A 1 3 Tracking

a) Optimale Strategie $\pi_k^*(\underline{x}_k) = L_k \cdot \underline{x}_k + G_k \cdot \underline{s}_k$ mit

$$\left.\begin{aligned} L_k &= -(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k \\ P_N &= Q_N \\ P_k &= A_k^T (P_{k+1} - P_{k+1} B_k (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}) A_k + Q_k \end{aligned}\right\} \text{klassisches LQR}$$

$$G_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T$$

$\underline{s}_N = Q_N \cdot \underline{x}_N^T$ ← kein Rauschen fließt ein!

$$\underline{s}_k = Q_N \cdot \hat{\underline{x}}_N + (A_k + L_k B_k)^T \underline{s}_{k+1}$$

Beobachtung: $G_k, \underline{s}_k, \underline{s}_N$ sind unabhängig vom Rauschen $\underline{w}_k$ ⇒ Sicherheitsäquivalenz

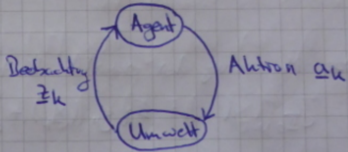
Planung bei Messunsicherheit

Bisher: Zustand $\underline{x}_k$ direkt zugänglich → zu Zeitpunkt k exakt bekannt

Jetzt: Agent erhält nur Beobachtungen / Messungen des Zustands:

Probleme:

- Rauschen in Messdaten
- indirekte Messung (Position gewünscht, Abstand gemessen)
- niederdimensional



⇒ Partiell beobachtbares Markovsches Entscheidungsproblem (POMDM) zur Modellierung (engl. partially observable Markov decision process)

Definition: MDP mit folgenden Unterschieden:

3. Initialzustand $\underline{x}_0$ ist ZV mit Verteilung $P(\underline{x}_0)$
7. Beobachtung / Messung $z_k \in Z$ gemäß der bedingten Verteilung

ML (↑ Beobachtung) Ingenieurswissenschaften (↑ Messung)

$z_k \sim P(\cdot \mid x_k, a_{k-1})$ (Beobachtungswahrscheinlichkeit)

- Diskrete Beobachtungen → bed. Zähldichte $f(\underline{z}_k \mid \underline{x}_k, a_{k-1}) = P(\underline{z} = \underline{z}_k \mid \underline{x}_k, a_{k-1})$
- Kontinuierl. Beobachtungen → bed. W'dichte $f(\underline{z}_k \mid \underline{x}_k, a_{k-1}) = \left.\frac{\partial F(z \mid \underline{x}_k, a_{k-1})}{\partial \underline{z}}\right|_{z = \underline{z}_k}$

Beispiel: kont. Zustandsmodell

$\underline{z}_k = \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{a}_{k-1}, \underline{v}_k)$

Messrauschen mit Dichte f_k^v, unabh. von $\underline{x}_k, a_{k-1}, w_k, v_i$ mit $i \neq k$

nichtlin. Funktion $h_k: \mathcal{X} \times A \times V \to Z$

↳ z.B. Abstandsmessung zu Landmarke in 2D

$$z_k = \sqrt{(x_k - x^{LM})^2 + (y_k - y^{LM})^2} + v_k$$

Position $\underline{x}_k$ — Landmarke $\underline{x}^{LM}$

Additives Rauschen
⊕ Anwendung Dirac-δ-Fkt möglich (Ausnutzen der Abstandseigenschaft)
⊖ Negative Messwerte in Abstandsmessung möglich

Beobachtungswkeit

$$f(\underline{z}_k | \underline{x}_k, \underline{a}_{k-1}) = \int_v \delta(\underline{z}_k - \underline{h}_k(x_k, a_{k-1}, \underline{v}_k)) \cdot f_k^v(\underline{v}_k)\, d v_k$$

Likelihood: $f(x|y)$ — bekannt, unbekannt

...

8. Aufgabe Minimierung der erwarteten Kosten

$$J_{\Pi_{0:N-1}}(\;) = E\{g_N(\underline{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, \Pi_k(\cdot))\}$$

bzgl. der Strategie $\Pi_{0:N-1} = (\pi_0, \dots, \Pi_{N-1})$ mit $\pi_k(\cdot) = a_k \in A_k$.

<u>Reformulierung als MDP</u>

- Problem: keine vollständige Information über Zustand x_k
- Aber: Zugriff auf Beobachtungen
- Idee: Definition eines neuen Zustands, welcher
  - direkt zugänglich ist
  - alle verfügbaren Informationen über x_k zum Zeitpunkt k enthält

⇒ Informationsvektor / -zustand

AoPlan, 09.06.2015, 8. VL

$\underline{I}_k = (\underline{z}_0, \dots, \underline{z}_k, \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{k-1})$ für $k = 1, 2, \dots, N$

$\underline{I}_0 = \underline{z}_0$

↳ $\underline{I}_{k+1} = (\underline{I}_k, \underline{z}_{k+1}, \underline{a}_k)$ für $k = 0, \dots, N-1$

- Beschreibt zeitliche Entwicklung des Agenten
- Mit $P(\underline{x}_0)$ und I_k ist sämtliche Information gegeben, um zum Zeitpunkt k eine Planungsentscheidung zu treffen.
- korrespondierendes MDP: Informationsvektor-MDP

↳ DP: $J_N(I_N) = \mathbb{E}\{g_N(\underline{x}_N) \mid I_N\}$

$$J_N(I_k) = \min_{\underline{a}_k} \{\mathbb{E}_{x,z}\{g_k(\underline{x}_k, \underline{a}_k) + J_{k+1}(I_k, \underline{z}_{k+1}, \underline{a}_k) \mid I_k, a_k\}\}$$

für $k = 0, 1, \dots, N-1$

↳ Strategie $\underline{\pi}_k^*(I_k) = \underline{a}_k^*$

Nachteile:
- Nur in Ausnahmefällen geschlossen lösbar (z.B. lineare Modelle)
- Zustand I_k wächst mit der Zeit

Beobachtung: Berechnung der Verteilung von $\underline{x}_{k+1}, \underline{z}_{k+1}$ erforderlich.

<u>Hinreichende Statistiken</u> (engl. sufficient statistic)

Ziel: Kompression, d.h. Darstellung von I_k mit geringer Dimension

<u>Definition</u>:

Seien $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ Stichproben (samples) einer ZV $z \sim P(z \mid \underline{\Theta})$ mit unbekanntem Parameter $\underline{\Theta}$. Eine <u>Statistik</u> ist eine Funktion $T(S) = t$, welche zwar von S, nicht aber von $\underline{\Theta}$ abhängt.

Beispiel: S ist Stichprobe einer normalverteilten ZV z mit Dichte

$$f(z \mid \Theta) = \mathcal{N}(z \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

- $\sum_{j=1}^{n} z_j^i = T(S)$ $\quad i \in \mathbb{N}$ ist eine Statistik
- $\sum_{j=1}^{n} (z_j - \mu)^i$ ist <u>keine</u> Statistik (weil es vom Parameter μ abhängt)

Definition

Statistik $T(S)=t$ heißt hinreichend für $\underline{\Theta}$, sofern keine weitere Statistik auf S ex., welche zusätzliche Informationen über $\underline{\Theta}$ liefert.

↳ Ist $T(s)=t$ gegeben, dann liefert volle Kenntnis von S keine Zusatzinformation über Θ

↳ S kann verworfen werden

↳ Kompression, wenn $\dim(\underline{t}) < |S|$

Beispiel: Der Stichprobenmittelwert $\hat{z} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j$

von n unabhängigen z_j einer normalverteilten ZV z mit Dichte

$N(z|\mu,\sigma)$ ist eine hinreichende Statistik für μ.

Beispiel: Hinreichende Statistik für POMDP ist die Identität $T_k(I_k)=I_k$

Bedingte Zustandsverteilung

Satz: Die bedingte Verteilung $P(\underline{x}_k|I_k)$ des Zustands $\underline{x}_k$ stellt eine hinreichende Statistik dar.

Lemma: Die bed. Verteilung $P(\underline{x}_k|I_k)$ lässt sich mittels ~~$P(\underline{x}_{k+1}|I_{k+1}) = f(P(x$~~

$$P(\underline{x}_{k+1}|I_{k+1}) = \Phi_k(P(\underline{x}_k|I_k), a_k, z_{k+1})$$

rekursiv aufschreiben

Beweis für X, A, Z kontinuierlich

- Gegeben: Dichte $f(x_k|I_k)$
- Prädiktionsschritt, $k \to k+1$

unabhängig von I_k

$$f(\underline{x}_{k+1}|I, a_k) = \int_X f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k, a_k)\, f(x_k|I_k)\, d\underline{x}_k$$

Chapman-Kolmogorov-Integration... im Wesentlichen Ausmarginalisierung

- Filterschritt: Aktualisierung durch Beobachtung $\underline{z}_{k+1}$

$$f(\underline{x}_{k+1}|I_{k+1}) = f(\underline{x}_{k+1}|I_k, \underline{z}_{k+1}, a_k) = \{\text{Def bed. Dichte}\}$$
$$= \frac{f(\underline{x}_{k+1}, \underline{z}_{k+1}|I_k, a_k)}{f(\underline{z}_{k+1}|I_k, a_k)}$$

$$= \frac{\overbrace{f(z_{k+1} \mid x_{k+1}, I_k, a_k)}^{\text{Beobachtungsmodell}} \cdot f(x_{k+1} \mid I_k, a_k)}{f(z_{k+1} \mid I_k, a_k)}$$

{ Beobachtungs'Wkeit ist unabhängig von I_k }

$$= \frac{f(z_{k+1} \mid \cancel{x}_{k+1}, a_k)\, f(x_{k+1} \mid I_k, a_k)}{f(z_{k+1} \mid I_k, a_k) = ① \int_x f\ldots} = ②$$

$$① = \int_{\mathcal{X}} f(z_{k+1} \mid x_{k+1}, a_k) \cdot f(x_{k+1} \mid I_k, a_k)\, d x_k$$

① = „Normalisierungskonstante"

② = „prädiktive Dichte"

$\hookrightarrow$ $\boxed{\Phi_k \mathrel{\hat{=}} \text{Prädiktion} + \text{Filterschritt} = \text{Bayes'scher Schätzer}}$

Varianten: Kalman-Filter, HMM-Filter, Partikel-Filter, Monte-Carlo-Sampling, ...

Beweis (Satz): für $\mathcal{X}, A, Z$ kontinuierlich

z.Z.: $J_k(I_k) = \bar{J}_k(P(x_k \mid I_k))$ für geeignete $\bar{J}_k$

I.A.: $k = N$

$$J_N(I_N) = \mathbb{E}\{ g_N(x_N) \mid I_N \} = \int_{\mathcal{X}} g_N(x_N) \cdot \overbrace{f(x_N \mid I_N)}^{\text{Zustandsverteilung steckt hier}}\, d x_N$$
$$= \bar{J}_N(P(x_N \mid I_N))$$

I.V.: $J_{k+1}(I_{k+1}) = \bar{J}_{k+1}(P(x_{k+1} \mid I_{k+1}))$

I.S.: $J_k(I_k) = \min_{a_k} \{ \mathbb{E}\{ g_k(x_k, a_k) + \bar{J}_{k+1}[\Phi_k(P(x_k \mid I_k), a_k, z_{k+1})] \mid I_k, a_k \} \}$

$$= \min_{a_k} \{ \underbrace{\mathbb{E}\{ g_k(x_k, a_k) \}}_{\circ} + \underbrace{\mathbb{E}_z\{ \bar{J}_{k+1}[\ldots] \mid I_k, a_k \}}_{} \}$$

$= \int_{\mathcal{X}} g_k\, f(x_k \mid I_k)\, d x_k$ $\qquad$ $= \int_z \bar{J}_k\, f(z_{k+1} \mid I_k, a_k)\, d z_{k+1}$

$=$ Fkt. von $P(x_k \mid I_k)$ $\qquad$ $= \int_X f(z_{k+1} \mid x_{k+1}, a_k) \cdot \underbrace{f(x_{k+1} \mid I_k, a_k)}_{\text{Prädiktion}}$

$=$ Funktion von $P(x_k \mid I_k)$

$$= \bar{J}_k(P(x_k \mid I_k))$$

$\hookrightarrow$ DP: $\bar{J}_N(P(x_N \mid I_N)) = \mathbb{E}_x\{ g_N(x_N) \mid I_N \}$ $\quad \bar{J}_k(P(x_k \mid I_k))$ iterativ

ProPlan, 03.06.2015, VL 8

$$\bar{J}_k(P(\underline{x}_k|I_k)) = \max_{a_k}\{E_{x,z}\{g_k(x_k,a_k) + \bar{J}_{k+1}(\phi_k(P(\underline{x}_k|I_k), a_k, z_{k+1}|I_k, a_k)\}\}$$

for $k = 0, \dots, N-1$

liefert optimale Strategie $\Pi^*_{0:N-1}$ mit $\Pi^*_k(P(\underline{x}_k|I_k)) = a_k \in A_k$

$\Rightarrow$ sog. Verteilungs-MDP (engl. Belief-State MDP)

Folie 9

Folie 10

Planungsalgorithmus besteht aus zwei Bestandteilen:

1. Schätzer: Berechnet $P(\underline{x}_k|I_k)$ aus $\underline{a}_{k-1}$ und z_k
   - Prädiktion: $P(x_{k-1}|I_{k-1}) \xrightarrow{a_{k-1}} P(\underline{x}_k|I_{k-1}, a_{k-1})$
   - Filterschritt: $P(\underline{x}_k|a_{k-1}) \xrightarrow{z_k} P(\underline{x}_k|I_k)$
2. Strategie: Berechnet $\underline{a}_k$ aus $P(\underline{x}_k, I_k)$

Liefert nur Framework, Praktisch selten direkt anwendbar

- Bayes'scher Schätzer i.A. nicht geschlossen ~~[illegible]~~ berechenbar
  - Prädiktionsintegral
  - Produkt aus Beobachtungs-W'keitsfunktion mit prädizierter Dichte
  - Normalisierungskonstante ~~[illegible]~~ ist Integral $\rightarrow$ kann problematisch sein
- Aktion a_k beeinflusst Zustand x_{k+1} und Beobachtung $\underline{z}_{k+1}$
  - ↳ Zerlegung in Schätzer und Strategie nur für Implementierung
  - ↳ opt. Lösung des Schätz- und Planungsproblem sind verkoppelt.
- Beobachtung: Dimension des Raums aller Verteilungen ist unendlich

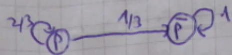
Aber: In vielen Fällen lässt sich die Verteilung durch eine endliche Anzahl von Parametern beschreiben

Satz: Ist $P(\underline{x}_k|I_k) = G_k(T_k|I_k)$ für eine geeignete Funktion $G_k(\cdot)$, dann ist $T_k(I_k)$ eine hinreichende Statistik

Beispiel: $P(x_k|I_k)$ ist Normalverteilung $\Rightarrow$ Mittelwert und Kovarianzmatrix sind hinr. Statistiken

ProPlan, 03.06.2015, 8. VL

A14 Maschinenwartung

<!---  $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ -->

a) Informationsvektor-MDP:

- Zustandsmenge $\mathcal{X} = \{P, \bar{P}\}$, Aktionsmenge $A = \{C, S\}$, $Z = \{B, G\}$ (C: Continue, S: Stop)
- Init-W'keit:

  $f(x_0 = P) = 2/3 \quad f(x_0 = \bar{P}) = \frac{1}{3}$

- Übergangsw'keit für $k = 0, 1$:

  $f(x_{k+1} = P \mid x_k = P, a_k = C) = 2/3 \qquad f(\bar{P} \mid P, C) = 1/3$

  $f(P \mid \bar{P}, C) = 0 \qquad f(\bar{P} \mid \bar{P}, C) = 1$

  $f(P \mid P, S) = 2/3 \qquad f(\bar{P} \mid P, S) = 1/3$

  $f(P \mid \bar{P}, S) = 2/3 \qquad f(\bar{P} \mid \bar{P}, S) = 1/3$

  Beobachtungsw'keiten für $k = 0, 1$:

  $f(z_k = G \mid x_k = P) = 3/4 \qquad f(B \mid P) = 1/4$

  $f(G \mid \bar{P}) = 1/4 \qquad f(B \mid \bar{P}) = 3/4$

  Informationsvektoren für $k = 0, 1$:

  $I_0 = z_0, \quad I_1 = (z_0, z_1, a_0)$

  Gesucht: $\pi_0^*(I_0), \pi_1^*(I_1)$

DP: $J_2(I_2) = 0$

$$J_k(I_k) = \min\{E_{x_k}\{g(x_k, C)\} + E_{z_{k+1}}\{J_{k+1}(I_k, C, z_{k+1}) \mid I_k, C\},$$
$$E_{x_k}\{g(x_k, S)\} + \text{" " " " " "}\}$$
$$= \min\{f(P \mid I_k) \cdot g(P, C) + f(\bar{P} \mid I_k)\, g(\bar{P}, C) + E_{z_{k+1}}\{\ldots\},$$
$$f(P \mid I_k) \cdot g(P, S) + f(\bar{P} \mid I_k) \cdot g(\bar{P}, S) + E_{z_{k+1}}\{\ldots\}\}$$

für $k = 0, 1$

$I_1 = (z_0, z_1, a_0) \rightsquigarrow$ 8 mögliche Informationsvektoren

__k=1:__ Erw.-~~Vorhersagen~~ Kosten für $a_1 = C$: $2 \cdot f(\bar{P} \mid I_1)$ $\Rightarrow J_1(I_1) = \min\{2 \cdot f(\bar{P} \mid I_1), 1\}$

für $a_1 = S$: 1

ProPlan, 03.06.2015, 8. VL

- Berechnung von $f(\bar{P} | I_1)$ für alle I_1: Beobachtungs-Wkt   8?

↳ Allgemein: $f(x_1 | z_1, z_0, a_0) = \dfrac{f(z_1 | x_1) \cdot f(x_1 | z_0, a_0)}{\sum_{x_1} f(z_1 | x_1) \cdot f(x_1 | z_0, a_1)}$ (Filter-Schritt)

$f(x_1 | z_0, a_0) = \sum_{x_0} f(x_1 | x_0, a_0) \cdot f(x_0 | z_0)$ (Prädiktion)

↑ Übergangswkeit

$f(x_0 | z_0) = \dfrac{f(z_0 | x_0) \cdot f(x_0)}{\sum_{x_0} f(z_0 | x_0) \cdot f(x_0)}$ ← Init-Wkeit ← Beobachtungs-Wkeit

(1): $I_1 = (G, G, S)$

$f(x_0 = P | G) = \dfrac{3/4 \cdot 2/3}{3/4 \cdot 2/3 + 1/4 \cdot 1/3} = \dfrac{6}{7}$

1. Filterschritt

$f(x_0 = \bar{P} | G) = \dfrac{1/12}{7/12} = 1/7$

$f(x_1 = P | G, S) = 2/3 \cdot (f(x_0 = P | G) + f(x_0 = \bar{P} | G)) = 2/3$

$f(x_1 = \bar{P} | G, S) = 1/3$

$f(x_1 = \bar{P} | G, G, S) = \dfrac{1/4 \cdot 1/3}{1/4 \cdot 1/3 + 3/4 \cdot 2/3} = \dfrac{1/12}{1/12 + 1/2} = 1/7$

↳ $J_1(I_1) = \min\{2 \cdot 1/7, 1\} = 2/7$ ⇒ $a_1^* = C$

... (für alle restlichen 7 Informationsvektoren auch)

z_0	z_1	a_0	J_1	π_1^*
B	G	S	2/7	C
G	$\boxed{B}$	S	1	$\boxed{S}$
B	$\boxed{B}$	S	1	$\boxed{S}$
G	G	C	5/7	C
B	G	C	22/23	C
G	$\boxed{B}$	C	1	$\boxed{S}$
B	$\boxed{B}$	C	1	$\boxed{S}$

Insges. Ist $z_1 = B$, dann wähle $a_1 = S$ (Stop)
$z_1 = G$, dann " $a_1 = C$ (weiter betreiben)

<u>k=0</u>

(1) $I_0 = z_0 \rightarrow$ 2 mögliche Informationsvektoren

$I_0 = G$

$\hookrightarrow J_0(G) = \min\{27/28,\ 19/12\} = 27/28$

$\hookrightarrow \pi_0^*(G) = C$

(2) $I_0 = B$

$\hookrightarrow J_0(B) = \min\{131/60,\ 19/12\} = 19/12$

$\hookrightarrow \pi_0^*(B) = S$

$\hookrightarrow$ Insgesamt: Opt. Strategie ist $a = C$ zu wählen, wenn Inspektion G liefert, sonst $a = S$.

b) Definiere $f_1 := f(x_1 = \bar{P} \mid I_1)$

$f_0 := f(x_0 = \bar{P} \mid I_0)$

$$\hookrightarrow f_1 = \phi_0(f_0, a_0, z_1) = \begin{cases} 1/7 & , \text{ for } a_0 = S,\ z_1 = G \\ 3/5 & , \text{ for } a_0 = S,\ z_1 = B \\ \frac{1+2f_0}{7-4 \cdot f_0} & , \text{ for } a_0 = C,\ z_1 = G \\ \frac{3+6 f_0}{5+4 f_0} & , \text{ for } a_0 = C,\ z_1 = B \end{cases}$$

- $k = 1 \Rightarrow \bar{J}_1(f_1) = \min\{2 \cdot f_1,\ 1\}$

$$\hookrightarrow \pi_1^*(f_1) = \begin{cases} C & , \text{ for } f_1 \leq \frac{1}{2} \\ S & , \text{ sonst} \end{cases}$$

- <u>k=0</u>

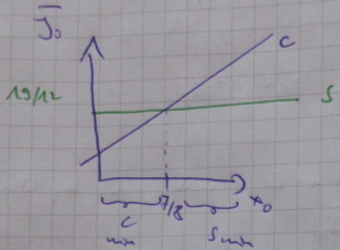
$$\bar{J}_0(f_0) = \min\{2 \cdot f + f(z_1 = G \mid f_0, C) \cdot \bar{J}_1(\phi_0(C, G)),$$
$$f(z_1 = B \mid f_0, C) \cdot \bar{J}_1(\phi_0(C, B)),$$
$$1 + f(z_1 = G \mid f_0, S)\ \bar{J}_1(\phi(S, G)),$$
$$f(z_1 = B \mid f_0, S) \cdot \bar{J}_1(\phi_0(S, B))$$

$$= \min\{2 \cdot f_0 + \frac{7-4 f_0}{12} \cdot \bar{J}_1\left(\frac{1+2-f_0}{7-4 \cdot f_0}\right) + \frac{5+4 \cdot f_0}{12} \cdot \bar{J}_1\left(\frac{3+6 \cdot f_0}{5+4 \cdot f_0}\right),$$
$$1 + \frac{7}{12} \bar{J}_1(1/7) + \frac{5}{12} \cdot \bar{J}_1(3/5)\}$$

Pro Plan, 03.06.2015, 8.VL

Einsetzen von $\bar{J}_1$ und Zusammenfassen liefert

$$\bar{J}_0(f_0) = \begin{cases} \frac{7+32 f_0}{12}, & \text{für } f_0 \in [0, 3/8] \\ 19/12, & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \pi_0^*(f_0) = \begin{cases} C, & f_0 \leq 3/8 \\ S, & f_0 > 3/8 \end{cases}$$