

# Interventions

Martin Thoma

10. August 2015

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A:** Offene Operation
  - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A:** Offene Operation
  - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

- Kristalline Ablagerungen
- 2–4 mm unkritisch, ab 10 mm operative Entfernung
- 2 Methoden des Entfernens:
  - **A:** Offene Operation
  - **B:** PCNL (Percutaneous nephrolithotomy): Entfernung durch ca 1cm große Punktuierung der Haut

Was ist besser: A oder B?

Ist die Entscheidung abhängig von der Größe?

# Simpson-Paradoxon

	Behandlungserfolg	
	A	B
Kleine Nierensteine	93%	87%
Große Nierensteine	73%	69%
<b>Gesamt</b>	<b>78%</b>	<b>83%</b>

**Tabelle:** Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

	Behandlungserfolg	
	A	B
Kleine Nierensteine	<b>93%</b> ( 81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	<b>73%</b> (192/263)	69% ( 55/ 80)
<b>Gesamt</b>	<b>78%</b> (273/350)	<b>83%</b> (289/350)

**Tabelle:** Nierensteine durch (A) offene Operation oder (B) PCNL entfernen.

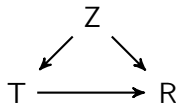
# Aufstellen eines SEM

$Z \in \{ \text{klein, groß} \}$ : Größe des Nierensteins

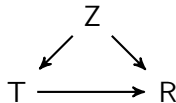
$T \in \{ A, B \}$ : Behandlung (Treatment)

$R \in \{ \text{erfolg, misserfolg} \}$ : Behandlungserfolg (Recovery)

Sei das „wahre“ SEM:



	Behandlungserfolg	
	A	B
Kleine Nierensteine	<b>93%</b> ( 81/ 87)	87% (234/270)
Große Nierensteine	<b>73%</b> (192/263)	69% ( 55/ 80)
<b>Gesamt</b>	78% (273/350)	<b>83%</b> (289/350)





$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) = \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z) \\ &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T = A, Z = z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z) \\ &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T = A, Z = z) \\ &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z = z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z) \\&= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T = A, Z = z) \\&= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z = z) \\&= 0.93 \cdot \frac{357}{700} + 0.73 \cdot \frac{343}{700} = 0.832\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1) &= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1, T = A, Z = z) \\&= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(T = A, Z = z) \\&= \sum_{z=0}^1 \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(R = 1 | T = A, Z = z) \mathbb{P}_{\mathcal{S}_A}(Z = z) \\&= 0.93 \cdot \frac{357}{700} + 0.73 \cdot \frac{343}{700} = 0.832 \\ \mathbb{P}_{\mathcal{S}_B}(R = 1) &= 0.87 \cdot \frac{357}{700} + 0.69 \cdot \frac{343}{700} = 0.782\end{aligned}$$

## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung.

## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus  $\mathcal{S}$  ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen.

## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus  $\mathcal{S}$  ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM  $\tilde{\mathcal{S}}$  heißt dann *Interventionsverteilung*.



## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus  $\mathcal{S}$  ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM  $\tilde{\mathcal{S}}$  heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus  $\mathcal{S}$  ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM  $\tilde{\mathcal{S}}$  heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}_j, \tilde{N}_j))}^{\mathbf{X}}$$

beschrieben.

## Interventionsverteilung

Sei  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}$  die zu einer SEM  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}, \mathbb{P}^N)$  gehörende Verteilung. Dann kann eine (oder mehr) Strukturgleichungen aus  $\mathcal{S}$  ersetzt werden ohne einen Zyklus im Graphen zu erzeugen. Die Verteilung des neuen SEM  $\tilde{\mathcal{S}}$  heißt dann *Interventionsverteilung*.

Bei den Variablen, deren Strukturgleichungen ersetzt wurden, sagt man, wurde *interveniert*.

Die neue Verteilung wird mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_j := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}_j, \tilde{N}_j))}^{\mathbf{X}}$$

beschrieben.

Die Menge der Rauschvariablen in  $\mathcal{S}$  beinhaltet nun einige „neue“ und einige „alte“  $N$ 's. Diese müssen gemeinsam unabhängig sein.

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ .

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$(4)$$



## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=3)}^Y \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=3)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \quad (4)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^Y = \mathcal{N}(0, 4^2 + 1) \neq \mathcal{N}(8, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=2)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=2} \quad (3)$$

$$\neq \mathcal{N}(12, 1) = \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=3)}^Y = \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{Y|X=3} \quad (4)$$

$\Rightarrow$  Intervention auf  $X$  beeinflusst die Verteilung von  $Y$ .

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=2)}^X = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

(6)

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=2)}^X = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$(6)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=2)}^X = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=3.14159)}^X \quad (5)$$

$$(6)$$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ . Aber:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=2)}^X = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^X \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=3.14159)}^X \quad (5)$$

$$\neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X|Y=2} \quad (6)$$



## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ .

Beispiel:  $X$  (rauchen)  $\rightarrow Y$  (weiße Zähne)

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ .

Beispiel:  $X$  (rauchen)  $\rightarrow Y$  (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache ( $X$ ) und Effekt ( $Y$ ).

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ .

Beispiel:  $X$  (rauchen)  $\rightarrow Y$  (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache ( $X$ ) und Effekt ( $Y$ ).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y := \tilde{N}_Y)}^{X, Y} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

## Beispiel 2.2.2: Ursache und Effekt

Es sei  $\mathcal{S}$  gegeben durch

$$X := N_X \quad (1)$$

$$Y := 4 \cdot X + N_Y \quad (2)$$

mit  $N_X, N_Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  und den Graphen  $X \rightarrow Y$ .

Beispiel:  $X$  (rauchen)  $\rightarrow Y$  (weiße Zähne)

- Es besteht eine Asymmetrie zwischen Ursache ( $X$ ) und Effekt ( $Y$ ).
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(Y:=\tilde{N}_Y)}^{X,Y} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=\tilde{N}_X)}^{X,Y}$  und  $Var(\tilde{N}_X) > 0 \Rightarrow X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Intuition?

## Totaler kausaler Effekt

Gegeben sei ein SEM  $\mathcal{S}$ . Dann gibt es einen (totalen) kausalen Effekt von  $X$  nach  $Y$  genau dann wenn

$$\exists \tilde{N}_X : X \not\perp\!\!\!\perp Y \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X:=\tilde{N}_X)}^{\mathbf{X}}$$

gilt.

# Totaler kausaler Effekt: Äquivalenzen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $\exists \tilde{N}_{X_1} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}^{\mathbf{X}}$
- (ii)  $\exists x^\Delta \exists x^\square : \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_1:=x^\Delta)}^{X_2} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_1:=x^\square)}^{X_2}$
- (iii)  $\exists x^\Delta : \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_1:=x^\Delta)}^{X_2} \neq \mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{X_2}$ .
- (iv)  $\forall \tilde{N}_{X_1} \text{ mit vollem Support} : X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 \text{ in } \mathbb{P}_{\mathcal{S}, do(X_1:=\tilde{N}_{X_1})}^{\mathbf{X}}$

## Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung  $T$  zufällig (nach  $\tilde{N}_T$ ) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.



## Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung  $T$  zufällig (nach  $\tilde{N}_T$ ) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(T:=\tilde{N}_T)}$

## Beispiel 2.2.6: Randomisierte Studie

- Weise eine Behandlung  $T$  zufällig (nach  $\tilde{N}_T$ ) einem Patienten zu. Das könnte auch ein Placebo sein.
- Im SEM: Daten aus  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}}_{\mathcal{S}, do(T:=\tilde{N}_T)}$
- Falls immer noch Abhängigkeit zw. Behandlung und Erfolg vorliegt  $\Rightarrow T$  hat einen totalen kausalen Effekt auf den Behandlungserfolg.

## Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM  $\mathcal{S}$ , welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \quad \text{mit } N_A \sim \text{Ber}(1/2) \quad (3)$$

$$H = A + N_H \mod 2 \quad \text{mit } N_H \sim \text{Ber}(1/3) \quad (4)$$

$$B = H + N_B \mod 2 \quad \text{mit } N_B \sim \text{Ber}(1/20) \quad (5)$$

mit dem Graphen  $A \rightarrow H \rightarrow B$  und  $N_A, N_H, N_B$  unabhängig.

- $B$  ist hilfreicher für die Vorhersage von  $H$  als  $A$ .

## Beispiel 2.2.7: Nicolai's running-and-health Beispiel

Das zugrundeliegende („wahre“) SEM  $\mathcal{S}$ , welches die Daten generierte, hat die Form:

$$A = N_A \quad \text{mit } N_A \sim \text{Ber}(1/2) \quad (3)$$

$$H = A + N_H \mod 2 \quad \text{mit } N_H \sim \text{Ber}(1/3) \quad (4)$$

$$B = H + N_B \mod 2 \quad \text{mit } N_B \sim \text{Ber}(1/20) \quad (5)$$

mit dem Graphen  $A \rightarrow H \rightarrow B$  und  $N_A, N_H, N_B$  unabhängig.

- $B$  ist hilfreicher für die Vorhersage von  $H$  als  $A$ .
- Intervention von  $A$  hat auf  $H$  einen größeren Einfluss als Intervention von  $B$ .

## Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.

## Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

## Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs.

## Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs. Nach dem Entfernen der in  $X$  eingehenden Kanten gilt:  $X$  und  $Y$  sind  $d$ -separiert, falls es keinen direkten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt.



## Proposition 2.2.9

- (i) Falls es keinen gerichteten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt, dann gibt es keinen kausalen Effekt.
- (ii) Manchmal gibt es einen gerichteten Pfad, aber keinen kausalen Effekt.

Beweis von (i): Folgt aus der Markov-Eigenschaft des intervenierten SEMs. Nach dem Entfernen der in  $X$  eingehenden Kanten gilt:  $X$  und  $Y$  sind  $d$ -separiert, falls es keinen direkten Pfad von  $X$  nach  $Y$  gibt.

Beweis von (ii) durch Gegenbeispiel: Sei

$$X = N_X \tag{6}$$

$$Z = 2X + N_Z \tag{7}$$

$$Y = 4X - 2Z + N_Y \tag{8}$$

Dann gilt:  $Y = -2N_Z + N_Y$  und daher  $X \perp\!\!\!\perp Y$  für alle  $N_X$ .  $\square$

- Causality, 2015. Jonas Peters.

## Unabhängigkeit

$X$  und  $Y$  sind unabhängig  $:\Leftrightarrow p(x, y) = p(x) \cdot p(y) \quad \forall x, y.$

Man schreibt dann:  $X \perp\!\!\!\perp Y$  und andernfalls  $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

## Korrelation

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen und

$$C(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

die Kovarianz zwischen  $X$  und  $Y$ . Gilt  $C(X, Y) = 0$ , so heißen  $X$  und  $Y$  unkorreliert.