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch  $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$  wird  $\pi_1(X, x)$  zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** in  $X$  im Basispunkt  $x$ .

### Bemerkung 15

Im  $\mathbb{R}^2$  gibt es nur eine Homotopiekasse.

### Beweis: (Fundamentalgruppe ist eine Gruppe)

- a) Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Definition von  $*_G$
- b) Assoziativität folgt aus Korollar 3.3
- c) Neutrales Element  $e = [\gamma_0], \gamma_0(t) = x \quad \forall t \in I. e * [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] * e$ , da  $\gamma_0 * \gamma \sim \gamma$
- d) Inverses Element  $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}] = [\gamma(1-t)]$ , denn  $\bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_0 \sim \gamma * \bar{\gamma}$

### Beispiel 28

$$1) S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

$$\pi_1(S^1, 1) = \{ [\gamma^k] \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$$

$$[\gamma^k] \mapsto k$$

$$2) \pi_1(\mathbb{R}^2, 0) = \pi_1(\mathbb{R}^2, x) = \{ e \} \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^2$$

$$3) \pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{ e \} \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^n$$

$$4) G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ heißt } \mathbf{sternförmig} \text{ bzgl. } x \in G, \text{ wenn für jedes } y \in G \text{ auch die Strecke } [x, y] \subseteq G \text{ ist.}$$

Für jedes sternförmige  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\pi_1(G, x) = \{ e \}$

$$5) \pi_1(S^2, x_0) = \{ e \}, \text{ da im } \mathbb{R}^2 \text{ alle Wege homotop zu } \{ e \} \text{ sind. Mithilfe der stereographischen Projektion kann von } S^2 \text{ auf den } \mathbb{R}^2 \text{ abgebildet werden.}$$

Dieses Argument funktioniert nicht mehr bei flächendeckenden Wegen!

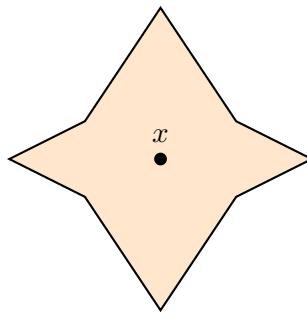


Abbildung 3.6: Sternförmiges Gebiet



Abbildung 3.7: Situation aus Korollar 3.5

**Korollar 3.5**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\delta : I \rightarrow X$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ .

Dann ist die Abbildung

$$\alpha : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b) \quad [\gamma] \mapsto [\bar{\delta} * \gamma * \delta]$$

ein Gruppenisomorphismus.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) &= [\bar{\delta} * (\gamma_1 \gamma_2) * \delta] \\ &= [\bar{\delta} * \gamma_1 * \delta * \bar{\delta} * \gamma_2 * \delta] && = [\bar{\delta} * \gamma_1 * \delta] * [\bar{\delta} * \gamma_2 * \delta] \\ &= \alpha([\gamma_1]) * \alpha([\gamma_2]) \end{aligned}$$

**Definition 43**

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn  $\pi_1(X, x) = \{e\}$  für ein (jedes)  $x \in X$ .

was  
denn  
nun?

**Korollar 3.6**

Es seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung,  $x \in X, y := f(x) \in Y$ .

- Dann ist die Abbildung  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y), [y] \mapsto [f \circ y]$  ein Gruppenhomomorphismus.
- Ist  $Z$  ein weiterer topologischer Raum und  $g : Y \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung  $z := g(y)$ . Dann ist  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, z)$

**Beweis:**

- $f_*$  ist wohldefiniert: Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  homotope Wege von  $x$ . z.Z.:  $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ : Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen  $H : I \times I \rightarrow X$  mit  $H(t, 0) = \gamma_1(t), H(t, 1) = \gamma_2(t), H(0, S) = H(1, S) = x$ . Dann ist  $f \circ H : I \times I \rightarrow Y$  mit  $\dots (f \circ H)(t, 0) = f(H(t, 0)) = f(\gamma_1(t)) = (f \circ \gamma_1)(t)$  etc.  $\Rightarrow f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ .

$$f_*([\gamma_1] * [\gamma_2]) = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] = [(f \circ \gamma_1)] * [(f \circ \gamma_2)] = f_*([\gamma_1]) * f_*([\gamma_2])$$

Warum  
die  
Punk-  
te?

$$\text{b)} \quad (g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$$

**Beispiel 29**

- 1)  $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  ist injektiv, aber  $f_* : \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2, 1) - 0 \{ e \}$  ist nicht injektiv
- 2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  ist surjektiv, aber  $f_* : \pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{ e \} \rightarrow \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  ist nicht surjektiv

**Korollar 3.7**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen  $X, Y$ . Dann gilt:

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

ist ein Isomorphismus für jedes  $x \in X$ .

**Beweis:** Sei  $g : Y \rightarrow X$  die Umkehrabbildung, d. h.  $g$  ist stetig und  $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$

$$\Rightarrow f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, f(x))} \text{ und } g_* \circ f_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

**Definition 44**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ .

$f$  und  $g$  heißen **homotop** ( $f \sim g$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow Y$  gibt mit  $H(X, 0) = f(X), H(X, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$  und  $H(x_0, S) = y_0$  für alle  $s \in I$ .

**Korollar 3.8**

Sind  $f$  und  $g$  homotop, so ist  $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

**Beweis:** Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$  um  $x_0$ , d. h.  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Z. Z.:  $f \circ \gamma \sim g \circ \gamma$

Sei dazu  $H_\gamma : I \times I \rightarrow Y, (t, s) \mapsto H(\gamma(t), S)$ . Dann gilt:  $H_\gamma(t, 0) = H(\gamma(t), 0) = (g \circ \gamma)(t), H_\gamma(1, s) = H(\gamma(1), s) = H(x_0, s) = y_0$  für alle  $s$ .

**Beispiel 30**

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f \sim \text{id}_X, f \circ g \sim \text{id}_Y$

$\Rightarrow f_*$  ist Isomorphismus. Konkret:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{ 0 \}, g : \{ 0 \} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f \circ g = \text{id}_{\{ 0 \}}, g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto 0$  für alle  $x$ .

$g \circ f \sim \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  mit Homotopie:  $H : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x, S) = (1 - s)x$  (stetig!)

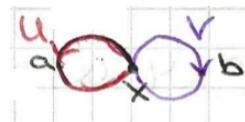
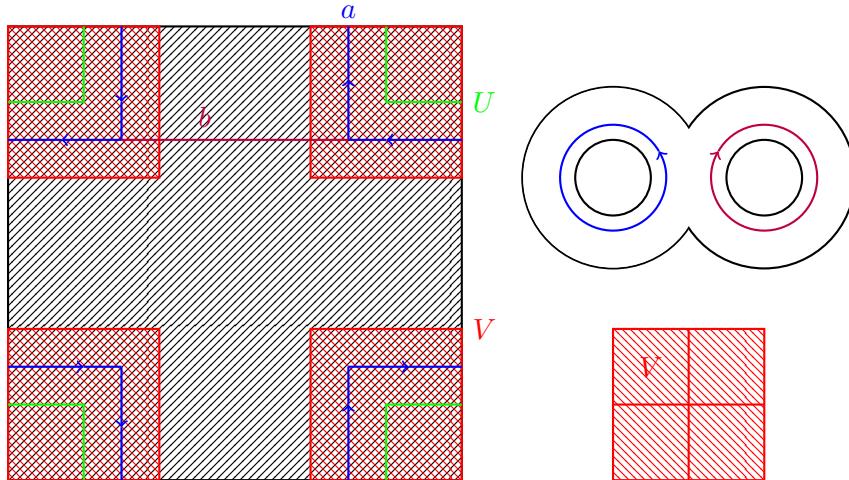
$\Rightarrow H(X, 0) = X = \text{id}_{\mathbb{R}^2}(X), H(X, 1) = 0, H(0, s) = 0$  für alle  $s \in I$

**Satz 3.9 (Satz von Seifert und van Kampen „light“)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V$  wegzusammenhängend.

Dann wird  $\pi_1(X, x)$  für  $x \in U \cap V$  erzeugt von geschlossenen Wegen um  $x$ , die ganz in  $U$  oder ganz in  $V$  verlaufen.

**Beweis:** Sei  $\gamma : I \rightarrow X$  ein geschlossener Weg von  $x$ . Überdecke  $I$  mit endlich vielen offenen Intervallen, die ganz in  $\gamma^{-1}(U)$  oder ganz in  $\gamma^{-1}(V)$  liegen.

Abbildung 3.8: Topologischer Raum  $X$ Abbildung 3.9:  $a * b = b * a \Leftrightarrow a * b * \bar{a} * \bar{b} \sim e$ 

O. B. d. A. sei  $\gamma(I_1) \subseteq U, \gamma(I_2) \subseteq V$ , etc.

Wähle  $t_i \in I_i \cap I_{i+1}$ , also  $\gamma(t_i) \in U \cap V$ . Sei  $\sigma_i$  Weg in  $U \cap V$  von  $x_0$  nach  $\gamma(t_i) \Rightarrow \gamma$  ist homotop zu

$$\underbrace{\gamma_1 * \overline{\sigma_1}}_{\text{in } U} * \underbrace{\sigma_1 * \gamma_2 * \overline{\sigma_2}}_{\text{in } V} * \cdots * \sigma_{n-1} * \gamma_2$$

### Beispiel 31

- 1) Sei  $X$  wie in Abb. 3.8.  $\pi_1(X, x)$  wird „frei“ erzeugt von  $a$  und  $b$ , weil  $\pi_1(U, x) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}, \pi_1(V, x) = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ , insbesondere ist  $a * b$  nicht homotop zu  $b * a$ .
- 2) Torus:  $\pi_1(T^2, X)$  wird erzeugt von  $a$  und  $b$ .

## 3.3 Überlagerungen

### Definition 45

Es seien  $X, Y$  zusammenhängende topologische Räume und  $p : Y \rightarrow X$  eine stetige, surjektive Abbildung.

$p$  heißt **Überlagerung**, wenn jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U = U_x$  besitzt, sodass  $p^{-1}(U)$  disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen  $V_j$  von  $Y$  ist ( $j \in I_X$ ) und  $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.

### Beispiel 32

- 1) siehe Abbildung 3.10
- 2) siehe Abbildung 3.11a
- 3)  $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

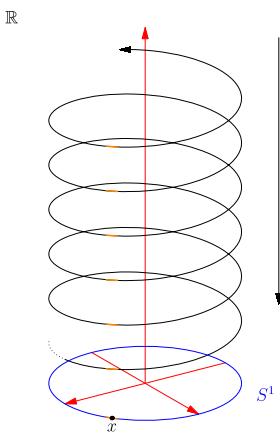


Abbildung 3.10:  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

- 4)  $S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$
- 5)  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ , siehe Abbildung 3.11b

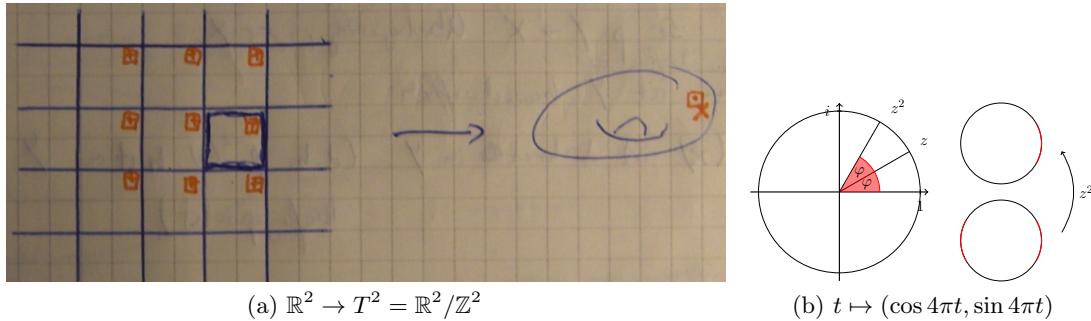


Abbildung 3.11: Beispiele für Überlagerungen

#### Definition 46

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

$f$  heißt **offen** : $\Leftrightarrow \forall V \subseteq X$  offen:  $f(V)$  ist offen in  $Y$ .

#### Korollar 3.10

Überlappungen sind offene Abbildungen.

**Beweis:** Sei  $y \in V$  und  $x \in p(V)$ , sodass  $x = p(y)$  gilt. Sei weiter  $U = U_x$  die offene Umgebung von  $x$  wie in Definition 45 und  $V_j$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y$  enthält.

Dann ist  $V \cap V_j$  offene Umgebung von  $y$ .

$\Rightarrow p(V \cap V_j)$  ist offen in  $p(V_j)$ , also auch offen in  $X$ . Außerdem ist  $p(y) = x \in p(V \cap V_j)$  und  $p(V \cap V_j) \subseteq p(V)$ .

$\Rightarrow p(V)$  ist offen.

Die Definition von Diskret habe ich mir überlegt. Hatten wir das schon mal? Haben wir Häufungspunkt definiert?

**Definition 47**

Sei  $M$  eine Menge und  $X$  ein topologischer Raum.

$M$  heißt **diskret** in  $X$ , wenn  $M$  in  $X$  keinen Häufungspunkt hat.

**Korollar 3.11**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $x \in X$ .

- a)  $X$  hausdorffsch  $\Rightarrow Y$  hausdorffsch
- b)  $p^{-1}(X)$  ist diskret in  $Y$

**Beweis:**

- a) Seien  $y_1, y_2 \in Y$ .

1. Fall:  $p(y_1) = p(y_2) = x$ .

Sei  $U$  Umgebung von  $x$  wie in Definition 45,  $V_{j_1}$  bzw.  $V_{j_2}$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y_1$  bzw.  $y_2$  enthält.

Dann ist  $V_{j_1} \neq V_{j_2}$ , weil beide Element  $p^{-1}(x)$  enthält.

$\Rightarrow V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$  nach Voraussetzung.

2. Fall:  $p(y_1) \neq p(y_2)$ .

Dann seien  $U_1$  und  $U_2$  disjunkte Umgebungen von  $p(y_1)$  und  $p(y_2)$ .

$\Rightarrow p^{-1}(U_1)$  und  $p^{-1}(U_2)$  sind Umgebungen von  $y_1$  und  $y_2$ .

Was steht hier?

- b) Sei  $y \in Y$

1. Fall:  $y \in p^{-1}(x)$

Finde  $v_j$ , sodass kein ...

...

2. Fall:  $y \notin p^{-1}(x)$

...

**Korollar 3.12 (Eindeutigkeit der Liftung)**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $x_1, x_2 \in X$ .

Dann ist  $|p^{-1}(x_1)| = |p^{-1}(x_2)|$ .<sup>1</sup>

**Beweis:** Sei  $U$  Umgebung von  $x_1$  wie in Definition 45,  $x \in U$ . Dann enthält jedes  $V_j, j \in I_X$  genau ein Element von  $p^{-1}(x)$

$\Rightarrow |p^{-1}(x)|$  ist konstant auf  $U$

$\xrightarrow{X\text{zhgd.}} |p^{-1}(x)|$  ist konstant auf  $X$

**Definition 48**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $Z$  ein weiterer topologischer Raum,  $f : Z \rightarrow X$  stetig.

Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  heißt **Liftung** von  $f$ , wenn  $p \circ \tilde{f} = f$  ist.

**Korollar 3.13**

Sei  $Z$  zusammenhängend und  $f_0, \dots, f_1 : Z \rightarrow Y$  Liftungen von  $f$ .

$\exists z_0 \in Z : f_0(z) = f_1(z) \Rightarrow f_0 = f_1$

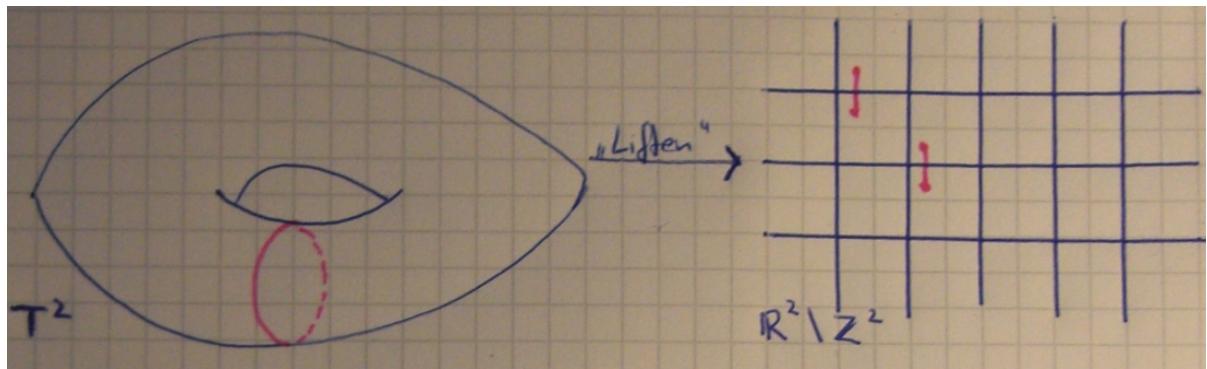


Abbildung 3.12: Beim liften eines Weges bleiben geschlossene Wege im allgemeinen nicht geschlossen

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

Abbildung 3.13: Situation aus Korollar 3.13

**Beweis:** Sei  $T = \{ z \in Z \mid f_0(z) = f_1(z) \}$ .

Z. Z.:  $T$  ist offen und  $Z \setminus T$  ist auch offen.

Sei  $z \in T$ ,  $x = f(z)$ ,  $U$  Umgebung von  $x$  wie in Definition 45,  $V$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y := f_0(z) = f_1(z)$ . deutsch?

Sei  $q : U \rightarrow V$  die Umkehrabbildung zu  $p|_V$ .

Sei  $W := f^{-1}(U) \cap f_0^{-1}(V) \cap f_1^{-1}(V)$ .  $W$  ist offene Umgebung in  $Z$  von  $z$ .

Behauptung:  $B \subseteq T$

Denn für  $w \in W$  ist  $q(f(w)) = q((p \circ f_0))(w) = ((q \circ p) \circ f_0)(w) = f_0(w) = q(f(w)) = f_1(w)$

$\Rightarrow T$  ist offen.

Analog:  $Z \setminus T$  ist offen.

#### Satz 3.14

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg,  $y \in Y$  mit  $p(y) = \gamma(0) =: x$ .

Dann gibt es genau einen Weg  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = y$  und  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

**Beweis:** Existenz: Siehe Skizze (Abbildung 3.14).

$p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $X, Y$  wegzusammenhängend.  $p$  stetig und surjektiv, zu  $x \in X \exists$  Umgebung  $U$ , so dass  $p^{-1}(U) = \bigcup V_j$

<sup>1</sup>  $|p^{-1}(x_1)| = \infty$  ist erlaubt!

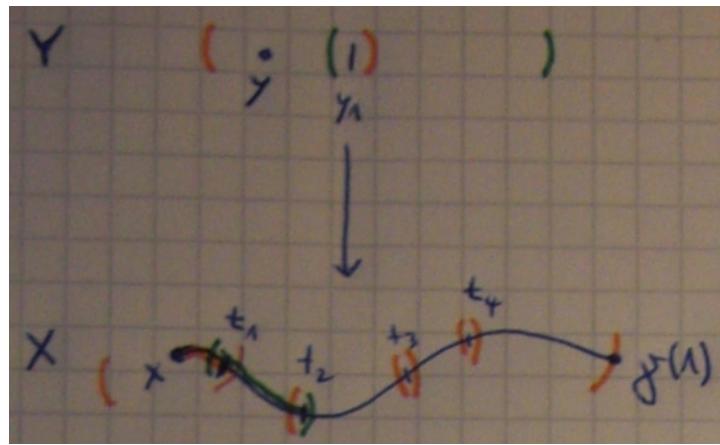


Abbildung 3.14: Skizze für den Beweis von Satz 3.14

$p|V_j : V_j \rightarrow U$  Homöomorphismus.

### Bemerkung 16

Wege in  $X$  lassen sich zu Wegen in  $Y$  liften.

Zu jedem  $y \in p^{-1}(\gamma(0))$  gibt es genau einen Lift von  $\gamma$ .

### Proposition 3.15

Seien  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$  homotope Wege von  $a$  nach  $b$ ,  $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$ ,  $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$  Liftungen von  $\gamma_0$  bzw.  $\gamma_1$  mit  $\tilde{\gamma}_i(0) = \tilde{a}$ .

Dann ist  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$  und  $\tilde{\gamma}_0 \sim \tilde{\gamma}_1$ .

**Beweis:** Sei  $H : I \times I \rightarrow X$  Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Für  $s \in [0, 1]$  sei  $\gamma_s : I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto H(t, s)$ .

Sei  $\tilde{\gamma}_s$  Lift von  $\gamma_s$  mit  $\tilde{\gamma}_s(0) = \tilde{a}$

Sei  $\tilde{H} : I \times I \rightarrow Y$ ,  $\tilde{H}(t, s) := (\tilde{\gamma}_s(t), s)$

Dann gilt:

- (i)  $\tilde{H}$  ist stetig (Beweis wie für Korollar 3.13)
- (ii)  $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma}_s(t) = \tilde{H}(t, 1) = \tilde{\gamma}_1(t)$
- (iii)  $\tilde{H}(0, s) = \tilde{\gamma}_s(0) = \tilde{a}$
- (iv)  $\tilde{H}(1, s) \in p^{-1}(b)$

Da  $p^{-1}(b)$  diskrete Teilmenge von  $Y$  ist

$\Rightarrow \tilde{H}(1, s) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{b}_s \forall s \in I$

$\Rightarrow \tilde{b}_0 = \tilde{b}_1$  und  $H$  ist Homotopie zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$ . ■

### Korollar 3.16

Sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $x_0 \in X, y_0 \in p^{-1}(x_0)$

- a)  $p_1 : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  ist injektiv

b)  $[\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(Y, y_0))] = \deg(p)$

**Beweis:**

- a) Sei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg in  $Y$  um  $y_0$  und  $p_*([\tilde{\gamma}]) = e$ , also  $p \circ \tilde{\gamma} \sim \gamma_{x_0}$

Nach Proposition 3.15 ist dann  $\tilde{\gamma}$  homotop zum Lift des konstanten Wegs  $\gamma_{x_0}$  mit Anfangspunkt  $y_0$ , also zu  $\gamma_{y_0} \Rightarrow [\tilde{\gamma}] = e$

- b) Sei  $d = \deg p, p^{-1}(x_0) = \{y_0, y_1, \dots, y_{d-1}\}$ . Für einen geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $X$  um  $x_0$  sei  $\tilde{\gamma}$  die Liftung mit  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ .

$\tilde{\gamma}(1) \in \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$  hängt nur von  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  ab.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0(1) &= \tilde{\gamma}_1(1) \\ \Leftrightarrow [\tilde{\gamma}_0 * \tilde{\gamma}_1^{-1}] &\in \pi_1(Y, y_0) \\ \Leftrightarrow [\gamma_0 * \gamma_1^{-1}] &\in p_*(\pi_1(Y, y_0)) \end{aligned}$$

Zu  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  gibt es Weg  $\delta_i$  in  $Y$  mit  $\delta_i(0) = y_0$  und  $\sigma_i(1) = y_i$

$\Rightarrow p * \delta_i$  ist geschlossener Weg in  $X$  um  $x_0$ .

$\Rightarrow \sigma_i = p * \delta_i$

$\Rightarrow$  Jedes  $y_i$  mit  $i = 0, \dots, d-1$  ist  $\tilde{\gamma}(1)$  für ein  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$

### Korollar 3.17

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung und  $X$  einfach zusammenhängend.

Dann ist  $p$  ein Homöomorphismus.

**Beweis:** Wegen Korollar 48.a ist auch  $Y$  einfach zusammenhängend und wegen Korollar 48.b ist  $\deg(p) = 1$ ,  $p$  ist also bijektiv.

Nach 12.2 ist  $p$  offen  $\Rightarrow p^{-1}$  ist stetig. ■

Was  
ist  
das?

### Definition 49

Eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt **universell**, wenn  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

### Beispiel 33

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

$$S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \text{ für } n \geq 2$$

### Satz 3.18

Sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung,  $q : Y \rightarrow X$  weitere Überlagerung.

Sei  $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}, y_0 \in Y$  mit  $q(y_0) = x_0, p(\tilde{x}_0) = x_0$ .

Dann gibt es genau eine Überlagerung  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow Y$  mit  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = y_0$ .

**Beweis:** Sei  $z \in \tilde{X}, y_z : I \rightarrow \tilde{X}$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $z$ .

Sei  $\delta_Z$  die Liftung von  $p \circ \gamma_z$  nach  $y$  mit  $\delta_Z(0) = y_0$ .

Setze  $\tilde{p}(z) = \delta_Z(1)$ .

Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, hängt  $\tilde{p}(z)$  nicht vom gewählten  $y_z$  ab.

Offensichtlich ist  $q(\tilde{p}(z)) = p(z)$ .

$\tilde{p}$  ist stetig (in  $z \in \tilde{X}$ ). Sei  $W \subseteq Y$  offene Umgebung von  $\tilde{p}(z)$ .

$\xrightarrow{q \text{ offen}} q(W)$  ist offene Umgebung von  $p(z) \cdot d(\tilde{p}(z))$ .

Sei  $U \subseteq q(W)$  offen wie in Definition 45 und  $V \subseteq q^{-1}(U)$  die Komp. die  $\tilde{p}(z)$  enthält.

Was?

O. B. d. A. sei  $V \subseteq W$ .

Sei  $Z := p^{-1}(U)$ . Für  $u \in Z$  sei  $\delta$  ein Weg in  $Z$  von  $z$  nach  $u$ .

$\Rightarrow \gamma_Z * \delta$  ist Weg von  $x_0$  nach  $u$

$\Rightarrow \tilde{p}(u) \in V$

$\Rightarrow Z \subseteq p^{-1}(W)$

$\Rightarrow \tilde{p}$  ist stetig

### Korollar 3.19

Sind  $p : X \rightarrow X$  und  $q : \tilde{Y} \rightarrow X$  universelle Überlagerungen, so sind  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  homöomorph.

**Beweis:** Seien  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = x_0$  und  $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{Y}$ .

Nach Satz 3.18 gibt es genau eine Überlagerung

$$f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y} \text{ mit } f(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \text{ und } q \circ f = p$$

und genau eine Überlagerung

$$g : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \text{ mit } g(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0 \text{ und } p \circ g = q$$

Damit gilt:  $p \circ q \circ f = q \circ f = p$ ,  $q \circ f \circ g = p \circ g = q$ . Also ist  $g \circ f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  Lift von  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $(g \circ f)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ .

Da auch  $\text{id}_{\tilde{x}}$  diese Eigenschaft hat, folgt mit Korollar 3.12:  $g \circ f = \text{id}_{\tilde{X}}$ . Analog  $f \circ g = \text{id}_{\tilde{Y}}$ .

■

Hier stimmt was mit den Tilden nicht

Die Frage, wann es eine universelle Überlagerung gibt, beantwortet der folgende Satz:

### Satz 3.20

Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum in dem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Mengen hat.

Dann gibt es eine universelle Überlagerung.

**Beweis:** Sei  $x_0 \in X$  und  $\tilde{X} := \{ (x, [\gamma]) \mid x \in X, \gamma \text{ Weg von } x_0 \text{ nach } x \}$  und  $p : \tilde{X} \rightarrow X, (x, [\gamma]) \mapsto x$ .

Die Topologie auf  $\tilde{X}$  ist folgende: Definiere eine Umgebungsbasis von  $(x, [\gamma])$  wie folgt: Es sei  $U$  eine einfach zusammenhängende Umgebung von  $x$  und  $\tilde{U} = \tilde{U}(x, [\gamma]) := \{ (y, [\gamma * \alpha]) \mid y \in U, \alpha \text{ Weg in } U$   $p$  ist Überlagerung:  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  bijektiv.  $p$  ist stetig und damit  $p|_{\tilde{U}}$  ein Homöomorphismus.

Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  Wege von  $x_0$  nach  $x$  und  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , so ist  $\tilde{U}(x, [\gamma_1]) \cap \tilde{U}(x, [\gamma_2]) = \emptyset$ , denn: Ist  $\gamma_1 * \alpha \sim \gamma_2 * \alpha$ , so ist auch  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ . Also ist  $p$  eine Überlagerung.

$\tilde{X}$  ist einfach zusammenhängend: Es sei  $\tilde{x}_0 := (x_0, e)$  und  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$  ein geschlossener Weg um  $\tilde{x}_0$ .

Sei  $\gamma := p(\tilde{\gamma})$ .

Annahme:  $[\tilde{\gamma}] \neq e$

Mit Korollar 48.a folgt dann:  $[\gamma] \neq e$ .

Dann ist der Lift von  $\gamma$  nach  $\tilde{x}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $(x_0, [\gamma])$ . Widerspruch.

### Definition 50

Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus.

$f$  heißt **Decktransformation** von  $p \Leftrightarrow p \circ f = p$ .

Ist  $p$  eine Decktransformation und  $|\text{Deck}(Y/X)| = \deg p$ , so heißt  $p$  **regulär**.

### Korollar 3.21

- Die Decktransformationen von  $p$  bilden eine Gruppe, die sog. **Decktransformationengruppe**  $\text{Deck}(p) = \text{Deck}(Y/X) = \text{Deck}(Y \rightarrow X)$
- Ist  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  und  $f \neq \text{id}$ , dann hat  $f$  keinen Fixpunkt.
- $|\text{Deck}(Y/X)| \leq \deg p$
- Ist  $p$  eine reguläre Decktransformation, dann gilt:  $\forall x \in X : \text{Deck}(Y/X)$  operiert transitiv auf der Menge der Urbilder  $p^{-1}(x)$ .

### Beweis:

- Es gilt:

- $\text{id}_Y \in \text{Deck } Y/X$ ,
- $f, g \in \text{Deck } Y/X \Rightarrow p \circ (f \circ g) = (p \circ f) \circ g = p \circ g \Rightarrow f \circ g \in \text{Deck } Y/X$
- $f \in \text{Deck } Y/X \Rightarrow p \circ f = p \Rightarrow p \circ f^{-1} = (p \circ f) \circ f^{-1} = p \circ (f \circ f^{-1}) = p \Rightarrow f^{-1} \in \text{Deck } Y/X$

- Die Menge

$$\text{Fix}(f) = \{ y \in Y \mid f(y) = y \}$$

ist abgeschlossen als Urbild der Diagonale  $\Delta \subseteq Y \times Y$  unter der stetigen Abbildung  $y \mapsto (f(y), y)$ . Außerdem ist  $\text{Fix}(f)$  offen, denn ist  $y \in \text{Fix}(f)$ , so sei  $U$  eine Umgebung von  $p(y) \in X$  wie in Definition 45 und  $U \subseteq p^{-1}(U)$  die Komponente, die  $y$  enthält; also  $p : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $W := f^{-1}(V) \cap V$  offene Umgebung von  $y$ .

Für  $z \in W$  ist  $f(z) \in V$  und  $p(f(z)) = p(z)$ . Da  $p$  injektiv auf  $V$  ist, folgt  $f(z) = z$ , d. h.  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ .

Da  $Y$  zusammenhängend ist, folgt aus  $\text{Fix}(\tilde{f}) \neq \emptyset$  schon  $\text{Fix}(f) = Y$ , also  $f = \text{id}_Y$ .

- c) Es sei  $x_0 \in X$ ,  $\deg(p) = d$  und  $p^{-1}(x_0) = \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$ . Für  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  ist  $f(y_0) = \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$ .

Zu  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  gibt es höchstens ein  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  mit  $f(y_0) = y_i$ , denn ist  $f(y_0) = g(y_0)$ , so ist  $(g^{-1} - f)y_0 = y_0$ , also nach 50.c  $g^{-1} \circ f = \text{id}_Y$ .

### Beispiel 34

- 1)  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : \text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) = \{t \mapsto t + n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$
- 2)  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 : \text{Deck}(\mathbb{R}^2/T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$
- 3)  $p : S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) : \text{Deck}(g^n/\mathcal{P}^n(\mathbb{R})) = \{x \mapsto \pm x\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Was steht hier?

Nun werden wir eine Verbindung zwischen der Decktransformationsgruppe und der Fundamentalgruppe herstellen:

### Satz 3.22

Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung, so gilt:

$$\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

**Beweis:** Wähle  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Es sei  $\rho : \text{Deck}(\tilde{x}/x) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  die Abbildung, die  $f$  auf  $[p(\gamma_f)]$  abbildet, wobei  $\gamma_f$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $f(\tilde{x}_0)$  sei. Da  $\tilde{x}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\gamma_f$  bis auf Homotopie eindeutig bestimmt und damit auch  $\rho$  wohldefiniert.

- $\rho$  ist Gruppenhomomorphismus: Seien  $f, g \in \text{Deck}(\tilde{X}/X) \Rightarrow \gamma_{g \circ f} = \gamma_g * g(\gamma_f) \Rightarrow p(\gamma_{g \circ f}) = p(\gamma_g) * \underbrace{(p \circ g)(\gamma_f)}_{=p} = \rho(g) \neq \rho(f)$
- $\rho$  ist injektiv:  $\rho(f) = e \Rightarrow p(\gamma_f) \sim \gamma_{x_0} \xrightarrow{3.14} \gamma_f \sim \gamma_{\tilde{x}_0} \Rightarrow f(x_0) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{50.c} f = \text{id}_{\tilde{x}}$ .
- $\rho$  ist surjektiv: Sei  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\tilde{\gamma}$  Lift von  $\gamma$  nach  $\tilde{x}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$ . Der Endpunkt von  $\tilde{\gamma}$  sei  $\tilde{x}_1$ .

$p$  ist reguläre Überlagerung: Seien  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ . Nach Satz 3.18 gibt es genau eine Überlagerung  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $p = p \circ \tilde{p}$  und  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ . Somit ist  $\tilde{p}$  eine Decktransformation und damit  $p$  eine reguläre Überlagerung.

Da  $p$  reguläre Überlagerung ist, gibt es ein  $f \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$  mit  $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ .

Aus der Definition von  $\rho$  folgt:  $\rho(f) = p(\gamma_f) = \gamma$

■

### Beispiel 35 (Bestimmung von $\pi_1(S^1)$ )

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  ist universelle Überlagerung, da  $\mathbb{R}$  zusammenhängend ist.

Für  $n \in \mathbb{Z}$  sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t + n$  die Translation um  $n$ .

Es gilt:  $(p \circ f_n)(t) = p(f_n(t)) = p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , d. h.  $f_n$  ist Decktransformation.

Ist umgekehrt  $g$  irgendeine Decktransformation, so gilt insbesondere für  $t = 0$ :

$$(\cos(2\pi g(0)), \sin(2\pi g(0))) = (p \circ g)(0) = p(0) = (1, 0)$$

Es existiert  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $g(0) = n$ . Da auch  $f_n(0) = 0 + n = n$  gilt, folgt mit Korollar 50.c  $g = f_n$ . Damit folgt:

$$\text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) = \{ f_n \mid n \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$$

Nach Satz 3.22 also  $\pi_1(S^1) \cong \text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z}$

## 3.4 Gruppenaktionen

### Definition 51

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge.

Eine **Gruppenaktion** oder kurz **Aktion** von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $\circ$ :

$$\circ : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

für die gilt:

- (i)  $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$
- (ii)  $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

### Beispiel 36

- 1)  $G = (\mathbb{Z}, +), X = \mathbb{R}, nx = x + n$
- 2)  $G$  operiert auf  $X = G$  durch  $g \circ h := g \cdot h$
- 3)  $G$  operiert auf  $X = G$  durch  $g \circ h := g \cdot h \cdot g^{-1}$ , denn
  - i)  $1_G \circ h = 1_G \cdot h \cdot 1_G^{-1} = h$
  - ii)

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_2) \circ h &= (g_1 \cdot g_2) \cdot h \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot h \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ h) \end{aligned}$$

### Definition 52

Sei  $G$  eine Gruppe,  $X$  ein topologischer Raum und  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenaktion.

- a)  $G$  operiert durch Homomorphismen, wenn für jedes  $g \in G$  die Abbildung

$$m_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$$

ein Homöomorphismus ist.

- b) Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so heißt die Aktion  $\circ$  **stetig**, wenn  $\circ : G \times X \rightarrow X$  stetig ist.

### Korollar 3.23

Jede stetige Aktion ist eine Aktion durch Homöomorphismen.

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $\circ|_{\{g\} \times X} : X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$  stetig.

Die Umkehrabbildung zu  $m_g$  ist  $m_{g^{-1}}$ :

$$\begin{aligned}(m_{g^{-1}} \circ m_g)(x) &= m_{g^{-1}}(m_g(x)) \\&= m_{g^{-1}}(g \circ x) \\&= g^{-1} \circ (g \circ x) \\&\stackrel{51.ii}{=} (g^{-1} \cdot g) \circ x \\&= 1_G \circ x \\&\stackrel{51.i}{=} x\end{aligned}$$

### Beispiel 37

In Beispiel 36.1 operiert  $\mathbb{Z}$  durch Homöomorphismen.

### Korollar 3.24

Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge.

- a) Die Gruppenaktion von  $G$  auf  $X$  entsprechen bijektiv den Gruppenhomomorphismen  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X) = \text{Sym}(X) = \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv} \}$
- b) Ist  $X$  ein topologischer Raum, so entsprechen dabei die Aktionen durch Homöomorphismus den Gruppenhomomorphismen  $G \rightarrow \text{Homo}(X)$

### Beweis:

Sei  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Aktion von  $G$  auf  $X$ . Dann sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X)$  definiert durch  $\varrho(g)(X) = g \cdot x \quad \forall g \in G, x \in X$ , also  $\varrho(g) = m_g$ .

$\varrho$  ist Homomorphismus:  $\varrho(g_1 \cdot g_2) = m_{g_1 \cdot g_2} = m_{g_1} \circ m_{g_2} = \varrho(g_1) \circ \varrho(g_2)$ , denn für  $x \in X$ :  $\varrho(g_1 \cdot g_2)(x) = (g_1 \cdot g_2) \circ x = g_1 \circ (g_2 \circ x) = \varrho(g_1)(\varrho(g_2)(x)) = (\varrho(g_1) \circ \varrho(g_2))(x)$

Umgekehrt: Sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X)$  Gruppenhomomorphismus. Definiere  $\circ : G \times X \rightarrow X$  durch  $g \circ x = \varrho(g)(x)$ .

z. Z. 51.ii:

$$\begin{aligned}g_1 \circ (g_2 \circ x) &= \varrho(g_1)(g_2 \circ x) \\&= \varrho(g_1)(\varrho(g_2)(x)) \\&= (\varrho(g_1) \circ \varrho(g_2))(x) \\&\stackrel{\varrho \text{ ist Hom.}}{=} \varrho(g_1 \cdot g_2)(x) \\&= (g_1 \cdot g_2) \circ x\end{aligned}$$

z. Z. 51.i:  $1_G \cdot x = \varrho(1_G)(x) = \text{id}_X(x) = x$ , weil  $\varrho$  Homomorphismus ist.

### Beispiel 38

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ .

Dann operiert  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $\tilde{X}$  durch Homöomorphismen wie folgt:

Für  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  und  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  sei  $[\gamma] \circ \tilde{x} = \gamma \tilde{*} \varrho(1)$  wobei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}$  in  $\tilde{X}$  sei,  $\varrho := p(\tilde{\delta}) = p \circ \delta$ .

Also:  $\delta$  ist ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x = p(\tilde{x})$  und  $\widetilde{\gamma * \delta}$  die Liftung von  $\gamma * \delta$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$ .

$[\gamma] \cdot \tilde{x}$  hängt nicht von der Wahl von  $\tilde{\gamma}$  ab; ist  $\tilde{\gamma}'$  ein anderer Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}$ , so sind  $\tilde{\delta}$  und  $\tilde{\delta}'$  homotop, also auch  $\widetilde{\gamma * \delta}$  und  $\widetilde{\gamma * \delta'}$  homotop.

Gruppenaktion, denn:

- i)  $[e] \circ \tilde{x} = \widetilde{e * \delta} = \tilde{x}$
- ii)  $\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2 * \delta}(1) = [\gamma_1 * \gamma_2] \circ \tilde{x} = ([\gamma_1] * [\gamma_2]) \circ \tilde{x}$   
 $\gamma_1 * \gamma_2 * \delta(1) = [\gamma_1] \circ (\gamma_2 * \delta)(1) = [\gamma_1] \circ ([\gamma_2] \circ \tilde{x})$

**Erinnerung:** Die Konstruktion aus Korollar 3.24 induziert zu der Aktion  $\pi_1(X, x_0)$  aus Beispiel 38 einen Gruppenhomomorphismus  $\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Homo}(X)$ . Nach Satz 3.22 ist  $\varrho(\pi_1(X, x_0)) = \text{Deck}(\tilde{X}/X) = \left\{ f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \text{ Homöomorphismus} \mid p \circ f = p \right\}$

### Beispiel 39

Sei  $X := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $\tau$  die Drehung um die  $z$ -Achse um  $180^\circ$ .

$g = \langle \tau \rangle = \{ \text{id}, \tau \}$  operiert auf  $S^2$  durch Homöomorphismen.

Frage: Was ist  $S^2/G$ ? Ist  $S^2/G$  eine Mannigfaltigkeit?

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 6

Berechnen Sie die Homologiegruppen von  $S^1$  und  $S^2$ , indem Sie zu  $S^1$  bzw.  $S^2$  homöomorphe Simplicialkomplexe betrachten.

### Aufgabe 7

Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $e$  ihr neutrales Element. Man beweise, dass  $\pi_1(G, e)$  abelsch ist.

# Lösungen der Übungsaufgaben

## Lösung zu Aufgabe 1

**Teilaufgabe a)** Es gilt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_X$ .
- (ii)  $\mathfrak{T}_X$  ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen, d. h. es gilt für alle  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_X : U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}_X$ .
- (iii) Auch unter beliebigen Vereinigungen ist  $\mathfrak{T}_X$  abgeschlossen, d. h. es gilt für eine beliebige Indexmenge  $I$  und alle  $U_i \in \mathfrak{T}_X$  für alle  $i \in I : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}_X$

Also ist  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ein topologischer Raum.

**Teilaufgabe b)** Wähle  $x = 1, y = 0$ . Dann gilt  $x \neq y$  und die einzige Umgebung von  $x$  ist  $X$ . Da  $y = 0 \in X$  können also  $x$  und  $y$  nicht durch offene Mengen getrennt werden.  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ist also nicht hausdorffsch.

**Teilaufgabe c)** Nach Bemerkung 3 sind metrische Räume hausdorffsch. Da  $(X, \mathfrak{T}_X)$  nach (b) nicht hausdorffsch ist, liefert die Kontraposition der Trennungseigenschaft, dass  $(X, \mathfrak{T}_X)$  kein metrischer Raum sein kann.

## Lösung zu Aufgabe 2

**Teilaufgabe a)**

**Beh.:**  $\forall a \in \mathbb{Z} : \{a\}$  ist abgeschlossen.

Sei  $a \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann gilt:

Hat jemand diesen Beweis?

**Teilaufgabe b)**

**Beh.:**  $\{-1, 1\}$  ist nicht offen

**Bew.:** durch Widerspruch

Annahme:  $\{-1, 1\}$  ist offen.

Dann gibt es  $T \subseteq \mathfrak{B}$ , sodass  $\bigcup_{M \in T} M = \{-1, 1\}$ . Aber alle  $U \in \mathfrak{B}$  haben unendlich viele Elemente. Auch endlich viele Schnitte von Elementen in  $\mathfrak{B}$  haben unendlich viele Elemente  $\Rightarrow$  keine endliche nicht-leere Menge kann in dieser Topologie offen sein  $\Rightarrow \{-1, 1\}$  ist nicht offen. ■

**Teilaufgabe c)**

**Beh.:** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

**Bew.:** durch Widerspruch

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen  $p \in \mathbb{P}$

Dann ist

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\} \stackrel{\text{FS d. Arithmetik}}{=} \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p}$$

endlich. Das ist ein Widerspruch zu  $|\mathbb{Z}|$  ist unendlich und  $|\{-1, 1\}|$  ist endlich. ■

### Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Beh.:** Die offenen Mengen von  $P$  sind Vereinigungen von Mengen der Form

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} P_i$$

wobei  $J \subseteq \mathbb{N}$  endlich und  $U_j \subseteq P_j$  offen ist.

**Beweis:** Nach Definition der Produkttopologie bilden Mengen der Form

$$\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \notin J}} P_i, \text{ wobei } J \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich und } U_j \subseteq P_j \text{ offen } \forall j \in J$$

eine Basis der Topologie. Damit sind die offenen Mengen von  $P$  Vereinigungen von Mengen der obigen Form. ■

(b) **Beh.:** Die Zusammenhangskomponenten von  $P$  sind alle einpunktig.

**Beweis:** Es seien  $x, y \in P$  und  $x$  sowie  $y$  liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente  $Z \subseteq P$ . Da  $Z$  zusammenhängend ist und  $\forall i \in I : p_i : P \rightarrow P_i$  ist stetig, ist  $p_i(Z) \subseteq P_i$  zusammenhängend für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Die zusammenhängenden Mengen von  $P_i$  sind genau  $\{0\}$  und  $\{1\}$ , d. h. für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt entweder  $p_i(Z) \subseteq \{0\}$  oder  $p_i(Z) \subseteq \{1\}$ . Es sei  $z_i \in \{0, 1\}$  so, dass  $p_i(Z) \subseteq \{z_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt also:

$$\underbrace{p_i(x)}_{=x_i} = z_i = \underbrace{p_i(y)}_{=y_i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Somit folgt:  $x = y$  ■

### Lösung zu Aufgabe 4

Kommt noch.

### Lösung zu Aufgabe 5

(a) **Vor.:** Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit.

**Beh.:**  $M$  ist wegzusammehängend  $\Leftrightarrow M$  ist zusammenhängend

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Da  $M$  insbesondere ein topologischer Raum ist folgt diese Richtung direkt aus Korollar 1.17.

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $x, y \in M$  und

$$Z := \{ z \in M \mid \exists \text{Weg von } x \text{ nach } z \}$$

Es gilt:

- (i)  $Z \neq \emptyset$ , da  $M$  lokal wegzusammenhängend ist
- (ii)  $Z$  ist offen, da  $M$  lokal wegzusammenhängend ist
- (iii)  $Z^C := \{ \tilde{z} \in M \mid \nexists \text{Weg von } x \text{ nach } \tilde{z} \}$  ist offen

Da  $M$  eine Mannigfaltigkeit ist, existiert zu jedem  $\tilde{z} \in Z^C$  eine offene und wegzusammenhängende Umgebung  $U_{\tilde{z}} \subseteq M$ .

Es gilt sogar  $U_{\tilde{z}} \subseteq Z^C$ , denn gäbe es ein  $U_{\tilde{z}} \ni \bar{z} \in Z$ , so gäbe es Wege  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M, \gamma_2(0) = \bar{z}, \gamma_2(1) = x$  und  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M, \gamma_1(0) = \tilde{z}, \gamma_1(1) = \bar{z}$ . Dann wäre aber

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(2x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2x - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ein stetiger Weg von  $\tilde{z}$  nach  $x \Rightarrow$  Widerspruch.

Da  $M$  zusammenhängend ist und  $M = \underbrace{Z}_{\text{offen}} \cup \underbrace{Z^C}_{\text{offen}}$ , sowie  $Z \neq \emptyset$  folgt  $Z^C = \emptyset$ .  
Also ist  $M = Z$  wegzusammenhängend. ■

(b) **Beh.:**  $X$  ist wegzusammenhängend.

**Beweis:**  $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  sind homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .  
Also sind die einzigen kritischen Punkte, die man nicht verbinden können könnte  $0_1$  und  $0_2$ .

Da  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, existiert ein Weg  $\gamma_1$  von  $0_1$  zu einem beliebigen Punkt  $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ .

Da  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  ebenfalls homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, existiert außerdem ein Weg  $\gamma_2$  von  $a$  nach  $0_2$ . Damit existiert ein (nicht einfacher) Weg  $\gamma$  von  $0_1$  nach  $0_2$ . ■

## Lösung zu Aufgabe 6

Kommt noch.

## Lösung zu Aufgabe 7

Kommt noch.

# Bildquellen

Alle Bilder, die hier nicht aufgeführt sind, wurden selbst erstellt.

Teilweise wurden die im folgenden aufgelisteten Bilder noch leicht modifiziert.

Abb. 0.1a  $S^2$ : Tom Bombadil, [tex.stackexchange.com/a/42865](https://tex.stackexchange.com/a/42865)

Abb. 0.1b Würfel: Jan Hlavacek, [tex.stackexchange.com/a/12069](https://tex.stackexchange.com/a/12069)

Abb. 0.1e  $T^2$ : Jake, [tex.stackexchange.com/a/70979/5645](https://tex.stackexchange.com/a/70979/5645)

Abb. 1.6 Stereographische Projektion: [texample.net/tikz/examples/map-projections](https://texample.net/tikz/examples/map-projections)

Abb. 1.11 Knoten von Jim.belk aus der „Blue knots“-Serie:

- Trivialer Knoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Uncrossed\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Uncrossed_Knot.png)
- Kleeblattknoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Trefoil\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot.png)
- Achterknoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Figure-Eight\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Figure-Eight_Knot.png)
- $6_2$ -Knoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_6\\_2\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_6_2_Knot.png)

Abb. 1.12 Reidemeister-Züge: YAMASHITA Makoto ([1](#), [2](#), [3](#))

Abb. 1.13 Kleeblattknoten, 3-Färbung: Jim.belk, [commons.wikimedia.org/wiki/File:Tricoloring.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tricoloring.png)

Abb. 2.1 Doppeltorus: Oleg Alexandrov, [commons.wikimedia.org/wiki/File:Double\\_torus\\_illustration.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double_torus_illustration.png)

Abb. 3.3b 3 Pfade auf Torus: Charles Staats, [tex.stackexchange.com/a/149991](https://tex.stackexchange.com/a/149991)

Abb. 3.10 Überlappung vom  $S^1$  mit  $\mathbb{R}$ : Alex, [tex.stackexchange.com/a/149706](https://tex.stackexchange.com/a/149706)

# Symbolverzeichnis

## Mengenoperationen

$A^C$	Komplement der Menge $A$
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von $M$
$\overline{M}$	Abschluss der Menge $M$
$\partial M$	Rand der Menge $M$
$M^\circ$	Inneres der Menge $M$
$A \times B$	Kreuzprodukt zweier Mengen
$A \subseteq B$	Teilmengenbeziehung
$A \subsetneq B$	echte Teilmengenbeziehung
$A \setminus B$	$A$ ohne $B$
$A \cup B$	Vereinigung
$A \dot{\cup} B$	Disjunkte Vereinigung
$A \cap B$	Schnitt

## Weiteres

$\mathfrak{B}$	Basis einer Topologie
$\mathfrak{B}_\delta(x)$	$\delta$ -Kugel um $x$
$\mathfrak{T}$	Topologie
$\mathcal{P}$	Projektiver Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$X/\sim$	$X$ modulo $\sim$
$[x]_\sim$	Äquivalenzklassen von $x$ bzgl. $\sim$
$\ x\ $	Norm von $x$
$ x $	Betrag von $x$
$S^n$	Sphäre
$T^n$	Torus

## Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen ( $\{1, 2, 3, \dots\}$ )
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen ( $\mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ )
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen ( $\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ )
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen ( $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$ )
$\mathbb{R}^+$	Echt positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}^\times$	Einheitengruppe von $\mathbb{R}$ ( $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ )
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen ( $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ )
$\mathbb{P}$	Primzahlen ( $2, 3, 5, 7, \dots$ )

$[\gamma]$	Homotopieklassse eines Weges $\gamma$
$\pi_X$	Projektion auf $X$
$f _U$	$f$ eingeschränkt auf $U$
$f^{-1}(M)$	Urbild von $M$
$\text{Rg}(M)$	Rang von $M$
$\chi(K)$	Euler-Charakteristik von $K$
$\Delta^k$	Standard-Simplex
$X \# Y$	Verklebung von $X$ und $Y$
$\gamma_1 * \gamma_2$	Zusammenhängen von Wegen

## Gruppen

$\text{Homo}(X)$	Homöomorphismengruppe
$\text{Iso}(X)$	Isometriengruppe
$\text{GL}_n(K)$	Allgemeine lineare Gruppe (general linear group)
$\text{Perm}(X)$	Permutationsgruppe
$\text{Sym}(X)$	Symmetrische Gruppe
$f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$	Einbettung der Kreislinie in die Ebene
$\pi_1(X, x)$	Fundamentalgruppe im topologischen Raum $X$ um $x \in X$

# Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
differenzierbare, 26  
homotope, 44  
offene, 46  
simpliziale, 31  
stetige, 8  
abgeschlossen, 2  
Abschluss, 3  
Achterknoten, 18  
Atlas, 21  
Basis, 3  
Baum, 33  
Belit-Zahl, 36  
bergangsfunktion, 25  
Cantorsches Diskontinuum, 20  
 $C^k$ -Struktur, 25  
Decktransformation, 52  
  reguläre, 52  
Decktransformationengruppe, 52  
dicht, 3  
Diffeomorphismus, 26  
Dimension, 30  
diskret, 47  
einfach zusammenhängend, 43  
Euler-Charakteristik, *siehe* Eulerzahl  
Eulersche Polyederformel, 34  
Eulerzahl, 32  
Färbbarkeit, 19  
Fläche  
  reguläre, 26  
Fundamentalgruppe, 42  
Graph, 33  
Grenzwert, 7  
Gruppe  
  topologische, 29  
Gruppenaktion, 54, 54–56  
  stetige, 54  
Hilbert-Kurve, 17  
Homöomorphismengruppe, 9  
Homöomorphismus, 8  
Homotopie, 39  
Homotopiegruppe, 36  
Homotopiekasse, 42  
Inneres, 3  
Isotopie, 18  
Jordankurve, 17  
  geschlossene, 17  
Karte, 21  
Kartenwechsel, 25  
Kern  
  offener, 3  
Kleeblatknoten, 18  
Klumpentopologie, *siehe* triviale Topologie  
Knoten, 18, 16–19  
  äquivalente, 18  
  trivialer, 18  
Knotendiagramm, 18  
kompakt, 13  
Kreis, 33  
Lage  
  allgemeine, 30  
Lie-Gruppe, 29  
Liftung, 47  
Limes, 7  
Mannigfaltigkeit, 21  
  differenzierbare, 25  
  glatte, 25  
  mit Rand, 24  
Metrik, 5  
  diskrete, 6  
  SNCF, 6  
Neilsche Parabel, 24  
offen, 2

- Oktaeder, 30
- Polyzyylinder, 16
- Produkttopologie, 4
- Projektion
  - stereographische, 9
- Quotiententopologie, 4
- Rand, 3, 25
- Raum
  - hausdorffscher, 7
  - metrischer, 5
  - topologischer, 2
- Realisierung
  - geometrische, 30
- Seite, 30
- Sierpiński-Raum, 3, 20
- Simplex, 30
- Simplizialkomplex, 30
- Sphäre
  - exotische, 26
- Spurtopologie, 3
- Standard-Simplex, 30
- Standardtopologie, 2
- sternförmig, 42
- Stetigkeit, 8–10
- Struktur
  - differenzierbare, 25
- Subbasis, 3
- Teilraum, 3
- Teilsimplex, 30
- Topologie
  - diskrete, 2, 6
  - euklidische, 2
  - triviale, 2
  - Zariski, 2, 11, 13
- Torus, ii
- Total Unzusammenhängend, 59
- Überdeckung, 13
- Überlagerung, 45, 45–54
  - universelle, 50
- Umgebung, 3
- Verklebung, 22
- verträglich, 25
- Würfel, 30
- Weg, 16