Interventions

Martin Thoma

10. August 2015

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?
Ist die Entscheidung abhängig von der Größe?

Simpson-Paradoxon

	Behandlungserfolg	
	A	**B**
Kleine Nierensteine	**93%** (81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	**73%** (192/263)	69% (55/ 80)
Gesamt	78% (273/350)	**83%** (289/350)

Tabelle: Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

SEMs

Structural Equaltion Model (kurz: SEM)

Ein *Strucktургleichungsmodel* ist ein Tupel $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{\mathbf{N}})$, wobei $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_p)$ ein Tupel aus p Gleichungen

$$S_j : X_j = f_j(\mathbf{PA}_j, N_j), \quad j = 1, \ldots, p$$

ist und $\mathbf{PA}_j \subseteq \{ X_1, \ldots, X_p \} \setminus \{ X_j \}$ die *Eltern von* X_j und $\mathbb{P}^{\mathbf{N}} = \mathbb{P}^{N_1, \ldots, N_p}$ die gemeinsame Verteilung der Rauschvariablen ist. Diese müssen von einander unabhängig sein, $\mathbb{P}^{\mathbf{N}}$ muss also eine Produktverteilung sein.

Aufstellen eines SEM

$Z \in \{\,\text{klein}, \text{groß}\,\}$: Größe des Nierensteins

$T \in \{\,A, B\,\}$: Behandlung (Treatment)

$R \in \{\,\text{erfolg}, \text{misserfolg}\,\}$: Behandlungserfolg (Recovery)

Sei das wahre SEM:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T \arrow[rr] & & R
\end{tikzcd}$$

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathfrak{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathfrak{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}|do(X_j = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}_{\mathcal{S}}$$

beschrieben.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_j = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.

Die Menge der Rauschvariablen in $\mathcal{S}$ beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“ N's. $\mathcal{S}$ muss paarweise unabhängig sein.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \qquad (1)$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \qquad (2)$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \qquad (3)$$

$$\qquad (4)$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$

(4)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Intervention auf X beeinflusst die Verteilung von Y.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$

(4)

(5)

(6)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} \tag{4}$$
$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3)\\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} && (4)\\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} && (5)\\
&\neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|Y=2} && (6)
\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(X=\tilde{N}_X)}$ und $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM $\mathcal{S}$. Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von X nach Y genau dann wenn

$$\exists \tilde{N}_X : X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X=\tilde{N}_X)}$$

gilt.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1} \quad : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} \quad : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support $: X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1} \quad : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} \quad : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support $: X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i)

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$ (iii) äquivalent zu (iii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) = \int \prod_{j \neq 1} p_j(x_j|x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$
\begin{aligned}
p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j\neq 1} p_j(x_j|x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \dots \mathrm{d}x_p \\
&= \int \prod_{j\neq 1} p_j(x_j|x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} \mathrm{d}x_3 \dots \mathrm{d}x_p
\end{aligned}
$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$
\begin{aligned}
p_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x_1)}(x_2) &= \int \prod_{j\neq 1} p_j(x_j|x_{pa(j)}) \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p \\
&= \int \prod_{j\neq 1} p_j(x_j|x_{pa(j)}) \frac{\tilde{p}(x_1)}{\tilde{p}(x_1)} \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_p \\
&= p_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1, do(X_1=\tilde{N}_1)}(x_2) \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

mit $\tilde{p}(x_1) > 0$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$\begin{aligned} X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} \Leftrightarrow & \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square} \\ & \text{mit } q(x_1^{\triangle}), q(x_1^{\square}) > 0 \\ & \text{und } \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}} \neq \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^{\square}} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

$$
\begin{aligned}
X_2 \not\perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{Q} \Leftrightarrow & \exists x_1^{\triangle} \\
& \text{mit } q(x_1^{\triangle}) > 0 \\
& \text{und } \mathbb{Q}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}} \neq \mathbb{Q}^{X_2}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\overset{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\tilde{N}_1$ sodass

$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}, do(X_1=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x^{\square}, do(X_1=\tilde{N}_1)}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\overset{A.2}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\tilde{N}_1$ sodass

$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle},do(X_1=\tilde{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x^{\square},do(X_1=\tilde{N}_1)}$

$\overset{A.1}{\Rightarrow} (ii)$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) $\overset{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\hat{N}_1$ sodass
$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}, do(X_1=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\square}, do(X_1=\hat{N}_1)}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} : \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) $\overset{A.1}{\Rightarrow} \exists x_1^{\triangle}, x_1^{\square}$ mit pos. Dichte unter $\hat{N}_1$ sodass
$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\triangle}, do(X_1=\hat{N}_1)} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x_1^{\square}, do(X_1=\hat{N}_1)} \overset{A.2}{\Rightarrow} (iv)$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (iv) $\Rightarrow$ (i)
Trivial

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg$(i) $\Rightarrow \neg$ (iii)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$ (iii)

Es gilt: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$ verteilt ist.

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: ¬(i) ⇒ ¬ (iii)

Es gilt: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=N_1^*)}$, wobei N_1^* wie $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$ verteilt ist.

$$\neg(i) \Rightarrow X_2 \perp\!\!\!\perp X_1 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=N_1^*)} \tag{3}$$

$$\overset{A.3}{\Rightarrow} \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|X_1=x^{\triangle}|do(X_1=N_1^*)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=N_1^*)} \quad \forall x^{\triangle} \text{ mit } p_1(x^{\triangle}) > 0 \tag{4}$$

$$\overset{A.1}{\Rightarrow} \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2} \quad \forall x^{\triangle} \text{ mit } p_1(x^{\triangle}) > 0 \tag{5}$$

$$\overset{\neg(ii)}{\Rightarrow} \neg(iii) \tag{6}$$

Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1}$: $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle}$: $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2|do(X_1=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support : $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_1=\tilde{N}_{X_1})}$

Beweisplan: (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Trivial (TODO: wirklich?)

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(T=\tilde{N}_T)}$

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(T=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt $\Rightarrow T$ hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \qquad \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) \tag{3}$$
$$H = A + N_H \mod 2 \qquad \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) \tag{4}$$
$$B = H + N_B \mod 2 \qquad \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) \tag{5}$$

mit dem Graphen $A \rightarrow H \rightarrow B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre") SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \qquad \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) \tag{3}$$

$$H = A + N_H \mod 2 \qquad \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) \tag{4}$$

$$B = H + N_B \mod 2 \qquad \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) \tag{5}$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.
- Intervention von A hat auf H einen größeren Einfluss als Intervention von B.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.
Beweis von (ii) durch Gegenbeispiel: Sei

$$X = N_X \tag{6}$$

$$Z = 2X + N_Z \tag{7}$$

$$Y = 4X - 2Z + N_Y \tag{8}$$

Dann gilt: $Y = -2N_Z + N_Y$ und daher $X \perp\!\!\!\perp$ für alle N_X. $\square$

Quellen

- Causality, 2015. Jonas Peters.

Definitionen

Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig $:\Leftrightarrow p(x,y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y$.
Man schreibt dann: $X \perp\!\!\!\perp Y$ und andernfalls $X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Korrelation

Seien X und Y Zufallsvariablen und

$$C(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen X und Y. Gilt $C(X,Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert.