Interventions

Martin Thoma

X. August 2015

Inhalt

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

Nierensteine

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A**: Offene Operation
  - **B**: PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?
Ist die Entscheidung abhängig von der Größe?

	Behandlungserfolg	
	A	**B**
Kleine Nierensteine	**93%** (81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	**73%** (192/263)	69% (55/ 80)
Gesamt	78% (273/350)	**83%** (289/350)

Tabelle: Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

Quelle: Causality, 2015. Jonas Peters.

Structural Equaltion Model (kurz: SEM)

Ein *Struckturgleichungsmodel* ist ein Tupel $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^{\mathbf{N}})$, wobei $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_p)$ ein Tupel aus p Gleichungen

$$S_j : X_j = f_j(\mathbf{PA}_j, N_j), \quad j = 1, \ldots, p$$

ist und $\mathbf{PA}_j \subseteq \{ X_1, \ldots, X_p \} \setminus \{ X_j \}$ die *Eltern von* X_j und $\mathbb{P}^{\mathbf{N}} = \mathbb{P}^{N_1, \ldots, N_p}$ die gemeinsame Verteilung der Rauschvariablen ist. Diese müssen von einander unabhängig sein, $\mathbb{P}^{\mathbf{N}}$ muss also eine Produktverteilung sein.

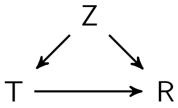
Aufstellen eines SEM

$Z \in \{ \text{klein}, \text{groß} \}$: Größe des Nierensteins

$T \in \{ A, B \}$: Behandlung (Treatment)

$R \in \{ \text{erfolg}, \text{misserfolg} \}$: Behandlungserfolg (Recovery)

Sei das wahre SEM:



Interventionsverteilung

Sei $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$ die zu einer SEM $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$ gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus $\mathcal{S}$ entfernt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM $\tilde{\mathcal{S}}$ heißt dann *Interventionsverteilung*.
Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.
Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X_j = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{PA}}_j, \tilde{N}_j))}$$

beschrieben.
Die Menge der Rauschvariablen in $\mathcal{S}$ beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“ N's. $\mathcal{S}$ muss paarweise unabhängig sein.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \to Y$.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} \tag{4}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2+1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y} = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=2)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \tag{3}$$
$$\neq \mathcal{N}(12,1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=3)} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Intervention auf X beeinflusst die Verteilung von Y.

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \quad (1)$$

$$Y = 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0,1) \quad (3)$$

(4)

(5)

(6)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} = \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3)\\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} && (4)\\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$X = N_X \tag{1}$$
$$Y = 4 \cdot X + N_Y \tag{2}$$

mit $N_X, N_Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ und den Graphen $X \to Y$. Aber:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=2)} &= \mathcal{N}(0,1) && (3)\\ &= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X} && (4)\\ &= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|do(Y=3.14159)} && (5)\\ &\neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|Y=2} && (6) \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow$ Y (weiße Zähne)

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow$ Y (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow$ Y (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Beispiel: X (rauchen) $\rightarrow$ Y (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache (X) und Effekt (Y).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(Y=\tilde{N}_Y)} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X,Y|do(X=\tilde{N}_X)}$ und $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Totaler kausaler Effekt

Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM $\mathcal{S}$. Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von X nach Y genau dann wenn

$$X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X=\tilde{N}_X)}$$

für eine Variable $\tilde{N}_X$ gilt.

Totaler kausaler Effekt

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gibt einen kausalen Effekt von X nach Y.

(ii) Es gibt $x^{\triangle}$ und $x^{\square}$ sodass $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=x^{\square})}$

(iii) Es gibt $x^{\triangle}$ sodass $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|do(X=x^{\triangle})} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y}$.

(iv) $X \not\perp\!\!\!\perp Y$ in $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(X=\tilde{N}_X)}$ für beliebige $\tilde{N}_X$ die vollen Support (TODO) haben.

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(T=\tilde{N}_T)}$

Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung T zufällig (nach $\tilde{N}_T$) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathbf{X}|do(T=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt $\Rightarrow$ T hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre") SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$
\begin{aligned}
A &= N_A & &\text{mit } N_A \sim Ber(1/2) \quad (7)\\
H &= A + N_H \mod 2 & &\text{mit } N_H \sim Ber(1/3) \quad (8)\\
B &= H + N_B \mod 2 & &\text{mit } N_B \sim Ber(1/20) \quad (9)
\end{aligned}
$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.

Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre") SEM $\mathcal{S}$, welches die Daten generierte, hat die Form:

$$\begin{aligned} A &= N_A && \text{mit } N_A \sim Ber(1/2) && (7)\\ H &= A + N_H \mod 2 && \text{mit } N_H \sim Ber(1/3) && (8)\\ B &= H + N_B \mod 2 && \text{mit } N_B \sim Ber(1/20) && (9) \end{aligned}$$

mit dem Graphen $A \to H \to B$ und N_A, N_H, N_B unabhängig.

- B ist hilfreicher für die Vorhersage von H als A.
- Intervention von A hat auf H einen größeren Einfluss als Intervention von B.

Proposition 2.2.9

- Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

Proposition 2.2.9

- Falls es keinen gerichteten Pfad von X nach Y gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Quellen

- Causality, 2015. Jonas Peters.

Definitionen

Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig $:\Leftrightarrow p(x,y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y.$
Man schreibt dann: $X \perp\!\!\!\perp Y$ und andernfalls $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Korrelation

Seien X und Y Zufallsvariablen und

$$C(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen X und Y. Gilt $C(X,Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert.