

Interventions

Martin Thoma

X. August 2015

- 1 Einführung
- 2 Interventions
- 3 Totaler kausaler Effekt
- 4 Ende

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
 - **A:** Offene Operation
 - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
 - **A:** Offene Operation
 - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
 - **A:** Offene Operation
 - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

Ist die Entscheidung abhängig von der Größe?

	Behandlungserfolg	
	A	B
Kleine Nierensteine	93% (81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	73% (192/263)	69% (55/ 80)
Gesamt	78% (273/350)	83% (289/350)

Tabelle: Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

Quelle: Causality, 2015. Jonas Peters.

Structural Equation Model (kurz: SEM)

Ein *Strukturgleichungsmodell* ist ein Tupel $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{\mathbf{N}})$, wobei $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_p)$ ein Tupel aus p Gleichungen

$$S_j : X_j = f_j(\mathbf{PA}_j, N_j), \quad j = 1, \dots, p$$

ist und $\mathbf{PA}_j \subseteq \{X_1, \dots, X_p\} \setminus \{X_j\}$ die *Eltern* von X_j und $\mathbb{P}^{\mathbf{N}} = \mathbb{P}^{N_1, \dots, N_p}$ die gemeinsame Verteilung der Rauschvariablen ist. Diese müssen von einander unabhängig sein, $\mathbb{P}^{\mathbf{N}}$ muss also eine Produktverteilung sein.

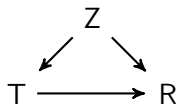
Aufstellen eines SEM

$Z \in \{ \text{klein, groß} \}$: Größe des Nierensteins

$T \in \{ A, B \}$: Behandlung (Treatment)

$R \in \{ \text{erfolg, misserfolg} \}$: Behandlungserfolg (Recovery)

Sei das wahre SEM:



Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus \mathcal{S} ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus \mathcal{S} ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus \mathcal{S} ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus \mathcal{S} ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}}|_{do(X_j = \tilde{f}(\mathbf{PA}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus \mathcal{S} ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}}|_{do(X_j = \tilde{f}(\mathbf{PA}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.

Die Menge der Rauschvariablen in \mathcal{S} beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“ N 's. \mathcal{S} muss paarweise unabhängig sein.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \quad (3)$$

$$(4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) \quad (3)$$

$$(4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} \quad (3)$$

$$(4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$(4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) \quad (4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} \quad (4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \quad (4)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \quad (4)$$

\Rightarrow Intervention auf X beeinflusst die Verteilung von Y .

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} \quad (5)$$

$$(6)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} \quad (5)$$

$$\neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|Y=2} \quad (6)$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei \mathcal{S} gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(X=\tilde{N}_X)}$ und $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM \mathcal{S} . Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von X nach Y genau dann wenn

$$\exists \tilde{N}_X : X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}}|_{do(X=\tilde{N}_X)}$$

gilt.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan:

- (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)
- \neg (i) $\Rightarrow \neg$ (iii) äquivalent zu (iii) \Rightarrow (i)
- (ii) \Rightarrow (iii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) = \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) dx_3 \dots dx_p$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) dx_3 \dots dx_p \\ &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} dx_3 \dots dx_p \end{aligned}$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) dx_3 \dots dx_p \\ &= \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j | x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} dx_3 \dots dx_p \\ &= p_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1, do(X_1=\tilde{N}_1)}(x_2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit $\tilde{p}(x_1) > 0$.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} &\Leftrightarrow \exists x_1^\Delta, x_1^\square \\ &\text{mit } q(x_1^\Delta), q(x_1^\square) > 0 \\ &\text{und } \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^\Delta} \neq \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^\square} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} &\Leftrightarrow \exists x_1^\Delta \\ &\text{mit } q(x_1^\Delta) > 0 \\ &\text{und } \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^\Delta} \neq \mathbb{Q}^{X_2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) \Rightarrow (ii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) \Rightarrow (ii)

- (i) $\stackrel{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^\Delta, x_1^\square \text{ mit pos. Dichte unter } \tilde{N}_1 \text{ sodass}$
 $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\Delta, do(X_1=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\square, do(X_1=\tilde{N}_1)}$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) \Rightarrow (ii)

(i) $\stackrel{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^\Delta, x_1^\square \text{ mit pos. Dichte unter } \tilde{N}_1 \text{ sodass}$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\Delta, do(X_1=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\square, do(X_1=\tilde{N}_1)}$$

$\stackrel{A.1}{\Rightarrow} (ii)$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) \Rightarrow (iv)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) \Rightarrow (iv)

(ii) $\stackrel{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^\Delta, x_1^\square \text{ mit pos. Dichte unter } \hat{N}_1 \text{ sodass}$
 $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\Delta, do(X_1=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\square, do(X_1=\hat{N}_1)}$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) \Rightarrow (iv)

(ii) $\stackrel{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^\Delta, x_1^\square \text{ mit pos. Dichte unter } \hat{N}_1 \text{ sodass}$
 $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\Delta, do(X_1=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^\square, do(X_1=\hat{N}_1)} \stackrel{A.2}{\Rightarrow} (iv)$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (iv) \Rightarrow (i)

Trivial

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X} | do(X_1 = \tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X} | do(X_1 = \tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg(\text{i}) \Rightarrow \neg(\text{iii})$

Es gilt: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|\text{do}(X_1=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$ verteilt ist.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$

Es gilt: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$ verteilt ist.

$$\neg(i) \Rightarrow X_2 \perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=N_1^*)} \quad (3)$$

$$\stackrel{A,3}{\Rightarrow} \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x^\Delta|do(X_1=N_1^*)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=N_1^*)} \quad \forall x^\Delta \text{ mit } p_1(x^\Delta) > 0 \quad (4)$$

$$\stackrel{A,1}{\Rightarrow} \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^\Delta)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} \quad \forall x^\Delta \text{ mit } p_1(x^\Delta) > 0 \quad (5)$$

$$\neg(ii) \Rightarrow \neg(iii) \quad (6) \quad 10/15$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X} | do(X_1 = \tilde{N}_{X_1})}$
- (ii) $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\square)}$
- (iii) $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2 | do(X_1 = x^\Delta)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.
- (iv) $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X} | do(X_1 = \tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) \Rightarrow (iii)

Trivial (TODO: wirklich?)

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach \tilde{N}_T) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach \tilde{N}_T) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|\text{do}(T=\tilde{N}_T)}$

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach \tilde{N}_T) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(T=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt $\Rightarrow T$ hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM \mathcal{S} , welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \quad \text{mit } N_A \sim \text{Ber}(1/2) \quad (3)$$

$$H = A + N_H \mod 2 \quad \text{mit } N_H \sim \text{Ber}(1/3) \quad (4)$$

$$B = H + N_B \mod 2 \quad \text{mit } N_B \sim \text{Ber}(1/20) \quad (5)$$

mit dem Graphen $A \rightarrow H \rightarrow B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A .

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM \mathcal{S} , welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \quad \text{mit } N_A \sim \text{Ber}(1/2) \quad (3)$$

$$H = A + N_H \mod 2 \quad \text{mit } N_H \sim \text{Ber}(1/3) \quad (4)$$

$$B = H + N_B \mod 2 \quad \text{mit } N_B \sim \text{Ber}(1/20) \quad (5)$$

mit dem Graphen $A \rightarrow H \rightarrow B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A .
- Intervention von A hat auf H einen größeren Einfluss als Intervention von B .

Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs.

Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d -separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.

Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d -separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.

Beweis von (ii) durch Gegenbeispiel: Sei

$$X = N_X \tag{6}$$

$$Z = 2X + N_Z \tag{7}$$

$$Y = 4X - 2Z + N_Y \tag{8}$$

Dann gilt: $Y = -2N_Z + N_Y$ und daher $X \perp\!\!\!\perp Y$ für alle N_X . \square

- Causality, 2015. Jonas Peters.

Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig $:\Leftrightarrow p(x, y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y.$

Man schreibt dann: $X \perp\!\!\!\perp Y$ und andernfalls $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Korrelation

Seien X und Y Zufallsvariablen und

$$C(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen X und Y . Gilt $C(X, Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert.