Interventions

Martin Thoma

10. August 2015

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?
Ist die Entscheidung abhängig von der Größe?

Simpson-Paradoxon

	Behandlungserfolg	
	A	**B**
Kleine Nierensteine	**93%** (81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	**73%** (192/263)	69% (55/ 80)
Gesamt	78% (273/350)	**83%** (289/350)

Tabelle: Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

Aufstellen eines SEM

$Z \in \{\,\text{klein}, \text{groß}\,\}$: Größe des Nierensteins

$T \in \{\,A, B\,\}$: Behandlung (Treatment)

$R \in \{\,\text{erfolg}, \text{misserfolg}\,\}$: Behandlungserfolg (Recovery)

Sei das „wahre“ SEM:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T \arrow[rr] & & R \end{tikzcd}$$

Nieren-Beispiel

	Behandlungserfolg	
	A	**B**
Kleine Nierensteine	**93%** (81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	**73%** (192/263)	69% (55/ 80)
Gesamt	78% (273/350)	**83%** (289/350)

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T \arrow[rr] & & R \end{tikzcd}$$

Nieren-Beispiel

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) = \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z)$$

Nieren-Beispiel

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1) &= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1, T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1 | T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T=A, Z=z)
\end{aligned}
$$

Nieren-Beispiel

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1) &= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1, T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z=z)
\end{aligned}
$$

Nieren-Beispiel

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1) &= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1, T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z=z) \\
&= 0.93 \cdot \frac{357}{700} + 0.73 \cdot \frac{343}{700} = 0.832
\end{aligned}
$$

Nieren-Beispiel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1) &= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1, T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T=A, Z=z) \\
&= \sum_{z=0}^{1} \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R=1|T=A, Z=z)\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z=z) \\
&= 0.93 \cdot \frac{357}{700} + 0.73 \cdot \frac{343}{700} = 0.832 \\
\mathbb{P}_{\mathcal{S}_B}(R=1) &= 0.87 \cdot \frac{357}{700} + 0.69 \cdot \frac{343}{700} = 0.782
\end{aligned}$$

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{N})$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{N})$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{N})$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.

Interventionen

Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.
Die Menge der Rauschvariablen in $\mathcal{S}$ beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“ N's. Diese müssen gemeinsam unabhängig sein.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1)$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1)$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} \tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) \tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=3)}^{Y} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=3)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=2)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S},do(X:=3)}^{Y} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Intervention auf X beeinflusst die Verteilung von Y.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$

(6)

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} \tag{4}$$

(6)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3)\\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} && (4)\\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=3.14159)} && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \rightarrow Y$. Aber:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3) \\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S}} && (4) \\ &= \mathbb{P}^X_{\mathcal{S},do(Y:=3.14159)} && (5) \\ &\neq \mathbb{P}^{X|Y=2}_{\mathcal{S}} && (6) \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \tag{1}$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(Y:=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$
$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$.
Beispiel: X (rauchen) $\to Y$ (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(Y:=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}^{X,Y}_{\mathcal{S},do(X:=\tilde{N}_X)}$ und $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Intuition?

Totaler kausaler Effekt

Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM $\mathcal{S}$. Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von X nach Y genau dann wenn

$$\exists \tilde{N}_X : X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(X := \tilde{N}_X)}$$

gilt.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

(ii) $\exists x^{\triangle} \exists x^{\square} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\square})}$

(iii) $\exists x^{\triangle} : \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S},do(X_1:=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}^{X_2}_{\mathcal{S}}$.

(iv) $\forall \tilde{N}_{X_1}$ mit vollem Support $: X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ in $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}$

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(T:=\tilde{N}_T)}$

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S},do(T:=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt $\Rightarrow T$ hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

Das zugrundeliegende („wahre") SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \qquad \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) \tag{3}$$
$$H = A + N_H \mod 2 \qquad \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) \tag{4}$$
$$B = H + N_B \mod 2 \qquad \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) \tag{5}$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$
\begin{aligned}
A &= N_A & \text{mit } N_A &\sim Ber(1/2) \qquad (3)\\
H &= A + N_H \mod 2 & \text{mit } N_H &\sim Ber(1/3) \qquad (4)\\
B &= H + N_B \mod 2 & \text{mit } N_B &\sim Ber(1/20) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.
- Intervention von A hat auf H einen größeren Einfluss als Intervention von B.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.

Proposition 2.2.9

(i) Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

(ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des interventierten SEMs. Nach dem Entfernen der in X eingehenden Kanten gilt: X und Y sind d-separiert, falls es keinen direkten Pfad von X nach Y gibt.
Beweis von (ii) durch Gegenbeispiel: Sei

$$X = N_X \tag{6}$$

$$Z = 2X + N_Z \tag{7}$$

$$Y = 4X - 2Z + N_Y \tag{8}$$

Dann gilt: $Y = -2N_Z + N_Y$ und daher $X \perp\!\!\!\perp$ für alle N_X. $\square$

Quellen

- Causality, 2015. Jonas Peters.

Definitionen

Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig $:\Leftrightarrow p(x,y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y$.
Man schreibt dann: $X \perp\!\!\!\perp Y$ und andernfalls $X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Korrelation

Seien X und Y Zufallsvariablen und

$$C(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen X und Y. Gilt $C(X,Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert.