Interventions

Martin Thoma

10. August 2015

Structural Equaltion Model (kurz: SEM)

Ein *Struckturgleichungsmodel* ist ein Tupel $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{\mathbf{N}})$, wobei $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_p)$ ein Tupel aus p Gleichungen

$$S_j : X_j = f_j(\mathbf{PA}_j, N_j), \quad j = 1, \ldots, p$$

ist und $\mathbf{PA}_j \subseteq \{ X_1, \ldots, X_p \} \setminus \{ X_j \}$ die *Eltern von* X_j und $\mathbb{P}^{\mathbf{N}} = \mathbb{P}^{N_1, \ldots, N_p}$ die gemeinsame Verteilung der Rauschvariablen ist. Diese müssen von einander unabhängig sein, $\mathbb{P}^{\mathbf{N}}$ muss also eine Produktverteilung sein.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{N})$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.
Die Menge der Rauschvariablen in $\mathcal{S}$ beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“ N's. $\mathcal{S}$ muss paarweise unabhängig sein.

Nieren-Beispiel

	Behandlungserfolg	
	A	**B**
Kleine Nierensteine	**93%**	87%
Große Nierensteine	**73%**	69%
Gesamt	78%	**83%**

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Z} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{T} \arrow[rr] & & \mathsf{R}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= N_Z, & N_Z &\sim Ber(1/4) \\
T &= \lfloor 2 \cdot (1 - Z + N_T) \rfloor & N_T &\sim \mathcal{N}(0,1) \\
R &= \lfloor 2 \cdot (0.6 \cdot (1 - Z) + 0.4 \cdot (1 - T) + N_R) \rfloor & N_R &\sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^{Y} \quad (3)$$

$$(4)$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$

(4)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=3)}^{Y} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=3)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=3)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Intervention auf X beeinflusst die Verteilung von Y.

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$

(4)

(5)

(6)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} \tag{4}$$

(5)

(6)

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3) \\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} && (4) \\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=3.14159)} && (5) \\ & && (6) \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3)\\
&= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} && (4)\\
&= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=3.14159)} && (5)\\
&\neq \mathbb{P}^{X|Y=2}_{\mathcal{S}} && (6)
\end{aligned}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to$ Y (weiße Zähne)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to$ Y (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(Y:=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(Y:=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(X:=\tilde{N}_X)}$ und $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Totaler kausaler Effekt

Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM $\mathcal{S}$. Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von X nach Y genau dann wenn

$$\exists \tilde{N}_X : X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X := \tilde{N}_X)}$$

gilt.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1} \quad : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} \quad : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support $: X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i)

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$ (iii) äquivalent zu (iii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

$$p^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x_1)}(x_2) = \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

$$
\begin{aligned}
p^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \dots \mathrm{d}x_p \\
&= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} \mathrm{d}x_3 \dots \mathrm{d}x_p
\end{aligned}
$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} p^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p \\ &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p \\ &= p^{X_2 | X_1 = x_1}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_1)}(x_2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit $\tilde{p}(x_1) > 0$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

$$
\begin{aligned}
X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} \Leftrightarrow & \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square} \\
& \text{mit } q(x_1^{\triangle}), q(x_1^{\square}) > 0 \\
& \text{und } \mathbb{Q}^{X_2 | X_1 = x_1^{\triangle}} \neq \mathbb{Q}^{X_2 | X_1 = x_1^{\square}}
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

$$X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists x_1^{\triangle} \text{ mit } q(x_1^{\triangle}) > 0 \text{ und } \mathbb{Q}^{X_2 | X_1 = x_1^{\triangle}} \neq \mathbb{Q}^{X_2} \tag{A.3}$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\overset{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\tilde{N}_1$ sodass

$$\mathbb{P}^{X_2 | X_1 = x_1^{\triangle}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}^{X_2 | X_1 = x^{\square}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_1)}$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\overset{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\tilde{N}_1$ sodass

$\mathbb{P}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}^{X_2|X_1=x^{\square}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_1)}$

$\overset{A.1}{\Rightarrow} (ii)$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) $\overset{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\hat{N}_1$ sodass

$$\mathbb{P}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}^{X_2|X_1=x_1^{\square}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\hat{N}_1)}$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) $\overset{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\hat{N}_1$ sodass

$$\mathbb{P}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}^{X_2|X_1=x_1^{\square}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\hat{N}_1)} \overset{A.2}{\Rightarrow} (iv)$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}, do(X_1 := x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support $: X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_1 := \tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (iv) $\Rightarrow$ (i)
Trivial

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg$(i) $\Rightarrow \neg$ (iii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg$(i) $\Rightarrow \neg$ (iii)

Es gilt: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}} = \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$ verteilt ist.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: ¬(i) ⇒ ¬ (iii)

Es gilt: $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}} = \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$ verteilt ist.

$$\neg(i) \Rightarrow X_2 \perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=N_1^*)} \tag{3}$$

$$\overset{A.3}{\Rightarrow} \mathbb{P}^{X_2|X_1=x^{\triangle}}_{\mathcal{S},do(X_1:=N_1^*)} = \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=N_1^*)} \quad \forall x^{\triangle} \text{ mit } p_1(x^{\triangle}) > 0 \tag{4}$$

$$\overset{A.1}{\Rightarrow} \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} = \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}} \quad \forall x^{\triangle} \text{ mit } p_1(x^{\triangle}) > 0 \tag{5}$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Trivial (TODO: wirklich?)

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(T := \tilde{N}_T)}$

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(T:=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt $\Rightarrow T$ hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre") SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \qquad \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) \tag{3}$$

$$H = A + N_H \mod 2 \qquad \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) \tag{4}$$

$$B = H + N_B \mod 2 \qquad \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) \tag{5}$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$
\begin{aligned}
A &= N_A && \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) && (3)\\
H &= A + N_H \mod 2 && \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) && (4)\\
B &= H + N_B \mod 2 && \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) && (5)
\end{aligned}
$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.
- Intervention von A hat auf H einen größeren Einfluss als Intervention von B.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.
Beweis von (ii) durch Gegenbeispiel: Sei

$$X = N_X \tag{6}$$

$$Z = 2X + N_Z \tag{7}$$

$$Y = 4X - 2Z + N_Y \tag{8}$$

Dann gilt: $Y = -2N_Z + N_Y$ und daher $X \perp\!\!\!\perp$ für alle N_X. $\square$

Quellen

- Causality, 2015. Jonas Peters.

Definitionen

Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig $:\Leftrightarrow p(x,y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y$.
Man schreibt dann: $X \perp\!\!\!\perp Y$ und andernfalls $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Korrelation

Seien X und Y Zufallsvariablen und

$$C(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen X und Y. Gilt $C(X,Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert.