

Einführung in die  
Geometrie und Topologie



# Vorwort

Dieses Skript wurde im Wintersemester 2013/2014 von Martin Thoma geschrieben. Es beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich sowie die Mitschriften einiger Übungen und Tutorien.

Das Skript ist kostenlos über [martin-thoma.com/geotopo](http://martin-thoma.com/geotopo) verfügbar. Wer es gerne in A5 (Schwarz-Weiß, Klebebindung) für ca. 10 Euro hätte, kann mir eine Email schicken ([info@martin-thoma.de](mailto:info@martin-thoma.de)).

## Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Tatsächlich basiert die Struktur dieses Skripts auf der Vorlesung von Herrn Prof. Dr. Herrlich und ganze Abschnitte konnten direkt mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X umgesetzt werden. Vielen Dank für die Erlaubnis, Ihre Inhalte in diesem Skript einzubauen zu dürfen!

Vielen Dank auch an Frau Lenz und Frau Randecker, die es mir erlaubt haben, ihre Übungsaufgaben und Lösungen zu benutzen.

Jérôme Urhausen hat durch Verbesserungsvorschläge und Beweise zu einer Qualitätssteigerung am Skript beigetragen und meine Tutorin Sarah hat mir viele Fragen per Email und nach dem Tutorium beantwortet. Danke!

## Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche  $S^2$  lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum  $\mathbb{R}^2$  oder zu einem Torus  $T^2$ . Für den  $\mathbb{R}^2$  müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

## Erforderliche Vorkenntnisse

Es wird ein sicherer Umgang mit den Quantoren ( $\forall, \exists$ ), Mengenschreibweisen ( $\cup, \cap, \setminus, \emptyset, \mathbb{R}, \mathcal{P}(M)$ ) und ganz allgemein formaler Schreibweise vorausgesetzt. Auch die Beweisführung mittels Widerspruchsbeweisen sollte bekannt sein und der Umgang mit komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , deren Betrag, Folgen und Häufungspunkten nicht weiter schwer fallen. Diese Vorkenntnisse werden vor allem in „Analysis I“ vermittelt.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass (affine) Vektorräume, Faktorräume, lineare Unabhängigkeit, der Spektralsatz und der projektive Raum  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  aus „Lineare Algebra I“ bekannt sind. In „Lineare Algebra II“ wird der Begriff der Orthonormalbasis eingeführt.



Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

Obwohl es nicht vorausgesetzt wird, könnte es von Vorteil sein „Einführung in die Algebra und Zahlentheorie“ gehört zu haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Topologische Grundbegriffe</b>	<b>3</b>
1.1 Topologische Räume . . . . .	3
1.2 Metrische Räume . . . . .	7
1.3 Stetigkeit . . . . .	9
1.4 Zusammenhang . . . . .	12
1.5 Kompaktheit . . . . .	14
1.6 Wege und Knoten . . . . .	18
Übungsaufgaben . . . . .	22
<b>2 Mannigfaltigkeiten und Simplicialkomplexe</b>	<b>24</b>
2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	24
2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	29
2.3 Simplicialkomplex . . . . .	34
Übungsaufgaben . . . . .	42
<b>3 Fundamentalgruppe und Überlagerungen</b>	<b>43</b>
3.1 Homotopie von Wegen . . . . .	43
3.2 Fundamentalgruppe . . . . .	46
3.3 Überlagerungen . . . . .	50
3.4 Gruppenoperationen . . . . .	60
<b>4 Euklidische und nichteuklidische Geometrie</b>	<b>63</b>
4.1 Axiome für die euklidische Ebene . . . . .	63
4.2 Weitere Eigenschaften einer euklidischen Ebene . . . . .	73
4.2.1 Flächeninhalt . . . . .	73
4.3 Hyperbolische Geometrie . . . . .	77
Übungsaufgaben . . . . .	86
<b>5 Krümmung</b>	<b>87</b>
5.1 Krümmung von Kurven . . . . .	87
5.2 Tangentialebene . . . . .	89
5.3 Gauß-Krümmung . . . . .	91
5.4 Erste und zweite Fundamentalform . . . . .	93
<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>98</b>
<b>Bildquellen</b>	<b>104</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>105</b>
<b>Anhang: Definitionen und Sätze</b>	<b>106</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>107</b>



# 1 Topologische Grundbegriffe

## 1.1 Topologische Räume

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B.  $[0, 1]$ . Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

### Bemerkung 1 (Mengen, die offen & abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  mit der „trivialen Topologie“  $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$ .

Es gilt:  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen. Außerdem  $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$  und  $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

### Beispiel 1 (Topologien)

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der von der euklidischen Metrik erzeugten Topologie  $\mathfrak{T}_{\text{Euklid}}$ :

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \\ \text{sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$$

Diese Topologie wird auch „Standardtopologie des  $\mathbb{R}^n$ “ genannt. Sie beinhaltet unter anderem alle offenen Kugeln, aber z. B. auch Schnitte zweier Kugeln mit unterschiedlichem Mittelpunkt (vgl. [Definition 1.ii](#)).

- 2) Jeder metrische Raum  $(X, d)$  ist auch ein topologischer Raum.
- 3) Für eine Menge  $X$  heißt  $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$  „diskrete Topologie“.
- 4)  $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$  heißt „Zariski-Topologie“  
Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X], \text{ sodass } \mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in  $\mathfrak{T}_Z$ .

- 5)  $X := \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$
- 6)  $X := \{0, 1\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$  heißt „Sierpiński Raum“.  $\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}$  sind dort alle abgeschlossenen Mengen.

### Definition 2

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

Gilt eine Eigenschaft in einer Umgebung, so sagt man, dass die Eigenschaft **lokal** gilt.

### Definition 3

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- a)  $M^\circ := \{x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$  heißt **Inneres** oder **offener Kern** von  $M$ .

- b)  $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von  $M$ .

- c)  $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$  heißt **Rand** von  $M$ .

- d)  $M$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\overline{M} = X$  ist.

### Beispiel 2

- 1) Sei  $X = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie und  $M = \mathbb{Q}$ . Dann gilt:  $\overline{M} = \mathbb{R}$  und  $M^\circ = \emptyset$
- 2) Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $M = (a, b)$ . Dann gilt:  $\overline{M} = [a, b]$
- 3) Sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$  und  $M = (a, b)$ . Dann gilt:  $\overline{M} = \mathbb{R}$

### Definition 4

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.
- b)  $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathcal{S}$  ist.

### Beispiel 3 (Basis und Subbasis)

- 1) Jede Basis ist auch eine Subbasis, z.B.  
 $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  ist für  $\mathbb{R}$  mit der Standardtopologie sowohl Basis als auch Subbasis.
- 2) Gegeben sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit euklidischer Topologie  $\mathfrak{T}$ . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n\}$$

ist eine abzählbare Basis von  $\mathfrak{T}$ .

- 3) Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum mit  $X = \{0, 1, 2\}$  und  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, X\}$ . Dann ist  $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$  eine Subbasis von  $\mathfrak{T}$ , da gilt:

- $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$
- $\emptyset, \{0, 1\}$  und  $\{0, 2\} \in \mathcal{S}$
- $\{0\} = \{0, 1\} \cap \{0, 2\}$
- $X = \{0, 1\} \cup \{0, 2\}$

Allerdings ist  $\mathcal{S}$  keine Basis von  $(X, \mathfrak{T})$ , da  $\{0\}$  nicht als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{S}$  erzeugt werden kann.

### Bemerkung 2

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$ , für die  $\mathcal{S}$  Subbasis ist.

### Definition 5

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T}\}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Teilraumtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$ .

Die Teilraumtopologie wird auch *Spurtopologie* oder *Unterraumtopologie* genannt.

### Definition 6

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen}\}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  
 $\mathfrak{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2\}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

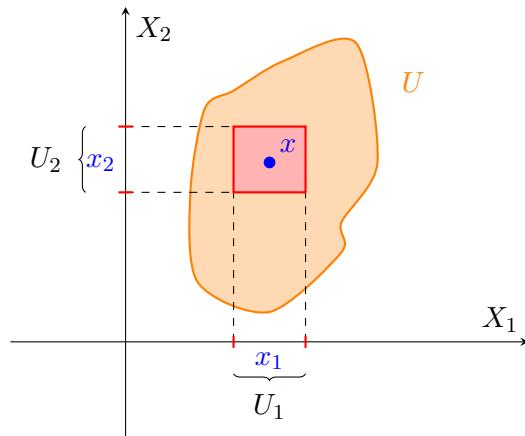


Abbildung 1.1: Zu  $x = (x_1, x_2)$  gibt es Umgebungen  $U_1, U_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq U$

### Beispiel 4 (Produkttopologien)

- 1)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  
 $\Rightarrow$  Die Produkttopologie auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$  überein.
- 2)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie.  $\mathfrak{T}$  Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^2$ :  $U_1 \times U_2$   
(Siehe Abbildung 1.2)

Abbildung 1.2: Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}^2$ **Definition 7**

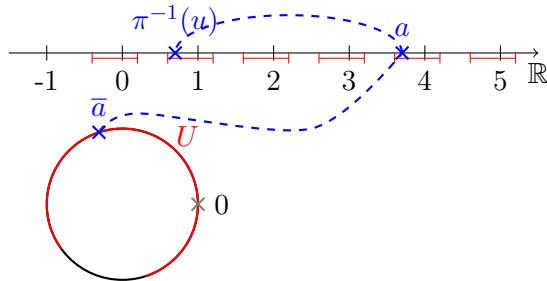
Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : X \rightarrow \overline{X}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ .

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{ U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$  heißt **Quotiententopologie**.

**Beispiel 5**

$$X = \mathbb{R}, a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

**Beispiel 6**

Sei  $X = \mathbb{R}^2$  und  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$  und  $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $X/\sim$  ein Torus.

**Beispiel 7 (Projektiver Raum)**

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ 0 \}, \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen} \\ &\quad \text{Ursprungsgerade} \end{aligned}$$

$$\overline{X} = \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für  $n = 1$ :



## 1.2 Metrische Räume

### Definition 8

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) Definitheit:  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- (ii) Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

### Bemerkung 3

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B} = \{ \mathfrak{B}_r(x) \subseteq \mathcal{P}(X) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+ \}$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ .

### Definition 9

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $\varphi : X \rightarrow Y$  eine Abbildung mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

Dann heißt  $\varphi$  eine **Isometrie** von  $X$  nach  $Y$ .

### Beispiel 8 (Skalarprodukt erzeugt Metrik)

Sei  $V$  ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird  $V$  durch  $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  zum metrischen Raum.

### Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik  $d$  induziert die **diskrete Topologie**.

Abbildung 1.3: Veranschaulichungen zur Metrik  $d$ **Beispiel 10**

$X = \mathbb{R}^2$  und  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$  ist Metrik.

*Beobachtung:*  $d$  erzeugt die euklidische Topologie.

**Beispiel 11 (SNCF-Metrik<sup>1</sup>)**

$$X = \mathbb{R}^2$$

**Definition 10**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Bemerkung 4 (Trennungseigenschaft)**

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

**Beispiel 12 (Topologische Räume und Hausdorff-Räume)**

- 1)  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$  ist ein topologischer Raum, der nicht hausdorffsch ist.
- 2)  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$  ist ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist.

<sup>1</sup>Diese Metrik wird auch „französische Eisenbahnmetrik“ genannt.

### Bemerkung 5 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen)

Seien  $X, X_1, X_2$  Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum von  $X$  ist hausdorffsch.
- b)  $X_1 \times X_2$  ist hausdorffsch.

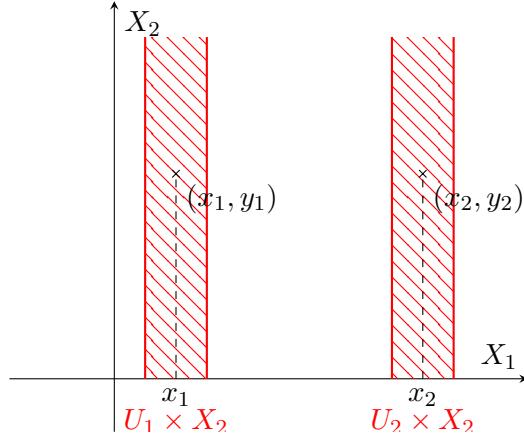


Abbildung 1.4: Wenn  $X_1, X_2$  hausdorffsch sind, dann auch  $X_1 \times X_2$

### Definition 11

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_{n \in \mathbb{N}})$  eine Folge in  $X$ .  $x \in X$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0$  gibt, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

### Bemerkung 6

Ist  $X$  hausdorffsch, so hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine konvergierende Folge und  $x$  und  $y$  Grenzwerte der Folge.

Da  $X$  hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$  falls  $x \neq y$ . Da  $(x_n)$  gegen  $x$  und  $y$  konvergiert, existiert ein  $n_0$  mit  $x_n \in U_x \cap U_y$  für alle  $n \geq n_0$   
 $\Rightarrow x = y$  ■

## 1.3 Stetigkeit

### Definition 12

Seien  $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- a)  $f$  heißt **stetig** : $\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X$ .
- b)  $f$  heißt **Homöomorphismus**, wenn  $f$  stetig ist und es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Bemerkung 7<sup>2</sup>

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta(x, \varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

<sup>2</sup>Es wird die Äquivalenz von Stetigkeit im Sinne der Analysis und Topologie auf metrischen Räumen gezeigt.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in X, \varepsilon > 0$  gegeben und  $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$ .

Dann ist  $U$  offen in  $Y$ .

Def. 12.a  $f^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ . Dann ist  $x \in f^{-1}(U)$ .

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$

$\Rightarrow \{y \in X \mid d_X(x, y) < \delta\} \Rightarrow \text{Beh.}$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq Y$  offen,  $X \in f^{-1}(U)$ .

Dann gibt es  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

Vor Es gibt  $\delta > 0$ , sodass  $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$

$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$  ■

### Bemerkung 8

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:

$f$  ist stetig

$\Leftrightarrow$  für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq Y$  gilt:  $f^{-1}(A) \subseteq X$  ist abgeschlossen.

### Beispiel 13 (Stetige Abbildungen und Homöomorphismen)

1) Für jeden topologischen Raum  $X$  gilt:  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  ist Homöomorphismus.

2) Ist  $Y$  trivialer topologischer Raum, d. h.  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$ , so ist jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig.

3) Ist  $X$  diskreter topologischer Raum, so ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Abbildung  $f$ .

4) Sei  $X = [0, 1], Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  und  $f(t) = e^{2\pi i t}$ .



Abbildung 1.5: Beispiel einer stetigen Funktion  $f$ , deren Umkehrabbildung  $g$  nicht stetig ist.

Die Umkehrabbildung  $g$  ist nicht stetig, da  $g^{-1}(U)$  nicht offen ist (vgl. Abbildung 1.5).

### Bemerkung 9 (Verkettungen stetiger Abbildungen sind stetig)

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen.

Dann ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

**Beweis:** Sei  $U \subseteq Z$  offen  $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .  $g^{-1}(U)$  ist offen in  $Y$  weil  $g$  stetig ist,  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  ist offen in  $X$ , weil  $f$  stetig ist. ■

### Bemerkung 10

a) Für jeden topologischen Raum ist

$$\text{Homöo}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}$$

eine Gruppe.

- b) Jede Isometrie  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- c)  $\text{Iso}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$  ist eine Untergruppe von  $\text{Homöo}(X)$  für jeden metrischen Raum  $X$ .

**Bemerkung 11 (Projektionen sind stetig)**

Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionen

$$\pi_X : (x, y) \mapsto x \text{ und } \pi_Y : (x, y) \mapsto y$$

Wird  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen, so sind  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  stetig. ■

**Beweis:** Sei  $U \subseteq X$  offen  $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$  ist offen in  $X \times Y$ . ■

**Bemerkung 12**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\bar{X} = X/\sim$  der Bahnenraum versehen mit der Quotiententopologie,  $\pi : X \rightarrow \bar{X}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ .

Dann ist  $\pi$  stetig.

**Beweis:** Nach Definition ist  $U \subseteq \bar{X}$  offen  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen. ■

*Beobachtung:* Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass  $\pi$  stetig wird.

**Beispiel 14 (Stereographische Projektion)**

$\mathbb{R}^n$  und  $S^n \setminus \{N\}$  sind homöomorph für beliebiges  $N \in S^n$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} S^n &= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

O. B. d. A. sei  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Gerade durch  $N$  und  $P$  schneidet die Ebene  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .  $P$  wird auf  $\hat{P}$  abgebildet.

$$\begin{aligned} f : S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto \overbrace{L_P \cap H}^{\text{genau ein Punkt}} \end{aligned}$$

wobei  $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\}$  und  $L_P$  die Gerade in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $P$  ist.

Sei  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ , so ist  $x_{n+1} < 1$ , also ist  $L_P$  nicht parallel zu  $H$ . Also schneiden sich  $L_P$  und  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .

Es gilt:  $f$  ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.



Abbildung 1.6: Visualisierung der stereographischen Projektion

## 1.4 Zusammenhang

### Definition 13

Ein Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen  $U_1, U_2$  von  $X$  gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  und  $U_1 \cup U_2 = X$ .

### Bemerkung 13

$X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es gibt keine abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen  $A_1, A_2$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  und  $A_1 \cup A_2 = X$ .

### Bemerkung 14

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt zusammenhängend, wenn  $Y$  als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

### Beispiel 15 (Zusammenhang von Räumen)

1)  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_{\text{Euklid}})$  ist zusammenhängend, denn:

Annahme:  $\mathbb{R}^n = U_1 \dot{\cup} U_2$  mit  $\emptyset \neq U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_{\text{Euklid}}$  existieren.

Sei  $x \in U_1, y \in U_2$  und  $[x, y]$  die Strecke zwischen  $x$  und  $y$ . Sei  $V = [x, y]$ . Nun betrachten wir  $V \subsetneq \mathbb{R}^n$  als (metrischen) Teilraum mit der Teilraumtopologie  $\mathfrak{T}_V$ . Somit gilt  $U_1 \cap [x, y] \in \mathfrak{T}_V$  wegen der Definition der Teilraumtopologie.

Dann gibt es  $z \in [x, y]$  mit  $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$ , aber  $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$ . In jeder Umgebung von  $z$  liegt ein Punkt von  $U_1 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $U_2$  offen.

- 2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$
- 3)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist zusammenhängend.

- 4)  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, da  $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$
- 5)  $\{x\}$  ist zusammenhängend für jedes  $x \in X$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum ist.
- 6)  $\mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend.

### Bemerkung 15

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  zusammenhängend. Dann ist auch  $\overline{A}$  zusammenhängend.

**Beweis:** durch Widerspruch

Annahme:  $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ ,  $A_i$  abgeschlossen,  $A_i \neq \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \dot{\cup} \underbrace{(A \cap A_2)}_{\substack{\text{abgeschlossen} \\ \text{disjunkt}}}$$

Wäre  $A \cap A_1 = \emptyset$

$$\Rightarrow A \subseteq \overline{A} = A_1 \dot{\cup} A_2$$

$$\Rightarrow A \subseteq A_2 \Rightarrow \overline{A} \subseteq A_2$$

$$\Rightarrow A_1 = \emptyset$$

⇒ Widerspruch zu  $A_1 \neq \emptyset$

⇒  $A \cap A_1 \neq \emptyset$  und analog  $A \cap A_2 \neq \emptyset$

⇒ Widerspruch zu  $A$  ist zusammenhängend. ■

### Bemerkung 16

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A, B \subseteq X$  zusammenhängend.

Ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $A \cup B = U_1 \dot{\cup} U_2, U_i \neq \emptyset$  offen

$$\xrightarrow{\text{o. B. d. A.}} A = (A \cap U_1) \dot{\cup} (A \cap U_2) \text{ offen}$$

$$\xrightarrow{A \text{ zhgd.}} A \cap U_1 = \emptyset$$

$$\xrightarrow{A \cap B \neq \emptyset} U_1 \subseteq B$$

$$B = \underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung.}$$

■

■

### Definition 14

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

Für  $x \in X$  sei  $Z(x) \subseteq X$  definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente**.

### Bemerkung 17

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a)  $Z(x)$  ist die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.
- b)  $Z(x)$  ist abgeschlossen.
- c)  $X$  ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

**Beweis:**

- a) Sei  $Z(x) = A_1 \dot{\cup} A_2$  mit  $A_i \neq \emptyset$  abgeschlossen.

O. B. d. A. sei  $x \in A_1$  und  $y \in A_2$ .  $y$  liegt in einer zusammenhängenden Teilmenge  $A$ , die auch  $x$  enthält.  $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$  ist unerlaubte Zerlegung.

- b) Nach **Bemerkung 15** ist  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend  $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x)}$

- c) Ist  $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \xrightarrow{\text{Bem. 16}} Z(y) \cup Z(x)$  ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Z(x) \cup Z(y) \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ &\subseteq Z(y) \Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

### Bemerkung 18

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $A \subseteq X$  zusammenhängend, so ist  $f(A) \subseteq Y$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ , offen, disjunkt.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \\ &\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset} \end{aligned}$$

■

## 1.5 Kompaktheit

### Definition 15

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

$\mathfrak{U}$  heißt eine **Überdeckung** von  $X$ , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in \mathfrak{U} : x \in M$$

### Definition 16

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$

$$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} \text{ mit } U_i \text{ offen in } X$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i \in J \subseteq I} U_i = X \text{ mit } |J| \in \mathbb{N}$$

besitzt.

**Bemerkung 19**

Das Einheitsintervall  $I := [0, 1]$  ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in J}$  eine offene Überdeckung von  $I$ .

Es genügt zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, sodass jedes Teilintervall der Länge  $\delta$  von  $I$  in einem der  $U_i$  enthalten ist. Wenn es ein solches  $\delta$  gibt, kann man  $I$  in endlich viele Intervalle der Länge  $\delta$  unterteilen und alle  $U_i$  in die endliche Überdeckung aufnehmen, die Teilintervalle enthalten.

Angenommen, es gibt kein solches  $\delta$ . Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Intervall  $I_n \subseteq [0, 1]$  der Länge  $1/n$  sodass  $I_n \not\subseteq U_i$  für alle  $i \in J$ .

Sei  $x_n$  der Mittelpunkt von  $I_n$ . Die Folge  $(x_n)$  hat einen Häufungspunkt  $x \in [0, 1]$ . Dann gibt es  $i \in J$  mit  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$ . Dann gibt es  $n_0$ , sodass gilt:  $1/n_0 < \varepsilon/2$  und für unendlich viele<sup>3</sup>  $n \geq n_0$ :  $|x - x_n| < \varepsilon/2$ , also  $I_n \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$  für mindestens ein  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>4</sup>

$\Rightarrow$  Widerspruch

Dann überdecke  $[0, 1]$  mit endlich vielen Intervallen  $I_1, \dots, I_d$  der Länge  $\delta$ . Jedes  $I_j$  ist in  $U_{ij}$  enthalten.

$\Rightarrow U_{j_1}, \dots, U_{j_d}$  ist endliche Teilüberdeckung von  $U$ . ■

**Beispiel 16 (Kompakte Räume)**

1)  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt.

2)  $(0, 1)$  ist nicht kompakt.

$$U_n = (1/n, 1 - 1/n) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1)$$

3)  $\mathbb{R}$  mit der Zariski-Topologie ist kompakt und jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist es auch.

**Bemerkung 20**

Sei  $X$  kompakter Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$ .

Dann gibt es für jedes  $i \in I$  eine offene Teilmenge  $U_i \subseteq X$  mit  $V_i = U_i \cap A$ .

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

$\Rightarrow \mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$  ist offene Überdeckung von  $X$

$$\xrightarrow{X \text{ kompakt}} \text{es gibt } i_1, \dots, i_n \in I, \text{ sodass } \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) = X$$

$$\Rightarrow \left( \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) \right) \cap A = A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(U_{i_j} \cap A)}_{=V_{i_j}} \cup \underbrace{((X \setminus A) \cap A)}_{=\emptyset} = A$$

$$\Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \text{ überdecken } A.$$
■

---

<sup>3</sup>Dies gilt nicht für alle  $n \geq n_0$ , da ein Häufungspunkt nur eine konvergente Teilfolge impliziert.

<sup>4</sup>Sogar für unendlich viele.

**Bemerkung 21**

Seien  $X, Y$  kompakte topologische Räume. Dann ist  $X \times Y$  mit der Produkttopologie kompakt.

**Beweis:** Sei  $(W_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X \times Y$ . Für jedes  $(x, y) \in X \times Y$  gibt es offene Teilmengen  $U_{x,y}$  von  $X$  und  $V_{x,y}$  von  $Y$  sowie ein  $i \in I$ , sodass  $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq W_i$ .

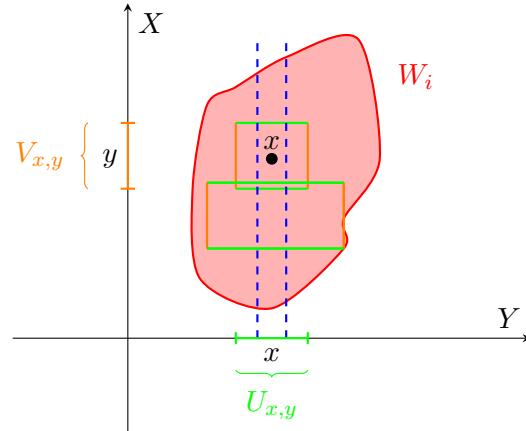


Abbildung 1.7: Die blaue Umgebung ist Schnitt vieler Umgebungen

Die offenen Mengen  $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$  für festes  $x_0$  und alle  $y \in Y$  überdecken  $\{x_0\} \times Y$ . Da  $Y$  kompakt ist, ist auch  $\{x_0\} \times Y$  kompakt. Also gibt es  $y_1, \dots, y_{m(x_0)}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i} \supseteq \{x_0\} \times Y$ .

$$\begin{aligned} \text{Sei } U_{x_0} &:= \bigcap_{i=1}^{m(x)} U_{x_0,y_i}. \text{ Da } X \text{ kompakt ist, gibt es } x_1, \dots, x_n \in X \text{ mit } \bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X \\ &\Rightarrow \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{m(x_j)} \underbrace{(U_{x_j,y_i} \times V_{x_j,y_i})}_{\text{Ein grün-oranges Kästchen}} \supseteq X \times Y \\ &\Rightarrow \bigcup_j \bigcup_i W_i(x_j, y_i) = X \times Y \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Bemerkung 22**

Sei  $X$  ein Hausdorffraum und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

**Beweis:** z. Z.: Komplement ist offen

Ist  $X = K$ , so ist  $K$  abgeschlossen in  $X$ . Andernfalls sei  $y \in X \setminus K$ . Für jedes  $x \in K$  seien  $U_x$  bzw.  $V_y$  Umgebungen von  $x$  bzw. von  $y$ , sodass  $U_x \cap V_y = \emptyset$ .



Da  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in K$ , sodass  $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supseteq K$ .

$$\begin{aligned}
\text{Sei } V &:= \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \\
\Rightarrow V \cap \left( \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) &= \emptyset \\
\Rightarrow V \cap K &= \emptyset \\
\Rightarrow V \text{ ist Überdeckung von } y, \text{ die ganz in } X \setminus K &\text{ enthalten ist.} \\
\Rightarrow X \setminus K &\text{ ist offen}
\end{aligned}$$

Damit ist  $K$  abgeschlossen. ■

### Bemerkung 23

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $K \subseteq X$  kompakt, so ist  $f(K) \subseteq Y$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $f(K)$

$$\begin{aligned}
\xrightarrow{f \text{ stetig}} (f^{-1}(V_i))_{i \in I} &\text{ ist offene Überdeckung von } K \\
\xrightarrow{\text{Kompakt}} \text{es gibt } i_1, \dots, i_n, \text{ sodass } f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_n}) &\text{ Überdeckung von } K \text{ ist.} \\
\Rightarrow f(f^{-1}(V_{i_1})), \dots, f(f^{-1}(V_{i_n})) &\text{ überdecken } f(K).
\end{aligned}$$

Es gilt:  $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$  ■

### Satz 1.1 (Heine-Borel)

Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) kompakt.

Da  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  hausdorffsch sind, ist  $K$  nach [Bemerkung 22](#) abgeschlossen. Nach Voraussetzung kann  $K$  mit endlich vielen offenen Kugeln von Radien 1 überdeckt werden  $\Rightarrow K$  ist beschränkt.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) beschränkt und abgeschlossen.

Dann gibt es einen Würfel  $W = \underbrace{[-N, N] \times \cdots \times [-N, N]}_{n \text{ mal}}$  mit  $A \subseteq W$  bzw. „Polyzylinder“  
 $Z = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \leq N \text{ für } i = 1, \dots, n \}$

Nach [Bemerkung 21](#) und [Bemerkung 19](#) ist  $W$  kompakt, also ist  $A$  nach [Bemerkung 20](#) auch kompakt. Genauso ist  $Z$  kompakt, weil

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$$

homöomorph zu

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1 \}$$

ist. ■

## 1.6 Wege und Knoten

### Definition 17

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a) Ein **Weg** in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .
- b)  $\gamma$  heißt **geschlossen**, wenn  $\gamma(1) = \gamma(0)$  gilt.
- c)  $\gamma$  heißt **einfach**, wenn  $\gamma|_{[0,1]}$  injektiv ist.

### Beispiel 17

Ist  $X$  diskret, so ist jeder Weg konstant, d. h. von der Form

$$\forall x \in [0, 1] : \gamma(x) = c, \quad c \in X$$

Denn  $\gamma([0, 1])$  ist zusammenhängend für jeden Weg  $\gamma$ .

### Definition 18

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

### Bemerkung 24

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a)  $X$  ist wegzusammenhängend  $\Rightarrow X$  ist zusammenhängend
- b)  $X$  ist wegzusammenhängend  $\not\Rightarrow X$  ist zusammenhängend

### Beweis:

- a) Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $A_1, A_2$  nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von  $X$  mit  $A_1 \cup A_2 = X$ . Sei  $x \in A_1, y \in A_2, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ .

Dann ist  $C := \gamma([0, 1]) \subseteq X$  zusammenhängend, weil  $\gamma$  stetig ist.

$$C = \underbrace{(C \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(C \cap A_2)}_{\ni y}$$

ist Zerlegung in nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen  $\Rightarrow$  Widerspruch

- b) Sei  $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \vee y = 1 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{10}x} \right\}$ .

**Abbildung 1.8a** veranschaulicht diesen Raum.

Sei  $U_1 \cup U_2 = X, U_1 \neq U_2 = \emptyset, U_i$  offen.  $X = C \cup S$ . Dann ist  $C \subseteq U_1$  oder  $C \subseteq U_2$ , weil  $C$  und  $S$  zusammenhängend sind.

Also ist  $C = U_1$  und  $S = U_2$  (oder umgekehrt).

Sei  $y \in C = U_1, \varepsilon > 0$  und  $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \subseteq U_1$  eine Umgebung von  $y$ , die in  $U_1$  enthalten ist.

Aber:  $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$  Widerspruch  $\Rightarrow X \cup S$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. ■

### Beispiel 18 (Hilbert-Kurve)

Es gibt stetige, surjektive Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Ein Beispiel ist die in **Abbildung 1.9** dargestellte Hilbert-Kurve.



Abbildung 1.8: Beispiele für Räume, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.



Abbildung 1.9: Hilbert-Kurve

### Definition 19

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in  $X$  ist ein Homöomorphismus  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C \subseteq X$  bzw.  $\gamma : S^1 \rightarrow C \subseteq X$ .

### Satz 1.2 (Jordanscher Kurvensatz)

Ist  $C = \gamma([0, 1])$  eine geschlossene Jordankurve in  $\mathbb{R}^2$ , so hat  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt ist und eine unbeschränkt.



Abbildung 1.10: Die unbeschränkte Zusammenhangskomponente wird häufig inneres, die beschränkte äußeres genannt.

**Beweis:** ist technisch mühsam und wird hier nicht geführt. Er kann in „Algebraische Topologie: Eine Einführung“ von R. Stöcker und H. Zieschang auf S. 301f (ISBN 978-3519122265) nachgelesen werden.

Idee: Ersetze Weg  $C$  durch Polygonzug.

**Definition 20**

Eine geschlossene Jordankurve in  $\mathbb{R}^3$  heißt **Knoten**.

**Beispiel 19 (Knoten)**

Abbildung 1.11: Beispiele für verschiedene Knoten

**Definition 21**

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$\begin{aligned} H(z, 0) &= \gamma_1(z) \quad \forall z \in S^1 \\ H(z, 1) &= \gamma_2(z) \quad \forall z \in S^1 \end{aligned}$$

und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

**Definition 22**

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Knoten,  $E$  eine Ebene und  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  eine Projektion auf  $E$ .

$\pi$  heißt **Knotendiagramm** von  $\gamma$ , wenn gilt:

$$|\pi^{-1}(x)| \leq 2 \quad \forall x \in \pi(\gamma)$$

Ist  $(\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so liegt  $y_1$  über  $y_2$ , wenn gilt:

$$\exists \lambda > 1 : (y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$$

**Satz 1.3 (Satz von Reidemeister)**

Zwei endliche Knotendiagramme gehören genau dann zu äquivalenten Knoten, wenn sie durch endlich viele „Reidemeister-Züge“ ineinander überführt werden können.



Abbildung 1.12: Reidemeister-Züge

**Beweis:** Durch sorgfältige Fallunterscheidung.<sup>5</sup>

### Definition 23

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von  $D$  so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.



Abbildung 1.13: Ein 3-gefärber Kleeblattknoten

<sup>5</sup>Siehe „Knot Theory and Its Applications“ von Kunio Murasugi. ISBN 978-0817638177.

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 1 (Sierpiński Raum)

Es sei  $X := \{ 0, 1 \}$  und  $\mathcal{T}_X := \{ \emptyset, \{ 0 \}, X \}$ . Dies ist der sogenannte Sierpiński Raum.

- (a) Beweisen Sie, dass  $(X, \mathcal{T}_X)$  ein topologischer Raum ist.
- (b) Ist  $(X, \mathcal{T}_X)$  hausdorffsch?
- (c) Ist  $\mathcal{T}_X$  von einer Metrik erzeugt?

### Aufgabe 2

Es sei  $\mathbb{Z}$  mit der von den Mengen  $U_{a,b} := a + b\mathbb{Z} (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \})$  erzeugten Topologie versehen.

Zeigen Sie:

- (a) Jedes  $U_{a,b}$  und jede einelementige Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  ist abgeschlossen.
- (b)  $\{ -1, 1 \}$  ist nicht offen.
- (c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

### Aufgabe 3 (Cantorsches Diskontinuum)

Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  sei  $P_i := \{ 0, 1 \}$  mit der diskreten Topologie. Weiter Sei  $P := \prod_{i \in \mathbb{N}} P_i$ .

- (a) Wie sehen die offenen Mengen von  $P$  aus?
- (b) Was können Sie über den Zusammenhang von  $P$  sagen?

### Aufgabe 4 (Kompaktheit)

- (a) Ist  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0 \}$  kompakt?
- (b) Ist  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \}$  kompakt?
- (c) Ist  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  kompakt?

### Aufgabe 5 (Begriffe)

Definieren sie die Begriffe „Homomorphismus“ und „Homöomorphismus“.

Geben Sie, falls möglich, ein Beispiel für folgende Fälle an. Falls es nicht möglich ist, begründen Sie warum.

- 1) Ein Homomorphismus, der zugleich ein Homöomorphismus ist,
- 2) ein Homomorphismus, der kein Homöomorphismus ist,

- 3) ein Homöomorphismus, der kein Homomorphismus ist

### Aufgabe 6 (Begriffe)

Definieren sie die Begriffe „Isomorphismus“, „Isotopie“ und „Isometrie“.

## 2 Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe

### 2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

#### Definition 24

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \in \mathfrak{T}$  und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .
- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und einen  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

Anschaulich ist also ein  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit lokal dem  $\mathbb{R}^n$  ähnlich.

#### Bemerkung 25 (Mächtigkeit von Mannigfaltigkeiten)

Jede  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit  $n \geq 1$  ist mindestens so mächtig wie  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $(U, \varphi)$  mit  $U \in \mathfrak{T}$  und  $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ , wobei  $V$  offen und  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist, eine Karte auf  $X$ .

Da jede offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  genauso mächtig ist wie der  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  als Homöomorphismus insbesondere bijektiv ist und Mengen, zwischen denen eine Bijektion existiert, gleich mächtig sind, ist  $U$  genauso mächtig wie der  $\mathbb{R}^n$ . Da jede Mannigfaltigkeit mindestens eine Karte hat, muss jede Mannigfaltigkeit  $X$  mindestens so mächtig sein wie der  $\mathbb{R}^n$ . ■

Hinweis: Es gibt auch noch 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Diese Mannigfaltigkeiten können beliebig viele Elemente haben.

#### Bemerkung 26

- a) Es gibt surjektive, stetige Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$
- b) Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph. Zum Beweis benutzt man den „Satz von der Gebietstreue“ (Brouwer):

Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv, so ist  $f(U)$  offen.

Ist  $n < m$  und  $\mathbb{R}^m$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , so wäre

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

eine stetige injektive Abbildung. Also müsste  $f(\mathbb{R}^n)$  offen sein  $\Rightarrow$  Widerspruch

**Beispiel 20 (Mannigfaltigkeiten)**

- 1) Jede offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte.
- 2)  $\mathbb{C}^n$  ist eine  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\Re(z_1), \Im(z_1), \dots, \Re(z_n), \Im(z_n))$$

- 3)  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim = S^n/\sim$  und  $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$  sind Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $2n$ , da gilt:

Sei  $U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Dann ist  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) &\leftarrow (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Was wird im Folgenden gemacht?

Die  $U_i$  mit  $i = 0, \dots, n$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Atlas:

$$\begin{aligned} x = (1 : 0 : 0) \in U_0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & x \mapsto (0, 0) \\ y = (0 : 1 : 1) \in U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & y \mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

Umgebung:  $\mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{(1 : u : v) \mid \|(u, v)\| < 1\} = V_1$   
 Umgebung:  $\mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{(w : z : 1) \mid w^2 + z^2 < 1\} = V_2$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset?$$

$$\begin{aligned} (a : b : c) \in V_1 \cap V_2 \\ \Rightarrow a \neq 0 \text{ und } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1 \\ \Rightarrow c \neq 0 \text{ und } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1 \\ \Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

- 4)  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Karten:

$$D_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\} \rightarrow \mathfrak{B}_1(0, \underbrace{\dots, 0}_{\in \mathbb{R}^n})$$

$$C_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\} \rightarrow \mathfrak{B}_1(0, \dots, 0)$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_{n+1})^1$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n x_k^2}, x_i, \dots, x_n), \text{ oder } -\sqrt{1 - \sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ für } C_i$$

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i \cup D_i)$$

Als kompakte Mannigfaltigkeit wird  $S^n$  auch „geschlossene Mannigfaltigkeit“ genannt.

---

<sup>1</sup> $x_i$  wird rausgenommen

- 5)  $[0, 1]$  ist keine Mannigfaltigkeit, denn:  
Es gibt keine Umgebung von 0 in  $[0, 1]$ , die homöomorph zu einem offenem Intervall ist.
- 6)  $V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \}$  ist keine Mannigfaltigkeit.

Das Problem ist  $(0, 0)$ . Wenn man diesen Punkt entfernt, zerfällt der Raum in 4 Zusammenhangskomponenten. Jeder  $\mathbb{R}^n$  zerfällt jedoch in höchstens zwei Zusammenhangskomponenten, wenn man einen Punkt entfernt.

- 7)  $V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2 \}$  ist eine Mannigfaltigkeit.
- 8)  $X = (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup (0_1, 0_2)$

$$U \subseteq X \text{ offen} \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, & \text{falls } 0_1 \notin U, 0_2 \in U \\ \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U & \text{falls } 0_1 \in U, 0_2 \in U \end{cases}$$

Insbesondere sind  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  offen und homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .

Aber:  $X$  ist nicht hausdorffsch! Denn es gibt keine disjunkten Umgebungen von  $0_1$  und  $0_2$ .

- 9)  $GL_n(\mathbb{R})$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n^2$ , weil offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n^2}$  eine Mannigfaltigkeit bilden.

### Definition 25

Seien  $X, Y$   $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten,  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus  $Z = (X \dot{\cup} Y)/_{\sim}$  mit der von  $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$  erzeugten Äquivalenzrelation und der von  $\sim$  induzierten Quotententopologie.

$Z$  heißt **Verklebung** von  $X$  und  $Y$  längs  $U$  und  $V$ .  $Z$  besitzt einen Atlas aus  $n$ -dimensionalen Karten. Falls  $Z$  hausdorffsch ist, ist  $Z$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

### Bemerkung 27

Sind  $X, Y$  Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $m$ , so ist  $X \times Y$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + m$ .

**Beweis:** Produkte von Karten sind Karten. ■

### Beispiel 21

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 1:

- 1) Offene Intervalle,  $\mathbb{R}$ ,  $(0, 1)$  sind alle homöomorph
- 2)  $S^1$

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 2:

- 1)  $\mathbb{R}^2$
- 2)  $S^2$  (0 Henkel)
- 3)  $T^2$  (1 Henkel)
- 4) oder mehr Henkel, wie z.B. der Zweifachtorus in [Abbildung 2.1](#)



Abbildung 2.1: Zweifachtorus

**Bemerkung 28**

Sei  $n \in \mathbb{N}, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $X = V(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$  das „vanishing set“.

Dann gilt:

- a)  $X$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$
- b) Ist  $\text{grad}(F)(X) \neq 0 \quad \forall x \in X$ , so ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ .

**Beweis:**

- a) Sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus V(F)$ . Weil  $F$  stetig ist, gibt es  $\delta > 0$ , sodass  $F(\mathfrak{B}_\delta(y)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(F(y))$  mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}\|F(y)\|$ . Folgt  $\mathfrak{B}_\delta(y) \cap V(F) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus V(F)$  ist offen.
- b) Sei  $x \in X$  mit  $\text{grad}(F)(x) \neq 0$ , also o. B. d. A.  $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \neq 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x' := (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun: Es gibt Umgebungen  $U$  von  $x'$  und differenzierbare Funktionen  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \mapsto (g(u), u)$  eine stetige Abbildung auf eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  in  $X$  ist.

■

**Beispiel 22**

- 1)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $V(F) = S^2$ ,  $\text{grad}(F) = (2x, 2y, 2z) \xrightarrow{\text{Bem. 28.b}} S^n$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{n+1}$
- 2)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto y^2 - x^3$  Es gilt:  $\text{grad}(F) = (-3x^2, 2y)$ . Also:  $\text{grad}(0, 0) = (0, 0)$ . Daher ist **Bemerkung 28.b** nicht anwendbar, aber  $V(F)$  ist trotzdem eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

**Definition 26**

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$\mathbb{R}_{+,0}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

ist.

$\mathbb{R}_{+,0}^n$  ist ein „Halbraum“.

Hinweis: Mannigfaltigkeiten mit Rand sind keine Mannigfaltigkeiten.

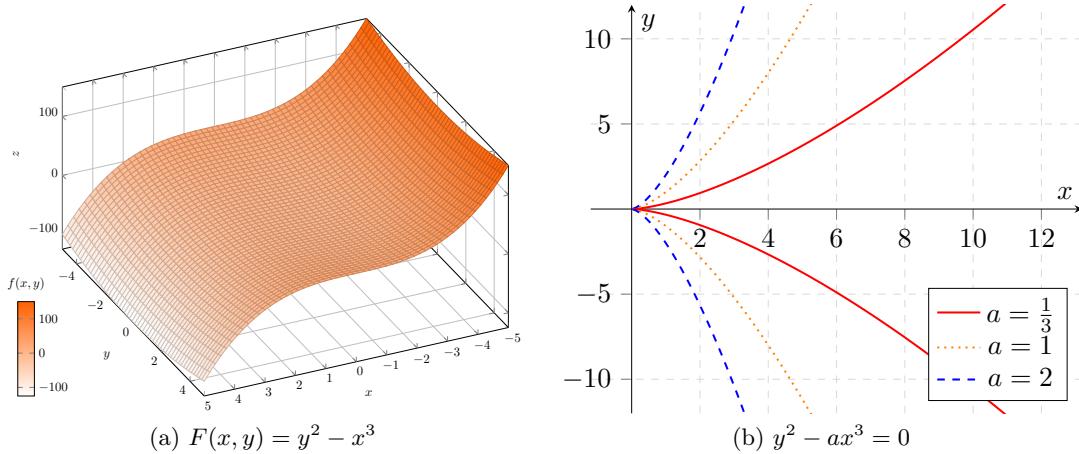
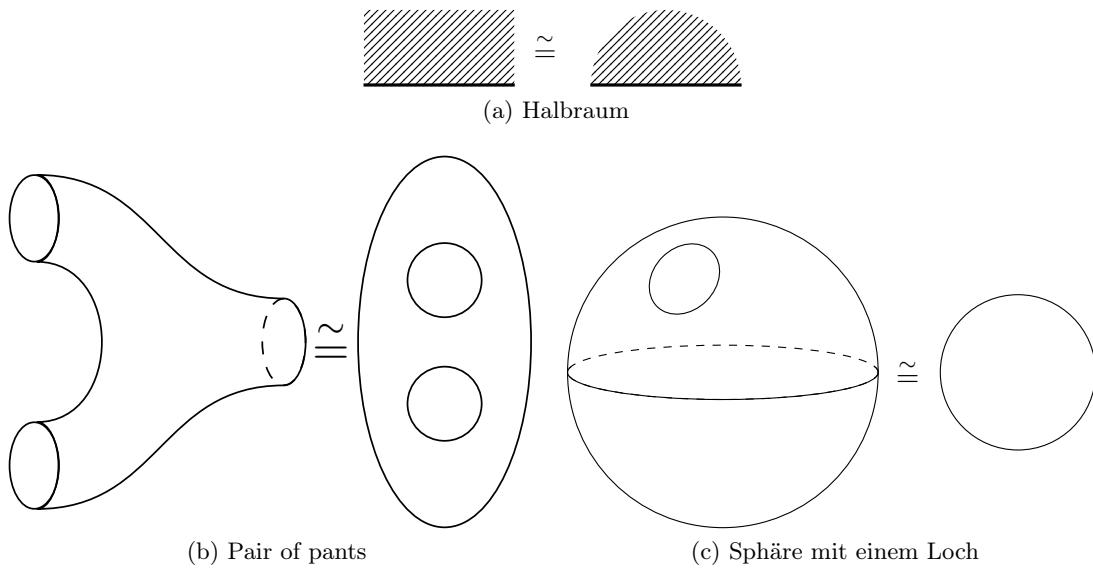
Abbildung 2.2: Rechts ist die Neilsche Parabel für verschiedene Parameter  $a$ .

Abbildung 2.3: Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Rand

**Definition 27**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas  $\mathcal{A}$ . Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$$

**Rand** von  $X$ .

$\partial X$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ .

**Definition 28**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für  $i, j \in I$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  heißt

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &:= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{aligned}$$

**Kartenwechsel** oder **Übergangsfunktion**.



Abbildung 2.4: Kartenwechsel

## 2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### Definition 29

Sei \$X\$ eine \$n\$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas \$(U\_i, \varphi\_i)\_{i \in I}\$.

- a) \$X\$ heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse \$C^k\$**, wenn jede Kartenwechselabbildung \$\varphi\_{ij}\$, \$i, j \in I\$ \$k\$-mal stetig differenzierbar ist.
- b) \$X\$ heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn \$X\$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse \$C^\infty\$ ist.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Klasse \$C^\infty\$ werden auch *glatt* genannt.

### Definition 30

Sei \$X\$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse \$C^k\$ (\$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\$) mit Atlas \$\mathcal{A} = (U\_i, \varphi\_i)\_{i \in I}\$.

- a) Eine Karte \$(U, \varphi)\$ auf \$X\$ heißt **verträglich** mit \$\mathcal{A}\$, wenn alle Kartenwechsel \$\varphi \circ \varphi\_i^{-1}\$ und \$\varphi\_i \circ \varphi^{-1}\$ (\$i \in I\$ mit \$U\_i \cap U \neq \emptyset\$) differenzierbar von Klasse \$C^k\$ sind.
- b) Die Menge aller mit \$\mathcal{A}\$ verträglichen Karten auf \$X\$ bildet einen maximalen Atlas der Klasse \$C^k\$. Er heißt **\$C^k\$-Struktur** auf \$X\$.

Eine \$C^\infty\$-Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf \$X\$.

### Bemerkung 29

Für \$n \geq 4\$ gibt es auf \$S^n\$ mehrere verschiedene differenzierbare Strukturen, die sogenannten „exotische Sphären“.

### Definition 31

Seien \$X, Y\$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension \$n\$ bzw. \$m\$, \$x \in X\$.

- a) Eine stetige Abbildung \$f : X \rightarrow Y\$ heißt **differenzierbar** in \$x\$ (von Klasse \$C^k\$), wenn es Karten \$(U, \varphi)\$ von \$X\$ mit \$x \in U\$ und \$(V, \psi)\$ von \$Y\$ mit \$f(U) \subseteq V\$ gibt, sodass \$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\$ stetig differenzierbar von Klasse \$C^k\$ in \$\varphi(x)\$ ist.
- b) \$f\$ heißt **differenzierbar** (von Klasse \$C^k\$), wenn \$f\$ in jedem \$x \in X\$ differenzierbar ist.
- c) \$f\$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn \$f\$ differenzierbar von Klasse \$C^\infty\$ ist und es eine differenzierbare Abbildung \$g : Y \rightarrow X\$ von Klasse \$C^\infty\$ gibt mit \$g \circ f = \text{id}\_X\$ und \$f \circ g = \text{id}\_Y\$.

**Bemerkung 30**

Die Bedingung in [Definition 31.a](#) hängt nicht von den gewählten Karten ab.

**Beweis:** Seien  $(U', \varphi')$  und  $(V', \psi')$  Karten von  $X$  bzw.  $Y$  um  $x$  bzw.  $f(x)$  mit  $f(U') \subseteq V'$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \\ &= \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi')^{-1} \end{aligned}$$

ist genau dann differenzierbar, wenn  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  differenzierbar ist.

**Beispiel 23**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$  ist kein Diffeomorphismus, aber Homöomorphismus, da mit  $g(x) := \sqrt[3]{x}$  gilt:  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$

**Bemerkung 31**

Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\text{Diffeo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Diffeomorphismus} \}$$

eine Untergruppe von  $\text{Hom}\ddot{o}(X)$ .

**Definition 32**

$S \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **reguläre Fläche** : $\Leftrightarrow \forall s \in S \exists$  Umgebung  $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3 \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen:  $\exists$  differenzierbare Abbildung  $F : U \rightarrow V \cap S$ :  $\text{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$ .

$F$  heißt (lokale) **reguläre Parametrisierung** von  $S$ .

$$\begin{aligned} F(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ J_F(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel 24**

1) Rotationsflächen: Sei  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine differenzierbare Funktion.

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto (r(u) \cos(v), r(v) \sin(u), v)$$

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v) \sin u & r'(v) \cos u \\ r(v) \cos u & r'(v) \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

2) Kugelkoordinaten:  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$(u, v) \mapsto (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v)$$

Es gilt:  $F(u, v) \in S_R^2$ , denn

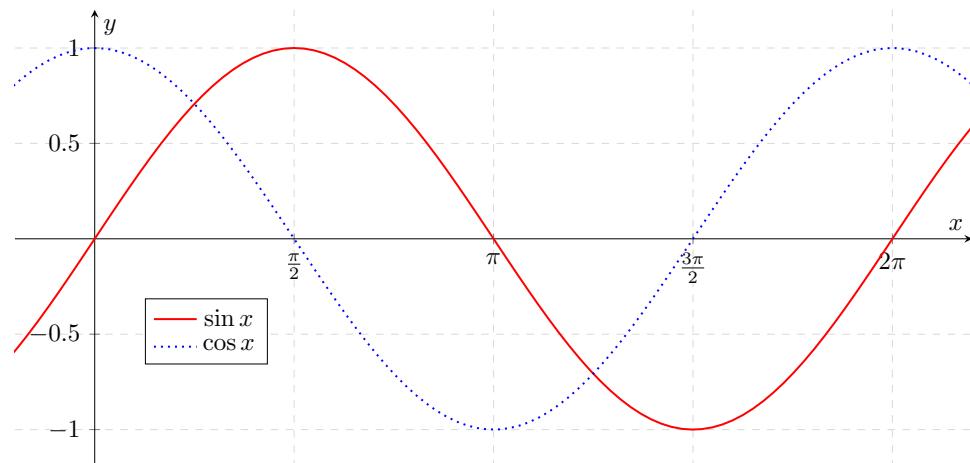
$$\begin{aligned} &R^2 \cos^2(v) \cos^2(u) + R^2 \cos^2(v) \sin^2(u) + R^2 \sin^2(v) \\ &= R^2(\cos^2(v) \cos^2(u) + \cos^2(v) \sin^2(u) + \sin^2(v)) \\ &= R^2(\cos^2(v)(\cos^2(u) + \sin^2(u)) + \sin^2(v)) \\ &= R^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) \\ &= R^2 \end{aligned}$$



(a) Kugelkoordinaten



(b) Rotationskörper



(c) Sinus und Kosinus haben keine gemeinsame Nullstelle

Die Jacobi-Matrix

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -R \cos v \sin u & -R \sin v \cos u \\ R \cos v \cos u & -R \sin v \sin u \\ 0 & R \cos v \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für  $\cos v \neq 0$ . In  $N$  und  $S$  ist  $\cos v = 0$ .

### Bemerkung 32

Jede reguläre Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine 2-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Beweis:**

$S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist als reguläre Fläche eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Aus der Definition von regulären Flächen folgt direkt, dass Karten  $(U_i, F_i)$  und  $(U_j \subseteq \mathbb{R}^2, F_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3)$  von  $S$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  existieren, wobei  $F_i$  und  $F_j$  nach Definition differenzierbare Abbildungen sind.

Z.Z.:  $F_j^{-1} \circ F_i$  ist ein Diffeomorphismus.

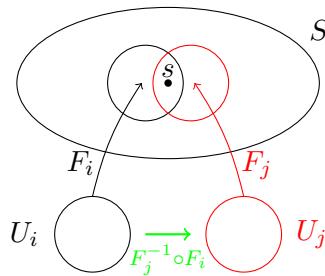


Abbildung 2.5: Reguläre Fläche  $S$  zum Beweis von **Bemerkung 32**

Idee: Finde differenzierbare Funktion  $\widetilde{F}_j^{-1}$  in Umgebung  $W$  von  $s$ , sodass  $\widetilde{F}_j^{-1}|_{S \cap W} = F_j^{-1}$ .

Ausführung: Sei  $u_0 \in U_i$ ,  $v_0 \in U_j$  mit  $F_i(u_0) = s = F_j(v_0)$ .

Da  $\text{Rg}(J_{F_j}(v_0)) = 2$  ist, ist o. B. d. A.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (v_0) \neq 0$$

und  $F_j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Definiere  $\widetilde{F}_j : U_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$\widetilde{F}_j(u, v, t) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

Offensichtlich:  $\widetilde{F}_j|_{U_j \times \{0\}} = F_j$

$$J_{\widetilde{F}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{\widetilde{F}_j}(v_0, 0) \neq 0$$

Analysis II Es gibt Umgebungen  $W$  von  $F_j$  von  $\widetilde{F}_j(v_0, 0) = F_j(v_0) = s$ , sodass  $\widetilde{F}_j$  auf  $W$  eine differenzierbar Inverse  $F_j^{-1}$  hat.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\widetilde{F_j}^{-1}|_{W \cap S} &= F_j^{-1}|_{W \cap S} \\ \Rightarrow F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)} &= F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)}\end{aligned}$$

ist differenzierbar.

### Definition 33

Sei  $G$  eine Mannigfaltigkeit und  $(G, \circ)$  eine Gruppe.

- a)  $G$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen  $\circ : G \times G \rightarrow G$  und  $\iota : G \rightarrow G$  definiert durch

$$g \circ h := g \cdot h \text{ und } \iota(g) := g^{-1}$$

stetig sind.

- b) Ist  $G$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt  $G$  **Lie-Gruppe**, wenn  $(G, \circ)$  und  $(G, \iota)$  differenzierbar sind.

### Beispiel 25 (Lie-Gruppen)

- 1) Alle endlichen Gruppen sind 0-dimensionale Lie-Gruppen.
- 2)  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- 3)  $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$
- 4)  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
- 5)  $(\mathbb{R}^n, +)$ , denn  $A \cdot B(i, j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  ist nach allen Variablen differenzierbar

$$(A^{-1})(i, j) = \frac{\det(A_{ij})}{\det A}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

ist differenzierbar.

$\det A_{ij}$  kann 0 werden, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 6)  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$

### Bemerkung 33

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe und  $g \in G$ , so ist die Abbildung

$$\begin{aligned}l_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h\end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.

## 2.3 Simplizialkomplex

### Definition 34

Seien  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  Punkte.

- a)  $v_0, \dots, v_k$  sind in **allgemeiner Lage**

$\Leftrightarrow$  es gibt keinen  $(k-1)$ -dimensionalen affinen Untervektorraum, der  $v_0, \dots, v_k$  enthält  
 $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sind linear unabhängig.

- b)  $\text{conv}(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$  heißt die **konvexe Hülle** von  $v_0, \dots, v_k$ .

### Definition 35

- a) Sei  $\Delta^n = \text{conv}(e_0, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, \dots, e_n$ .

Dann heißt  $\Delta^n$  **Standard-Simplex** und  $n$  die Dimension des Simplex.

- b) Für Punkte  $v_0, \dots, v_k$  im  $\mathbb{R}^n$  in allgemeiner Lage heißt  $\Delta(v_0, \dots, v_k) = \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$  ein  **$k$ -Simplex** in  $\mathbb{R}^n$ .
- c) Ist  $\Delta(v_0, \dots, v_k)$  ein  $k$ -Simplex und  $I = \{i_0, \dots, i_r\} \subseteq \{0, \dots, k\}$ , so ist  $s_{i_0, \dots, i_r} := \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$  ein  $r$ -Simplex und heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von  $\Delta$ .

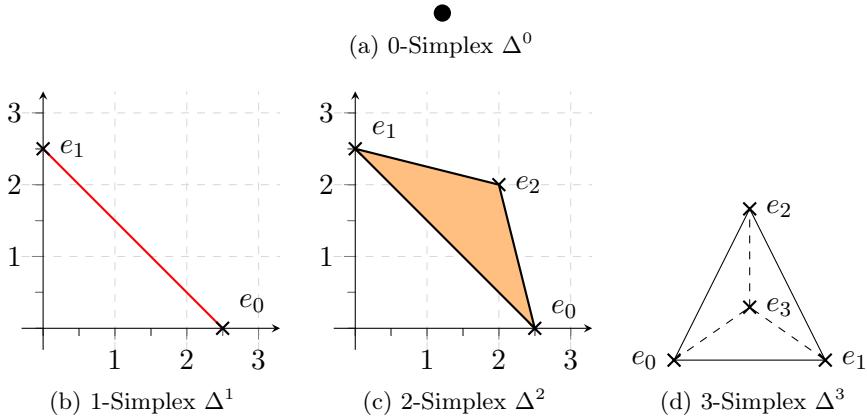


Abbildung 2.6: Beispiele für  $k$ -Simplexe

### Definition 36

- a) Eine endliche Menge  $K$  von Simplizes im  $\mathbb{R}^n$  heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:
- (i) Für  $\Delta \in K$  und  $S \subseteq \Delta$  Teilsimplex ist  $S \in K$ .
  - (ii) Für  $\Delta_1, \Delta_2 \in K$  ist  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  leer oder ein Teilsimplex von  $\Delta_1$  und von  $\Delta_2$ .
- b)  $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$  (mit Teilraumtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von  $K$ .
- c) Ist  $d = \max \{ k \in \mathbb{N}_0 \mid K \text{ enthält } k\text{-Simplex} \}$ , so heißt  $d$  die **Dimension** von  $K$ .



Abbildung 2.7: Beispiele für Simplicialkomplexe

**Definition 37**

Seien  $K, L$  Simplicialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

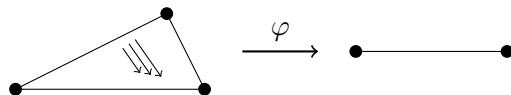
- a)  $f(\Delta) \in L$
- b)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

**Beispiel 26 (Simpliziale Abbildungen)**

- 1)  $\varphi(e_1) := b_1, \varphi(e_2) := b_2$   
 $\varphi$  ist eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung



2) Folgende Abbildung  $\varphi : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  ist simplizial:



3) Tori können simplizial auf Sphären abgebildet werden (vgl. Abbildung 2.8)



Abbildung 2.8: Abbildung eines Torus auf eine Sphäre

### Definition 38

Sei  $K$  ein endlicher Simplicialkomplex. Für  $n \geq 0$  sei  $a_n(K)$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes in  $K$ .

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

**Eulerzahl** (oder Euler-Charakteristik) von  $K$ .

### Beispiel 27

$$\begin{aligned} 1) \quad & \chi(\Delta^1) = 2 - 1 = 1 \\ & \chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1 \\ & \chi(\Delta^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \chi(\text{Oktaeder-Oberfläche}) = 6 - 12 + 8 = 2 \\ & \chi(\text{Rand des Tetraeders}) = 2 \\ & \chi(\text{Ikosaeder}) = 12 - 30 + 20 = 2 \\ 3) \quad & \chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2 \\ & \chi(\text{Würfel, unterteilt in Dreiecksflächen}) = 8 - (12 + 6) + (6 \cdot 2) = 2 \end{aligned}$$

### Bemerkung 34

$$\chi(\Delta^n) = 1 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0$$

**Beweis:**  $\Delta^n$  ist die konvexe Hülle von  $(e_0, \dots, e_n)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Jede  $(k+1)$ -elementige Teilmenge von  $\{e_0, \dots, e_n\}$  definiert ein  $k$ -Simplex.

$$\Rightarrow a_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1}, \quad k = 0, \dots, n$$

$$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1}$$

$$f(x) = (x+1)^{n+1} \stackrel{\text{Binomischer Lehrsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = \chi(\Delta^n) - 1$$

$$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = 1$$

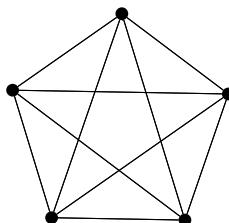
■

### Definition 39

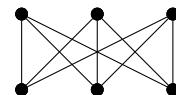
- a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.
- b) Ein Graph, der homöomorph zu  $S^1$  ist, heißt **Kreis**.
- c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.



(a) Dies wird häufig auch als (b) Planare Einbettung des Te-Multigraph bezeichnet. traeders



(c)  $K_5$



(d)  $K_{3,3}$

Abbildung 2.9: Beispiele für Graphen

### Bemerkung 35

Für jeden Baum  $T$  gilt  $\chi(T) = 1$ .

**Beweis:** Induktion über die Anzahl der Ecken.

### Bemerkung 36

- a) Jeder zusammenhängende Graph  $\Gamma$  enthält einen Teilbaum  $T$ , der alle Ecken von  $\Gamma$  enthält.<sup>2</sup>
- b) Ist  $n = a_1(\Gamma) - a_1(T)$ , so ist  $\chi(\Gamma) = 1 - n$ .

### Beweis:

- a) Siehe „Algorithmus von Kruskal“.

---

<sup>2</sup> $T$  wird „Spannbaum“ genannt.

$$\begin{aligned}
 b) \quad \chi(\Gamma) &= a_0(\Gamma) - a_1(\Gamma) \\
 &= a_0(\Gamma) - (n + a_1(T)) \\
 &= a_0(T) - a_1(T) - n \\
 &= \chi(T) - n \\
 &= 1 - n
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 37**

Sei  $\Delta$  ein  $n$ -Simplex und  $x \in \Delta^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $K$  der Simplizialkomplex, der aus  $\Delta$  durch „Unterteilung“ in  $x$  entsteht. Dann ist  $\chi(K) = \chi(\Delta) = 1$ .

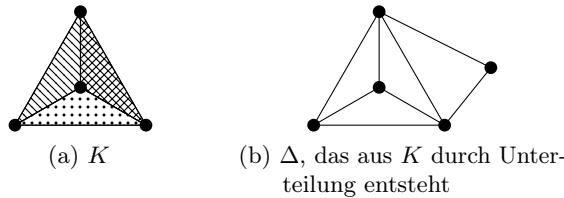


Abbildung 2.10: Beispiel für **Bemerkung 37**.

**Beweis:**  $\chi(K) = \chi(\Delta) - \underbrace{\underbrace{(-1)^n}_{n\text{-Simplex}}}_{(1+(-1))^{n+1}} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} = \chi(\Delta)$  ■

**Definition 40**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $K$  ein Simplizialkomplex und

$$h : |K| \rightarrow X$$

ein Homöomorphismus von der geometrischen Realisierung  $|K|$  auf  $X$ . Dann heißt  $h$  eine **Triangulierung** von  $X$ .

**Satz 2.1 (Eulersche Polyederformel)**

Sei  $P$  ein konvexes Polyeder in  $\mathbb{R}^3$ , d. h.  $\partial P$  ist ein 2-dimensionaler Simplizialkomplex, sodass gilt:

$$\forall x, y \in \partial P : [x, y] \subseteq P$$

Dann ist  $\chi(\partial P) = 2$ .

**Beweis:**

- 1) Die Aussage ist richtig für den Tetraeder.
- 2) O. B. d. A. sei  $0 \in P$  und  $P \subseteq \mathfrak{B}_1(0)$ . Projizierte  $\partial P$  von 0 aus auf  $\partial \mathfrak{B}_1(0) = S^2$ . Erhalte Triangulierung von  $S^2$ .
- 3) Sind  $P_1$  und  $P_2$  konvexe Polygone und  $T_1, T_2$  die zugehörigen Triangulierungen von  $S^2$ , so gibt es eine Triangulierung  $T$ , die sowohl um  $T_1$  als auch um  $T_2$  Verfeinerung ist (vgl. [Abbildung 2.11](#)).

Nach [Bemerkung 37](#) ist  $\chi(\partial P_1) = \chi(T_1) = \chi(T) = \chi(T_2) = \chi(\partial P_2) = 2$ , weil o. B. d. A.  $P_2$  ein Tetraeder ist.



Abbildung 2.11:  $T$  ist eine Triangulierung, die für  $T_1$  und  $T_2$  eine Verfeinerung ist.

### Bemerkung 38 (Der Rand vom Rand ist 0)

Sei  $K$  ein endlicher Simplizialkomplex mit Knotenmenge  $V$  und  $<$  eine Totalordnung auf  $V$ .

Sei  $A_n$  die Menge der  $n$ -Simplizes in  $K$ , d. h.

$$A_n(K) := \{ \sigma \in K \mid \dim(\sigma) = n \} \quad \text{für } n = 0, \dots, d = \dim(K)$$

und  $C_n(K)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $A_n(K)$ , d. h.

$$C_n(K) = \left\{ \sum_{\sigma \in A_n(K)} c_\sigma \cdot \sigma \mid c_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei  $\sigma = \Delta(x_0, \dots, x_n) \in A_n(K)$ , sodass  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Für  $i = 0, \dots, n$  sei  $\partial_i \sigma := \Delta(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$  die  $i$ -te Seite von  $\sigma$  und  $d_\sigma = d_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \sigma \in C_{n-1}(K)$  und  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  die dadurch definierte lineare Abbildung.

Dann gilt:  $d_{n-1} \circ d_n = 0$

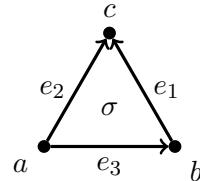


Abbildung 2.12: Simplizialkomplex mit Totalordnung

### Beispiel 28

Sei  $a < b < c$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_2 \sigma &= e_1 - e_2 + e_3 \\ d_1(e_1 - e_2 + e_3) &= (c - b) - (c - a) + (b - a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sei  $a < b < c < d$ . Dann gilt für Tetraeder:

$$d_3(\Delta(a, b, c, d)) = \Delta(b, c, d) - \Delta(a, c, d) + \Delta(a, b, d) - \Delta(a, b, c), \text{ wobei:}$$

$$\begin{aligned}
d_2(-\Delta(b, c, d)) &= \color{red}{\Delta(c, d)} - \color{blue}{\Delta(b, d)} + \color{green}{\Delta(b, c)} \\
d_2(-\Delta(a, c, d)) &= \color{red}{-\Delta(c, d)} + \Delta(a, d) - \color{brown}{\Delta(a, c)} \\
d_2(-\Delta(a, b, d)) &= \color{blue}{\Delta(b, d)} - \Delta(a, d) + \color{orange}{\Delta(a, b)} \\
d_2(-\Delta(a, b, c)) &= \color{green}{-\Delta(b, c)} + \color{brown}{\Delta(a, c)} - \color{orange}{\Delta(a, b)} \\
\Rightarrow d_2(d_3(\Delta(a, b, c, d))) &= 0
\end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $\sigma \in A_n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d_{n-1}(d_n \sigma) &= d_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \sigma \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{n-1}(\partial_i \sigma) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} \partial_i(\partial_j \sigma) (-1)^j \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \partial_j(\partial_i(\sigma)) + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \partial_{i-1}(\partial_j \sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

weil jeder Summand aus der ersten Summe auch in der zweiten Summe vorkommt, aber mit umgekehrten Vorzeichen.  $\blacksquare$

#### Definition 41

Sei  $K$  ein Simplizialkomplex,  $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$  und  $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$ .

- a)  $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$  heißt  $n$ -te **Homologiegruppe** von  $K$ .
- b)  $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$  heißt  $n$ -te **Betti-Zahl** von  $K$ .

#### Bemerkung 39

Nach [Bemerkung 38](#) ist  $B_n \subseteq Z_n$ , denn  $d_{n+1}(C) \in \text{Kern}(d_n)$  für  $C \in C_{n+1}$ .

#### Satz 2.2

Für jeden endlichen Simplizialkomplex  $K$  der Dimension  $d$  gilt:

$$\sum_{k=0}^d (-1)^k b_k(K) = \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k(K) = \chi(K)$$

#### Bemerkung 40

Es gilt nicht  $a_k = b_k \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

#### Beweis:

- Dimensionsformel für  $d_n$ :  $a_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$  für  $n \geq 1$
- Dimensionsformel für  $Z_n \rightarrow H_n = Z_n / B_n$ :  $\dim Z_n = b_n + \dim B_n$
- $\dim Z_d = b_d$ , da  $\dim Z_d = b_d + \dim B_d$ , wobei  $\dim B_d = 0$ , da  $a_{d+1} = 0$

- $a_0 - \dim B_0 = b_0$ , da  $a_0 - \dim B_0 = a_0 - \dim Z_0 + b_0$  und  $a_0 = \dim Z_0$ , weil  $a-1 = 0$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k = a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k (\dim Z_k + \dim B_{k-1}) \\
& = a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \dim Z_k + \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{k+1} \dim B_k \\
& = a_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \dim Z_k - \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \dim B_k \\
& = a_0 + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k b_k + (-1)^d \underbrace{\dim Z_d}_{=b_d} - \dim B_0 \\
& = b_0 + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k b_k + (-1)^d b_d \\
& = \sum_{k=0}^d (-1)^k b_k
\end{aligned}$$

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 7 (Zusammenhang)

- (a) Beweisen Sie, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann wegzusammenhängend ist, wenn sie zusammenhängend ist
- (b) Betrachten Sie nun wie in [Beispiel 20.8](#) den Raum  $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$  versehen mit der dort definierten Topologie. Ist  $X$  wegzusammenhängend?

# 3 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

## 3.1 Homotopie von Wegen



Abbildung 3.1: Beispiele für Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$

### Definition 42

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  Wege von  $a$  nach  $b$ , d. h.  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $H : I \times I \rightarrow X$  mit

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_1(t) \quad \forall t \in I \\ H(t, 1) &= \gamma_2(t) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

und  $H(0, s) = a$  und  $H(1, s) = b$  für alle  $s \in I$  gibt. Dann schreibt man:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

### Bemerkung 41

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  Wege von  $a$  nach  $b$  und  $H$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Dann gilt: Der Weg

$$\gamma_s : I \rightarrow X, \quad \gamma_s(t) = H(t, s)$$

ist Weg in  $X$  von  $a$  nach  $b$  für jedes  $s \in I$ .

**Beweis:**  $H$  ist stetig, also ist  $H(t, s)$  insbesondere für jedes feste  $s$  stetig. Da  $H(0, s) = a$  und  $H(1, s) = b$  für alle  $s \in I$  und  $\gamma_s$  eine Abbildung von  $I$  auf  $X$  ist, ist  $\gamma_s$  ein Weg in  $X$  von  $a$  nach  $b$  für jedes  $s \in I$ . ■

### Bemerkung 42

Durch Homotopie wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in  $X$  von  $a$  nach  $b$  definiert.

### Beweis:

- reflexiv:  $H(t, s) = \gamma(t)$  für alle  $(t, s) \in I \times I$
- symmetrisch:  $H'(t, s) = H(t, 1 - s)$  für alle  $(t, s) \in I \times I$
- transitiv: Seien  $H'$  bzw.  $H''$  Homotopien von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  bzw. von  $\gamma_2$  nach  $\gamma_3$ .

Dann sei  $H(t, s) := \begin{cases} H'(t, 2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H''(t, 2s - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow H$  ist stetig und Homotopie von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_3$ . ■

### Beispiel 29

- 1) Sei  $X = S^1$ .  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  aus Abbildung 3.3a nicht homotop.
- 2) Sei  $X = T^2$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  aus Abbildung 3.3b sind paarweise nicht homotop.
- 3) Sei  $X = \mathbb{R}^2$  und  $a = b = (0, 0)$ .

Je zwei Wege im  $\mathbb{R}^2$  mit Anfangs- und Endpunkt  $(0, 0)$  sind homotop.



Abbildung 3.2: Zwei Wege im  $\mathbb{R}^2$  mit Anfangs- und Endpunkt  $(0, 0)$

Sei  $\gamma_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  der konstante Weg  $\gamma_0(t) = (0, 0) \forall t \in I$ . Sei  $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0)$ .

$H(t, s) := (1 - s)\gamma(t)$  ist stetig,  $H(t, 0) = \gamma(t) \forall t \in I$  und  $H(t, 1) = (0, 0) \forall t \in I$ .

### Bemerkung 43

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg und  $\varphi : I \rightarrow I$  stetig mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ . Dann sind  $\gamma$  und  $\gamma \circ \varphi$  homotop.

**Beweis:** Sei  $H(t, s) = \gamma((1 - s)t + s \cdot \varphi(t))$ .

Dann ist  $H$  stetig,  $H(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $H(t, 1) = \gamma(\varphi(t))$ ,  $H(0, s) = \gamma(0)$  und  $H(1, s) = \gamma(1 - s + s) = \gamma(1)$   
 $\Rightarrow H$  ist Homotopie. ■



Abbildung 3.3: Beispiele für (nicht)-Homotopie von Wegen

**Definition 43**

Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Wege in  $X$  mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in  $X$ . Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ .

**Bemerkung 44**

Das Zusammensetzen von Wegen ist nur bis auf Homotopie assoziativ, d. h.:

$$\begin{aligned} \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) &\neq (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \\ \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) &\sim (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \end{aligned}$$

mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  und  $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ .



Abbildung 3.4: Das Zusammensetzen von Wegen ist nicht assoziativ

**Beweis:** Das Zusammensetzen von Wegen ist wegen [Bemerkung 43](#) bis auf Homotopie assoziativ.

Verwende dazu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ 2t - 1 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Bemerkung 45**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b, c \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma'_1$  Wege von  $a$  nach  $b$  und  $\gamma_2, \gamma'_2$  Wege von  $b$  nach  $c$ .

Sind  $\gamma_1 \sim \gamma'_1$  und  $\gamma_2 \sim \gamma'_2$ , so ist  $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma'_1 * \gamma'_2$ .



Abbildung 3.5: Situation aus Bemerkung 45

**Beweis:** Sei  $H_i$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_i$  und  $\gamma'_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Dann ist

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \forall s \in I \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen  $\gamma_1 * \gamma_2$  und  $\gamma'_1 * \gamma'_2$ .

Eine spezielle Homotopieäquivalenz sind sog. Deformationsretraktionen:

#### Definition 44

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ ,  $r : X \rightarrow A$  eine stetige Abbildung und  $\iota = (\text{id}_X)|_A$ .

- a)  $\iota : A \rightarrow X$  mit  $\iota(x) = x$  heißt die **Inklusionsabbildung** und man schreibt:  $\iota : A \hookrightarrow X$ .
- b)  $r$  heißt **Retraktion**, wenn  $r|_A = \text{id}_A$  ist.
- c)  $A$  heißt **Deformationsretrakt**, wenn es eine Retraktion  $r$  auf  $A$  mit  $\iota \circ r \sim \text{id}_X$  gibt.

#### Beispiel 30 (Zylinder auf Kreis)

Sei  $X = S^1 \times \mathbb{R}$  ein topologischer Raum und

$$r : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \{0\} \cong S^1$$

mit

$$r(x, y) := (x, 0)$$

eine Abbildung.  $r$  ist eine Retraktion, da  $r|_{S^1} \cong \text{id}_{S^1}$ .

$$\begin{aligned} \iota \circ r : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \\ H : (S^1 \times \mathbb{R}) \times I &\rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\mapsto (x, ty) \end{aligned}$$

## 3.2 Fundamentalgruppe

Für einen Weg  $\gamma$  sei  $[\gamma]$  seine **Homotopieklassse**.

#### Definition 45

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch  $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$  wird  $\pi_1(X, x)$  zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** von  $X$  im Basispunkt  $x$ .

#### Bemerkung 46

Im  $\mathbb{R}^2$  gibt es nur eine Homotopiekategorie.

#### Beweis: (Fundamentalgruppe ist eine Gruppe)

- Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Definition von  $*_G$
- Assoziativität folgt aus [Bemerkung 44](#)
- Neutrales Element  $e = [\gamma_0], \gamma_0(t) = x \quad \forall t \in I. e * [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] * e$ , da  $\gamma_0 * \gamma \sim \gamma$
- Inverses Element  $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}] = [\gamma(1-t)]$ , denn  $\bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_0 \sim \gamma * \bar{\gamma}$

#### Beispiel 31

- $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$
- $\pi_1(S^1, 1) = \{ [\gamma^k] \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$ . Dabei ist  $\gamma(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$  und  $\gamma^k := \underbrace{\gamma * \cdots * \gamma}_{k \text{ mal}}$
- $[\gamma^k] \mapsto k$  ist ein Isomorphismus.
- $\pi_1(\mathbb{R}^2, 0) = \pi_1(\mathbb{R}^2, x) = \{ e \}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^2$
- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{ e \}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$
- $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** bzgl.  $x \in G$ , wenn für jedes  $y \in G$  auch die Strecke  $[x, y] \subseteq G$  ist.

Für jedes sternförmige  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\pi_1(G, x) = \{ e \}$



Abbildung 3.6: Sternförmiges Gebiet

- $\pi_1(S^2, x_0) = \{ e \}$ , da im  $\mathbb{R}^2$  alle Wege homotop zu  $\{ e \}$  sind. Mithilfe der stereographischen Projektion kann von  $S^2$  auf den  $\mathbb{R}^2$  abgebildet werden.

Dieses Argument funktioniert nicht mehr bei flächenfüllenden Wegen, d. h. wenn  $\gamma : I \rightarrow S^2$  surjektiv ist.

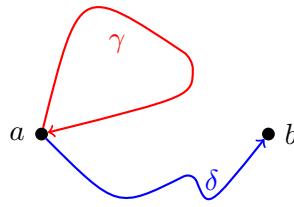
#### Bemerkung 47

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\delta : I \rightarrow X$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ .

Dann ist die Abbildung

$$\alpha : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b) \quad [\gamma] \mapsto [\bar{\delta} * \gamma * \delta]$$

ein Gruppenisomorphismus.

Abbildung 3.7: Situation aus **Bemerkung 47****Beweis:**

$$\begin{aligned}\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) &= [\bar{\delta} * (\gamma_1 * \gamma_2) * \delta] \\ &= [\bar{\delta} * \gamma_1 * \delta * \bar{\delta} * \gamma_2 * \delta] \\ &= [\bar{\delta} * \gamma_1 * \delta] * [\bar{\delta} * \gamma_2 * \delta] \\ &= \alpha([\gamma_1]) * \alpha([\gamma_2])\end{aligned}$$

**Definition 46**

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum \$X\$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn \$\pi\_1(X, x) = \{ e \}\$ für ein \$x \in X\$.

Wenn \$\pi\_1(X, x) = \{ e \}\$ für ein \$x \in X\$ gilt, dann wegen **Bemerkung 47** sogar für alle \$x \in X\$.

**Bemerkung 48**

Es seien \$X, Y\$ topologische Räume, \$f : X \rightarrow Y\$ eine stetige Abbildung, \$x \in X, y := f(x) \in Y\$.

- a) Dann ist die Abbildung \$f\_\* : \pi\_1(X, x) \rightarrow \pi\_1(Y, y), [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]\$ ein Gruppenhomomorphismus.
- b) Ist \$Z\$ ein weiterer topologischer Raum und \$g : Y \rightarrow Z\$ eine stetige Abbildung \$z := g(y)\$. Dann ist \$(g \circ f)\_\* = g\_\* \circ f\_\* : \pi\_1(X, x) \rightarrow \pi\_1(Z, z)\$

**Beweis:**

- a) \$f\_\*\$ ist wohldefiniert: Seien \$\gamma\_1, \gamma\_2\$ homotope Wege von \$x\$. z.Z.: \$f \circ \gamma\_1 \sim f \circ \gamma\_2\$: Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen \$H : I \times I \rightarrow X\$ mit

$$\begin{aligned}H(t, 0) &= \gamma_1(t), \\ H(t, 1) &= \gamma_2(t), \\ H(0, s) &= H(1, s) = x.\end{aligned}$$

Dann ist \$f \circ H : I \times I \rightarrow Y\$ stetig mit \$(f \circ H)(t, 0) = f(H(t, 0)) = f(\gamma\_1(t)) = (f \circ \gamma\_1)(t)\$ etc. \$\Rightarrow f \circ \gamma\_1 \sim f \circ \gamma\_2\$.

$$f_*([\gamma_1] * [\gamma_2]) = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] = [(f \circ \gamma_1)] * [(f \circ \gamma_2)] = f_*([\gamma_1]) * f_*([\gamma_2])$$

$$b) (g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*([f_*([\gamma])]) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$$

**Beispiel 32**

- 1) \$f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2\$ ist injektiv, aber \$f\_\* : \pi\_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi\_1(\mathbb{R}^2, 1) = \{ e \}\$ ist nicht injektiv.
- 2) \$f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\$ ist surjektiv, aber \$f\_\* : \pi\_1(\mathbb{R}, 0) = \{ e \} \rightarrow \pi\_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}\$ ist nicht surjektiv.

**Bemerkung 49**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen  $X, Y$ . Dann gilt:

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

ist ein Isomorphismus für jedes  $x \in X$ .

**Beweis:** Sei  $g : Y \rightarrow X$  die Umkehrabbildung, d. h.  $g$  ist stetig und  $f \circ g = \text{id}_Y$ ,  $g \circ f = \text{id}_X$

$$\Rightarrow f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, f(x))} \text{ und } g_* \circ f_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

**Definition 47**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ .

$f$  und  $g$  heißen **homotop** ( $f \sim g$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

gibt.

**Bemerkung 50**

Sind  $f$  und  $g$  homotop, so ist  $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

**Beweis:** Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$  um  $x_0$ , d. h.  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Z. z.:  $f \circ \gamma \sim g \circ \gamma$

Sei dazu  $H_\gamma : I \times I \rightarrow Y, (t, s) \mapsto H(\gamma(t), s)$ . Dann gilt:

$$H_\gamma(t, 0) = H(\gamma(t), 0) = (f \circ \gamma)(t) \quad \forall t \in I$$

$$H_\gamma(1, s) = H(\gamma(1), s) = H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

$$H_\gamma(t, 1) = H(\gamma(t), 1) = g(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

**Beispiel 33**

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f \sim \text{id}_X, f \circ g \sim \text{id}_Y$

$\Rightarrow f_*$  ist Isomorphismus. Konkret:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0\}, g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f \circ g = \text{id}_{\{0\}}, g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto 0$  für alle  $x$ .

$g \circ f \sim \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  mit Homotopie:  $H : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x, s) = (1-s)x$  (stetig!)

$\Rightarrow H(x, 0) = x = \text{id}_{\mathbb{R}^2}(x), H(x, 1) = 0, H(0, s) = 0 \quad \forall s \in I$ .

**Satz 3.1 (Satz von Seifert und van Kampen „light“)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V$  wegzusammenhängend.

Dann wird  $\pi_1(X, x)$  für  $x \in U \cap V$  erzeugt von geschlossenen Wegen um  $x$ , die ganz in  $U$  oder ganz in  $V$  verlaufen.

**Beweis:** Sei  $\gamma : I \rightarrow X$  ein geschlossener Weg um  $x$ . Überdecke  $I$  mit endlich vielen offenen Intervallen  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , die ganz in  $\gamma^{-1}(U)$  oder ganz in  $\gamma^{-1}(V)$  liegen.

O. B. d. A. sei  $\gamma(I_1) \subseteq U, \gamma(I_2) \subseteq V$ , etc.

Wähle  $t_i \in I_i \cap I_{i+1}$ , also  $\gamma(t_i) \in U \cap V$ . Sei  $\sigma_i$  Weg in  $U \cap V$  von  $x_0$  nach  $\gamma(t_i) \Rightarrow \gamma$  ist homotop zu

$$\underbrace{\gamma_1 * \overline{\sigma_1}}_{\text{in } U} * \underbrace{\sigma_1 * \gamma_2 * \overline{\sigma_2}}_{\text{in } V} * \dots * \sigma_{n-1} * \gamma_2$$



Abbildung 3.8: Topologischer Raum  $X$

#### Beispiel 34 (Satz von Seifert und van Kampen)

- 1) Sei  $X$  wie in Abbildung 3.8.  $\pi_1(X, x)$  wird „frei“ erzeugt von  $a$  und  $b$ , weil  $\pi_1(U, x) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}, \pi_1(V, x) = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ , insbesondere ist  $a * b$  nicht homotop zu  $b * a$ .
- 2) Torus:  $\pi_1(T^2, X)$  wird erzeugt von  $a$  und  $b$ .



Abbildung 3.9:  $a * b = b * a \Leftrightarrow a * b * \bar{a} * \bar{b} \sim e$

### 3.3 Überlagerungen

#### Definition 48

Es seien  $X, Y$  zusammenhängende topologische Räume und  $p : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung.

$p$  heißt **Überlagerung**, wenn jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U = U(x) \subseteq X$  besitzt, sodass  $p^{-1}(U)$  disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen  $V_j \subseteq Y$  ist ( $j \in I$ ) und  $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.

#### Beispiel 35

- 1) siehe Abbildung 3.10

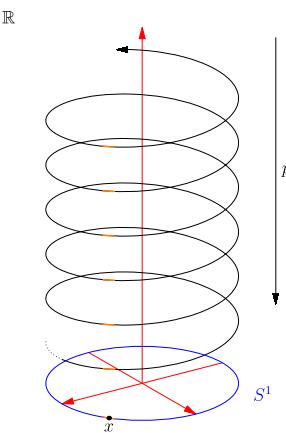


Abbildung 3.10:  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

- 2) siehe **Abbildung 3.11**
  - 3)  $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$
  - 4)  $S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$
  - 5)  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ , siehe **Abbildung 3.12**

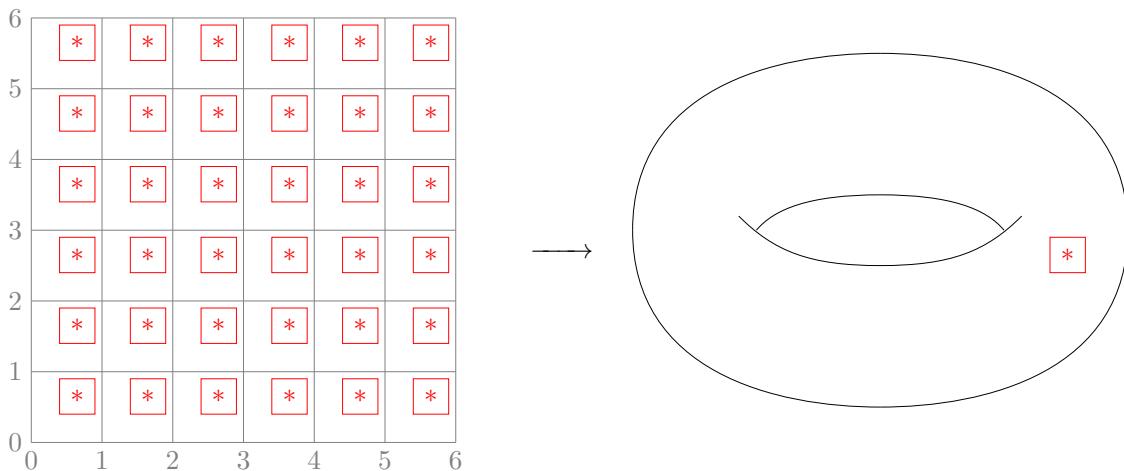


Abbildung 3.11:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

## Bemerkung 51

Überlagerungen sind surjektiv.

**Beweis:** Sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $x \in X$  beliebig. Dann existiert eine offene Umgebung  $U(x) \subseteq X$  und offene Teilmengen  $V_j \subseteq X$  mit  $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup} V_j$  und  $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  ist Homöomorphismus.

D. h. es existiert ein  $y \in V_j$ , so dass  $p|_{V_j}(y) = x$ . Da  $x \in X$  beliebig war und ein  $y \in Y$  existiert, mit  $p(y) = x$ , ist  $p$  surjektiv. ■

### **Definition 49**

Seien  $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

$f$  heißt **offen** : $\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_X : f(U) \in \mathfrak{T}_Y.$

Abbildung 3.12:  $t \mapsto (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$ **Beispiel 36 (Offene und stetige Abbildungen)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  Abbildungen.

- 1)  $f_1 := \text{id}_{\mathbb{R}}$  ist eine offene und stetige Abbildung.
- 2)  $g(x) := e^{2\pi i x}$  ist eine offene, aber keine stetige Abbildung (vgl. [Abbildung 1.5](#)).
- 3)  $f_2(x) := 42$  ist eine stetige, aber keine offene Abbildung.
- 4)  $f_3(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 42 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$   
ist weder stetig noch offen.

**Bemerkung 52**

Überlagerungen sind offene Abbildungen.

**Beweis:** Sei  $y \in V$  und  $x \in p(V)$ , sodass  $x = p(y)$  gilt. Sei weiter  $U = U_x$  eine offene Umgebung von  $x$  wie in [Definition 48](#) und  $V_j$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y$  enthält.

Dann ist  $V \cap V_j$  offene Umgebung von  $y$ .

$\Rightarrow p(V \cap V_j)$  ist offen in  $p(V_j)$ , also auch offen in  $X$ . Außerdem ist  $p(y) = x \in p(V \cap V_j)$  und  $p(V \cap V_j) \subseteq p(V)$ .

$\Rightarrow p(V)$  ist offen.

**Definition 50**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ .

$M$  heißt **diskret** in  $X$ , wenn  $M$  in  $X$  keinen Häufungspunkt hat.

**Bemerkung 53**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $x \in X$ .

- a)  $X$  hausdorffsch  $\Rightarrow Y$  hausdorffsch
- b)  $p^{-1}(x)$  ist diskret in  $Y$  für jedes  $x \in X$ .

**Beweis:**

- a) Seien  $y_1, y_2 \in Y$ .

1. Fall:  $p(y_1) = p(y_2) = x$ .

Sei  $U$  Umgebung von  $x$  wie in [Definition 48](#),  $V_{j_1}$  bzw.  $V_{j_2}$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y_1$  bzw.  $y_2$  enthält.

Dann ist  $V_{j_1} \neq V_{j_2}$ , weil beide ein Element aus  $p^{-1}(x)$  enthalten.

$\Rightarrow V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$  nach Voraussetzung.

2. Fall:  $p(y_1) \neq p(y_2)$ .

Dann seien  $U_1$  und  $U_2$  disjunkte Umgebungen von  $p(y_1)$  und  $p(y_2)$ .

$\Rightarrow p^{-1}(U_1)$  und  $p^{-1}(U_2)$  sind disjunkte Umgebungen von  $y_1$  und  $y_2$ .

b) Sei  $x \in X$  beliebig, aber fest.

Zu zeigen:  $\forall y_i \in p^{-1}(x) : \exists V_i \in \mathfrak{T}_Y$  mit  $y_i \in V_i$ , sodass gilt:  $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$ .

Die  $V_i$  existieren wegen der Definition einer Überlagerung:  $p$  heißt Überlagerung  $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x) \in \mathfrak{T}_X : p^{-1}(U) = \bigcup_{V_i \in \mathfrak{T}_Y} V_i$  und  $p|_{V_i}$  ist Homöomorphismus.

$\Rightarrow (p|_{V_i})^{-1}(x) = \{y_i\}$

$\Rightarrow$  Alle  $y_i$  liegen diskret in  $Y$ , da Häufungspunkte unendlich viele Elemente in jeder Umgebung benötigen. ■

#### Bemerkung 54

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $x_1, x_2 \in X$ .

Dann ist  $|p^{-1}(x_1)| = |p^{-1}(x_2)|$ .<sup>1</sup>

**Beweis:** Sei  $U$  Umgebung von  $x_1$  wie in [Definition 48](#),  $x \in U$ . Dann enthält jedes  $V_j, j \in I_X$  genau ein Element von  $p^{-1}(x)$

$\Rightarrow |p^{-1}(x)|$  ist konstant auf  $U$

Xzhgd.  $|p^{-1}(x)|$  ist konstant auf  $X$

#### Definition 51

Es seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Z \rightarrow X$  stetig.

Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  heißt **Liftung** von  $f$ , wenn  $p \circ \tilde{f} = f$  ist.

#### Bemerkung 55 (Eindeutigkeit der Liftung)

Sei  $Z$  zusammenhängend und  $f_0, f_1 : Z \rightarrow Y$  Liftungen von  $f$ .

$\exists z_0 \in Z : f_0(z_0) = f_1(z_0) \Rightarrow f_0 = f_1$

**Beweis:** Sei  $T = \{z \in Z \mid f_0(z) = f_1(z)\}$ .

Z. z.:  $T$  ist offen und  $Z \setminus T$  ist auch offen.

Sei  $z \in T$ ,  $x = f(z)$ ,  $U$  Umgebung von  $x$  wie in [Definition 48](#),  $V$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $y := f_0(z) = f_1(z)$  enthält.

Sei  $q : U \rightarrow V$  die Umkehrabbildung zu  $p|_V$ .

Sei  $W := f^{-1}(U) \cap f_0^{-1}(V) \cap f_1^{-1}(V)$ .  $W$  ist offene Umgebung in  $Z$  von  $z$ .

Behauptung:  $W \subseteq T$

Denn für  $w \in W$  ist  $q(f(w)) = q((p \circ f_0))(w) = ((q \circ p) \circ f_0)(w) = f_0(w) = q(f(w)) = f_1(w)$

$\Rightarrow T$  ist offen.

Analog:  $Z \setminus T$  ist offen.

---

<sup>1</sup>  $|p^{-1}(x_1)| = \infty$  ist erlaubt!

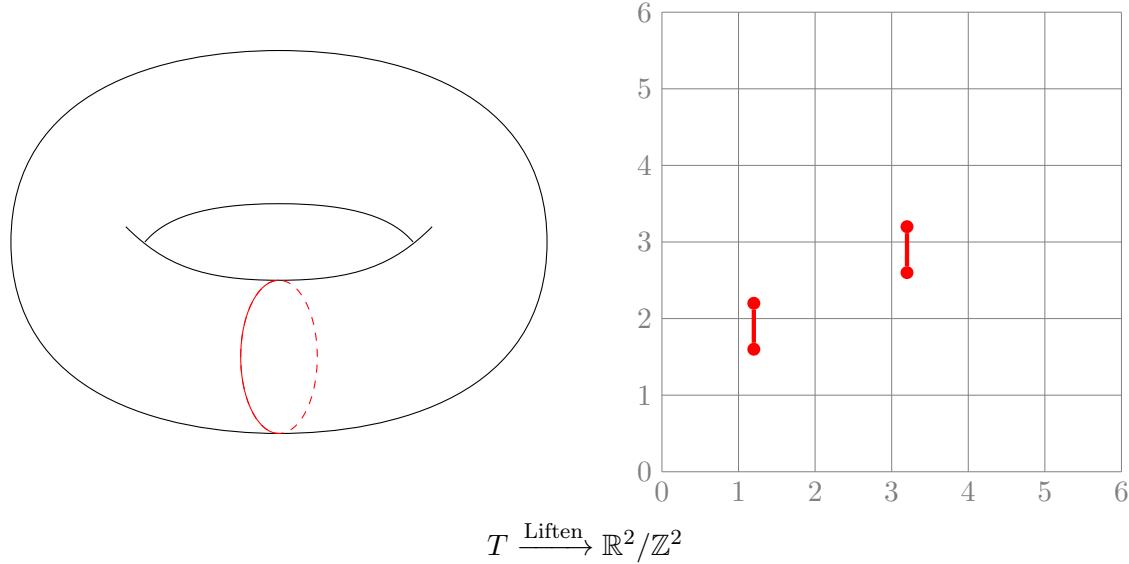


Abbildung 3.13: Beim Liften eines Weges bleiben geschlossene Wege im allgemeinen nicht geschlossen

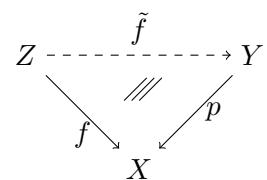


Abbildung 3.14: Situation aus [Bemerkung 55](#)

**Satz 3.2**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg,  $y \in Y$  mit  $p(y) = \gamma(0) =: x$ .

Dann gibt es genau einen Weg  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = y$  und  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

$p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $X, Y$  wegzusammenhängend.  $p$  stetig und surjektiv, zu  $x \in X \exists$  Umgebung  $U$ , so dass  $p^{-1}(U) = \bigcup V_j$

$p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  Homöomorphismus.

**Bemerkung 56**

Wege in  $X$  lassen sich zu Wegen in  $Y$  liften.

Zu jedem  $y \in p^{-1}(\gamma(0))$  gibt es genau einen Lift von  $\gamma$ .

**Proposition 3.3**

Seien  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$  homotope Wege von  $a$  nach  $b$ ,  $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$ ,  $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$  Liftungen von  $\gamma_0$  bzw.  $\gamma_1$  mit  $\tilde{\gamma}_i(0) = \tilde{a}$ .

Dann ist  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$  und  $\tilde{\gamma}_0 \sim \tilde{\gamma}_1$ .

**Beweis:** Sei  $H : I \times I \rightarrow X$  Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Für  $s \in I$  sei  $\gamma_s : I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto H(t, s)$ .

Sei  $\tilde{\gamma}_s$  Lift von  $\gamma_s$  mit  $\tilde{\gamma}_s(0) = \tilde{a}$

Sei  $\tilde{H} : I \times I \rightarrow Y$ ,  $\tilde{H}(t, s) := (\tilde{\gamma}_s(t), s)$

Dann gilt:

- (i)  $\tilde{H}$  ist stetig (Beweis wie für [Bemerkung 55](#))
- (ii)  $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma}_0(t)$ ,  $\tilde{H}(t, 1) = \tilde{\gamma}_1(t)$
- (iii)  $\tilde{H}(0, s) = \tilde{\gamma}_s(0) = \tilde{a}$
- (iv)  $\tilde{H}(1, s) \in p^{-1}(b)$

Da  $p^{-1}(b)$  diskrete Teilmenge von  $Y$  ist

$$\Rightarrow \tilde{b}_s = \tilde{H}(1, s) = \tilde{H}(1, 0) \quad \forall s \in I$$

$\Rightarrow \tilde{b}_0 = \tilde{b}_1$  und  $\tilde{H}$  ist Homotopie zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$ . ■

**Folgerung 3.4**

Sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $x_0 \in X, y_0 \in p^{-1}(x_0)$

- a)  $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  ist injektiv
- b)  $[\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(Y, y_0))] = \deg(p)$

**Beweis:**

a) Sei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg in  $Y$  um  $y_0$  und  $p_*([\tilde{\gamma}]) = e$ , also  $p \circ \tilde{\gamma} \sim \gamma_{x_0}$

Nach [Proposition 3.3](#) ist dann  $\tilde{\gamma}$  homotop zum Lift des konstanten Wegs  $\gamma_{x_0}$  mit Anfangspunkt  $y_0$ , also zu  $\gamma_{y_0} \Rightarrow [\tilde{\gamma}] = e$

b) Sei  $d = \deg p, p^{-1}(x_0) = \{y_0, y_1, \dots, y_{d-1}\}$ . Für einen geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $X$  um  $x_0$  sei  $\tilde{\gamma}$  die Liftung mit  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ .

$\tilde{\gamma}(1) \in \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$  hängt nur von  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  ab.

Für geschlossene Wege  $\gamma_0, \gamma_1$  um  $x$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0(1) &= \tilde{\gamma}_1(1) \\ \Leftrightarrow [\tilde{\gamma}_0 * \tilde{\gamma}_1^{-1}] &\in \pi_1(Y, y_0) \\ \Leftrightarrow [\gamma_0 * \gamma_1^{-1}] &\in p_*(\pi_1(X, x_0)) \\ \Leftrightarrow [\gamma_0] \text{ und } [\gamma_1] &\text{ liegen in der selben Nebenklasse bzgl. } p_*(\pi_1(X, x_0)) \end{aligned}$$

Zu  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  gibt es Weg  $\delta_i$  in  $Y$  mit  $\delta_i(0) = y_0$  und  $\delta_i(1) = y_i$

$\Rightarrow p \cup \delta_i$  ist geschlossener Weg in  $X$  um  $x_0$ .

$\Rightarrow$  Jedes  $y_i$  mit  $i = 0, \dots, d-1$  ist  $\tilde{\gamma}(1)$  für ein  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ .

### Bemerkung 57

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung und  $X$  einfach zusammenhängend.

Dann ist  $p$  ein Homöomorphismus.

**Beweis:** Wegen [Bemerkung 56.a](#) ist auch  $Y$  einfach zusammenhängend und wegen [Bemerkung 56.b](#) ist  $\deg(p) = 1$ ,  $p$  ist also bijektiv.

Nach [Bemerkung 52](#) ist  $p$  offen  $\Rightarrow p^{-1}$  ist stetig.  $\Rightarrow p$  ist Homöomorphismus. ■

### Definition 52

Eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt **universell**, wenn  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

### Beispiel 37

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

$$S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \text{ für } n \geq 2$$

### Satz 3.5

Sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung,  $q : Y \rightarrow X$  weitere Überlagerung.

Sei  $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}, y_0 \in Y$  mit  $q(y_0) = x_0 = p(\tilde{x}_0)$ .

Dann gibt es genau eine Überlagerung  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow Y$  mit  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = y_0$ .

**Beweis:** Sei  $z \in \tilde{X}, \gamma_z : I \rightarrow \tilde{X}$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $z$ .

Sei  $\delta_z$  die eindeutige Liftung von  $p \circ \gamma_z$  nach  $Y$  mit  $\delta_z(0) = y_0$ .

Setze  $\tilde{p}(z) = \delta_z(1)$ .

Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, hängt  $\tilde{p}(z)$  nicht vom gewählten Weg  $\gamma_z$  ab.

Offensichtlich ist  $q(\tilde{p}(z)) = p(z)$ .

Zu zeigen:  $\tilde{p}$  ist stetig in  $z \in \tilde{X}$ :

Sei  $W \subseteq Y$  offene Umgebung von  $\tilde{p}(z)$ .

$\xrightarrow{q \text{ offen}} q(W)$  ist offene Umgebung von  $p(z) \cdot d(\tilde{p}(z))$ .

Sei  $U \subseteq q(W)$  offen wie in [Definition 48](#) und  $V \subseteq q^{-1}(U)$  die Komponente, die  $\tilde{p}(z)$  enthält.

O. B. d. A. sei  $V \subseteq W$ .

Sei  $Z := p^{-1}(U)$ . Für  $u \in Z$  sei  $\delta$  ein Weg in  $Z$  von  $z$  nach  $u$ .

$\Rightarrow \gamma_z * \delta$  ist Weg von  $x_0$  nach  $u$

$\Rightarrow \tilde{p}(u) \in V$

$\Rightarrow Z \subseteq p^{-1}(W)$

$\Rightarrow \tilde{p}$  ist stetig

### Folgerung 3.6

Sind  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  und  $q : \tilde{Y} \rightarrow X$  universelle Überlagerungen, so sind  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  homöomorph.

**Beweis:** Seien  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = x_0$  und  $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{Y}$ .

Nach [Satz 3.5](#) gibt es genau eine Überlagerung

$$f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y} \text{ mit } f(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \text{ und } q \circ f = p$$

und genau eine Überlagerung

$$g : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \text{ mit } g(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0 \text{ und } p \circ g = q$$

Damit gilt:  $p \circ q \circ f = q \circ f = p$ ,  $q \circ f \circ g = p \circ g = q$ . Also ist  $g \circ f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  Lift von  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $(g \circ f)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ .

Da auch  $\text{id}_{\tilde{x}}$  diese Eigenschaft hat, folgt mit [Bemerkung 54](#):  $g \circ f = \text{id}_{\tilde{X}}$ . Analog gilt  $f \circ g = \text{id}_{\tilde{Y}}$ . ■

Die Frage, wann es eine universelle Überlagerung gibt, beantwortet der folgende Satz:

### Satz 3.7

Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum in dem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Mengen hat.

Dann gibt es eine universelle Überlagerung.

**Beweis:** Sei  $x_0 \in X$  und  $\tilde{X} := \{ (x, [\gamma]) \mid x \in X, \gamma \text{ Weg von } x_0 \text{ nach } x \}$  und  $p : \tilde{X} \rightarrow X, (x, [\gamma]) \mapsto x$ .

Die Topologie auf  $\tilde{X}$  ist folgende: Definiere eine Umgebungsbasis von  $(x, [\gamma])$  wie folgt: Es sei  $U$  eine einfach zusammenhängende Umgebung von  $x$  und

$$\tilde{U} = \tilde{U}(x, [\gamma]) := \{ (y, [\gamma * \alpha]) \mid y \in U, \alpha \text{ Weg in } U \text{ von } x \text{ nach } y \}$$

$p$  ist Überlagerung:  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  bijektiv.  $p$  ist stetig und damit  $p|_{\tilde{U}}$  ein Homöomorphismus.

Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  Wege von  $x_0$  nach  $x$  und  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , so ist  $\tilde{U}(x, [\gamma_1]) \cap \tilde{U}(x, [\gamma_2]) = \emptyset$ , denn: Ist  $\gamma_1 * \alpha \sim \gamma_2 * \alpha$ , so ist auch  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ . Also ist  $p$  eine Überlagerung.

$\tilde{X}$  ist einfach zusammenhängend: Es sei  $\tilde{x}_0 := (x_0, e)$  und  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$  ein geschlossener Weg um  $\tilde{x}_0$ .

Sei  $\gamma := p(\tilde{\gamma})$ .

Annahme:  $[\tilde{\gamma}] \neq e$

Mit [Bemerkung 56.a](#) folgt dann:  $[\gamma] \neq e$ .

Dann ist der Lift von  $\gamma$  nach  $\tilde{x}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $(x_0, [\gamma])$ . Widerspruch.

### Definition 53

Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus.

- a)  $f$  heißt **Decktransformation** von  $p : \Leftrightarrow p \circ f = p$ .
- b)  $p$  heißt **regulär**, wenn  $|\text{Deck}(Y/X)| = \deg p$  gilt.

### Bemerkung 58 (Eigenschaften der Decktransformation)

- a) Die Decktransformationen von  $p : Y \rightarrow X$  bilden mit der Verkettung eine Gruppe, die sog. **Decktransformationsgruppe**. Man schreibt:  $\text{Deck}(p)$ ,  $\text{Deck}(Y/X)$  oder  $\text{Deck}(Y \rightarrow X)$ .
- b) Ist  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  und  $f \neq \text{id}$ , dann hat  $f$  keinen Fixpunkt.
- c)  $|\text{Deck}(Y/X)| \leq \deg p$
- d) Ist  $f$  eine reguläre Überlagerung, dann gilt:  $\forall x \in X : \text{Deck}(Y/X)$  operiert transitiv auf der Menge der Urbilder  $f^{-1}(x)$ .

### Beweis:

- a) Es gilt:

- $\text{id}_Y \in \text{Deck } Y/X$ ,
- $f, g \in \text{Deck } Y/X \Rightarrow p \circ (f \circ g) = (p \circ f) \circ g = p \circ g \Rightarrow f \circ g \in \text{Deck } Y/X$
- $f \in \text{Deck } Y/X \Rightarrow p \circ f = p \Rightarrow p \circ f^{-1} = (p \circ f) \circ f^{-1} = p \circ (f \circ f^{-1}) = p \Rightarrow f^{-1} \in \text{Deck } Y/X$

- b) Die Menge

$$\text{Fix}(f) = \{ y \in Y \mid f(y) = y \}$$

ist abgeschlossen als Urbild der Diagonale  $\Delta \subseteq Y \times Y$  unter der stetigen Abbildung  $y \mapsto (f(y), y)$ . Außerdem ist  $\text{Fix}(f)$  offen, denn ist  $y \in \text{Fix}(f)$ , so sei  $U$  eine Umgebung von  $p(y) \in X$  wie in [Definition 48](#) und  $U \subseteq p^{-1}(U)$  die Komponente, die  $y$  enthält; also  $p : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $W := f^{-1}(V) \cap V$  offene Umgebung von  $y$ .

Für  $z \in W$  ist  $f(z) \in V$  und  $p(f(z)) = p(z)$ . Da  $p$  injektiv auf  $V$  ist, folgt  $f(z) = z$ , d. h.  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ .

Da  $Y$  zusammenhängend ist, folgt aus  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$  schon  $\text{Fix}(f) = Y$ , also  $f = \text{id}_Y$ .

- c) Es sei  $x_0 \in X$ ,  $\deg(p) = d$  und  $p^{-1}(x_0) = \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$ . Für  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  ist  $f(y_0) = \{y_0, \dots, y_{d-1}\}$ .

Zu  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  gibt es höchstens ein  $f \in \text{Deck}(Y/X)$  mit  $f(y_0) = y_i$ , denn ist  $f(y_0) = g(y_0)$ , so ist  $(g^{-1} \circ f)(y_0) = y_0$ , also nach [Bemerkung 58.c](#)  $g^{-1} \circ f = \text{id}_Y$ .

### Beispiel 38 (Decktransformationen)

- 1)  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : \text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) = \{t \mapsto t + n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$
- 2)  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 : \text{Deck}(\mathbb{R}^2/T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$
- 3)  $p : S^n \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) : \text{Deck}(S^n/\mathcal{P}^n(\mathbb{R})) = \{x \mapsto \pm x\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Nun werden wir eine Verbindung zwischen der Decktransformationsgruppe und der Fundamentalgruppe herstellen:

#### Satz 3.8

Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung, so gilt:

$$\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

**Beweis:** Wähle  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Es sei  $\rho : \text{Deck}(\tilde{X}/X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  die Abbildung, die  $f$  auf  $[p(\gamma_f)]$  abbildet, wobei  $\gamma_f$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $f(\tilde{x}_0)$  sei. Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\gamma_f$  bis auf Homotopie eindeutig bestimmt und damit auch  $\rho$  wohldefiniert.

- $\rho$  ist Gruppenhomomorphismus: Seien  $f, g \in \text{Deck}(\tilde{X}/X) \Rightarrow \gamma_{g \circ f} = \gamma_g * g(\gamma_f) \Rightarrow p(\gamma_{g \circ f}) = p(\gamma_g) * \underbrace{(p \circ g)(\gamma_f)}_{=p} = \rho(g) \neq \rho(f)$
- $\rho$  ist injektiv:  $\rho(f) = e \Rightarrow p(\gamma_f) \sim \gamma_{x_0} \xrightarrow{\text{Satz 3.2}} \gamma_f \sim \gamma_{\tilde{x}_0} \Rightarrow f(x_0) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{\text{Bem. 58.c}} f = \text{id}_{\tilde{x}}$ .
- $\rho$  ist surjektiv: Sei  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\tilde{\gamma}$  Lift von  $\gamma$  nach  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$ . Der Endpunkt von  $\tilde{\gamma}$  sei  $\tilde{x}_1$ .

$p$  ist reguläre Überlagerung: Seien  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ . Nach [Satz 3.5](#) gibt es genau eine Überlagerung  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $p = p \circ \tilde{p}$  und  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ . Somit ist  $\tilde{p}$  eine Decktransformation und damit  $p$  eine reguläre Überlagerung.

Da  $p$  reguläre Überlagerung ist, gibt es ein  $f \in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$  mit  $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ .

Aus der Definition von  $\rho$  folgt:  $\rho(f) = p(\gamma_f) = \gamma$

■

### Beispiel 39 (Bestimmung von $\pi_1(S^1)$ )

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  ist universelle Überlagerung, da  $\mathbb{R}$  zusammenhängend ist.

Für  $n \in \mathbb{Z}$  sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t + n$  die Translation um  $n$ .

Es gilt:  $(p \circ f_n)(t) = p(f_n(t)) = p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , d. h.  $f_n$  ist Decktransformation.

Ist umgekehrt  $g$  irgendeine Decktransformation, so gilt insbesondere für  $t = 0$ :

$$(\cos(2\pi g(0)), \sin(2\pi g(0))) = (p \circ g)(0) = p(0) = (1, 0)$$

Es existiert  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $g(0) = n$ . Da auch  $f_n(0) = 0 + n = n$  gilt, folgt mit [Bemerkung 58.c](#)  $g = f_n$ . Damit folgt:

$$\text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) = \{ f_n \mid n \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$$

Nach [Satz 3.8](#) also  $\pi_1(S^1) \cong \text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z}$

## 3.4 Gruppenoperationen

### Definition 54

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge.

Eine **Gruppenoperation** von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $\circ : G \times X \rightarrow X$  für die gilt:

- a)  $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$
- b)  $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

### Beispiel 40

- 1)  $G = (\mathbb{Z}, +), X = \mathbb{R}, n \circ x = x + n$
- 2)  $G$  operiert auf  $X = G$  durch  $g \circ h := g \cdot h$
- 3)  $G$  operiert auf  $X = G$  durch  $g \circ h := g \cdot h \cdot g^{-1}$ , denn
  - i)  $1_G \circ h = 1_G \cdot h \cdot 1_G^{-1} = h$
  - ii)  $(g_1 \cdot g_2) \circ h = (g_1 \cdot g_2) \cdot h \cdot (g \cdot g_2)^{-1}$   
 $= g_1 \cdot (g_2 \cdot h \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1}$   
 $= g_1 \circ (g_2 \circ h)$

### Definition 55

Sei  $G$  eine Gruppe,  $X$  ein topologischer Raum und  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenoperation.

- a)  $G$  operiert durch **Homöomorphismen**, wenn für jedes  $g \in G$  die Abbildung

$$m_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$$

ein Homöomorphismus ist.

- b) Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation  $\circ$  **stetig**, wenn

$$\forall g \in G : m_g \text{ ist stetig}$$

gilt.

### Bemerkung 59

Jede stetige Gruppenoperation ist eine Gruppenoperation durch Homöomorphismen.

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $m_g := \circ|_{\{g\} \times X} : X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$  stetig.

Die Umkehrabbildung zu  $m_g$  ist  $m_{g^{-1}}$ :

$$\begin{aligned} (m_{g^{-1}} \circ m_g)(x) &= m_{g^{-1}}(m_g(x)) \\ &= m_{g^{-1}}(g \circ x) \\ &= g^{-1} \circ (g \circ x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{Def. 54.b}}{=} (g^{-1} \cdot g) \circ x \\
 & = 1_G \circ x \\
 & \stackrel{\text{Def. 54.a}}{=} x
 \end{aligned}$$

**Beispiel 41**

In Beispiel 40.1 operiert  $\mathbb{Z}$  durch Homöomorphismen.

**Bemerkung 60**

Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge.

- a) Die Gruppenoperation von  $G$  auf  $X$  entsprechen bijektiv den Gruppenhomomorphismen  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X) = \text{Sym}(X) = \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv} \}$
- b) Ist  $X$  ein topologischer Raum, so entsprechen dabei die Gruppenoperationen durch Homöomorphismus den Gruppenhomomorphismen  $G \rightarrow \text{Homöo}(X)$

**Beweis:**

Sei  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenoperation von  $G$  auf  $X$ . Dann sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X)$  definiert durch  $\varrho(g)(X) = g \cdot x \quad \forall g \in G, x \in X$ , also  $\varrho(g) = m_g$ .

$\varrho$  ist Homomorphismus:  $\varrho(g_1 \cdot g_2) = m_{g_1 \cdot g_2} = m_{g_1} \circ m_{g_2} = \varrho(g_1) \circ \varrho(g_2)$ , denn für  $x \in X$ :  $\varrho(g_1 \cdot g_2)(x) = (g_1 \cdot g_2) \circ x = g_1 \circ (g_2 \circ x) = \varrho(g_1)(\varrho(g_2)(x)) = (\varrho(g_1) \circ \varrho(g_2))(x)$

Umgekehrt: Sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Perm}(X)$  Gruppenhomomorphismus. Definiere  $\circ : G \times X \rightarrow X$  durch  $g \circ x = \varrho(g)(x)$ .

z. z. **Definition 54.b:**

$$\begin{aligned}
 g_1 \circ (g_2 \circ x) &= \varrho(g_1)(g_2 \circ x) \\
 &= \varrho(g_1)(\varrho(g_2)(x)) \\
 &= (\varrho(g_1) \circ \varrho(g_2))(x) \\
 &\stackrel{\varrho \text{ ist Hom.}}{=} \varrho(g_1 \cdot g_2)(x) \\
 &= (g_1 \cdot g_2) \circ x
 \end{aligned}$$

z. z. **Definition 54.a:**  $1_G \cdot x = \varrho(1_G)(x) = \text{id}_X(x) = x$ , weil  $\varrho$  ein Homomorphismus ist.

**Beispiel 42**

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ .

Dann operiert  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $\tilde{X}$  durch Homöomorphismen wie folgt:

Für  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  und  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  sei  $[\gamma] \circ \tilde{x} = \gamma \tilde{*} \varrho(1)$  wobei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}$  in  $\tilde{X}$  sei,  $\varrho := p(\tilde{\delta}) = p \circ \delta$ .

Also:  $\delta$  ist ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x = p(\tilde{x})$  und  $\widetilde{\gamma * \delta}$  die Liftung von  $\gamma * \delta$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$ .

$[\gamma] \cdot \tilde{x}$  hängt nicht von der Wahl von  $\tilde{\gamma}$  ab; ist  $\tilde{\gamma}'$  ein anderer Weg von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}$ , so sind  $\tilde{\delta}$  und  $\tilde{\delta}'$  homotop, also auch  $\widetilde{\gamma * \delta}$  und  $\widetilde{\gamma * \delta'}$  homotop.

Gruppenoperation, denn:

$$\text{i)} [e] \circ \tilde{x} = \widetilde{e * \delta} = \tilde{x}$$

$$\text{ii)} \quad \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2 * \delta}(1) = [\gamma_1 * \gamma_2] \circ \tilde{x} = ([\gamma_1] * [\gamma_2]) \circ \tilde{x}$$

$$\gamma_1 * \gamma_2 * \delta(1) = [\gamma_1] \circ (\widetilde{\gamma_2 * \delta})(1) = [\gamma_1] \circ ([\gamma_2] \circ \tilde{x})$$

**Erinnerung:** Die Konstruktion aus [Bemerkung 60](#) induziert zu der Gruppenoperation  $\pi_1(X, x_0)$  aus [Beispiel 42](#) einen Gruppenhomomorphismus  $\varrho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Hom}\ddot{o}(X)$ . Nach [Satz 3.8](#) ist

$$\begin{aligned} \varrho(\pi_1(X, x_0)) &= \text{Deck}(\tilde{X}/X) \\ &= \left\{ f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \text{ Hom}\ddot{o}\text{omorphismus} \mid p \circ f = p \right\} \end{aligned}$$

### Beispiel 43

Sei  $X := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $\tau$  die Drehung um die  $z$ -Achse um  $180^\circ$ .

$g = \langle \tau \rangle = \{ \text{id}, \tau \}$  operiert auf  $S^2$  durch Homöomorphismen.

Frage: Was ist  $S^2/G$ ? Ist  $S^2/G$  eine Mannigfaltigkeit?

# 4 Euklidische und nichteuklidische Geometrie

## Definition 56

Das Tripel  $(X, d, G)$  heißt genau dann eine **Geometrie**, wenn  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$  gilt. Dann heißt  $G$  die Menge aller **Geraden**.

## 4.1 Axiome für die euklidische Ebene

Axiome bilden die Grundbausteine jeder mathematischen Theorie. Eine Sammlung aus Axiomen nennt man Axiomensystem. Da der Begriff des Axiomensystems so grundlegend ist, hat man auch ein paar sehr grundlegende Forderungen an ihn: Axiomensysteme sollen **widerspruchsfrei** sein, die Axiome sollen möglichst **unabhängig** sein und **Vollständigkeit** wäre auch toll. Mit Unabhängigkeit ist gemeint, dass kein Axiom sich aus einem anderem herleiten lässt. Dies scheint auf den ersten Blick eine einfache Eigenschaft zu sein. Auf den zweiten Blick muss man jedoch einsehen, dass das Parallelenproblem, also die Frage ob das Parallelenaxiom unabhängig von den restlichen Axiomen ist, über 2000 Jahre nicht gelöst wurde. Ein ganz anderes Kaliber ist die Frage nach der Vollständigkeit. Ein Axiomensystem gilt als Vollständig, wenn jede Aussage innerhalb des Systems verifizierbar oder falsifizierbar ist. Interessant ist hierbei der Gödelsche Unvollständigkeitssatz, der z. B. für die Arithmetik beweist, dass nicht alle Aussagen formal bewiesen oder widerlegt werden können.

Kehren wir nun jedoch zurück zur Geometrie. Euklid hat in seiner Abhandlung „Die Elemente“ ein Axiomensystem für die Geometrie aufgestellt.

### Euklids Axiome

- **Strecke** zwischen je zwei Punkten
- Jede Strecke bestimmt genau eine **Gerade**
- **Kreis** (um jeden Punkt mit jedem Radius)
- Je zwei rechte Winkel sind gleich (Isometrie, Bewegung)
- Parallelenaxiom von Euklid:  
Wird eine Gerade so von zwei Geraden geschnitten, dass die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte ist, dann schneiden sich diese Geraden auf der Seite dieser Winkel.

Man mache sich klar, dass das nur dann nicht der Fall ist, wenn beide Geraden parallel sind und senkrecht auf die erste stehen.

## Definition 57

Eine **euklidische Ebene** ist eine Geometrie  $(X, d, G)$ , die Axiome §1 - §5 erfüllt:

- §1) **Inzidenzaxiome:**

- (i) Zu  $P \neq Q \in X$  gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $\{P, Q\} \subseteq g$ .
- (ii)  $|g| \geq 2 \quad \forall g \in G$
- (iii)  $X \notin G$
- §2) **Abstandsaxiom:** Zu  $P, Q, R \in X$  gibt es genau dann ein  $g \in G$  mit  $\{P, Q, R\} \subseteq g$ , wenn gilt:

- $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$  oder
- $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$  oder
- $d(Q, R) = d(Q, P) + d(P, R)$

### Definition 58

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie und seien  $P, Q, R \in X$ .

- a)  $P, Q, R$  liegen **kollinear**, wenn es  $g \in G$  gibt mit  $\{P, Q, R\} \subseteq g$ .
- b)  $Q$  liegt **zwischen**  $P$  und  $R$ , wenn  $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$
- c) **Strecke**  $\overline{PR} := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R\}$
- d) **Halbgeraden:**  
 $PR^+ := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \text{ oder } R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q\}$   
 $PR^- := \{Q \in X \mid P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R\}$



Abbildung 4.1: Halbgeraden

### Bemerkung 61

- a)  $PR^+ \cup PR^- = PR$
- b)  $PR^+ \cap PR^- = \{P\}$

### Beweis:

- a) „ $\subseteq$ “ folgt direkt aus der Definition von  $PR^+$  und  $PR^-$   
„ $\supseteq$ “: Sei  $Q \in PR \Rightarrow P, Q, R$  sind kollinear.  
 $\xrightarrow{2} \begin{cases} Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \Rightarrow Q \in PR \\ R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q \Rightarrow Q \in PR \\ P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R \Rightarrow Q \in PR \end{cases}$
- b) „ $\supseteq$ “ ist offensichtlich  
„ $\subseteq$ “: Sei  $PR^+ \cap PR^-$ . Dann ist  $d(Q, R) = d(P, Q) + d(P, R)$  weil  $Q \in PR^-$  und

$$\left\{ \begin{array}{l} d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R) \text{ oder} \\ d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, R) = 2d(P, Q) + d(Q, R)$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow d(P, Q) = 0 \\
 &\Rightarrow P = Q \\
 &d(P, Q) = 2d(P, R) + d(P, Q) \\
 &\Rightarrow P = R \\
 &\Rightarrow \text{Widerspruch}
 \end{aligned}$$

**Definition 59****§3) Anordnungsaxiome**

- (i) Zu jeder Halbgerade  $H$  mit Anfangspunkt  $P \in X$  und jedem  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gibt es genau ein  $Q \in H$  mit  $d(P, Q) = r$ .
- (ii) Jede Gerade zerlegt  $X \setminus g = H_1 \dot{\cup} H_2$  in zwei nichtleere Teilmengen  $H_1, H_2$ , sodass für alle  $A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt:  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ .  
Diese Teilmengen  $H_i$  heißen **Halbebenen** bzgl.  $g$ .
- §4) **Bewegungsaxiom:** Zu  $P, Q, P', Q' \in X$  mit  $d(P, Q) = d(P', Q')$  gibt es mindestens 2 Isometrien  $\varphi_1, \varphi_2$  mit  $\varphi_i(P) = P'$  und  $\varphi_i(Q) = Q'$  mit  $i = 1, 2$ .<sup>1</sup>
- §5) **Parallelenaxiom:** Zu jeder Geraden  $g \in G$  und jedem Punkt  $P \in X \setminus g$  gibt es höchstens ein  $h \in G$  mit  $P \in h$  und  $h \cap g = \emptyset$ .  $h$  heißt **Parallele zu  $g$  durch  $P$** .

**Satz 4.1 (Satz von Pasch)**

Seien  $P, Q, R$  nicht kollinear,  $g \in G$  mit  $g \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$  und  $g \cap \overline{PQ} \neq \emptyset$ .

Dann ist entweder  $g \cap \overline{PR} \neq \emptyset$  oder  $g \cap \overline{QR} \neq \emptyset$ .

Dieser Satz besagt, dass Geraden, die eine Seite eines Dreiecks (also nicht nur eine Ecke) schneiden, auch eine weitere Seite schneiden.

**Beweis:**  $g \cap \overline{PQ} \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{3(ii)}{\Rightarrow} P \text{ und } Q \text{ liegen in verschiedenen Halbebenen bzgl. } g \\
 &\Rightarrow \text{o. B. d. A. } R \text{ und } P \text{ liegen in verschiedenen Halbebenen bzgl. } g \\
 &\Rightarrow g \cap \overline{RP} \neq \emptyset
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 62**

Sei  $P, Q \in X$  mit  $P \neq Q$  sowie  $A, B \in X \setminus PQ$  mit  $A \neq B$ . Außerdem seien  $A$  und  $B$  in der selben Halbebene bzgl.  $PQ$  sowie  $Q$  und  $B$  in der selben Halbebene bzgl.  $PA$ .

Dann gilt:  $PB^+ \cap \overline{AQ} \neq \emptyset$

Auch **Bemerkung 62** lässt sich umgangssprachlich sehr viel einfacher ausdrücken: Die Diagonalen eines konvexen Vierecks schneiden sich.

**Beweis:** Sei  $P' \in PQ^-, P' \neq P \xrightarrow{\text{Satz 4.1}} PB$  schneidet  $\overline{AP'} \cup \overline{AQ}$

Sei  $C$  der Schnittpunkt. Dann gilt:

- (i)  $C \in PB^+$ , denn  $A$  und  $B$  liegen in derselben Halbebene bzgl.  $PQ = P'Q$ , also auch  $\overline{AP'}$  und  $\overline{AQ}$ .

<sup>1</sup>Die „Verschiebung“ von  $P'Q'$  nach  $PQ$  und die Isometrie, die zusätzlich an der Geraden durch  $P$  und  $Q$  spiegelt.

Abbildung 4.2: Situation aus **Bemerkung 62**

(ii)  $C$  liegt in derselben Halbebene bzgl.  $PA$  wie  $B$ , weil das für  $Q$  gilt.

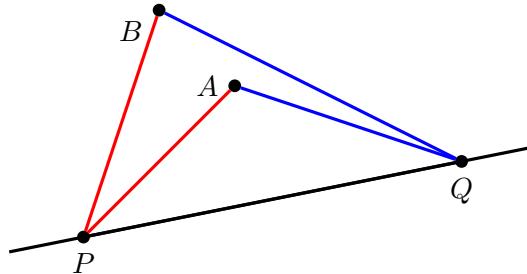
$\overline{AP'}$  liegt in der anderen Halbebene bzgl.  $PA \Rightarrow C \notin \overline{P'A} \Rightarrow C \in \overline{AQ}$

Da  $C \in PB^+$  und  $C \in \overline{AQ}$  folgt nun direkt:  $\emptyset \neq \{C\} \subseteq PB^+ \cap \overline{AQ}$  ■

### Bemerkung 63

Seien  $P, Q \in X$  mit  $P \neq Q$  und  $A, B \in X \setminus PQ$  in der selben Halbebene bzgl.  $PQ$ . Außerdem sei  $d(A, P) = d(B, P)$  und  $d(A, Q) = d(B, Q)$ .

Dann ist  $A = B$ .

Abbildung 4.3: **Bemerkung 63:** Die beiden roten und die beiden blauen Linien sind gleich lang.

Intuitiv weiß man, dass daraus folgt, dass  $A = B$  gilt.

**Beweis:** durch Widerspruch

Annahme:  $A \neq B$

Dann ist  $B \notin (PA \cup QA)$  wegen §2.

1. Fall:  $Q$  und  $B$  liegen in derselben Halbebene bzgl.  $PA$

Bem. 62  $\overline{PB^+} \cap \overline{AQ} \neq \emptyset$ .

Sei  $C$  der Schnittpunkt vom  $PB$  und  $AQ$ .

Dann gilt:

$$(i) \quad d(A, C) + d(C, Q) = d(A, Q) \stackrel{\text{Vor.}}{=} d(B, Q) < d(B, C) + d(C, Q) \Rightarrow d(A, C) < d(B, C)$$

(ii) a)  $B$  liegt zwischen  $P$  und  $C$ .

$$\begin{aligned} d(P, A) + d(A, C) &> d(P, C) = d(P, B) + d(B, C) = d(P, A) + d(B, C) \Rightarrow \\ d(A, C) &> d(B, C) \Rightarrow \text{Widerspruch zu Punkt (i)} \end{aligned}$$



Abbildung 4.4: Fallunterscheidung aus Bemerkung 63

b)  $C$  liegt zwischen  $P$  und  $B$

$$\begin{aligned} d(P, C) + d(C, A) &> d(P, A) = d(P, B) = d(P, C) + d(C, B) \\ \Rightarrow d(C, A) &> d(C, B) \\ \Rightarrow \text{Widerspruch zu Punkt (i)} \end{aligned}$$

2. Fall:  $Q$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Halbebenen bzgl.  $PA$ .

Dann liegen  $A$  und  $Q$  in derselben Halbebene bzgl.  $PB$ .

Tausche  $A$  und  $B$   $\Rightarrow$  Fall 1

## Bemerkung 64

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie, die §1 - §3 erfüllt,  $P, Q \in X$  mit  $P \neq Q$  und  $\varphi$  eine Isometrie mit  $\varphi(P) = P$  und  $\varphi(Q) = Q$ .

Dann gilt  $\varphi(S) = S \quad \forall S \in PQ$ .

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \text{O. B. d. A. sei } S \in \overline{PQ} &\stackrel{?}{\Leftrightarrow} d(P, Q) = d(P, S) + d(S, Q) \\
 &\stackrel{\varphi \in \text{Iso}(X)}{\Rightarrow} d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(\varphi(P), \varphi(S)) + d(\varphi(S), \varphi(Q)) \\
 &\stackrel{P, Q \in \text{Fix}(\varphi)}{\Rightarrow} d(P, Q) = d(P, \varphi(S)) + d(\varphi(S), Q) \\
 &\Rightarrow \varphi(S) \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q \\
 &\Rightarrow d(P, S) = d(\varphi(P), \varphi(S)) = d(P, \varphi(S)) \\
 &\stackrel{3(i)}{\Rightarrow} \varphi(S) = S
 \end{aligned}$$

### Proposition 4.2

In einer Geometrie, die §1 - §3 erfüllt, gibt es zu  $P, P', Q, Q'$  mit  $d(P, Q) = d(P', Q')$  höchstens zwei Isometrien mit  $\varphi(P) = P'$  und  $\varphi(Q) = Q'$

Aus den Axiomen folgt, dass es in der Situation von §4 höchstens zwei Isometrien mit  $\varphi_i(P) = P'$  und  $\varphi_i(Q) = Q'$  gibt.

**Beweis:** Seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  Isometrien mit  $\varphi_i(P) = P'$ ,  $\varphi_i(Q) = Q'$  mit  $i = 1, 2, 3$ .

Der Beweis von [Proposition 4.2](#) erfolgt über zwei Teilaussagen:

(Teil i)  $\exists R \in X \setminus PQ$  mit  $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ .

(Teil ii) Hat  $\varphi$  3 Fixpunkte, die nicht kollinear sind, so ist  $\varphi = \text{id}_X$ .

Aus [\(Teil i\)](#) und [\(Teil ii\)](#) folgt, dass  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \text{id}_X$ , also  $\varphi_2 = \varphi_1$ , da  $P, Q$  und  $R$  in diesem Fall Fixpunkte sind.

Nun zu den Beweisen der Teilaussagen:

(Teil i) Sei  $R \in X \setminus PQ$ . Von den drei Punkten  $\varphi_1(R), \varphi_2(R), \varphi_3(R)$  liegen zwei in der selben Halbebene bzgl.  $P'Q' = \varphi_i(PQ)$ .

O. B. d. A. seien  $\varphi_1(R)$  und  $\varphi_2(R)$  in der selben Halbebene.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } d(P', \varphi_1(R)) &= d(\varphi_1(P), \varphi_1(R)) \\ &= d(P, R) \\ &= d(\varphi_2(P), \varphi_2(R)) \\ &= d(P', \varphi_2(R)) \end{aligned}$$

und analog  $d(Q', \varphi_1(R)) = d(Q', \varphi_2(R))$

(Teil ii) Seien  $P, Q$  und  $R$  Fixpunkte von  $\varphi$ ,  $R \notin PQ$  und  $A \notin \overline{PQ} \cup \overline{PR} \cup \overline{QR}$ . Sei  $B \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$ . Dann ist  $\varphi(B) = B$  wegen [Bemerkung 64](#).

Ist  $R \in AB$ , so enthält  $AB$  2 Fixpunkte von  $\varphi \xrightarrow{\text{Bem. 64}} \varphi(A) = A$ .

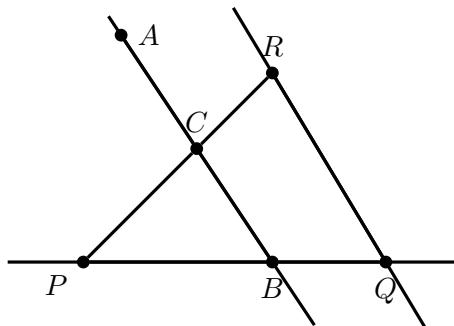


Abbildung 4.5:  $P, Q, R$  sind Fixpunkte,  $B \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$ ,  $A \notin PQ \cup PR \cup QR$

Ist  $R \notin AB$ , so ist  $AB \cap \overline{PR} \neq \emptyset$  oder  $AB \cap \overline{RQ} \neq \emptyset$  nach [Satz 4.1](#). Der Schnittpunkt  $C$  ist dann Fixpunkt von  $\varphi'$  nach [Bemerkung 64](#)  $\Rightarrow \varphi(A) = A$ .

### Bemerkung 65 (SWS-Kongruenzsatz)

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie, die §1 - §4 erfüllt. Seien außerdem  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  Dreiecke, für die gilt:

(i)  $d(A, B) = d(A', B')$

(ii)  $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$

(iii)  $d(A, C) = d(A', C')$

Dann ist  $\triangle ABC$  kongruent zu  $\triangle A'B'C'$ .

**Beweis:** Sei  $\varphi$  die Isometrie mit  $\varphi(A') = A$ ,  $\varphi(B') = B$  und  $\varphi(C')$  liegt in der selben Halbebene bzgl.  $AB$  wie  $C$ . Diese Isometrie existiert wegen **Punkt §4**.

Wegen **Punkt (ii)** ist  $\varphi A' C' + = AC^+$  und wegen **Punkt (iii)** sowie **§3 (i)** ist  $\varphi(C') = C$ . Also gilt insbesondere  $\varphi(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$ . ■

### Bemerkung 66 (WSW-Kongruenzsatz)

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie, die **§1 - §4** erfüllt. Seien außerdem  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  Dreiecke, für die gilt:

- (i)  $d(A, B) = d(A', B')$
- (ii)  $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$
- (iii)  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$

Dann ist  $\triangle ABC$  kongruent zu  $\triangle A'B'C'$ .

**Beweis:** Sei  $\varphi$  die Isometrie mit  $\varphi(A') = A$ ,  $\varphi(B') = B$  und  $\varphi(C')$  liegt in der selben Halbebene bzgl.  $AB$  wie  $C$ . Diese Isometrie existiert wegen **§4**.

Aus  $\angle CAB = \angle C'A'B' = \angle \varphi(C')\varphi(A')\varphi(B') = \angle \varphi(C')AB$  folgt, dass  $\varphi(C') \in AC^+$ . Analog folgt aus  $\angle ABC = \angle A'B'C' = \angle \varphi(A')\varphi(B')\varphi(C') = \angle AB\varphi(C')$ , dass  $\varphi(C') \in BC^+$ .

Dann gilt  $\varphi(C') \in AC \cap BC = \{C\} \Rightarrow \varphi(C') = C$ .

Es gilt also  $\varphi(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$ . ■

### Definition 60

- a) Ein **Winkel** ist ein Punkt  $P \in X$  zusammen mit 2 Halbgeraden mit Anfangspunkt  $P$ . Man schreibt:  $\angle R_1 P R_2$  bzw.  $\angle R_2 P R_1$ <sup>2</sup>
- b) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn es eine Isometrie gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet.
- c)  $\angle R'_1 P' R'_2$  heißt **kleiner** als  $\angle R_1 P R_2$ , wenn es eine Isometrie  $\varphi$  gibt, mit  $\varphi(P') = P$ ,  $\varphi(P'R'_1+) = PR_1^+$  und  $\varphi(R'_2)$  liegt in der gleichen Halbebene bzgl.  $PR_1$  wie  $R_2$  und in der gleichen Halbebene bzgl.  $PR_2$  wie  $R_1$
- d) Im Dreieck  $\triangle PQR$  gibt es **Innenwinkel** und **Außenwinkel**.

### Bemerkung 67

In einem Dreieck ist jeder Innenwinkel kleiner als jeder nicht anliegende Außenwinkel.

**Beweis:** Zeige  $\angle PRQ < \angle RQP'$ .

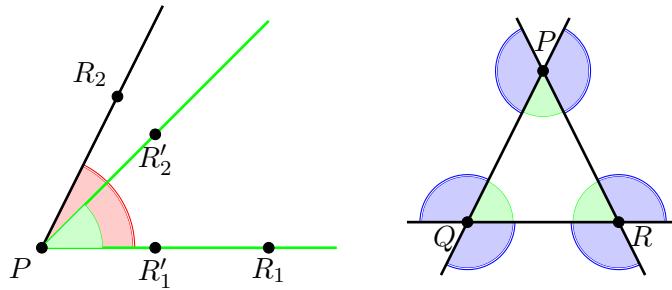
Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{QR}$  und  $P' \in PQ^+ \setminus \overline{PQ}$ . Sei  $A \in MP^-$  mit  $d(P, M) = d(M, A)$ .

Es gilt:  $d(Q, M) = d(M, R)$  und  $d(P, M) = d(M, A)$  sowie  $\angle PMR = \angle AMQ \Rightarrow \triangle MRQ$  ist kongruent zu  $\triangle AMQ$ , denn eine der beiden Isometrien, die  $\angle PMR$  auf  $\angle AMQ$  abbildet, bildet  $R$  auf  $Q$  und  $P$  auf  $A$  ab.

$$\Rightarrow \angle MQA = \angle MRP = \angle QRP = \angle PRQ.$$

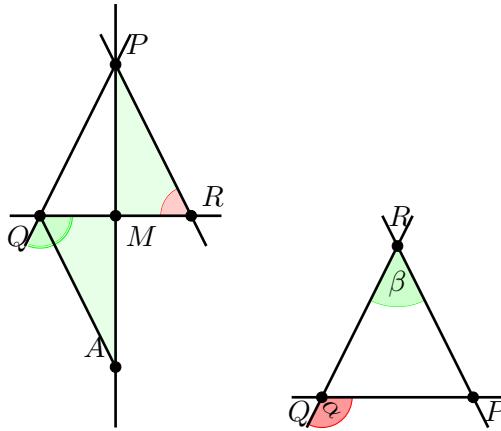
Noch zu zeigen:  $\angle MQA < \angle RQP'$ , denn  $A$  liegt in der selben Halbebene bzgl.  $PQ$  wie  $M$ .

<sup>2</sup>Für dieses Skript gilt:  $\angle R_1 P R_2 = \angle R_2 P R_1$ . Also sind insbesondere alle Winkel  $\leq 180^\circ$ .



- (a)  $\angle R'_1 P' R'_2$  ist kleiner als  $\angle R_1 P R_2$   
 vgl. Definition 60.c  
 (b) Innenwinkel und Außenwinkel in  $\triangle PQR$ , vgl. Definition 60.d

Abbildung 4.6: Situation aus Definition 60



- (a) Parallelogramm AQPR  
 (b) Innen- und Außenwinkel von  $\triangle PQR$

Abbildung 4.7: Situation aus Bemerkung 67

### Proposition 4.3 (Existenz der Parallelen)

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie mit den Axiomen §1 - §4.

Dann gibt es zu jeder Geraden  $g \in G$  und jedem Punkt  $P \in X \setminus g$  mindestens eine Parallele  $h \in G$  mit  $P \in h$  und  $g \cap h = \emptyset$ .

**Beweis:** Seien  $P, Q \in f \in G$  und  $\varphi$  die Isometrie, die  $Q$  auf  $P$  und  $P$  auf  $P' \in f$  mit  $d(P, P') = d(P, Q)$  abbildet und die Halbebenen bzgl.  $f$  erhält.

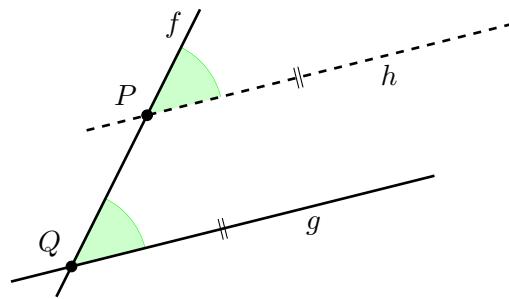
Annahme:  $\varphi(g) \cap g \neq \emptyset$

$\Rightarrow$  Es gibt einen Schnittpunkt  $\{R\} = \varphi(g) \cap g$ .

Dann ist  $\angle QPR < \angle RQP'$  nach Bemerkung 67 und  $\angle QPR = \angle RQP'$ , weil  $\varphi(\angle RQP') = \angle RPQ$ .

$\Rightarrow$  Widerspruch

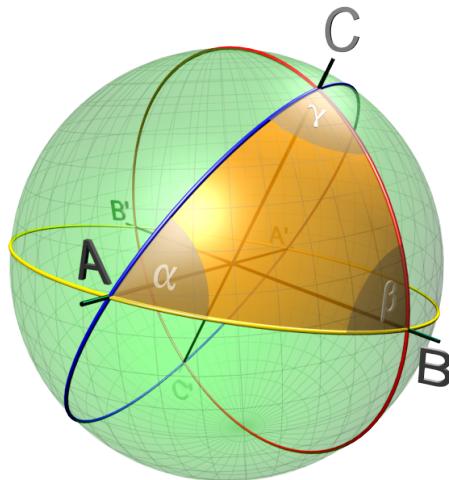
$\Rightarrow \varphi(g) \cap g = \emptyset$  ■

Abbildung 4.8: Situation aus [Proposition 4.3](#)**Folgerung 4.4**

Die Summe zweier Innenwinkel in einem Dreieck ist kleiner als  $\pi$ .

D. h. es gibt eine Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(Q) = P$  und  $\varphi(QP^+) = PR^+$ , sodass  $\varphi(R)$  in der gleichen Halbebene bzgl.  $PQ$  liegt wie  $R$ .

**Beweis:** Die Summe eines Innenwinkels mit den anliegenden Außenwinkeln ist  $\pi$ , d. h. die beiden Halbgeraden bilden eine Gerade.

Abbildung 4.9: In der sphärischen Geometrie gibt es, im Gegensatz zur euklidischen Geometrie, Dreiecke mit drei  $90^\circ$ -Winkeln.**Proposition 4.5**

In einer Geometrie mit den Axiomen §1 - §4 ist in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel  $\leq \pi$ .

Sei im Folgenden „IWS“ die „Innenwinkelsumme“.

**Beweis:** Sei  $\triangle$  ein Dreieck mit  $IWS(\triangle) = \pi + \varepsilon$

Sei  $\alpha$  ein Innenwinkel von  $\triangle$ .

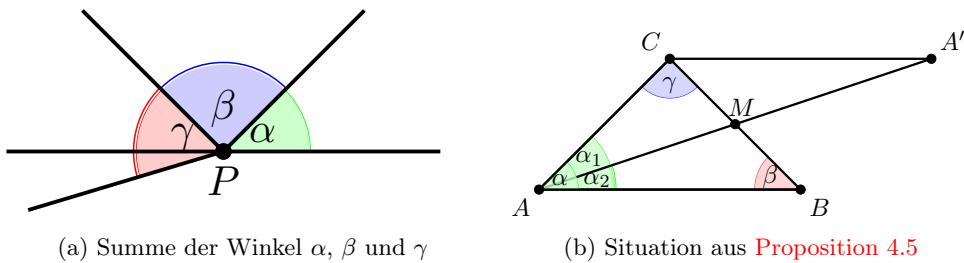


Abbildung 4.10: Situation aus Proposition 4.5

**Beh.:** Es gibt ein Dreieck  $\triangle'$  mit  $IWS(\triangle') = IWS(\triangle)$  und einem Innenwinkel  $\alpha' \leq \frac{\alpha}{2}$ .

Dann gibt es für jedes  $n$  ein  $\triangle_n$  mit  $IWS(\triangle_n) = IWS(\triangle)$  und Innenwinkel  $\alpha' \leq \frac{\alpha}{2^n}$ . Für  $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$  ist dann die Summe der beiden Innenwinkel um  $\triangle_n$  größer als  $\pi \Rightarrow$  Widerspruch zu [Folgerung 4.4](#).

**Beweis:** Es seien  $A, B, C \in X$  und  $\triangle$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $A, B, C$  und  $\alpha$  sei der Innenwinkel bei  $A$ ,  $\beta$  der Innenwinkel bei  $B$  und  $\gamma$  der Innenwinkel bei  $C$ .

Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ . Sei außerdem  $\alpha_1 = \angle CAM$  und  $\alpha_2 = \angle BAM$ .

Sei weiter  $A' \in MA^-$  mit  $d(A', M) = d(A, M)$ .

Die Situation ist in [Abbildung 4.10b](#) skizziert.

$\Rightarrow \triangle(MA'C)$  und  $\triangle(MAB)$  sind kongruent.  $\Rightarrow \angle ABM = \angle A'CM$  und  $\angle MA'C = \angle MAB$ .  $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = IWS(\triangle ABC) = IWS(\triangle AA'C)$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ , also o. B. d. A.  $\alpha_1 \leq \frac{\alpha}{2}$

### Bemerkung 68

In einer euklidischen Ebene ist in jedem Dreieck die Innenwinkelsumme gleich  $\pi$ .

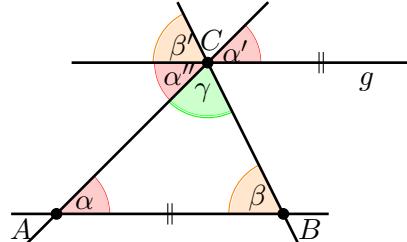


Abbildung 4.11: Situation aus Bemerkung 68

**Beweis:** Sei  $g$  eine Parallele von  $AB$  durch  $C$ .

- Es gilt  $\alpha' = \alpha$  wegen [Proposition 4.3](#).
- Es gilt  $\beta' = \beta$  wegen [Proposition 4.3](#).
- Es gilt  $\alpha'' = \alpha'$  wegen [Aufgabe 8](#).

$$\Rightarrow IWS(\triangle ABC) = \gamma + \alpha'' + \beta' = \pi$$

Aus der Eigenschaft, dass die Innenwinkelsumme von Dreiecken in der euklidischen Ebene gleich  $\pi$  ist, folgen direkt die Kongruenzsätze SWW und WWS über den Kongruenzsatz WSW.

## 4.2 Weitere Eigenschaften einer euklidischen Ebene

### Satz 4.6 (Strahlensatz)

In ähnlichen Dreiecken sind Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

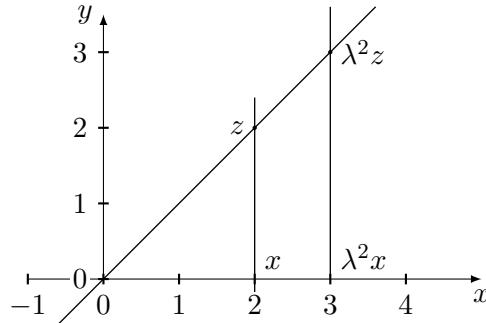


Abbildung 4.12: Strahlensatz

Der Beweis wird hier nicht geführt. Für Beweisvorschläge wäre ich dankbar.

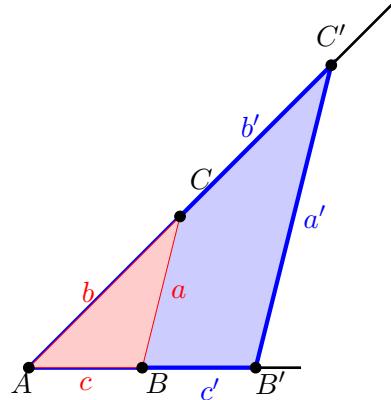


Abbildung 4.13: Die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle AB'C'$  sind ähnlich.

### 4.2.1 Flächeninhalt

#### Definition 61

„Simplizialkomplexe“ in euklidischer Ebene  $(X, d)$  heißen **flächengleich**, wenn sie sich in kongruente Dreiecke zerlegen lassen.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist  $1/2 \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$ .

Zu zeigen: Unabhängigkeit von der gewählten Grundseite.

$$\xrightarrow{\text{Strahlensatz}} \frac{a}{h_c} = \frac{c}{h_a} \rightarrow a \cdot h_a = c \cdot h_c$$

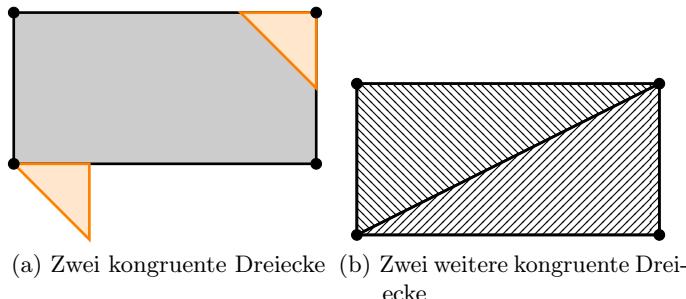


Abbildung 4.14: Flächengleichheit

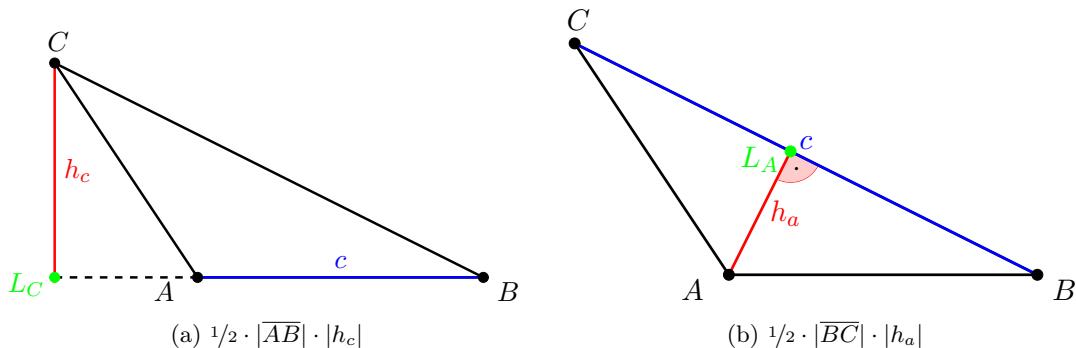


Abbildung 4.15: Flächenberechnung im Dreieck

**Satz 4.7 (Satz des Pythagoras)**

Im rechtwinkligen Dreieck gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ , wobei  $c$  die Hypotenuse und  $a, b$  die beiden Katheten sind.

**Beweis:**  $(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot a \cdot b)$

**Satz 4.8**

Bis auf Isometrie gibt es genau eine euklidische Ebene  $(X, d, G)$ , nämlich  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $d$  = euklidischer Abstand,  $G$  = Menge der üblichen Geraden.

**Beweis:**

- (i)  $(\mathbb{R}^2, d_{\text{Euclid}})$  ist offensichtlich eine euklidische Ebene.
- (ii) Sei  $(X, d)$  eine euklidische Ebene und  $g_1, g_2$  Geraden in  $X$ , die sich in einem Punkt 0 im rechten Winkel schneiden.

Sei  $P \in X \setminus (g_1 \cup g_2)$  ein Punkt und  $P_X$  der Fußpunkt des Lots von  $P$  auf  $g_1$  (vgl. [Aufgabe 9 \(c\)](#)) und  $P_Y$  der Fußpunkt des Lots von  $P$  auf  $g_2$ .

Sei  $x_P := d(P_X, 0)$  und  $y_P := d(P_Y, 0)$ .

In [Abbildung 4.19](#) wurde die Situation skizziert.

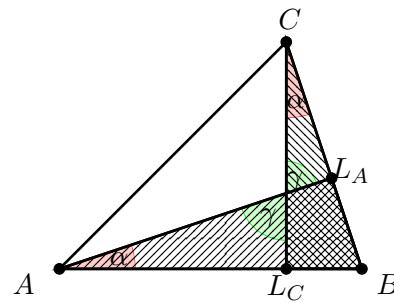
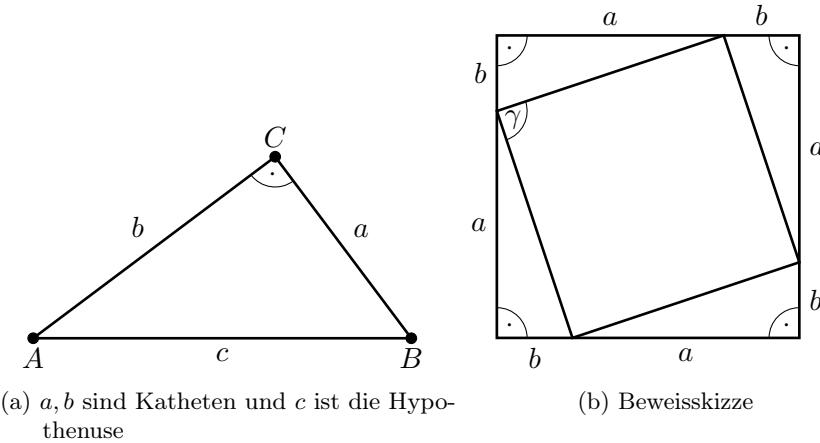
Abbildung 4.16:  $\triangle ABL_A$  und  $\triangle CL_C B$  sind ähnlich, weil  $IWS = \pi$ 

Abbildung 4.17: Satz des Pythagoras

Sei  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Abbildung mit  $h(P) := (x_P, y_P)$ . Dadurch wird  $h$  auf dem Quadranten definiert, in dem  $P$  liegt, d. h.

$$\forall Q \in X \text{ mit } \overline{PQ} \cap g_1 = \emptyset = \overline{PQ} \cap g_2$$

Fortsetzung auf ganz  $X$  durch konsistente Vorzeichenwahl.

Im Folgenden werden zwei Aussagen gezeigt:

- (i)  $h$  ist surjektiv
- (ii)  $h$  ist eine Isometrie

Da jede Isometrie injektiv ist, folgt aus (i) und (ii), dass  $h$  bijektiv ist.

Nun zu den Beweisen der Teilaussagen:

- (i) Sei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , z. B.  $x \geq 0, y \geq 0$ . Sei  $P' \in g_1$  mit  $d(0, P') = x$  und  $P'$  auf der gleichen Seite von  $g_2$  wie  $P$ .
- (ii) Zu Zeigen:  $d(P, Q) = d(h(P), h(Q))$

$$d(P, Q)^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} d(P, R)^2 + d(R, Q)^2 = (y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2.$$

$$h(Q) = (x_Q, y_Q)$$

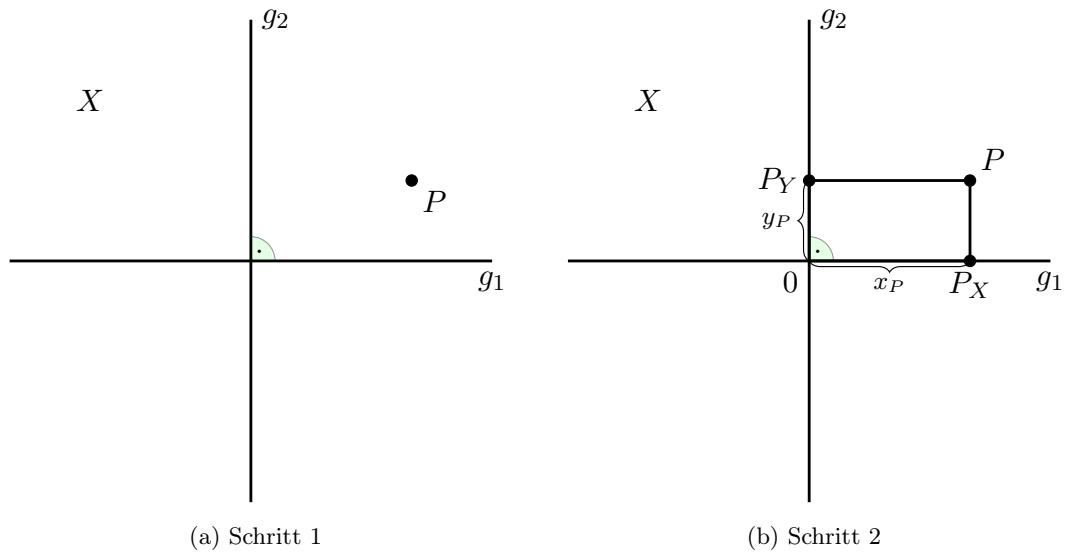


Abbildung 4.18: Beweis zu Satz 4.8

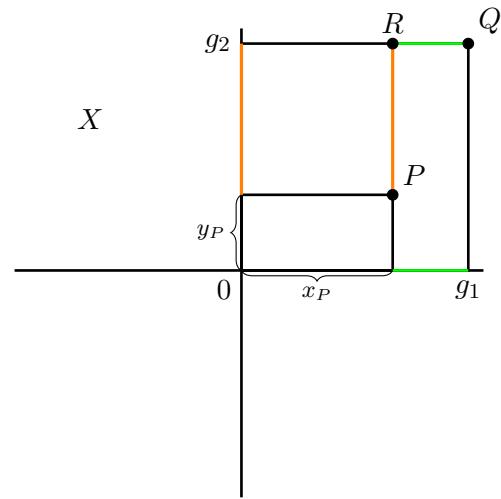


Abbildung 4.19: Beweis zu Satz 4.8

## 4.3 Hyperbolische Geometrie

### Definition 62

Sei

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und  $G = G_1 \cup G_2$  mit

$$\begin{aligned} G_1 &= \{ g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{ z \in \mathbb{H} : |z - m| = r \} \} \\ G_2 &= \{ g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{ z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x \} \} \end{aligned}$$

Die Elemente aus  $G$  heißen **hyperbolische Geraden**.

### Bemerkung 69 (Eigenschaften der hyperbolischen Geraden)

Die hyperbolischen Geraden erfüllen...

- a) ... die Inzidenzaxiome §1
- b) ... das Anordnungsaxiom §3 (ii)
- c) ... nicht das Parallelenaxiom §5

**Beweis:**

- a) Offensichtlich sind §1 (iii) und §1 (ii) erfüllt. Für §1 (i) gilt:

Gegeben  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$

**Existenz:**

Fall 1  $\Re(z_1) = \Re(z_2)$   
 $\Rightarrow z_1$  und  $z_2$  liegen auf

$$g = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = \Re(z_1) \wedge \mathbb{H} \}$$

Siehe Abbildung 4.20a.

Fall 2  $\Re(z_1) \neq \Re(z_2)$

Betrachte nun  $z_1$  und  $z_2$  als Punkte in der euklidischen Ebene. Die Mittelsenkrechten zu diesen Punkten schneidet die  $x$ -Achse. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu  $z_1$  und  $z_2$  sind gleich weit von  $z_1$  und  $z_2$  entfernt. Daher ist der Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse der Mittelpunkt eines Kreises durch  $z_1$  und  $z_2$  (vgl. Abbildung 4.20b)

- b) Sei  $g \in G_1 \dot{\cup} G_2$  eine hyperbolische Gerade.

Es existieren disjunkte Zerlegungen von  $\mathbb{H} \setminus g$ :

Fall 1:  $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| = r \} \in G_1$

Dann gilt:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| < r \}}_{=:H_1 \text{ (Kreisinneres)}} \dot{\cup} \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| > r \}}_{=:H_2 \text{ (Kreisäußeres)}}$$

Da  $r > 0$  ist  $H_1$  nicht leer, da  $r \in \mathbb{R}$  ist  $H_2$  nicht leer.

Fall 2:  $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = x \} \in G_2$

Die disjunkte Zerlegung ist:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) < x \}}_{=:H_1 \text{ (Links)}} \dot{\cup} \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) > x \}}_{=:H_2 \text{ (Rechts)}}$$

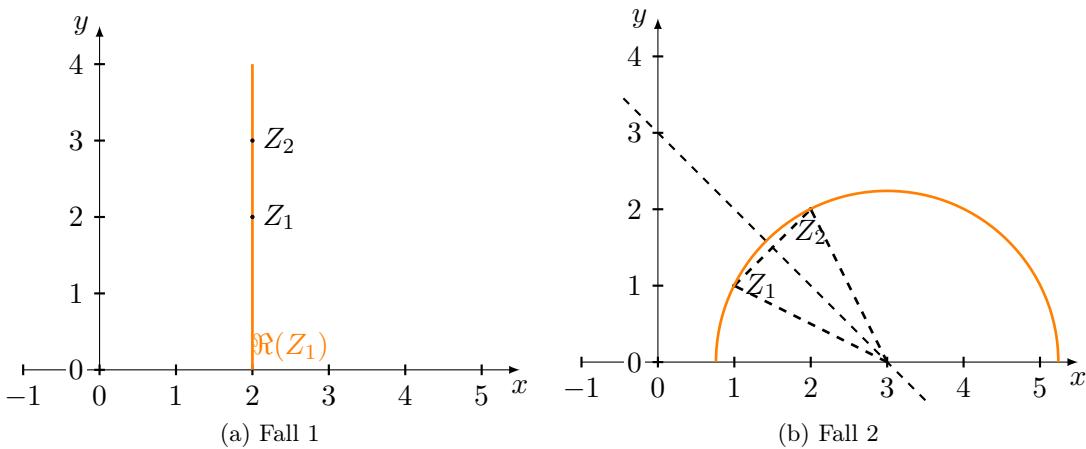


Abbildung 4.20: Zwei Punkte liegen in der hyperbolischen Geometrie immer auf genau einer Geraden

Zu zeigen:  $\forall A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt:  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$   
 $\Leftrightarrow$ :  $A \in H_1, B \in H_2 : \overline{AB} \cap g \neq \emptyset$

Da  $d_{\mathbb{H}}$  stetig ist, folgt diese Richtung direkt. Alle Punkte in  $H_1$  haben einen Abstand von  $m$  der kleiner ist als  $r$  und alle Punkte in  $H_2$  haben einen Abstand von  $m$  der größer ist als  $r$ . Da man jede Strecke von  $A$  nach  $B$  insbesondere auch als stetige Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  auffassen kann, greift der Zwischenwertsatz  $\Rightarrow \overline{AB} \cap g \neq \emptyset$

, $\Rightarrow$ :  $A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\} : \overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Rightarrow i \neq j$

Sei  $h$  die Gerade, die durch  $A$  und  $B$  geht.

Da  $A, B \notin g$ , aber  $A, B \in h$  gilt, haben  $g$  und  $h$  insbesondere mindestens einen unterschiedlichen Punkt. Aus §1 (i) folgt, dass sich  $g$  und  $h$  in höchstens einen Punkt schneiden. Sei  $C$  dieser Punkt.

Aus  $A, B \notin g$  folgt:  $C \neq A$  und  $C \neq B$ . Also liegt  $C$  zwischen  $A$  und  $B$ . Daraus folgt, dass  $A$  und  $B$  bzgl.  $g$  in verschiedenen Halbebenen liegen.

c) Siehe [Abbildung 4.21](#).

### Definition 63

Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $ad - bc \neq 0$  und  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung definiert durch

$$\sigma(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

$\sigma$  heißt **Möbiustransformation**.

### Proposition 4.9

a) Die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{H}$  durch die Möbiustransformation

$$\sigma(z) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z := \frac{az + b}{cz + d}$$

- b) Die Gruppe  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / (\pm I)$  operiert durch  $\sigma$  auf  $\mathbb{H}$ .
- c)  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Diese Gruppenoperation ist 3-fach transitiv, d. h. zu  $x_0 < x_1 < x_\infty \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $\sigma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  mit  $\sigma(x_0) = 0$ ,  $\sigma(x_1) = 1$ ,  $\sigma(x_\infty) = \infty$ .
- d)  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  wird von den Matrizen
- $$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}}_{=:A_\lambda}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B_t} \text{ und } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:C} \text{ mit } t, \lambda \in \mathbb{R}^\times$$
- erzeugt.
- e)  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $G$ .

**Beweis:**

a) Sei  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ , d. h.  $y > 0$  und  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(z) &= \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} \\ &= \frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy} \cdot \frac{(cx+d)-icy}{(cx+d)-icy} \\ &= \frac{(ax+b)(cx+d)+aycy}{(cx+d)^2+(cy)^2} + i \frac{ay(cx+d)-(ax+b)cy}{(cx+d)^2+(cy)^2} \\ &= \frac{axcx+axd+bcx+bd+aycy}{(cx+d)^2+(cy)^2} + i \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2} \\ &\stackrel{\text{SL}_2(\mathbb{R})}{=} \frac{ac(x^2+y^2)+adx+bcx+bd}{(cx+d)^2+(cy)^2} + i \frac{y}{(cx+d)^2+(cy)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Im(\sigma(z)) = \frac{y}{(cx+d)^2+(cy)^2} > 0$$

Die Abbildung bildet also nach  $\mathbb{H}$  ab. Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ z = \frac{x+iy}{1} = x+iy = z$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \circ z \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \\ &= \frac{\frac{a'a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} \\ &= \frac{\frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c'z+d'}}{\frac{c(a'z+b')+d(c'z+d')}{c'z+d'}} \\ &= \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + db')z + cb' + dd'} \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + db' & cb' + dd' \end{pmatrix} \circ z \\
&= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \circ z
\end{aligned}$$

b) Es gilt  $\sigma(z) = (-\sigma)(z)$  für alle  $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{H}$ .

c) Ansatz:  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\sigma(x_0) = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow ax_0 + b = 0 \Rightarrow b = -ax_0 \\
\sigma(x_\infty) = \infty &\Rightarrow cx_\infty + d = 0 \Rightarrow d = -cx_\infty \\
\sigma(x_1) = 1 &\Rightarrow ax_1 + b = cx_1 + d \\
a(x_1 - x_0) = c(x_1 - x_\infty) &\Rightarrow c = a \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_\infty} \\
\Rightarrow -a^2 \cdot x_\infty \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_\infty} + a^2 x_0 \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_\infty} &= 1 \\
\Rightarrow a^2 \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_\infty} (x_0 - x_\infty) &= 1 \Rightarrow a^2 = \frac{x_1 - x_\infty}{(x_1 - x_\infty)(x_1 - x_0)}
\end{aligned}$$

d) Es gilt:

$$\begin{aligned}
A_\lambda^{-1} &= A_{\frac{1}{\lambda}} \\
B_t^{-1} &= B_{-t} \\
C^{-1} &= C^3
\end{aligned}$$

Daher genügt es zu zeigen, dass man mit  $A_\lambda$ ,  $B_t$  und  $C$  alle Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  erzeugen kann, genügt es also von einer beliebigen Matrix durch Multiplikation mit Matrizen der Form  $A_\lambda$ ,  $B_t$  und  $C$  die Einheitsmatrix zu generieren.

Sei also

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

beliebig.

Fall 1:  $a = 0$

Da  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist, gilt  $\det M = 1 = ad - bc = -bc$ . Daher ist insbesondere  $c \neq 0$ . Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Gehe zu Fall 2.

Fall 2:  $a \neq 0$

Nun wird in  $M$  durch  $M \cdot A_{\frac{1}{a}}$  an der Stelle von  $a$  eine 1 erzeugt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ \frac{c}{a} & ad \end{pmatrix}$$

Gehe zu Fall 3.

Fall 3:  $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d - bc \end{pmatrix}$$

Da wir  $\det M = 1 = ad - bc = d - bc$  wissen, gilt sogar  $M_{2,2} = 1$ .

Gehe zu Fall 4.

Fall 4:  $a = 1, b = 0, d = 1$

$$A_{-1}CB_cC \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher erzeugen Matrizen der Form  $A_\lambda, B_t$  und  $C$  die Gruppe  $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ . ■

e) Es genügt die Aussage für Matrizen aus [Proposition 4.9 \(d\)](#) zu zeigen.

- $\sigma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ , also  $\sigma(z) = \lambda^2 z$ . Daraus ergeben sich die Situationen, die in [Abbildung 4.22a](#) und [Abbildung 4.22b](#) dargestellt sind.
- Offensichtlich gilt die Aussage für  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Sei nun  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , also  $\sigma(z) = -\frac{1}{z}$

### Bemerkung 70

Zu hyperbolischen Geraden  $g_1, g_2$  gibt es  $\sigma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  mit  $\sigma(g_1) = g_2$ .

**Beweis:** Nach [Proposition 4.9 \(c\)](#) gibt es  $\sigma$  mit  $\sigma(a_1) = b_1$  und  $\sigma(a_2) = b_2$ . Dann existiert  $\sigma(g_1) := g_2$  wegen dem Inzidenzaxiom §1 und ist eindeutig bestimmt.

### Definition 64

Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden.

Dann heißt

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}}{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}} = \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

Doppelverhältnis von  $z_1, \dots, z_4$ .

### Bemerkung 71 (Eigenschaften des Doppelverhältnisses)

- $\mathrm{DV}(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$
- $\mathrm{DV}(z_1, z_4, z_3, z_2) = \frac{1}{\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)}$
- $\mathrm{DV}(z_3, z_2, z_1, z_4) = \frac{1}{\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)}$
- $\mathrm{DV}$  ist auch wohldefiniert, wenn eines der  $z_i = \infty$  oder wenn zwei der  $z_i$  gleich sind.
- $\mathrm{DV}(0, 1, \infty, z_4) = z_4$  (Der Fall  $z_4 \in \{0, 1, \infty\}$  ist zugelassen).
- Für  $\sigma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  und  $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist

$$\mathrm{DV}(\sigma(z_1), \sigma(z_2), \sigma(z_3), \sigma(z_4)) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

und für  $\sigma(z) = \frac{1}{z}$  gilt

$$\mathrm{DV}(\sigma(z_1), \sigma(z_2), \sigma(z_3), \sigma(z_4)) = \overline{\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

g)  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow z_1, \dots, z_4$  liegen auf einer hyperbolischen Geraden.

**Beweis:**

- a)  $DV(z_1, \dots, z_4) \neq 0$ , da  $z_i$  paarweise verschieden  
 $DV(z_1, \dots, z_4) \neq 1$ , da:

Annahme:  $DV(z_1, \dots, z_4) = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = (z_1 - z_4)(z_3 - z_2) \\ &\Leftrightarrow z_1z_3 - z_2z_3 - z_1z_4 + z_2z_4 = z_1z_3 - z_3z_4 - z_1z_2 + z_2z_4 \\ &\Leftrightarrow z_2z_3 + z_1z_4 = z_3z_4 + z_1z_2 \\ &\Leftrightarrow z_2z_3 - z_3z_4 = z_1z_2 - z_1z_4 \\ &\Leftrightarrow z_3(z_2 - z_4) = z_1(z_2 - z_4) \\ &\Leftrightarrow z_3 = z_1 \text{ oder } z_2 = z_4 \end{aligned}$$

Alle  $z_i$  sind paarweise verschieden  $\Rightarrow$  Widerspruch ■

b)  $DV(z_1, z_4, z_3, z_2) = \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)} = \frac{1}{DV(z_1, z_2, z_3, z_4)}$

c)  $DV(z_3, z_2, z_1, z_4) = \frac{(z_3 - z_4) \cdot (z_1 - z_2)}{(z_3 - z_2) \cdot (z_1 - z_4)} = \frac{1}{DV(z_1, z_2, z_3, z_4)}$

d) Zwei der  $z_i$  dürfen gleich sein, da:

Fall 1  $z_1 = z_4$  oder  $z_3 = z_2$

In diesem Fall ist  $DV(z_1, \dots, z_4) = 0$

Fall 2  $z_1 = z_2$  oder  $z_3 = z_4$

Mit der Regel von L'Hospital folgt, dass in diesem Fall  $DV(z_1, \dots, z_4) = \infty$  gilt.

Fall 3  $z_1 = z_3$  oder  $z_2 = z_4$

Durch Einsetzen ergibt sich  $DV(z_1, \dots, z_4) = 1$ .

Im Fall, dass ein  $z_i = \infty$  ist, ist entweder  $DV(0, 1, \infty, z_4) = 0$  oder  $DV(0, 1, \infty, z_4) = \pm \infty$

e)  $DV(0, 1, \infty, z_4) = \frac{(0 - z_4) \cdot (\infty - 1)}{(0 - 1) \cdot (\infty - z_4)} = \frac{z_4 \cdot (\infty - 1)}{\infty - z_4} = z_4$

f) TODO

g) Sei  $\sigma \in PSL_2(\mathbb{C})$  mit  $\sigma(z_1) = 0, \sigma(z_2) = 1, \sigma(z_3) = \infty$ . Ein solches  $\sigma$  existiert, da man drei Parameter von  $\sigma$  wählen darf.

Bem. 71.f  $\Rightarrow DV(z_1, \dots, z_4) = DV(0, 1, \infty, \sigma(z_4))$

$\Rightarrow DV(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Leftrightarrow \sigma(z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Behauptung folgt, weil  $\sigma(\mathbb{R} \cup \infty)$  ein Kreis oder eine Gerade in  $\mathbb{C}$  ist.

### Definition 65

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  sei  $g_{z_1, z_2}$  die eindeutige hyperbolische Gerade durch  $z_1$  und  $z_2$  und  $a_1, a_2$  die „Schnittpunkte“ von  $g_{z_1, z_2}$  mit  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann sei  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) := \frac{1}{2} |\ln DV(a_1, z_1, a_2, z_2)|$  und heiße **hyperbolische Metrik**.

**Beh.:** Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  sei  $g_{z_1, z_2}$  die eindeutige hyperbolische Gerade durch  $z_1$  und  $z_2$  und  $a_1, a_2$  die „Schnittpunkte“ von  $g_{z_1, z_2}$  mit  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann gilt:

$$\frac{1}{2} |\ln \text{DV}(a_1, z_1, a_2, z_2)| = \frac{1}{2} |\ln \text{DV}(a_2, z_1, a_1, z_2)|$$

**Beweis:** Wegen [Bemerkung 71.c](#) gilt:

$$\text{DV}(a_1, z_1, a_2, z_2) = \frac{1}{\text{DV}(a_2, z_1, a_1, z_2)}$$

Außerdem gilt:

$$\ln \frac{1}{x} = \ln x^{-1} = (-1) \cdot \ln x = -\ln x$$

Da der  $\ln$  im Betrag steht, folgt direkt:

$$\frac{1}{2} |\ln \text{DV}(a_1, z_1, a_2, z_2)| = \frac{1}{2} |\ln \text{DV}(a_2, z_1, a_1, z_2)|$$

Es ist also egal in welcher Reihenfolge die „Schnittpunkte“ mit der  $x$ -Achse im Doppelverhältnis genutzt werden. ■

**Beh.:** Die hyperbolische Metrik ist eine Metrik auf  $\mathbb{H}$ .

**Beweis:** Wegen [Bemerkung 71.f](#) ist

$$d(z_1, z_2) := d(\sigma(z_1), \sigma(z_2)) \text{ mit } \sigma(a_1) = 0, \sigma(a_2) = \infty$$

d. h.  $\sigma(g_{z_1, z_2}) = i\mathbb{R}$  (imaginäre Achse).

also gilt o. B. d. A.  $z_1 = ia$  und  $z_2 = ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ .

$$\begin{aligned} 2d(ia, ib) &= |\ln \text{DV}(0, ia, \infty, ib)| \\ &= |\ln \frac{(0 - ib)(\infty - ia)}{(0 - ia)(\infty - ib)}| \\ &= |\ln \frac{b}{a}| \\ &= \ln b - \ln a \end{aligned}$$

Also:  $d(z_1, z_2) \geq 0$ ,  $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

$$\begin{aligned} 2d(z_2, z_1) &= |\ln \text{DV}(a_2, z_2, a_1, z_1)| \\ &= |\ln \text{DV}(\infty, ib, 0, ia)| \\ &\stackrel{\text{Bem. 71.b}}{=} |\ln \text{DV}(0, ib, \infty, ia)| \\ &= 2d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Liegen drei Punkte  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  auf einer hyperbolischen Geraden, so gilt  $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$  (wenn  $z_2$  zwischen  $z_1$  und  $z_3$  liegt).

Dreiecksungleichung: Beweis ist umständlich und wird hier nicht geführt. Es sei auf die Vorlesung „Hyperbolische Geometrie“ verwiesen.

**Satz 4.10**

Die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}$  mit der hyperbolischen Metrik  $d$  und den hyperbolischen Geraden bildet eine „nichteuklidische Geometrie“, d. h. die Axiome §1 - §4 sind erfüllt, aber Axiom §5 ist verletzt.

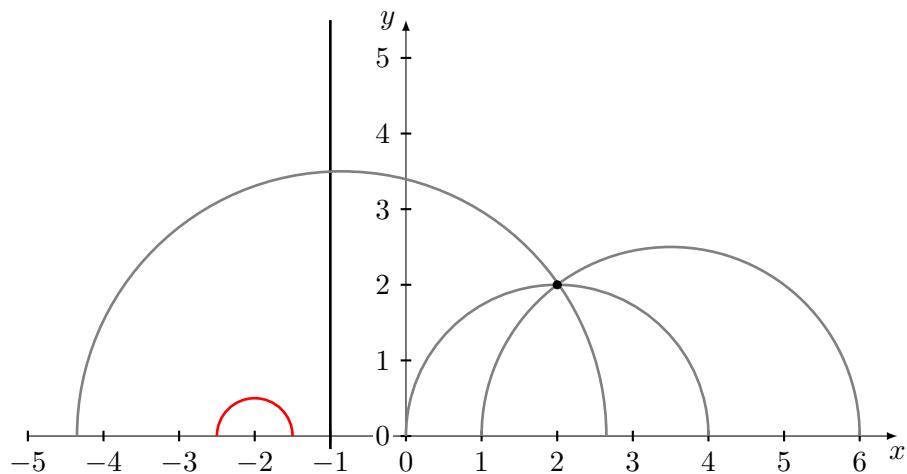


Abbildung 4.21: Hyperbolische Geraden erfüllen §5 nicht.

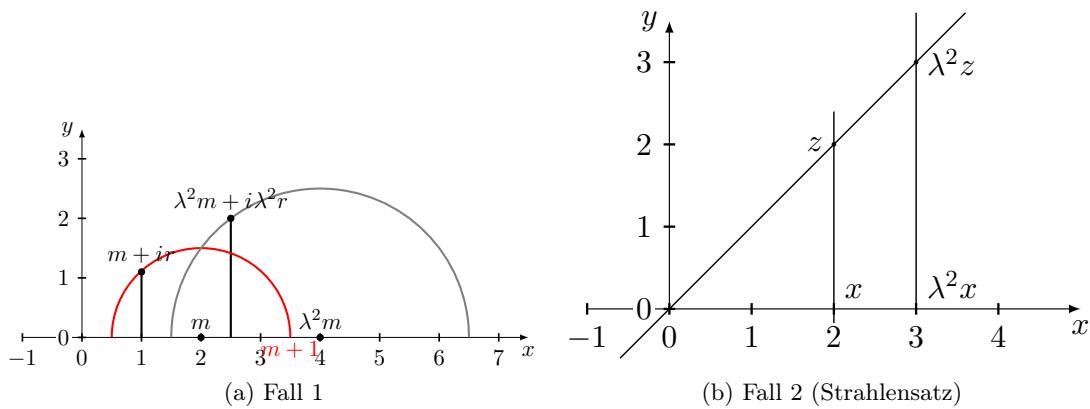


Abbildung 4.22: Beweis von Proposition 4.9 (e) für eine Diagonalmatrix

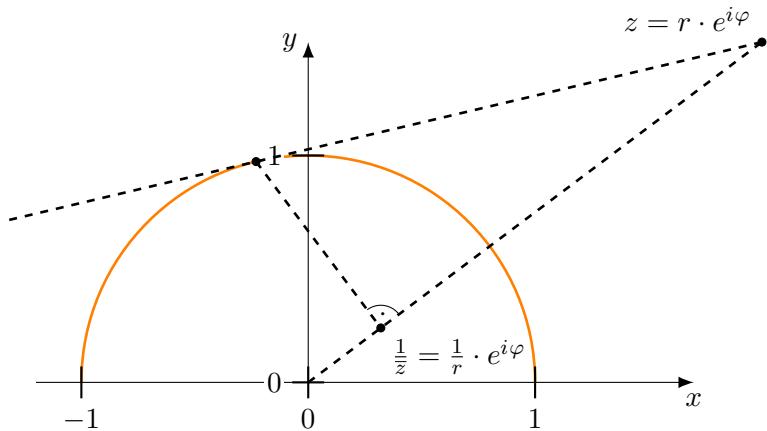


Abbildung 4.23: Inversion am Kreis

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 8

Seien  $(X, d)$  eine absolute Ebene und  $P, Q, R \in X$  Punkte. Der *Scheitelwinkel* des Winkels  $\angle PQR$  ist der Winkel, der aus den Halbgeraden  $QP^-$  und  $QR^-$  gebildet wird. Die *Nebenwinkel* von  $\angle PQR$  sind die von  $QP^+$  und  $QR^-$  bzw.  $QP^-$  und  $QR^+$  gebildeten Winkel.

Zeigen Sie:

- (a) Die beiden Nebenwinkel von  $\angle PQR$  sind gleich.
- (b) Der Winkel  $\angle PQR$  ist gleich seinem Scheitelwinkel.

### Aufgabe 9

Sei  $(X, d)$  eine absolute Ebene. Der *Abstand* eines Punktes  $P$  zu einer Menge  $Y \subseteq X$  von Punkten ist definiert durch  $d(P, Y) := \inf d(P, y) | y \in Y$ .

Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\triangle ABC$  ein Dreieck, in dem die Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  kongruent sind, so sind die Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle BCA$  gleich.
- (b) Ist  $\triangle ABC$  ein beliebiges Dreieck, so liegt der längeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.
- (c) Sind  $g$  eine Gerade und  $P \notin g$  ein Punkt, so gibt es eine eindeutige Gerade  $h$  mit  $P \in h$  und die  $g$  im rechten Winkel schneidet. Diese Grade heißt *Lot* von  $P$  auf  $g$  und der Schnittpunkt des Lots mit  $g$  heißt *Lotfußpunkt*.

### Aufgabe 10

Seien  $f, g, h \in G$  und paarweise verschieden.

Zeigen Sie:  $f \parallel g \wedge g \parallel h \Rightarrow f \parallel h$

### Aufgabe 11

Beweise den Kongruenzsatz *SSS*.

# 5 Krümmung

## Definition 66

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion aus  $C^\infty$ . Dann heißt  $f$  **Kurve**.

## 5.1 Krümmung von Kurven

### Definition 67

Sei  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^\infty$ -Funktion.

- a) Die Kurve  $\gamma$  heißt **durch Bogenlänge parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\gamma'(t)\|_2 = 1 \quad \forall t \in I$$

Dabei ist  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ .

- b)  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  heißt **Länge von  $\gamma$** .

### Bemerkung 72 (Eigenschaften von Kurven I)

Sei  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^\infty$ -Funktion.

- a) Ist  $\gamma$  durch Bogenlänge parametrisiert, so ist  $l(\gamma) = b - a$ .  
b) Ist  $\gamma$  durch Bogenlänge parametrisiert, so ist  $\gamma'(t)$  orthogonal zu  $\gamma''(t)$  für alle  $t \in I$ .

### Beweis:

- a)  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$ .  
b) Im Folgenden wird die Aussage nur für  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  bewiesen. Allerdings funktioniert der Beweis im  $\mathbb{R}^n$  analog. Es muss nur die Ableitung angepasst werden.

$$\begin{aligned} 1 &= \|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma'_1(t)\gamma'_1(t) + \gamma'_2(t)\gamma'_2(t)) \\ &= 2 \cdot (\gamma''_1(t) \cdot \gamma'_1(t) + \gamma''_2(t) \cdot \gamma'_2(t)) \\ &= 2 \cdot \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

## Definition 68

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a) Für  $t \in I$  sei  $n(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$  wenn gilt:

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \|n(t)\| = 1 \text{ und } \det((\gamma'_1(t), n(t))) = +1$$

b) Seit  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass gilt:

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

Dann heißt  $\kappa(t)$  **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .

Da  $n(t)$  und  $\gamma''(t)$  nach **Bemerkung 72.b** linear abhängig sind, existiert  $\kappa(t)$ .

#### Beispiel 44

Gegeben sei ein Kreis mit Radius  $r$ , d. h. mit Umfang  $2\pi r$ . Es gilt:

$$\gamma(t) = \left( r \cdot \cos \frac{t}{r}, r \cdot \sin \frac{t}{r} \right) \text{ für } t \in [0, 2\pi r]$$

ist parametrisiert durch Bogenlänge, da gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left( (r \cdot \frac{1}{r})(-\sin \frac{t}{r}), r \frac{1}{r} \cos \frac{t}{r} \right) \\ &= \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right) \end{aligned}$$

Der Normalenvektor von  $\gamma$  in  $t$  ist

$$n(t) = \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right)$$

da gilt:

$$\begin{aligned} \langle n(t), \gamma'(t) \rangle &= \left\langle \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right), \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right) \right\rangle \\ &= (-\cos \frac{t}{r}) \cdot (-\sin \frac{t}{r}) + (-\sin \frac{t}{r}) \cdot (\cos \frac{t}{r}) \\ &= 0 \\ \|n(t)\| &= \left\| \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right) \right\| \\ &= (-\cos \frac{t}{r})^2 + (-\sin \frac{t}{r})^2 \\ &= 1 \\ \det(\gamma'_1(t), n(t)) &= \left\| \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} & -\cos \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} & -\sin \frac{t}{r} \end{pmatrix} \right\| \\ &= (-\sin \frac{t}{r})^2 - (-\cos \frac{t}{r}) \cdot \cos \frac{t}{r} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die Krümmung ist für jedes  $t$  konstant  $\frac{1}{r}$ , da gilt:

$$\gamma''(t) = \left( -\frac{1}{r} \cos \frac{t}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \cdot \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right) \\
\Rightarrow \kappa(t) &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

**Definition 69**

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a) Für  $t \in I$  heißt  $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$  die **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .
- b) Ist für  $t \in I$  die Ableitung  $\gamma''(t) \neq 0$ , so heißt  $\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ .
- c)  $b(t)$  sei ein Vektor, der  $\gamma'(t), n(t)$  zu einer orientierten Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  ergänzt.  
Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$  heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

**Bemerkung 73 (Eigenschaften von Kurven II)**

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a)  $n(t)$  ist orthogonal zu  $\gamma'(t)$ .
- b)  $b(t)$  aus [Definition 69.c](#) ist eindeutig.

## 5.2 Tangentialebene

Erinnerung Sie sich an [Definition 32](#) „reguläre Fläche“.

Äquivalent dazu ist:  $S$  ist lokal von der Form

$$V(f) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$$

für eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 70**

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$ ,  $F : U \rightarrow V \cap S$  eine lokale Parametrisierung um  $s \in V$ :

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Für  $p = F^{-1}(s) \in U$  sei

$$J_F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

und  $D_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die durch  $J_F(p)$  definierte lineare Abbildung.

Dann heißt  $T_s S := \text{Bild}(D_p F)$  die **Tangentialebene** an  $s \in S$ .

**Bemerkung 74 (Eigenschaften der Tangentialebene)**

- a)  $T_s S$  ist 2-dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ .

- b)  $T_s S$  hängt nicht von der gewählten Parametrisierung ab.
- c) Sei  $S = V(f)$  eine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , also  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion,  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $\text{grad}(f)(x) \neq 0$  für alle  $x \in S$ .

Dann ist  $T_s S = (\text{grad}(f)(s))^\perp$  für jedes  $s \in S$ .

**Beweis:**

- a)  $J_F$  ist eine  $3 \times 2$ -Matrix, die mit einem  $2 \times 1$ -Vektor multipliziert wird. Das ist eine lineare Abbildung und aus der linearen Algebra ist bekannt, dass das Bild ein Vektorraum ist. Da  $\text{Rg}(J_F) = 2$ , ist auch  $\dim(T_s S) = 2$ .
- b)  $T_s S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \text{ parametrisierte Kurve } \gamma : [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow S \text{ für ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \gamma(0) = s \text{ und } \gamma'(0) = x\}$  todo
- c) Sei  $x \in T_s S$ ,  $\gamma : [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow S$  eine parametrisierte Kurve mit  $\varepsilon > 0$  und  $\gamma'(0) = s$ , sodass  $\gamma'(0) = x$  gilt. Da  $\gamma(t) \in S$  für alle  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , ist  $f \circ \gamma = 0 \Rightarrow 0 = (f \circ \gamma)'(0) = \langle \text{grad}(f)(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle \Rightarrow T_s S \subseteq \text{grad}(f)(s)^\perp \xrightarrow{\dim=2} T_s S = (\text{grad}(f)(s))^\perp$

**Definition 71**

- a) Ein **Normalenfeld** auf der Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine Abbildung  $n : S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $n(s) \in T_s S^\perp$  für jedes  $s \in S$ .
- b)  $S$  heißt **orientierbar**, wenn es ein stetiges Normalenfeld auf  $S$  gibt.

Manchmal wird zwischen einem *Normalenfeld* und einem *Einheitsnormalenfeld* unterschieden. Im Folgenden werden diese Begriffe jedoch synonym benutzt.

**Bemerkung 75 (Eigenschaften von Normalenfeldern)**

- a) Ein Normalenfeld auf  $S$  ist genau dann stetig, wenn es glatt ist (also  $C^\infty$ ).
- b) Zu jedem  $s \in S$  gibt es eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  von  $s$  und eine lokale Parametrisierung  $F : U \rightarrow V$  von  $S$  um  $s$ , sodass auf  $F(U) = V \cap S$  ein stetiges Normalenfeld existiert.
- c)  $S$  ist genau dann orientierbar, wenn es einen differenzierbaren Atlas von  $S$  aus lokalen Parametrisierungen  $F_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $i \in I$  gibt, sodass für alle  $i, j \in I$  und alle  $s \in V_i \cap V_j \cap S$  gilt:

$$\det(\underbrace{D_s F_j \circ F_i^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 3}}) \overset{V_i \rightarrow V_j}{>} 0$$

**Beweis:** Wird hier nicht geführt.

**Beispiel 45 (Normalenfelder)**

- 1)  $S = S^2$ ,  $n_1 = \text{id}_{S^2}$  ist stetiges Normalenfeld.  
 $n_2 = -\text{id}_{S^2}$  ist auch stetiges Normalenfeld.
- 2)  $S = \text{Möbiusband}$  (vgl. [Abbildung 5.1](#)) ist nicht orientierbar. Es existiert ein Normalenfeld, aber kein stetiges Normalenfeld.

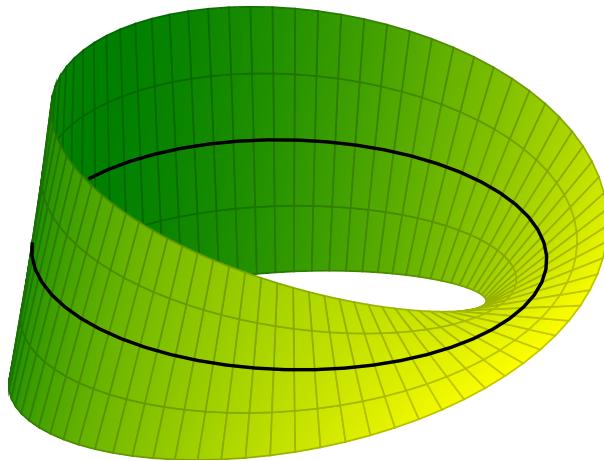


Abbildung 5.1: Möbiusband

## 5.3 Gauß-Krümmung

### Bemerkung 76

Sei  $S$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$ ,  $n(s)$  ist ein Normalenvektor in  $s$ ,  $x \in T_s S$ ,  $\|x\| = 1$ .

Sei  $E$  der von  $x$  und  $n(s)$  aufgespannte 2-dimensionale Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ .

Dann gibt es eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  von  $s$ , sodass

$$C := (s + E) \cap S \cap V$$

das Bild einer durch Bogenlänge parametrisierten Kurve  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow s$  enthält mit  $\gamma(0) = s$  und  $\gamma'(0) = x$ .

**Beweis:** „Satz über implizite Funktionen“<sup>1</sup>

### Definition 72

In der Situation aus [Bemerkung 76](#) heißt die Krümmung  $\kappa_\gamma(0)$  der Kurve  $\gamma$  in der Ebene  $(s + E)$  im Punkt  $s$  die **Normalkrümmung** von  $S$  in  $s$  in Richtung  $x = \gamma'(0)$ .

Man schreibt:  $\kappa_\gamma(0) := \kappa_{\text{Nor}}(s, x)$

Hinweis: Die Krümmung ist nur bis auf das Vorzeichen bestimmt.

### Beispiel 46 (Gauß-Krümmung)

- 1)  $S = S^2 = V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$  ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 1,  $n = \text{id}$ ,  $s = (0, 0, 1)$ ,  $x = (1, 0, 0)$   
 $\Rightarrow E = \mathbb{R} \cdot x + \mathbb{R} \cdot n(s)$  ( $x, z$ -Ebene)

$C = E \cap S$  ist Kreislinie

$$\kappa_{\text{Nor}}(s, x) = \frac{1}{r} = 1$$

- 2)  $S = V(X^2 + Z^2 - 1) \subseteq \mathbb{R}^3$  ist ein Zylinder (siehe [Abbildung 5.2a](#)).  $s = (1, 0, 0)$   
 $x_1 = (0, 1, 0) \Rightarrow E_1 = \mathbb{R} \cdot e_1 + \mathbb{R} \cdot e_2$  ( $x, y$ -Ebene)  
 $S \cap E_1 = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap E$ , Kreislinie in  $E$   
 $\Rightarrow \kappa_{\text{Nor}}(s, x_1) = \pm 1$   
 $x_2 = (0, 0, 1), E_2 = \mathbb{R} \cdot e_1 + \mathbb{R} \cdot e_3$  ( $x, z$ -Ebene)

---

<sup>1</sup>Siehe z. B. <https://github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/documents/Analysis%20II>

$V \cap E_2 \cap S = \{ (1, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \}$  ist eine Gerade  
 $\Rightarrow \kappa_{\text{Nor}}(s, x_2) = 0$

- 3)  $S = V(X^2 - Y^2 - Z)$ ,  $s = (0, 0, 0)$  (Hyperbolisches Paraboloid, siehe Abbildung 5.2b)  
 $x_1 = (1, 0, 0)$ ,  $n(s) = (0, 0, 1)$   
 $x_2 = (0, 1, 0)$   
 $\kappa_{\text{Nor}}(s, x_1) = 2$   
 $\kappa_{\text{Nor}}(s, x_2) = -2$

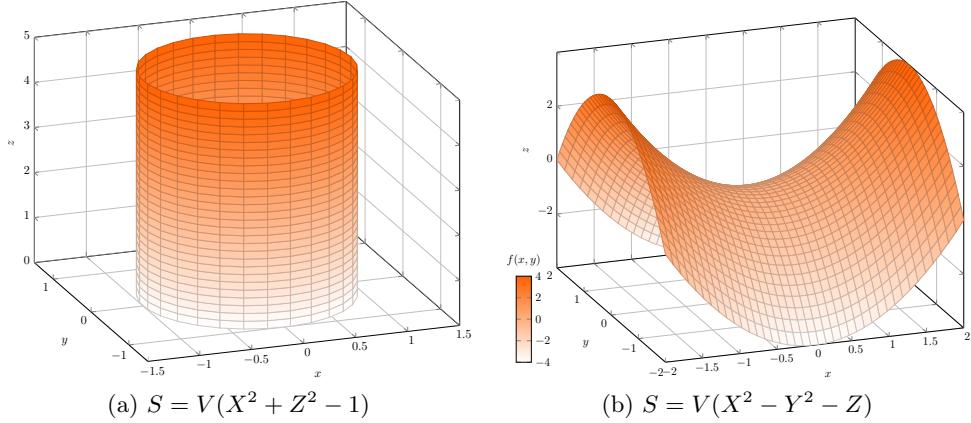


Abbildung 5.2: Beispiele für reguläre Flächen

### Definition 73

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$ , ( $n$  ein stetiges Normalenfeld auf  $S$ )

$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ( $\varepsilon > 0$ ) mit  $\gamma(0) = s$  und  $\gamma''(0) \neq 0$ .

Sei  $n(0) := \frac{\gamma''(0)}{\|\gamma''(0)\|}$ . Zerlege

$$n(0) = n(0)^t + n(0)^\perp \text{ mit } n(0)^t \in T_s S \text{ und } n(0)^\perp \in (T_s S)^\perp$$

Dann ist  $n(0)^\perp = \langle n(0), n(s) \rangle \cdot n(s)$

$\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) := \langle \gamma''(0), n(s) \rangle$  die **Normalkrümmung**.

### Bemerkung 77

Sei  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ ,  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Dann ist  $\kappa_{\text{Nor}}(s, \bar{\gamma}) = \kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma)$ .

**Beweis:**  $\bar{\gamma}''(0) = \gamma''(0)$ , da  $\bar{\gamma}'(0) = -\gamma'(0)$ .

Es gilt:  $\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma)$  hängt nur von  $|\gamma'(0)|$  ab und ist gleich  $\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma'(0))$ .

### Bemerkung 78

Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $n = n(s)$  ein Normalenvektor an  $S$  in  $s$ .

Sei  $T_s^1 S = \{ x \in T_s S \mid \|x\| = 1 \} \cong S^1$ . Dann ist

$$\kappa_{\text{Nor}}^n(s) : T_s^1 S \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \kappa_{\text{Nor}}(s, x)$$

eine glatte Funktion und Bild  $\kappa_{\text{Nor}}^n(s)$  ist ein abgeschlossenes Intervall.

### Definition 74

Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $n = n(s)$  ein Normalenvektor an  $S$  in  $s$ .

- a)  $\kappa_1^n(s) := \min \{ \kappa_{\text{Nor}}^n(s, x) \mid x \in T_s^1 S \}$  und heißen **Hauptkrümmungen** von  $S$  in  $s$ .  
 $\kappa_2^n(s) := \max \{ \kappa_{\text{Nor}}^n(s, x) \mid x \in T_s^1 S \}$
- b)  $K(s) := \kappa_1^n(s) \cdot \kappa_2^n(s)$  heißt **Gauß-Krümmung** von  $S$  in  $s$ .

### Bemerkung 79

Ersetzt man  $n$  durch  $-n$ , so gilt:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{Nor}}^{-n}(s, x) &= -\kappa_{\text{Nor}}^n(x) \quad \forall x \in T_s^1 S \\ \Rightarrow \kappa_1^{-n}(s) &= -\kappa_2^n(s) \\ \kappa_2^{-n}(s) &= -\kappa_1^n(s) \\ \text{und } K^{-n}(s) &= K^n(s) =: K(s)\end{aligned}$$

### Beispiel 47

- 1)  $S = S^2$ . Dann ist  $\kappa_1(s) = \kappa_2(s) = \pm 1 \quad \forall s \in S^2$   
 $\Rightarrow K(s) = 1$
- 2) Zylinder:  
 $\kappa_1(s) = 0, \kappa_2(s) = 1 \Rightarrow K(s) = 0$
- 3) Sattelpunkt auf hyperbolischem Paraboloid:  
 $\kappa_1(s) < 0, \kappa_2(s) = 0 \rightarrow K(s) < 0$
- 4)  $S = \text{Torus}$ . Siehe Abbildung 5.3

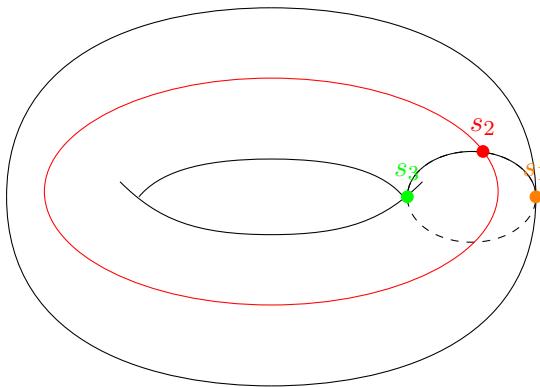


Abbildung 5.3:  $K(s_1) > 0, K(s_2) = 0, K(s_3) < 0$

### Bemerkung 80

Sei  $S$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$  ein Punkt.

- a) Ist  $K(s) > 0$ , so liegt  $S$  in einer Umgebung von  $s$  ganz auf einer Seite von  $T_s S + s$ .
- b) Ist  $K(s) < 0$ , so schneidet jede Umgebung von  $s$  in  $S$  beide Seiten von  $T_s S + s$ .

## 5.4 Erste und zweite Fundamentalform

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$ ,  $T_s S$  die Tangentialebene an  $S$  in  $s$ .

**Bemerkung 81**

- a) Die Einschränkung des Standardskalarproduktes des  $\mathbb{R}^3$  auf  $T_s S$  macht  $T_s S$  zu einem euklidischen Vektorraum.
- b) Sei  $F : U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $S$  um  $s$  und  $p := F^{-1}(s)$ .

Dann ist  $\{ D_p F(e_1), D_p F(e_2) \}$  eine Basis von  $T_s S$ .

- c) Bzgl. der Basis  $\{ D_p F(e_1), D_p F(e_2) \}$  hat das Standardskalarprodukt aus **Bemerkung 81.a** die Darstellungsmatrix

$$\begin{aligned} I_S &= \begin{pmatrix} g_{1,1}(s) & g_{1,2}(s) \\ g_{1,2}(s) & g_{2,2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(s) & F(s) \\ F(s) & G(s) \end{pmatrix} \\ \text{mit } g_{i,j} &= g_s(D_p F(e_i), D_p F(e_j)) \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(p), \frac{\partial F}{\partial u_j}(p) \right\rangle \quad i, j \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Die Matrix  $I_S$  heißt **erste Fundamentalform** von  $S$  bzgl. der Parametrisierung  $F$ .

- d)  $g_{i,j}(s)$  ist eine differenzierbare Funktion von  $s$ .

**Bemerkung 82**

$$\det(I_S) = \left\| \frac{\partial F}{\partial u_1}(p) \times \frac{\partial F}{\partial u_2}(p) \right\|^2$$

**Beweis:** Sei  $\frac{\partial F}{\partial u_1}(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2}(p) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Dann ist  $\frac{\partial F}{\partial u_1}(p) \times \frac{\partial F}{\partial u_2}(p) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$  mit

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ z_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ z_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial F}{\partial u_1}(p) \times \frac{\partial F}{\partial u_2}(p) \right\| &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(I_S) &= g_{1,1} g_{2,2} - g_{1,2}^2 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \end{aligned}$$

**Definition 75**

- a) Das Differential  $dA = \sqrt{\det(I)} du_1 du_2$  heißt **Flächenelement** von  $S$  bzgl. der Parametrisierung  $F$ .

b) Für eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\int_V f dA := \int_U f(\underbrace{F(u_1, u_2)}_{=:s}) \sqrt{\det I(s)} du_1 du_2$$

der **Wert des Integrals** von  $f$  über  $V$ , falls das Integral rechts existiert.

### Bemerkung 83

a)  $\int_V f dA$  ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

b) Sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die im Sinne von [Definition 75.b](#) lokal integrierbar ist.

Dann ist  $\int_S f dA$  wohldefiniert, falls (z. B.)  $S$  kompakt ist.

Etwa:

$$\begin{aligned} \int_S f dA &= \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dA \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \int_{V_i \cap V_j} f dA \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \int_{V_i \cap V_j \cap V_k} f dA \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

### Beweis:

a) Mit Transformationsformel

b) Ist dem Leser überlassen.

### Proposition 5.1

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre, orientierbare Fläche mit glatten Normalenfeld  $n : S \rightarrow S^2$ .  
Dann gilt:

a)  $n$  induziert für jedes  $s \in S$  eine lineare Abbildung  $d_s n : T_s S \rightarrow T_{n(s)} S^2$  durch

$$d_s n(x) = \frac{d}{dt} n(s, \underbrace{+tx}_{\text{Soll auf Fläche } S \text{ bleiben}}) \Big|_{t=0}$$

b)  $T_{n(s)} S^2 = T_s S$ .

c)  $d_s n$  ist ein Endomorphismus von  $T_s S$ .

d)  $d_s n$  ist selbstadjungiert bzgl. des Skalarproduktes  $I_S$ .

### Beweis:

a) TODO

b)  $T_{n(s)} S^2 = \langle n(s) \rangle^\perp = T_s S$

c) TODO

d) Zu zeigen:  $\forall x, y \in I_s S : \langle x, d_s n(y) \rangle = \langle d_s n(x), y \rangle$

Aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes genügt es diese Eigenschaft für die Basisvektoren zu zeigen.

Sei  $x_i = D_p F(e_i) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(p) \quad i = 1, 2$

$$\text{Beh.: } \langle x_i, d_s n(x_j) \rangle = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(p), d_s n(x_i) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(p), d_s n(x_i) \rangle = \langle x_j, d_s n(x_i) \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } 0 &= \langle \frac{\partial F}{\partial u}(p + te_j), n(p + te_j) \rangle \\ &\Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} \left( \langle \frac{\partial F}{\partial u}(p + te_j), n(p + te_j) \rangle \right) \right|_{t=0} \\ &= \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u_i}(p + te_j) \right|_{t=0}}_{\frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(p)} n(s) + \langle x_i, d_s n \underbrace{D_p F(e_j)}_{x_j} \rangle \end{aligned}$$

### Definition 76

Die durch  $-d_s n$  definierte symmetrische Bilinearform auf  $T_s S$  heißt **zweite Fundamentalform** von  $S$  in  $s$  bzgl.  $F$ .

Man schreibt:  $II_s(x, y) = \langle -d_s n(x), y \rangle = I_s(-d_s n(x), y)$

### Bemerkung 84

Bezüglich der Basis  $\{x_1, x_2\}$  von  $T_s S$  hat  $II_s$  die Darstellungsmatrix

$$(h_{i,j}^{(s)})_{i,j=1,2} \text{ mit } h_{i,j}(s) = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(p), n(s) \rangle$$

### Proposition 5.2

Sei  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $\gamma(0) = s$ . Dann gilt:

$$\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) = II_s(\gamma'(0), \gamma'(0))$$

**Beweis:** Nach [Definition 73](#) ist  $\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) = \langle \gamma''(0), n(s) \rangle$ . Nach Voraussetzung ist  $n(\gamma(t)) \perp \gamma'(t) \Leftrightarrow \langle \gamma''(0), n(s) \rangle = 0$ . [Die Ableitung nach t ergibt](#) ?

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (\langle n(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle) \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} n(\gamma(t)) \Big|_{t=0}, \gamma'(0) \right\rangle + \langle n(s), \gamma''(0) \rangle \\ &= \langle d_s n(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle + \kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) \\ &= -II_s(\gamma'(0), \gamma'(0)) + \kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) \end{aligned}$$

### Folgerung 5.3

Die beiden Definitionen von Normalkrümmung in [Abschnitt 5.1](#) stimmen überein:

$$\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) = \kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma'(0))$$

**Satz 5.4**

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre, orientierbare Fläche und  $s \in S$ .

- a) Die Hauptkrümmungen  $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$  sind die Eigenwerte von  $II_s$ .
- b) Für die Gaußkrümmung gilt:  $K(s) = \det(II_s)$

**Beweis:**

- a)  $II_s$  ist symmetrisch,  $I_s S$  hat also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $y_1, y_2$  von  $II_s$ . Ist  $x \in T_s S$ ,  $\|x\| = 1$ , so gibt es  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $x = \cos \varphi \cdot y_1 + \sin \varphi \cdot y_2$ .

Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Eigenwerte von  $II_s$ , also  $II_s(y_i, y_i) = \lambda_i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} II_s(x, x) &= \cos^2 \varphi \lambda_1 + \sin^2 \varphi \lambda_2 \\ &= (1 - \sin^2 \varphi) \lambda_1 + \sin^2 \varphi \lambda_2 \\ &= \lambda_1 + \sin^2 \varphi (\lambda_2 - \lambda_1) \geq \lambda_1 \\ &= \cos^2 \varphi + (1 - \cos^2 \varphi) \lambda_2 \\ &= \lambda_2 - \cos^2 \varphi (\lambda_2 - \lambda_1) \leq \lambda_2 \end{aligned}$$

Prop. 5.2

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min \{ \kappa_{\text{Nor}}(s, x) \mid x \in T_s^1 S \} \\ \lambda_2 &= \max \{ \kappa_{\text{Nor}}(s, x) \mid x \in T_s^1 S \} \end{aligned}$$

**Satz 5.5 (Satz von Gauß-Bonnet)**

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte orientierbare reguläre Fläche. Dann gilt:

$$\int_S K(s) dA = 2\pi \chi(S)$$

Dabei ist  $\chi(S)$  die Euler-Charakteristik von  $S$ .

**Beweis:** Der Beweis wird hier nicht geführt. Er kann in „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär (2. Auflage), ISBN 978-3-11-022458-0, ab Seite 281 nachgelesen werden.

# Lösungen der Übungsaufgaben

## Lösung zu Aufgabe 1

**Teilaufgabe a)** Es gilt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_X$ .
- (ii)  $\mathfrak{T}_X$  ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen, d. h. es gilt für alle  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_X : U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}_X$ .
- (iii) Auch unter beliebigen Vereinigungen ist  $\mathfrak{T}_X$  abgeschlossen, d. h. es gilt für eine beliebige Indexmenge  $I$  und alle  $U_i \in \mathfrak{T}_X$  für alle  $i \in I : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}_X$

Also ist  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ein topologischer Raum.

**Teilaufgabe b)** Wähle  $x = 1, y = 0$ . Dann gilt  $x \neq y$  und die einzige Umgebung von  $x$  ist  $X$ . Da  $y = 0 \in X$  können also  $x$  und  $y$  nicht durch offene Mengen getrennt werden.  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ist also nicht hausdorffsch.

**Teilaufgabe c)** Nach Bemerkung 4 sind metrische Räume hausdorffsch. Da  $(X, \mathfrak{T}_X)$  nach (b) nicht hausdorffsch ist, liefert die Kontraposition der Trennungseigenschaft, dass  $(X, \mathfrak{T}_X)$  kein metrischer Raum sein kann.

## Lösung zu Aufgabe 2

**Teilaufgabe a)**

**Beh.:**  $\forall a \in \mathbb{Z} : \{ a \}$  ist abgeschlossen.

Sei  $a \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann gilt:

Hat jemand diesen Beweis?

**Teilaufgabe b)**

**Beh.:**  $\{ -1, 1 \}$  ist nicht offen

**Bew.:** durch Widerspruch

Annahme:  $\{ -1, 1 \}$  ist offen.

Dann gibt es  $T \subseteq \mathfrak{B}$ , sodass  $\bigcup_{M \in T} M = \{ -1, 1 \}$ . Aber alle  $U \in \mathfrak{B}$  haben unendlich viele Elemente. Auch endlich viele Schnitte von Elementen in  $\mathfrak{B}$  haben unendlich viele Elemente  $\Rightarrow$  keine endliche nicht-leere Menge kann in dieser Topologie offen sein  $\Rightarrow \{ -1, 1 \}$  ist nicht offen. ■

**Teilaufgabe c)**

**Beh.:** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

**Bew.:** durch Widerspruch

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen  $p \in \mathbb{P}$

Dann ist

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\} \stackrel{\text{FS d. Arithmetik}}{=} \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p}$$

endlich. Das ist ein Widerspruch zu  $|\mathbb{Z}|$  ist unendlich und  $|\{-1, 1\}|$  ist endlich. ■

### Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Beh.:** Die offenen Mengen von  $P$  sind Vereinigungen von Mengen der Form

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} P_i$$

wobei  $J \subseteq \mathbb{N}$  endlich und  $U_j \subseteq P_j$  offen ist.

**Beweis:** Nach Definition der Produkttopologie bilden Mengen der Form

$$\prod_{i \in J} U_i \times \prod_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \notin J}} P_i, \text{ wobei } J \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich und } U_j \subseteq P_j \text{ offen } \forall j \in J$$

eine Basis der Topologie. Damit sind die offenen Mengen von  $P$  Vereinigungen von Mengen der obigen Form. ■

(b) **Beh.:** Die Zusammenhangskomponenten von  $P$  sind alle einpunktig.

**Beweis:** Es seien  $x, y \in P$  und  $x$  sowie  $y$  liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente  $Z \subseteq P$ . Da  $Z$  zusammenhängend ist und  $\forall i \in I : p_i : P \rightarrow P_i$  ist stetig, ist  $p_i(Z) \subseteq P_i$  zusammenhängend für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Die zusammenhängenden Mengen von  $P_i$  sind genau  $\{0\}$  und  $\{1\}$ , d. h. für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt entweder  $p_i(Z) \subseteq \{0\}$  oder  $p_i(Z) \subseteq \{1\}$ . Es sei  $z_i \in \{0, 1\}$  so, dass  $p_i(Z) \subseteq \{z_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt also:

$$\underbrace{p_i(x)}_{=x_i} = z_i = \underbrace{p_i(y)}_{=y_i} \forall i \in \mathbb{N}$$

Somit folgt:  $x = y$  ■

### Lösung zu Aufgabe 4

(a) **Beh.:**  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist nicht kompakt.

**Bew.:**  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist stetig. Außerdem ist  $\det(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  nicht kompakt.  $\overset{23}{\Rightarrow} \text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist nicht kompakt. ■

(b) **Beh.:**  $\text{SL}_1(\mathbb{R})$  ist nicht kompakt, für  $n > 1$  ist  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  kompakt.

**Bew.:** Für  $\text{SL}_1(\mathbb{R})$  gilt:  $\text{SL}_1(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \mid \det A = 1\} = \{1\} \cong \{1\}$ .  $\overset{23}{\Rightarrow} \text{SL}_1(\mathbb{R})$  ist kompakt.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  lässt sich mit einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n^2}$  identifizieren. Nach [Satz 1.1](#) sind diese genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen sind. Definiere nun für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, m \in \mathbb{N}$ :

$$A_m = \mathrm{diag}_n(m, \frac{1}{m}, \dots, 1)$$

Dann gilt:  $\det A_m = 1$ , d. h.  $A_m \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ , und  $A_m$  ist unbeschränkt, da  $\|A_m\|_\infty = m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \infty$ . ■

(c) **Beh.:**  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ist kompakt.

**Bew.:**  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cong S^n /_{x \sim -x}$ . Per Definition der Quotiententopologie ist die Klassenabbildung stetig. Da  $S^n$  als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$  kompakt ist [23](#)  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ist kompakt. ■

## Lösung zu Aufgabe 5

Die Definition von Homöomorphismus kann auf [Seite 9](#) nachgelesen werden.

### Definition 77

Seien  $(G, *)$  und  $(H, \circ)$  Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  eine Abbildung.

$\varphi$  heißt **Homomorphismus**, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$$

gilt.

Es folgt direkt:

- 1) Sei  $X = \mathbb{R}$  mit der Standarttopologie und  $\varphi_1 : \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ . Dann ist  $\varphi_1$  ein Gruppenhomomorphismus und ein Homöomorphismus.
- 2) Sei  $G = (\mathbb{Z}, +)$  und  $H = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ . Dann ist  $\varphi_2 : G \rightarrow H, x \mapsto x \bmod 3$  ein Gruppenhomomorphismus. Jedoch ist  $\varphi_2$  nicht injektiv, also sicher kein Homöomorphismus.
- 3) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $\mathrm{id}_X$  ein Homöomorphismus. Da keine Verknüpfung auf  $X$  definiert wurde, ist  $X$  keine Gruppe und daher auch kein Gruppenhomomorphismus.

Also: Obwohl die Begriffe ähnlich klingen, werden sie in ganz unterschiedlichen Kontexten verwendet.

## Lösung zu Aufgabe 6

Die Definition einer Isotopie kann auf [Seite 20](#) nachgelesen werden, die einer Isometrie auf [Seite 7](#).

### Definition 78

Seien  $(G, *)$  und  $(H, \circ)$  Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  eine Abbildung.

$\varphi$  heißt **Isomorphismus**, wenn  $\varphi$  ein bijektiver Homomorphismus ist.

Eine Isotopie ist also für Knoten definiert, Isometrien machen nur in metrischen Räumen Sinn und ein Isomorphismus benötigt eine Gruppenstruktur.

## Lösung zu Aufgabe 7

(a) **Vor.:** Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit.

**Beh.:**  $M$  ist wegzusammenhängend  $\Leftrightarrow M$  ist zusammenhängend

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Da  $M$  insbesondere ein topologischer Raum ist folgt diese Richtung direkt aus [Bemerkung 24](#).

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $x, y \in M$  und

$$Z := \{ z \in M \mid \exists \text{Weg von } x \text{ nach } z \}$$

Es gilt:

- (i)  $Z \neq \emptyset$ , da  $M$  lokal wegzusammenhängend ist
- (ii)  $Z$  ist offen, da  $M$  lokal wegzusammenhängend ist
- (iii)  $Z^C := \{ \tilde{z} \in M \mid \nexists \text{Weg von } x \text{ nach } \tilde{z} \}$  ist offen

Da  $M$  eine Mannigfaltigkeit ist, existiert zu jedem  $\tilde{z} \in Z^C$  eine offene und wegzusammenhängende Umgebung  $U_{\tilde{z}} \subseteq M$ .

Es gilt sogar  $U_{\tilde{z}} \subseteq Z^C$ , denn gäbe es ein  $U_{\tilde{z}} \ni \bar{z} \in Z$ , so gäbe es Wege  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M, \gamma_2(0) = \bar{z}, \gamma_2(1) = x$  und  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M, \gamma_1(0) = \tilde{z}, \gamma_1(1) = \bar{z}$ . Dann wäre aber

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M,$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(2x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2x - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ein stetiger Weg von  $\tilde{z}$  nach  $x \Rightarrow$  Widerspruch.

Da  $M$  zusammenhängend ist und  $M = \underbrace{Z}_{\text{offen}} \cup \underbrace{Z^C}_{\text{offen}}$ , sowie  $Z \neq \emptyset$  folgt  $Z^C = \emptyset$ .  
Also ist  $M = Z$  wegzusammenhängend. ■

(b) **Beh.:**  $X$  ist wegzusammenhängend.

**Beweis:**  $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  sind homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .  
Also sind die einzigen kritischen Punkte, die man nicht verbinden können könnte  $0_1$  und  $0_2$ .

Da  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, existiert ein Weg  $\gamma_1$  von  $0_1$  zu einem beliebigen Punkt  $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ .

Da  $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$  ebenfalls homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, existiert außerdem ein Weg  $\gamma_2$  von  $a$  nach  $0_2$ . Damit existiert ein (nicht einfacher) Weg  $\gamma$  von  $0_1$  nach  $0_2$ . ■

## Lösung zu Aufgabe 9

**Vor.:** Sei  $(X, d)$  eine absolute Ebene,  $A, B, C \in X$  und  $\triangle ABC$  ein Dreieck.

(a) **Beh.:**  $\overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$

**Bew.:** Sei  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ .

$\Rightarrow \exists$  Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(B) = C$  und  $\varphi(C) = B$  und  $\varphi(A) = A$ .

$\Rightarrow \varphi(\angle ABC) = \angle ACB$

$\Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$  ■

(b) **Beh.:** Der längeren Seite von  $\triangle ABC$  liegt der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

**Bew.:** Sei  $d(A, C) > d(A, B)$ . Nach §3 (i) gibt es  $C' \in AC^+$  mit  $d(A, C') = d(A, B)$   
 $\Rightarrow C'$  liegt zwischen  $A$  und  $C$ .

Es gilt  $\angle ABC' < \angle ABC$  und aus Aufgabe 9 (a) folgt:  $\angle ABC' = \angle AC'B$ .

$\angle BC'A$  ist ein nicht anliegender Außenwinkel zu  $\angle BCA$  Bem. 67  $\Rightarrow \angle BC'A > \angle BCA$   
 $\Rightarrow \angle BCA < \angle BC'A = \angle ABC' < \angle ABC$  Sei umgekehrt  $\angle ABC > \angle BCA$ , kann wegen 1. Teil von Aufgabe 9 (b) nicht  $d(A, B) > d(A, C)$  gelten.

Wegen Aufgabe 9 (a) kann nicht  $d(A, B) = d(A, C)$  gelten.

$\Rightarrow d(A, B) < d(A, C)$  ■

(c) **Vor.:** Sei  $g$  eine Gerade,  $P \in X$  und  $P \notin g$

**Beh.:**  $\exists!$  Lot

**Bew.:** ÜB10 A4(a): Es gibt Geradenspiegelung  $\varphi$  an  $g$ .  $\varphi$  vertauscht die beiden Halbebenen bzgl.  $g$ .

$\Rightarrow \varphi(P)P$  schneidet  $g$  in  $F$ .

Es gibt eine Geradenspiegelung  $\varphi$  an  $g$ .  $\varphi$  vertauscht die beiden Halbebenen bzgl.  $g$   
 $\Rightarrow \varphi(P)P$  schneidet  $g$  in  $F$ .

Sei  $A \in g \setminus \{F\}$ . Dann gilt  $\varphi(\angle AFP) = \angle AF\varphi(P) = \pi \Rightarrow \angle AFP$  ist rechter Winkel.

Gäbe es nun  $G \in g \setminus \{F\}$ , so dass  $PG$  weiteres Lot von  $P$  auf  $g$  ist, wäre  $\triangle PFG$  ein Dreieck mit zwei rechten Innenwinkeln (vgl. Abbildung 5.4).

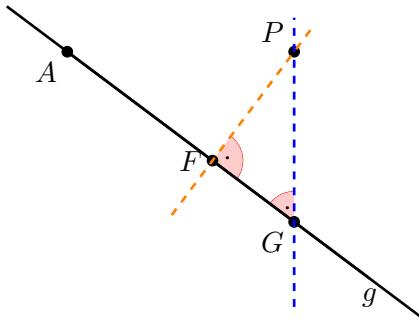


Abbildung 5.4: Zwei Lote zu einer Geraden  $g$  durch einen Punkt  $P$

Nach Folgerung 4.4 ist die Summe von zwei Innenwinkeln immer  $< \pi$   
 $\Rightarrow G$  gibt es nicht. ■

## Lösung zu Aufgabe 10

Sei  $f \parallel h$  und o. B. d. A.  $f \parallel g$ .

$f \nparallel h \Rightarrow f \cap h \neq \emptyset$ , sei also  $x \in f \cap h$ . Mit Axiom §5 folgt: Es gibt höchstens eine Parallele zu  $g$  durch  $x$ , da  $x \notin g$ . Diese ist  $f$ , da  $x \in f$  und  $f \parallel g$ . Da aber  $x \in h$ , kann  $h$  nicht

parallel zu  $g$  sein, denn ansonsten gäbe es zwei Parallelen zu  $g$  durch  $x$  ( $f \neq h$ ).  $\Rightarrow g \nparallel h$  ■

### Lösung zu Aufgabe 11

Sei  $(X, d, G)$  eine Geometrie, die §1-§4 erfüllt. Seien außerdem  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  Dreiecke, für die gilt:

$$\begin{aligned}d(A, B) &= d(A', B') \\d(A, C) &= d(A', C') \\d(B, C) &= d(B', C')\end{aligned}$$

Sei  $\varphi$  die Isometrie mit  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$  und  $\varphi(C')$  liegt in der selben Halbebene bzgl.  $AB$  wie  $C$ . Diese Isometrie existiert wegen §4.

Es gilt  $d(A, C) = d(A', C') = d(\varphi(A'), \varphi(C')) = d(A, \varphi(C'))$  und  $d(B, C) = d(B', C') = d(\varphi(B'), \varphi(C')) = d(B, \varphi(C'))$ .

Bem. 63  $\Longrightarrow C = \varphi(C)$ .

Es gilt also  $\varphi(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$ . ■

# Bildquellen

Alle Bilder, die hier nicht aufgeführt sind, wurden selbst erstellt.

Teilweise wurden die im folgenden aufgelisteten Bilder noch leicht modifiziert.

Abb. 0.1a  $S^2$ : Tom Bombadil, [tex.stackexchange.com/a/42865](http://tex.stackexchange.com/a/42865)

Abb. 0.1b Würfel: Jan Hlavacek, [tex.stackexchange.com/a/12069](http://tex.stackexchange.com/a/12069)

Abb. 0.1e  $T^2$ : Jake, [tex.stackexchange.com/a/70979/5645](http://tex.stackexchange.com/a/70979/5645)

Abb. 1.6 Stereographische Projektion: [texample.net/tikz/examples/map-projections](http://texample.net/tikz/examples/map-projections)

Abb. 1.11 Knoten von Jim.belk aus der „Blue knots“-Serie:

- Trivialer Knoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Unknot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Unknot.png)
- Kleeblattknoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Trefoil\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot.png)
- Achterknoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_Figure-Eight\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Figure-Eight_Knot.png)
- $6_2$ -Knoten: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue\\_6\\_2\\_Knot.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_6_2_Knot.png)

Abb. 1.12 Reidemeister-Züge: YAMASHITA Makoto ([1](#), [2](#), [3](#))

Abb. 1.13 Kleeblattknoten, 3-Färbung: Jim.belk, [commons.wikimedia.org/wiki/File:Tricoloring.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tricoloring.png)

Abb. 2.1 Doppeltorus: Oleg Alexandrov, [commons.wikimedia.org/wiki/File:Double\\_torus\\_illustration.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double_torus_illustration.png)

Abb. 2.8 Faltungsdiagramm: Jérôme Urhausen, Email vom 11.02.2014.

Abb. 3.3b 3 Pfade auf Torus: Charles Staats, [tex.stackexchange.com/a/149991/5645](http://tex.stackexchange.com/a/149991/5645)

Abb. 3.10 Überlagerung von  $S^1$  mit  $\mathbb{R}$ : Alex, [tex.stackexchange.com/a/149706/5645](http://tex.stackexchange.com/a/149706/5645)

Abb. 4.7a Sphärisches Dreieck: Dominique Toussaint, [commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical\\_triangle\\_3d\\_opti.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_triangle_3d_opti.png)

Abb. 5.1 Möbiusband: Jake, [tex.stackexchange.com/a/118573/5645](http://tex.stackexchange.com/a/118573/5645)

Abb. 5.3 Krümmung des Torus: Martin Thoma und Jérôme Urhausen, Email vom 17.02.2014.

# Abkürzungsverzeichnis

**Beh.** Behauptung

**Bew.** Beweis

**bzgl.** bezüglich

**bzw.** beziehungsweise

**ca.** circa

**d. h.** das heißt

**Def.** Definition

**etc.** et cetera

**Hom.** Homomorphismus

**o. B. d. A.** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

**Prop.** Proposition

**sog.** sogenannte

**Vor.** Voraussetzung

**vgl.** vergleiche

**z. B.** zum Beispiel

**zhgd.** zusammenhängend

**z. z.** zu zeigen

# Anhang: Definitionen und Sätze

Da dieses Skript in die Geometrie und Topologie einführen soll, sollten soweit wie möglich alle benötigten Begriffe definiert und erklärt werden. Die folgenden Begriffe wurden zwar verwendet, aber nicht erklärt, da sie Bestandteil der Vorlesungen „Analysis I und II“ sowie „Lineare Algebra und analytische Geometrie I und II“ sind. Jedoch will ich zumindest die Definitionen bereitstellen.

## Definition 79

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt ein **Häufungspunkt** von  $D$  : $\Leftrightarrow \exists$  Folge  $x_n$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

Folgende Definition wurde dem Skript von Herrn Prof. Dr. Leuzinger für Lineare Algebra entnommen:

## Definition 80

Es seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $\mathbb{A}(V)$  und  $\mathbb{A}(W)$  die zugehörigen affinen Räume. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **affin**, falls für alle  $a, b \in V$  und alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  mit  $\lambda + \mu = 1$  gilt:

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

## Definition 81

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $S \subseteq V$  eine Teilmenge.

$S$  heißt eine **Orthonormalbasis** von  $V$ , wenn gilt:

- (i)  $S$  ist eine Basis von  $V$
- (ii)  $\forall v \in S : \|v\| = 1$
- (iii)  $\forall v_1, v_2 \in S : v_1 \neq v_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

## Satz (Zwischenwertsatz)

Sei  $a < b$  und  $f \in C[a, b] := C([a, b])$ , weiter sei  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(a) < y_0 < f(b)$  oder  $f(b) < y_0 < f(a)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

# Symbolverzeichnis

## Mengenoperationen

$A^C$	Komplement der Menge $A$
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von $M$
$\overline{M}$	Abschluss der Menge $M$
$\partial M$	Rand der Menge $M$
$M^\circ$	Inneres der Menge $M$
$A \times B$	Kreuzprodukt zweier Mengen
$A \subseteq B$	Teilmengenbeziehung
$A \subsetneq B$	echte Teilmengenbeziehung
$A \setminus B$	$A$ ohne $B$
$A \cup B$	Vereinigung
$A \dot{\cup} B$	Disjunkte Vereinigung
$A \cap B$	Schnitt

## Geometrie

$AB$	Gerade durch die Punkte $A$ und $B$
$\overline{AB}$	Strecke mit Endpunkten $A$ und $B$
$\triangle ABC$	Dreieck mit Eckpunkten $A, B, C$
$ K $	Geometrische Realisierung des Simplizialkomplexes $K$

## Gruppen

$\text{Hom}\ddot{o}(X)$	Homöomorphismengruppe
$\text{Iso}(X)$	Isometriengruppe
$\text{GL}_n(K)$	Allgemeine lineare Gruppe <sup>2</sup>
$\text{SL}_n(K)$	Spezielle lineare Gruppe
$\text{PSL}_n(K)$	Projektive lineare Gruppe
$\text{Perm}(X)$	Permutationsgruppe
$\text{Sym}(X)$	Symmetrische Gruppe

<sup>2</sup>von *General Linear Group*

## Wege

$\gamma : I \rightarrow X$	Ein Weg
$[\gamma]$	Homotopieklassse von $\gamma$
$\gamma_1 * \gamma_2$	Zusammenhängen von Wegen
$\gamma_1 \sim \gamma_2$	Homotopie von Wegen
$\bar{\gamma}(x) = \gamma(1-x)$	Inverser Weg
$C := \gamma([0, 1])$	Bild eines Weges $\gamma$

## Weiteres

$\mathfrak{B}$	Basis einer Topologie
$\mathcal{S}$	Subbasis einer Topologie
$\mathfrak{B}_\delta(x)$	$\delta$ -Kugel um $x$
$\mathfrak{T}$	Topologie

$\mathcal{A}$	Atlas
$\mathcal{P}$	Projektiver Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$X/\sim$	$X$ modulo $\sim$
$[x]_\sim$	Äquivalenzklassen von $x$ bzgl. $\sim$
$\ x\ $	Norm von $x$
$ x $	Betrag von $x$
$\langle a \rangle$	Erzeugnis von $a$

$S^n$	Sphäre
$T^n$	Torus

$f \circ g$	Verkettung von $f$ und $g$
$\pi_X$	Projektion auf $X$
$f _U$	$f$ eingeschränkt auf $U$
$f^{-1}(M)$	Urbild von $M$
$\text{Rg}(M)$	Rang von $M$
$\chi(K)$	Euler-Charakteristik von $K$
$\Delta^k$	Standard-Simplex
$X \# Y$	Verklebung von $X$ und $Y$
$d_n$	Lineare Abbildung aus <a href="#">Bemerkung 38</a>
$A \cong B$	$A$ ist isometrisch zu $B$
$f_*$	Abbildung zwischen Fundamentalgruppen (vgl. <a href="#">Seite 48</a> )

## Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$  Natürliche Zahlen  
 $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{ 0, -1, -2, \dots \}$  Ganze Zahlen  
 $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} = \left\{ \frac{z}{n} \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \} \right\}$  Rationale Zahlen  
 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots \right\}$  Reelle Zahlen  
 $\mathbb{R}_+$  Echt positive reelle Zahlen  
 $\mathbb{R}_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$  Halbraum  
 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$  Einheitengruppe von  $\mathbb{R}$   
 $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$  Komplexe Zahlen  
 $\mathbb{P} = \{ 2, 3, 5, 7, \dots \}$  Primzahlen  
 $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0 \}$  obere Halbebene  
 $I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$  Einheitsintervall

- $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  Einbettung der Kreislinie in die Ebene  
 $\pi_1(X, x)$  Fundamentalgruppe im topologischen Raum  $X$  um  $x \in X$   
 $\text{Fix}(f)$  Menge der Fixpunkte der Abbildung  $f$   
 $\|\cdot\|_2$  2-Norm; Euklidische Norm  
 $\kappa$  Krümmung  
 $\kappa_{\text{Nor}}$  Normalenkrümmung  
 $V(f)$  Nullstellenmenge von  $f^3$

## Krümmung

- $D_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Lineare Abbildung mit Jacobi-Matrix in  $p$  (siehe Seite 89)  
 $T_s S$  Tangentialebene an  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  durch  $s \in S$   
 $d_s n(x)$  lineare Abbildung (siehe Seite 95)

---

<sup>3</sup>von **Vanishing Set**

# Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
affine, 106  
differenzierbare, 29  
homotope, 49  
offene, 51  
simpliziale, 35  
stetige, 9
- Abschluss, 4  
Abstand, 86  
Abstandsaxiom, 64  
Achterknoten, 20  
Aktion, *siehe* Gruppenoperation  
Anordnungsaxiome, 65  
Atlas, 24  
Außenwinkel, 69  
Axiom, 63  
Axiomensystem, 63
- Basis, 4  
Baum, 37  
Betti-Zahl, 40  
Bewegungsaxiom, 65  
Binormalenvektor, 89
- Cantorsches Diskontinuum, 22  
 $C^k$ -Struktur, 29
- Decktransformation, 58  
Decktransformationengruppe, 58  
Deformationsretrakt, 46  
dicht, 4  
Diffeomorphismus, 29  
Dimension, 34  
diskret, 52  
Doppelverhältnis, 81  
Dreibein  
  begreitendes, 89
- Ebene  
  euklidische, 63  
einfach zusammenhängend, 48  
Einheitsnormalenfeld, 90
- Euler-Charakteristik, *siehe* Eulerzahl  
Eulersche Polyederformel, 38  
Eulerzahl, 36
- Färbbarkeit, 21  
Faser, *siehe* Urbild  
Fläche  
  orientierbare, 90  
  reguläre, 30  
Flächenelement, 94  
Fundamentalform  
  erste, 94  
  zweite, 96  
Fundamentalgruppe, 46
- Gauß-Krümmung, 92, 91–93  
Geometrie, 63  
Gerade, 63  
  hyperbolische, 77  
Graph, 37  
Grenzwert, 9  
Gruppe  
  allgemeine lineare, 22, 26  
  spezielle lineare, 22  
  topologische, 33  
Gruppe operiert durch Homöomorphismen, 60  
Gruppenaktion, *siehe* Gruppenoperation  
Gruppenoperation, 60, 60–62  
  stetige, 60
- Häufungspunkt, 106  
Hülle  
  konvexe, 34  
Halbebene, 65  
Halbgerade, 64  
Halbraum, 27  
Hauptkrümmung, 92  
Hilbert-Kurve, 18, 19  
Homöomorphismengruppe, 10  
Homöomorphismus, 9  
Homologiegruppe, 40

- Homomorphismus, 100
- Homotopie, 43
- Homotopieklasse, 46
- Inklusionsabbildung, 46
- Innenwinkel, 69
- Inneres, 4
- Inzidenzaxiome, 63
- Isometrie, 7, 11
- Isometriegruppe, 11
- Isomorphismus, 100
- Isotopie, 20
- Jordankurve, 19
  - geschlossene, 19
- Karte, 24
- Kartenwechsel, 28
- Kern
  - offener, 4
- Kleeblattknoten, 20
- Klumpentopologie, *siehe* triviale Topologie
- Knoten, 20, 18–21
  - äquivalente, 20
  - trivialer, 20
- Knotendiagramm, 20
- kollinear, 64
- kongruent, *siehe* isometrisch
- Kongruenz, *siehe* Isometrie
- Kongruenzsatz
  - SSS, 103
  - SWS, 68
  - SWW, 72
  - WSW, 69
- Krümmung, 88, 89
- Kreis, 37
- Kurve, 87
  - Länge einer, 87
- Lage
  - allgemeine, 34
- Lie-Gruppe, 33
- liegt zwischen, 64
- Liftung, 53
- Limes, 9
- lokal, 4
- Lot, 86
- Lotfußpunkt, 86
- Möbiusband, 91
- Möbiustransformation, 78
- Mannigfaltigkeit, 24
  - differenzierbare, 29
  - geschlossene, 25
  - glatte, 29
  - mit Rand, 27
- Menge
  - abgeschlossene, 3
  - offene, 3
- Metrik, 7
  - diskrete, 7
  - hyperbolische, 82
  - SNCF, 8
- Nebenwinkel, 86
- Neilsche Parabel, 27
- Normalenfeld, 90
- Normalenvektor, 87, 89
- Normalkrümmung, 91, 92, 96
- Oktaeder, 34
- Orthonormalbasis, 106
- Paraboloid
  - hyperbolisches, 92
- Parallele, 65
- Parallelenaxiom, 63
- parametrisiert
  - durch Bogenlänge, 87
- Parametrisierung
  - reguläre, 30
- Polyzyylinder, 17
- Produkttopologie, 5
- Projektion
  - stereographische, 11
- Punkt, 34
- Quotiententopologie, 6, 11, 11
- Rand, 4, 28
- Raum
  - hausdorffscher, 8
  - komakter, 14
  - metrischer, 7
  - projektiver, 6, 22, 25, 51
  - topologischer, 3
- Realisierung
  - geometrische, 34
- Retraktion, 46
- Satz von
  - Gauß-Bonnet, 97

- Scheitelwinkel, 86
- Seite, 34
- Sierpińskiraum, 4, 22
- Simplex, 34
- Simplizialkomplex, 34
- Simplizialkomplexe
  - flächengleiche, 73
- Sphäre
  - exotische, 29
- Standard-Simplex, 34
- Standardtopologie, 3
- sternförmig, 47
- Stetigkeit, 9–11
- Strecke, 64
- Struktur
  - differenzierbare, 29
- Subbasis, 4
  
- Tangentialebene, 89, 89–90
- Teilraum, 5
- Teilraumtopologie, 5
- Teilsimplex, 34
- Topologie
  - diskrete, 3, 7
  - euklidische, 3
  - feinste, 11
  - triviale, 3
  - Zariski, 3, 13, 15
- Torus, iii, 6, 50, 93
- Total Unzusammenhängend, 99
- Triangulierung, 38
  
- Überdeckung, 14
- Übergangsfunktion, *siehe* Kartenwechsel
- Überlagerung, 50, 50–60
  - reguläre, 58
  - universelle, 56
- Umgebung, 4
  
- vanishing set, 27
- Verklebung, 26
- verträglich, 29
  
- Würfel, 34
- Weg, 18
  - einfacher, 18
  - geschlossener, 18
  - homotope, 43
  - inverser, 47
  - zusammengesetzter, 45
- Wegzusammenhang, 18